



ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№3 (20) 2014**

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»**

*Главный редактор:*  
**А.В. Рогачев** (Беларусь)

*Заместитель главного редактора:*  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)

*Редакционная коллегия:*

**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

*Ответственный секретарь:*  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

*Адрес редакции:*

Гомельский государственный  
университет им. Ф.Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»**

*Editor-in-Chief:*  
**A.V. Rogachev** (Belarus)

*Deputy Editor-in-Chief:*  
**O.M. Demidenko** (Belarus)

*Editorial board:*

**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Webin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

*Executive Secretary:*  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

*Edition address:*

*F. Scorina Gomel State University*  
*Sovetskaya Str., 104,*  
*246019, Gomel, Republic of Belarus*  
*Ph. +375(232)60-30-02*  
*+375(232)60-74-82*  
*e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)*  
*website: <http://pfmt.gsu.by>*

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (20) 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА

Андреев В.В., Дерюжкова О.М., Максименко Н.В. Ковариантное представление спиновых поляризуемостей нуклона .....	7
Ахраменко Н.А., Булавко Л.М. Масса массивной сферической оболочки с учетом гравитационного дефекта .....	13
Барсуков С.Д., Балмаков А.П., Семченко И.В., Хахомов С.А., Державская Т.А., Слобжанюк А.П., Краснок А.Е., Белов П.А. Экспериментальные исследования направленной антенны на основе спиральных элементов .....	16
Гришечкин Ю.А., Данильченко М.С., Капшай В.Н. Метод комплексного поворота для двухчастичных уравнений в импульсном представлении и резонансные состояния .....	21
Косенок Я.А., Гайшун В.Е., Тюленкова О.И., Денисман В.Г. Водные композиции на основе наноразмерных частиц диоксида кремния для химико-механической полировки пластин монокристаллического кремния .....	26
Овсюк Е.М., Веко О.В., Казмерчук К.В. Скалярная частица с внутренней структурой в электромагнитном поле в искривленном пространстве-времени .....	32
Сидский В.В., Семченко А.В., Рыбаков А.Г., Колос В.В., Турцевич А.С. Влияние температуры отжига и типа примеси на размер наночастиц в пленках $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ .....	37
Шепелевич В.В., Макаревич А.В., Шандаров С.М. Оптимизация выходных характеристик смешанных голограмм в фоторефрактивном пьезокристалле ВТО среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ .....	42

### МАТЕМАТИКА

Баожун Ли, Амир Лиу. О $P$ -свойстве подгрупп конечных групп .....	47
Вегера А.С. О локальных свойствах формации всех групп с $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальными силовскими подгруппами .....	53
Грицук Д.В. Зависимость производной $p$ -длины $p$ -разрешимой группы от порядка ее силовой $p$ -подгруппы .....	58
Каморников С.Ф. Об одном примере гиперрадикальной формации .....	61
Кулагина М.В. Алгоритм определения неподвижных индексов в выпуклых задачах полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов .....	65
Миротин А.Р., Атвиновский А.А. Обращение линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора .....	77
Сазонова А.Т. О решениях упрощенных систем нелинейных дифференциальных уравнений в задаче движения четырех частиц в плоскости .....	80
Тютянов В.Н., Тихоненко Т.В. О конечных группах с заданной системой силовских подгрупп .....	85

### ИНФОРМАТИКА

Киргинцева С.В. Компьютерный анализ эффективности армирования грунтовых оснований РИТ-сваями .....	88
Осипенко А.Н., Осипенко Н.Б. Концепция проблемно-ориентированной технологии моделирования активных систем .....	92

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

**Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):**  
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**  
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 08.09.14. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 11,9. Уч.-изд. л. 10,3. Тираж 100 экз. Заказ № 479.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.  
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013  
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2014  
© Проблемы физики, математики и техники, 2014  
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2014



# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

*Published since December, 2009*

There are 4 times a year

№ 3 (20) 2014

## CONTENTS

### PHYSICS

<b>Andreev V.V., Deryuzhkova O.M., Maksimenko N.V.</b> The covariant representation spin polarization of the nucleon .....	7
<b>Akhramenko N.A., Bulauko L.M.</b> Mass of massive spherical shell with regard to gravitational defect .....	13
<b>Barsukov S.D., Balmakou A.P., Semchenko I.V., Khakhomov S.A., Dzerzhauskaya T.A., Slobozhanyuk A.P., Krasnok A.E., Belov P.A.</b> Experimental studies of the directional antenna based on helical elements .....	16
<b>Grishechkin Y.A., Danilchenko M.S., Kapshai V.N.</b> Complex scaling method for two-particle equations in the momentum representation and resonance states .....	21
<b>Kosenok Ya.A., Gaishun V.E., Tyulenкова O.I., Denisman V.G.</b> Aqueous compositions based on nanosized silica particles for chemical-mechanical polishing of silicon wafers .....	26
<b>Ovsyuk E.M., Veko O.V., Kazmerchuk K.V.</b> Scalar particle with intrinsic structure in the electromagnetic field in curved space-time .....	32
<b>Sidsky V.V., Semchenko A.V., Rybakov A.G., Kolos V.V., Turtsevyeh A.S.</b> Effect of the annealing temperature and type of impurities on the size of the nanoparticles $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ .....	37
<b>Shepelevich V.V., Makarevich A.V., Shandarov S.M.</b> Optimization of the output characteristics of mixed holograms in the $(\bar{1}\bar{1}0)$ -cut BTO photorefractive piezocrystal .....	42

### MATHEMATICS

<b>Baojun Li, Aming Liu.</b> On $P$ -property of subgroups of finite groups .....	47
<b>Vegera A.S.</b> On local properties of the formations of groups with $K$ - $\mathfrak{F}$ -subnormal Sylow subgroups .....	53
<b>Gritsuk D.V.</b> Dependence of the derived $p$ -length of a $p$ -solvable group on the order of its Sylow $p$ -subgroup .....	58
<b>Kamornikov S.F.</b> One example of hyperradical formation .....	61
<b>Kulahina M.V.</b> The algorithm for determination of immobile indexes in convex sip problems with polyhedral index sets .....	65
<b>Mirotin A.R., Atvinovskii A.A.</b> Inversion of a linear combination of values of the resolvent of a closed operator .....	77
<b>Sazonova A.T.</b> On the solutions of the simplified system of nonlinear differential equations in the motion of four particles in a plane .....	80
<b>Tyutyaynov V.N., Tihonenko T.V.</b> On finite groups with given system of Sylow subgroups .....	85

### INFORMATION SCIENCE

<b>Kirhintsava S.V.</b> Computer analysis of efficiency of reinforcing of the soil bases of RIT-piles .....	88
<b>Osipenko A.N., Osipenko N.B.</b> Concept of problem-oriented technology of modelling of active systems .....	92

***Founder – Francisk Scorina Gomel State University***

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

***The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):***

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 539.12

## КОВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПИНОВЫХ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ НУКЛОНА

**В.В. Андреев, О.М. Дерюжкова, Н.В. Максименко**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

## THE COVARIANT REPRESENTATION SPIN POLARIZABILITY OF THE NUCLEON

**V.V. Andreev, O.M. Deryuzhkova, N.V. Maksimenko**

*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

На основе ковариантного построения наведенных дипольных моментов и феноменологических эффективных лагранжианов взаимодействия электромагнитного поля с этими моментами предложен вариант релятивистски-инвариантного определения спиновых поляризуемостей.

**Ключевые слова:** поляризуемость, лагранжиан, комптоновское рассеяние.

The option of relativistic-invariant definition of spin polarizability on the basis of covariant creation of the induced dipolar moments and phenomenological effective Lagrangian interactions of an electromagnetic field with these moments is offered.

**Keywords:** polarizability, Lagrangian, Compton scattering.

### **Введение**

В последнее время большое внимание уделяется экспериментальному и теоретическому исследованию двухфотонных процессов на адронах. Это обусловлено прежде всего тем, что низкоэнергетические амплитуды и определяемые ими сечения двухфотонных процессов зависят от значительно большего числа структурных характеристик адронов по сравнению с однофотонными процессами. Благодаря повышению точности измерения электромагнитных характеристик адронов открываются новые возможности для более глубокого анализа существующих теоретико-полевых и модельных представлений о взаимодействии адронов с электромагнитным полем. При исследовании электромагнитных характеристик адронов особое внимание отводится поляризуемостям адронов, поскольку эти характеристики чувствительны не только к особенностям самой структуры адронов, но и к механизмам поглощения и излучения электромагнитного поля. В настоящее время известен достаточно широкий класс электродинамических процессов, на основе которых можно получить экспериментальные данные о поляризуемостях адронов. В связи с этим возникает задача о последовательном ковариантном определении вклада поляризуемостей в амплитуды и сечения электродинамических процессов на адронах [1], [2]. Решение подобных задач возможно выполнить в рамках теоретико-полевого ковариантного подхода описания взаимодействия электромагнитного поля с адронами с учетом их поляризуемостей. В работах [3]–[8] активно развивались ковариантные методы описания взаимодействия

электромагнитного поля с адронами, в которых электромагнитные характеристики этих частиц являются основополагающими. В последнее время широко используются эффективные полевые лагранжианы для исследования взаимодействия низкоэнергетического электромагнитного поля с нуклонами на основе разложения по степеням обратным массе нуклона [9]. В работе [8], на основе принципа соответствия между классической и квантовой теориями в рамках полевого подхода, представлен эффективный ковариантный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицами спина половина с учетом их поляризуемостей, который недавно был использован для фитирования экспериментальных данных по комптоновскому рассеянию на протоне в энергетической окрестности рождения  $\Delta(1232)$  резонанса [10]. Физическая интерпретация электрической и магнитной дипольных поляризуемостей в настоящее время представлена достаточно полно (например, [11]). В работах [12], [13] были получены спиновые поляризуемости на основе общих принципов релятивистской квантовой теории, которым удовлетворяет амплитуда низкоэнергетического комптоновского рассеяния. Интерпретация этих поляризуемостей дана в рамках нерелятивистского мультипольного разложения взаимодействия электромагнитного поля с нуклонами в работах [12]–[14].

В данной работе предложен вариант релятивистски-инвариантного определения спиновых поляризуемостей, в основе которого лежит ковариантное построение наведенных дипольных моментов и феноменологические эффективные

лагранжианы взаимодействия электромагнитного поля с этими моментами [3], [4]. Для введения спиновых поляризуемостей воспользуемся лагранжианом релятивистской электродинамики [7], [8]:

$$L = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (0.1)$$

В этом выражении  $G^{\mu\nu}$  – антисимметричный тензор наведенных дипольных моментов структурной частицы, который определяется следующим образом:

$$G^{\mu\nu} = (d^\mu u^\nu - u^\mu d^\nu) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} m_\rho u_\sigma, \quad (0.2)$$

где  $d^\mu$  и  $m^\mu$  – компоненты электрического и магнитного моментов, представленные в ковариантной форме;  $u^\mu$  – компоненты 4-х-скорости частицы. Учитывая (0.2) в (0.1), выражение для лагранжиана принимает вид [15]:

$$L = -\frac{1}{2} (e_\mu d^\mu + h_\mu m^\mu), \quad (0.3)$$

где  $e_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu$ ,  $h_\mu = \tilde{F}_{\mu\nu} u^\nu$ ,  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ .

### 1 Определение лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей с учетом спиновой поляризуемости

Перейдем теперь к операторному представлению тензора  $G^{\mu\nu}$  (0.2). Запишем в ковариантной форме с учетом закона сохранения четности компоненты векторов электрического и магнитного моментов через тензоры поляризуемостей:

$$d^\mu = 4\pi\alpha^{\mu\nu} e_\nu + 4\pi\kappa^{\mu\nu} (u\hat{\partial}) e_\nu, \quad (1.1)$$

$$m^\mu = 4\pi\beta^{\mu\nu} h_\nu + 4\pi\tilde{\kappa}^{\mu\nu} (u\hat{\partial}) h_\nu, \quad (1.2)$$

где  $(u\hat{\partial}) = u_\mu \hat{\partial}^\mu$ ,  $\alpha^{\mu\nu}$ ,  $\beta^{\mu\nu}$ ,  $\kappa^{\mu\nu}$ ,  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  – тензоры поляризуемостей. Чтобы учесть спиновые свойства частицы, воспользуемся определением тензоров поляризуемостей через операторы 4-х-мерного импульса  $\hat{p}^\mu$  и вектора Паули – Любанского  $W^\mu$ . В случае частицы спина  $\frac{1}{2}$ , как следует из перестановочных соотношений операторов  $\hat{p}^\mu$  и  $\hat{W}^\mu$ , а также представление  $\hat{W}^\mu$  через  $\gamma$ -матрицы

$$\hat{W}^\mu = \frac{(-1)}{2m} \gamma^5 \left( (\gamma p) - \hat{p}^\mu \right),$$

тензоры поляризуемостей можно представить следующим образом [4]:

$$\alpha^{\mu\nu} = \alpha_1 g^{\mu\nu} + \frac{\alpha_2}{m} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{W}_\rho \hat{p}_\sigma. \quad (1.3)$$

Аналогичным образом будем представлять тензоры  $\beta^{\mu\nu}$ ,  $\kappa^{\mu\nu}$  и  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$ . Из выражения (1.3) следует, что тензоры поляризуемостей состоят из симметричной и антисимметричной частей. Более того, антисимметричные части поляризуемостей обусловлены вкладом спина частицы.

### 2 Амплитуда рассеяния электромагнитного поля частицей спина $\frac{1}{2}$ в дипольном приближении в области низких энергий

Согласно [16] амплитуда рассеяния в области низких энергий в дипольном приближении, когда

$$\vec{d} = 4\pi \hat{\alpha} \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\vec{m} = 4\pi \hat{\beta} \vec{H}(\vec{r}, t), \quad (2.2)$$

где  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  – тензоры электрической и магнитной поляризуемостей, представляется в виде:

$$\begin{aligned} M\left(\begin{matrix} \rightarrow \\ n_2 \end{matrix}\right) = & 4\pi\omega^2 \left\{ \begin{matrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & \alpha e \end{matrix} \right\} + \\ & + \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_1) \\ n_2 e & \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_2)^* \\ n_1 \beta e & \end{matrix} + \\ & + \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_2)^* \\ n_1 e & \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow(\lambda_1) & \rightarrow \\ e & \beta n_2 \end{matrix} - \\ & - \begin{matrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ n_1 \beta n_2 \end{matrix} - \\ & - \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ n_1 n_2 \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow(\lambda_1) & \rightarrow(\lambda_2)^* \\ e & \beta e \end{matrix} + \\ & + \left[ \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ n_2 n_1 \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{matrix} \right] - \\ & - \left[ \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_1) \\ n_2 e & \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_2)^* \\ n_1 e & \end{matrix} \right] \left. \right\} Sp\left(\hat{\beta}\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В выражении (2.3) введены следующие обозначения:  $e_{\rightarrow(\lambda_1)}$  и  $e_{\rightarrow(\lambda_2)}$  – векторы поляризации,  $n_1$  и  $n_2$  – единичные векторы падающего и рассеянного излучения,  $\omega$  – частота излучения. Из определения  $\vec{d}$  и  $\vec{m}$  согласно (2.1) и (2.2) следует, что  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  должны удовлетворять условию эрмитовости. В этом случае, как показано в работе [17], тензоры  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  можно представить следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + i\alpha_2 \varepsilon_{ijk} C_k,$$

$$\beta_{ij} = \beta_1 \delta_{ij} + i\beta_2 \varepsilon_{ijk} C_k,$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – вещественные величины,  $\varepsilon_{ijk}$  – тензор Леви – Чивита,  $C_k$  – компоненты псевдовектора. В случае частицы спина  $\frac{1}{2}$  в качестве такого псевдовектора можно выбрать псевдовектор спина частицы  $\vec{S}$ . Если считать, что тензоры  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  зависят от  $\vec{S}$ , то используя

алгебру оператора спина половина:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{S}_i, \hat{S}_j \right] &= i\varepsilon_{ijk} \hat{S}_k, \\ \hat{S}_i \hat{S}_j &= \frac{1}{4} \delta_{ij} + \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k, \end{aligned}$$

эти тензоры можно представить следующим образом

$$\alpha_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + i\alpha_2 \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k, \quad (2.4)$$

$$\beta_{ij} = \beta_1 \delta_{ij} + i\beta_2 \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в уравнение (2.3), получим:

$$\begin{aligned} M \left( \begin{array}{c} \rightarrow \\ n_2 \end{array} \right) &= 4\pi\omega^2 \chi_f^+ \left\{ \alpha_1 \left( \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow(\lambda_1) \\ e \quad e \end{array} \right) + \right. \\ &+ \beta_1 \left( \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow \\ e \quad n_2 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_1) \rightarrow \\ e \quad n_1 \end{array} \right] \right) + \\ &+ i\alpha_2 \left( \hat{S} \cdot \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow(\lambda_1) \\ e \quad e \end{array} \right] \right) + \\ &+ i\beta_2 \left( \hat{S} \cdot \left[ \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow \\ e \quad n_2 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_1) \rightarrow \\ e \quad n_1 \end{array} \right] \right] \right) \left. \right\} \chi_i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\chi_i$  и  $\chi_f$  – спиноры начальной и конечной частицы. Если в амплитуде (2.6) потребовать условие перекрестной симметрии, то получим

$$\begin{aligned} M \left( \begin{array}{c} \rightarrow \\ n_2 \end{array} \right) &= 4\pi\omega^2 \left\{ \alpha_1 \left( \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow(\lambda_1) \\ e \quad e \end{array} \right) + \right. \\ &+ \beta_1 \left( \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow \\ e \quad n_2 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_1) \rightarrow \\ e \quad n_1 \end{array} \right] \right) \left. \right\}, \end{aligned}$$

что согласуется со спиновой структурой низкоэнергетической амплитуды комптоновского рассеяния с учетом электрической и магнитной поляризуемостей [18]. В случае комптоновского рассеяния вперед амплитуда имеет общую спиновую структуру вида [19]

$$\begin{aligned} M &= g(\omega) \left( \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow(\lambda_1) \\ e \quad e \end{array} \right) + \\ &+ ih(\omega) \left( \hat{S} \cdot \left[ \begin{array}{c} \rightarrow(\lambda_2)^* \rightarrow(\lambda_1) \\ e \quad e \end{array} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В этом определении амплитуды скалярная функция  $g(\omega)$  является четной, а  $h(\omega)$  – нечетной относительно перекрестной симметрии. Следовательно, поскольку поляризуемости вносят вклад в амплитуду (2.7), начиная со второго порядка по  $\omega$  и выше, то спиновая структура второго слагаемого в (2.7) определяется вкладами поляризуемостей начиная с третьего порядка по  $\omega$ .

Определим теперь лагранжиан и амплитуду комптоновского рассеяния в ковариантном дипольном представлении.

### 3 Амплитуда низкоэнергетического комптоновского рассеяния в ковариантном дипольном представлении

Лагранжиан (0.3) в рамках теоретико-полевого ковариантного подхода имеет вид [7]:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{i\pi}{4m} \left[ \bar{\Psi} \gamma^\nu \hat{L}_{\nu\sigma} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\sigma \Psi + \right. \\ &+ \bar{\Psi} \hat{L}_{\nu\sigma} \gamma^\nu \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\sigma \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\nu \hat{L}_{\nu\sigma} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu \Psi + \\ &\left. + \bar{\Psi} \hat{L}_{\nu\sigma} \gamma^\sigma \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu \Psi \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\gamma^\nu$  – матрицы Дирака,  $\Psi(x)$  – биспинор поля Дирака,  $\overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu = \overset{\rightarrow}{\partial}^\nu - \overset{\leftarrow}{\partial}^\nu$ . В лагранжиане (3.1) тензор  $\hat{L}_{\nu\sigma}$  выражается через тензоры поляризуемостей, которые введены в (1.1) и (1.2):

$$\hat{L}_{\nu\sigma} = \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\alpha)} + \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\kappa)} + \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\delta)} + \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\beta)} + \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\bar{\kappa})} + \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\bar{\delta})} \quad (3.2)$$

С целью установления влияния перекрестной симметрии на вклад спиновых поляризуемостей в амплитуду комптоновского рассеяния в дипольном представлении определим в (3.2) тензоры  $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\alpha, \beta)}$  и  $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\kappa, \bar{\kappa})}$  следующим образом:

$$\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\alpha, \beta)} = L_{\nu\sigma}^{(\alpha_1, \beta_1)} + L_{\nu\sigma}^{(\alpha_2, \beta_2)}$$

и

$$\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\kappa, \bar{\kappa})} = L_{\nu\sigma}^{(\kappa_1, \bar{\kappa}_1)} + L_{\nu\sigma}^{(\kappa_2, \bar{\kappa}_2)}$$

В свою очередь приведенные тензоры определяются так:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\alpha_1)} &= F_{\nu\mu} \hat{\alpha}^{(\alpha_1)\mu\rho} F_{\rho\sigma}, \\ \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\kappa_1)} &= \left( F_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta F_{\rho\sigma} \right) \hat{\kappa}^{(\kappa_1)\mu\rho\delta}, \\ \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\alpha_2)} &= F_{\nu\mu} \hat{\alpha}^{(\alpha_2)\mu\rho} F_{\rho\sigma}, \\ \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\kappa_2)} &= \left( F_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta F_{\rho\sigma} \right) \hat{\kappa}^{(\kappa_2)\mu\rho\delta}, \end{aligned}$$

в которых введены обозначения

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(\alpha_1)\mu\rho}(\alpha_1) &= \alpha_1 g^{\mu\rho}, \\ \hat{\alpha}^{(\alpha_2)\mu\rho}(\alpha_2) &= \frac{\alpha_2}{m} \varepsilon^{\mu\rho\kappa\varepsilon} \hat{W}_\kappa \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\varepsilon, \\ \hat{\kappa}^{(\kappa_1)\mu\rho\delta}(\kappa_1) &= \kappa_1 g^{\mu\rho} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\delta, \\ \hat{\kappa}^{(\kappa_2)\mu\rho\delta}(\kappa_2) &= \frac{\kappa_2}{m} \varepsilon^{\mu\rho\kappa\varepsilon} \hat{W}_\kappa \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\varepsilon \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\delta. \end{aligned}$$

Если в приведенных тензорах сделать замену  $F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu}$ , то получим выражения для  $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\beta)}$  и

$\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\bar{k})}$ . Поскольку каждое слагаемое в (3.2) вносит определенные свойства перекрестной симметрии в амплитуду комптоновского рассеяния, то определим их вклады отдельно.

*Определение эффективного лагранжиана и амплитуды комптоновского рассеяния на основе*  
 $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\alpha_1)} + \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\beta_1)}$ .

Согласно (3.1) лагранжиан  $L^{(\alpha_1)} + L^{(\beta_1)}$  сводится к выражению

$$L^{(\alpha_1)} + L^{(\beta_1)} = \frac{2\pi}{m} (\alpha_1 F_{\nu\mu} F_{\sigma}^{\mu} + \beta_1 \tilde{F}_{\nu\mu} \tilde{F}_{\sigma}^{\mu}) \theta^{\nu\sigma}, \quad (3.3)$$

где  $\theta^{\nu\sigma} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^{\nu} \overleftrightarrow{\partial}^{\sigma} \Psi$ .

Амплитуда комптоновского рассеяния с учетом лагранжиана (3.3) имеет вид [20]

$$M^{(\alpha_1)} + M^{(\beta_1)} = \left( \frac{2\pi}{m} \right) \left[ \alpha_1 \left( F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\sigma}^{(1)\mu} + F_{\nu\mu}^{(1)} F_{\sigma}^{(2)\mu} \right) + \beta_1 \left( \tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\sigma}^{(1)\mu} + \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \tilde{F}_{\sigma}^{(2)\mu} \right) \right] \times \times \bar{U}^{(\nu_2)} \left( \vec{p}_2 \right) \gamma^{\nu} P^{\sigma} U^{(\nu_1)} \left( \vec{p}_1 \right). \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4) введены обозначения

$$\tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\gamma\omega} F^{(2)\gamma\omega}, \quad F^{(2)\gamma\omega} = \left( k_2^{\gamma} e^{(\lambda_2)\omega} - k_2^{\omega} e^{(\lambda_2)\gamma} \right), \\ F^{(1)\gamma\omega} = \left( k_1^{\gamma} e^{(\lambda_1)\omega} - k_1^{\omega} e^{(\lambda_1)\gamma} \right),$$

а также  $e_{\mu}^{(\lambda_1)}$  и  $e_{\mu}^{(\lambda_2)}$  – векторы поляризации начального и конечного фотонов,  $P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ ,

$k_1, p_1$  и  $k_2, p_2$  – импульсы начальных и конечных фотонов и нуклонов,  $U^{(\nu_1)} \left( \vec{p}_1 \right)$  и  $\bar{U}^{(\nu_2)} \left( \vec{p}_2 \right)$

– биспиноры начальных и конечных нуклонов. Из соотношения (3.4) следует, что часть амплитуды комптоновского рассеяния, обусловленная электрической и магнитной поляризуемостями, удовлетворяет условию перекрестной симметрии и вносит вклад, начиная со второго порядка по частоте излучения. В системе покоя мишени и во втором порядке по частоте излучения из (3.4) следует соотношение:

$$M^{(\alpha_1)} + M^{(\beta_1)} = 4\pi\omega_1\omega_2\chi_f^+ \left[ \alpha_1 \left( e^{\rightarrow(\lambda_2)} e^{\rightarrow(\lambda_1)} \right) + \beta_1 \left( \left[ e^{\rightarrow(\lambda_2)} n_2 \right] \cdot \left[ e^{\rightarrow(\lambda_1)} n_1 \right] \right) \right] \chi_i,$$

которое согласуется с (2.6).

*Определение эффективного лагранжиана и амплитуды комптоновского рассеяния на основе*  
 $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\alpha_2)} + \hat{L}_{\nu\sigma}^{(\beta_2)}$ .

В этом случае лагранжиан (3.1) принимает вид:

$$L^{(\alpha_2)} + L^{(\beta_2)} = \left( \frac{i\pi}{4m^2} \right) (\varepsilon^{\mu\rho\kappa\varepsilon}) \times \times \left( \alpha_2 F_{\nu\mu} F_{\rho\sigma} + \beta_2 \tilde{F}_{\nu\mu} \tilde{F}_{\rho\sigma} \right) \times \times \bar{\Psi} \left[ \left( \gamma^{\nu} \hat{W}_{\kappa} + \hat{W}_{\kappa} \gamma^{\nu} \right) \overleftrightarrow{\partial}_{\varepsilon}^{\kappa} \overleftrightarrow{\partial}^{\sigma} + \left( \hat{W}_{\kappa} \gamma^{\sigma} + \gamma^{\sigma} \hat{W}_{\kappa} \right) \overleftrightarrow{\partial}_{\varepsilon}^{\kappa} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} \right] \Psi. \quad (3.5)$$

Из выражения (3.5) видно, что лагранжиан  $L^{(\alpha_2)} + L^{(\beta_2)}$  непосредственно связан со спином частицы. Амплитуда комптоновского рассеяния с учетом (3.5) определяется следующим образом:

$$M^{(\alpha_2)} + M^{(\beta_2)} = \left( \frac{2\pi i}{m^3} \right) (\varepsilon^{\mu\rho\kappa\varepsilon}) \left[ \alpha_2 \left( F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} + F_{\nu\mu}^{(1)} F_{\rho\sigma}^{(2)} \right) + \beta_2 \left( \tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} + \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(2)} \right) \right] \times \times \bar{U}^{(\nu_2)} \left( \vec{p}_2 \right) \gamma^5 \left[ \left( \delta_{\kappa}^{\nu} \gamma_{\tau} - \delta_{\tau}^{\nu} \gamma_{\kappa} \right) P^{\sigma} + \left( \delta_{\kappa}^{\sigma} \gamma_{\tau} - \delta_{\tau}^{\sigma} \gamma_{\kappa} \right) P^{\nu} \right] P_{\varepsilon} P^{\tau} U^{(\nu_1)} \left( \vec{p}_1 \right). \quad (3.6)$$

Из выражения (3.6) следует, что, поскольку тензор

$$(\varepsilon^{\mu\rho\kappa\varepsilon}) \left[ \alpha_2 \left( F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} + F_{\nu\mu}^{(1)} F_{\rho\sigma}^{(2)} \right) + \beta_2 \left( \tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} + \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(2)} \right) \right] \quad (3.7)$$

является симметричным относительно перекрестной симметрии и одновременно антисимметричным относительно перестановки индексов  $\nu$  и  $\sigma$ , а тензор между биспинорами  $\bar{U}^{(\nu_2)} \left( \vec{p}_2 \right)$  и

$U^{(\nu_1)} \left( \vec{p}_1 \right)$  является симметричным относительно

перестановки индексов  $\nu$  и  $\sigma$ , то часть амплитуды  $M^{(\alpha_2)} + M^{(\beta_2)}$  не может вносить вклад в полную амплитуду комптоновского рассеяния. Однако, если в тензоре (3.7) учесть только слагаемые  $(\varepsilon^{\mu\rho\kappa\varepsilon}) \left[ \alpha_2 F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} + \beta_2 \tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} \right]$ , то в системе покоя мишени во втором порядке по частоте излучения из (3.6) получим:

$$M^{(\alpha_2)} + M^{(\beta_2)} = 4\pi i \omega_1 \omega_2 \left\{ \alpha_2 \left( \vec{S} \left[ e^{\rightarrow(\lambda_2)} e^{\rightarrow(\lambda_1)} \right] \right) + \beta_2 \left( \vec{S} \left[ \left[ e^{\rightarrow(\lambda_2)} n_2 \right] \cdot \left[ e^{\rightarrow(\lambda_1)} n_1 \right] \right) \right\}.$$

Такое представление амплитуды согласуется с низкоэнергетическим определением амплитуды комптоновского рассеяния (2.6), если не учитывать свойства перекрестной симметрии.

Определение эффективного лагранжиана и амплитуды комптоновского рассеяния на основе вклада  $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\kappa_1)}$  и  $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\tilde{\kappa}_1)}$ .

Лагранжиан, соответствующий вкладу  $\kappa_1$  и  $\tilde{\kappa}_1$  согласно (3.1) и (3.2), принимает вид:

$$L^{(\kappa_1)} + L^{(\tilde{\kappa}_1)} = \frac{i\pi}{2m} \left( \kappa_1 F_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta F_\sigma^\mu + \tilde{\kappa}_1 \tilde{F}_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta \tilde{F}_\sigma^\mu \right) \times \times \bar{\Psi} \left( \gamma^\nu \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\sigma + \gamma^\sigma \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\delta \Psi. \quad (3.8)$$

Амплитуда, вычисленная с использованием лагранжиана (3.8), представляется следующим образом:

$$M^{(\kappa_1)} + M^{(\tilde{\kappa}_1)} = \frac{(-i)\pi}{m} (k_1 + k_2)_\delta \left[ \kappa_1 \left( F_{\nu\mu}^{(2)} F_\sigma^{(1)\mu} - F_\sigma^{(2)\mu} F_{\nu\mu}^{(1)} \right) + \tilde{\kappa}_1 \left( \tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_\sigma^{(1)\mu} - \tilde{F}_\sigma^{(2)\mu} \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \right) \right] \times \times \bar{U}^{(\kappa_2)} \left( \vec{p}_2 \right) \left[ \gamma^\nu P^\sigma + \gamma^\sigma P^\nu \right] P^\delta U^{(\kappa_1)} \left( \vec{p}_1 \right).$$

Из выражения (3.9) следует, что амплитуда  $M^{(\kappa_1)} + M^{(\tilde{\kappa}_1)}$  удовлетворяет условию перекрестной симметрии, однако тензор в первых квадратных скобках антисимметричный, а тензор между биспинорами является симметричным относительно замены индексов  $\nu$  и  $\sigma$ . Поэтому вклад  $M^{(\kappa_1)} + M^{(\tilde{\kappa}_1)}$  будет равен нулю.

Определение эффективного лагранжиана и амплитуды комптоновского рассеяния на основе вклада  $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\kappa_2)}$  и  $\hat{L}_{\nu\sigma}^{(\tilde{\kappa}_2)}$ .

Лагранжиан, соответствующий вкладам  $\kappa_2$  и  $\tilde{\kappa}_2$ , в данном подходе имеет вид:

$$L^{(\kappa_2)} + L^{(\tilde{\kappa}_2)} = \frac{i\pi}{4m^2} (\varepsilon^{\mu\rho\kappa\epsilon}) \left[ \kappa_2 F_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta F_{\rho\sigma} + \tilde{\kappa}_2 \tilde{F}_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta \tilde{F}_{\rho\sigma} \right] \times \times \bar{\Psi} \left[ \left( \gamma^\nu \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \gamma^\nu \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\sigma + \left( \gamma^\sigma \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \gamma^\sigma \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu \right] \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\epsilon \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta \Psi.$$

Часть амплитуды комптоновского рассеяния, вычисленная на основе этого лагранжиана, определяется следующим образом:

$$M^{(\kappa_2)} + M^{(\tilde{\kappa}_2)} = \frac{4\pi i}{m^3} (\varepsilon^{\mu\rho\kappa\epsilon}) (k_1 + k_2)_\delta \times$$

$$\times \left[ \kappa_2 \left( F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} - F_{\rho\sigma}^{(2)} F_{\nu\mu}^{(1)} \right) + \tilde{\kappa}_2 \left( \tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} - \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(2)} \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \right) \right] \bar{U}^{(\kappa_2)} \left( \vec{p}_2 \right) \gamma^5 \times \times \left[ \left( \delta_\tau^\nu \gamma_\kappa - \delta_\kappa^\nu \gamma_\tau \right) P^\sigma + \left( \delta_\tau^\sigma \gamma_\kappa - \delta_\kappa^\sigma \gamma_\tau \right) P^\nu \right] P^\epsilon P^\delta U^{(\kappa_1)} \left( \vec{p}_1 \right). \quad (3.10)$$

Из выражения (3.10) следует, что амплитуда  $M^{(\kappa_2)} + M^{(\tilde{\kappa}_2)}$  инвариантна относительно перекрестной симметрии. Вклад этой амплитуды начинается с третьего порядка по частоте излучения. Если в (3.10) в системе покоя мишени ограничиться третьим порядком в разложении по частоте излучения, то получим

$$M^{(\kappa_2)} + M^{(\tilde{\kappa}_2)} = 4\pi i m (\omega_1 + \omega_2) (\omega_1 \omega_2) \left\{ \kappa_2 \left( \vec{S} \left[ \begin{array}{cc} \rightarrow(\lambda_2) & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{array} \right] \right) + \tilde{\kappa}_2 \left( \vec{S} \left[ \left[ \begin{array}{cc} \rightarrow & \rightarrow \\ e & n_2 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} \rightarrow(\lambda_1) & \rightarrow \\ e & n_1 \end{array} \right] \right] \right) \right\}.$$

### Заключение

В данной работе предложен вариант релятивистски-инвариантного определения спиновых поляризуемостей, в основе которого лежит ковариантное построение наведенных дипольных моментов и феноменологические эффективные лагранжианы взаимодействия электромагнитного поля с этими моментами. Показано, что в предложенной модели с учетом перекрестной симметрии, законов сохранения четности и калибровочной инвариантности спиновые поляризуемости вносят вклад в разложение амплитуды комптоновского рассеяния, начиная с третьего порядка по частоте излучения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Carlson, C.E. Constraining off-shell effects using low-energy Compton scattering / C.E. Carlson, M. Vanderhaeghen [Electronic resource]. – 2011. – Mode of access : <http://physics.atom-ph/1109.3779>. – Date of access: 04.10.2011.
2. Krupina, N. Separation of proton polarizabilities with the beam asymmetry of Compton scattering / N. Krupina, V. Pascalutsa // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110, № 26. – P. 262001–1–4.
3. Максименко, Н.В. Феноменологическое описание поляризуемостей элементарных частиц в полевой теории / Н.В.Максименко, Л.Г. Мороз // Труды XI Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике. Д2-11707, ОИЯИ, Дубна. – 1979. – С. 533–543.
4. Максименко, Н.В. Ковариантное определение поляризуемости адронов спина единица / Н.В. Максименко // Доклады Академии наук Беларуси. – 1992. – Т. 36, № 6. – С. 508–510.



5. Левчук, М.И. Гирация нуклона как одна из характеристик его электромагнитной структуры / М.И. Левчук, Л.Г. Мороз // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – № 1. – С. 45–54.
6. Об описании поляризуемости скалярных частиц в теории релятивистских волновых уравнений / А.А. Богущ [и др.] // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. – 1981. – С. 81–90.
7. Андреев, В.В. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевого подходе / В.В. Андреев, Н.В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 7–11.
8. Максименко, Н.В. Ковариантный калибровочно-инвариантный формализм Лагранжа с учетом поляризуемостей частиц / Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова // Весці НАН Беларусі, серыя фіз.-мат. навук. – М. : «Беларуская навука», 2011. – № 2. – С. 27–30.
9. *The NRQED lagrangian at order  $\frac{1}{M^4}$*  / R.J. Hill [et al.] // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 87, № 5. – P. 053017–1–13.
10. Zhang, Y. Proton Compton scattering in a unified proton- $\Delta^+$  Model / Y. Zhang, K. Savvidy // Phys. Rev. C. – 2013. – Vol. 88. – P. 064614–1–12.
11. Holstein, B.R. Hadron polarizabilities / B.R. Holstein, S. Scherer [Electronic resource]. – 2013. – Mode of access : <http://hep-ph/1401.0140v1>. – Date of access : 31.12.2013.
12. Raguza, S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: I / S. Raguza // Phys. Rev. D. – 1993. – Vol. 47, № 9. – P. 3757–3767.
13. Raguza, S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: II / S. Raguza // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 49, № 7. – P. 3157–3159.
14. *Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons* / D. Babusci [et al.] // Phys. Rev. C. – 1998. – Vol. 58. – P. 1013–1041.
15. Anandan, J.S. Classical and quantum interaction of the dipole / J.S. Anandan // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 1354–1357.
16. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
17. Гальнский, М.В. О преобразовании тензора пучка при взаимодействии света со средой / М.В. Гальнский, Ф.И. Федоров // ЖПС. – 1986. – Т. 44, № 2. – С. 288–292.
18. Петрунькин, В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12, вып. 3. – С. 692–753.
19. Damashek, M. Forward Compton scattering / M. Damashek, F.J. Gilman // Phys. Rev. – 1970. – Vol. D1, № 6. – P. 1319–1332.
20. Andreev, V.V. Covariant equations of motion of a spin  $\frac{1}{2}$  particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities / V.V. Andreev, O.M. Deryuzhkova, N.V. Maksimenko // Russ. Phys. Journ. – 2014. – Vol. 56, № 9. – P. 1069–1075.

Поступила в редакцию 27.06.14.

УДК 531.51:531.18:530.12

## МАССА МАССИВНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ГРАВИТАЦИОННОГО ДЕФЕКТА

Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## MASS OF MASSIVE SPHERICAL SHELL WITH REGARD TO GRAVITATIONAL DEFECT

N.A. Akhramenko, L.M. Bulauko

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

Получено выражение, определяющие массу сферической пылевидной оболочки с учетом гравитационного дефекта. Показано, что масса сферической пылевидной оболочки увеличивается с ростом ее радиуса. В предельном случае масса стремится к свободной величине, не связанной гравитационным взаимодействием массы.

**Ключевые слова:** теория тяготения, сферическая пылевидная оболочка, гравитационный дефект массы.

The expression defining the mass of the spherical dustlike shell with regard to the gravitational defect is obtained. It is shown that the mass of a spherical dustlike shell increases with its radius. In the limiting case, the mass tends to the value of free, not connected with gravitational interaction of mass.

**Keywords:** theory of gravitation, dustlike spherical shell, gravitational mass defect.

### Введение

Поле тяготения проявляет себя в первую очередь тем, что оказывает силовое воздействие на находящиеся в нем массивные материальные тела. В связи с этим в физике гравитационных явлений к непосредственно измеряемым величинам следует отнести гравитационную массу и напряжённость гравитационного поля. В теории тяготения Ньютона гравитационная масса или тяготеющая материя является источником гравитационного поля, напряжённость которого представляет собой его силовую характеристику. Как известно [1]–[6], в теории тяготения Ньютона напряжённость статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей в гравитационном поле на покоящееся пробное тело единичной массы, и является вектором ускорения свободного падения.

Большинство небесных тел имеют с хорошим приближением сферически-симметричное распределение масс. Таковыми являются звезды, планеты, спутники планет. В связи с этим значительная часть задач посвящена исследованию гравитационного поля сферически-симметричных тел. Гравитационное поле таких тел также будет являться сферически-симметричным. На разных стадиях эволюции с течением времени небесные тела изменяют как размеры, так и массу, а также плотность.

В классической механике, и в частности в теории тяготения Ньютона, масса рассматривается как аддитивная величина, т.е. масса системы равна сумме масс составляющих ее тел [1]–[6]. В релятивистской механике масса – неаддитивная

величина и может быть определена через полную энергию тела  $E$  и его импульс  $p$  [7]

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2,$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Полная энергия может зависеть от взаимного расположения частей системы относительно друг друга и силового поля, и поэтому масса при изменении конфигурации может изменяться. В частности, масса сферической пылевидной оболочки может зависеть от радиуса, что рассмотрено в [8].

В данной работе определяется масса массивной сферической пылевидной оболочки в зависимости от радиуса, исходя из позиций классической механики в сочетании с соотношением, связывающим массу с энергией. Для этого вначале найдем напряжённость гравитационного поля массивной пылевидной сферической оболочки, а затем найдем массу.

### 1 Напряжённость гравитационного поля массивной пылевидной сферической оболочки

Рассмотрим сферически симметричный источник статического гравитационного поля – массивную пылевидную сферическую оболочку радиуса  $R$  малой толщины  $\Delta R$ . Если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  проведен из центра сферы, то из соображений симметрии следует, что создаваемое таким источником поле будет обладать сферической симметрией:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Напряженность гравитационного поля  $g(r)$  будет изменяться по толщине, изменяясь от нуля на внутренней поверхности до максимального значения на внешней поверхности. В точке  $r$ , для которой  $R < r < R + \Delta R$  напряженность гравитационного поля будет создаваться только той массой, которая находится внутри сферы радиуса  $r$ . Поэтому величину напряженности гравитационного поля можно описать следующей зависимостью

$$g = \frac{4}{3} \pi \frac{G}{r^2} \rho (r^3 - R^3), \quad (1.1)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $\rho$  – плотность,  $R < r < R + \Delta R$ .

Найдем среднее значение величины напряженности гравитационного поля по толщине

$$g_{cp.m} = \frac{1}{\Delta R} \int_R^{R+\Delta R} g dr. \quad (1.2)$$

Подставляя в (1.2) величину напряженности гравитационного поля  $g$  из (1.1), получим

$$g_{cp.m} = \frac{1}{\Delta R} \int_R^{R+\Delta R} \frac{4}{3} \pi \frac{G}{r^2} \rho (r^3 - R^3) dr. \quad (1.3)$$

Вычисляя интеграл в (1.3), получим

$$g_{cp.m} = G \rho \frac{2}{3} \pi \frac{3R\Delta R + \Delta R^2}{R + \Delta R}. \quad (1.4)$$

При условии  $\Delta R \ll R$  ( $\Delta R \rightarrow 0$ ) из (1.4) следует, что  $g_{cp.m}$  стремится к величине

$$g_{cp.m} = 2\pi G \rho \Delta R. \quad (1.5)$$

Масса сферической оболочки

$$m = V \rho = \frac{4}{3} \pi [(R + \Delta R)^3 - R^3] \rho,$$

где  $V = \frac{4}{3} \pi [(R + \Delta R)^3 - R^3]$  – объем сферической оболочки.

При условии  $\Delta R \ll R$  ( $\Delta R \rightarrow 0$ ) для массы можно записать

$$m = 4\pi R^2 \Delta R \rho. \quad (1.6)$$

Тогда выражение (1.5) с учетом (1.6) можно представить в виде

$$g_{cp.m} = \frac{Gm}{2R^2}. \quad (1.7)$$

Найдем также среднее значение величины напряженности гравитационного поля по объему

$$g_{cp.V} = \frac{1}{V} \int_V g dv = \frac{1}{V} \int_R^{R+\Delta R} g 4\pi r^2 dr, \quad (1.8)$$

где объем  $V$  – объем сферической оболочки, а элементарный объем  $dv = 4\pi r^2 dr$ .

Вычисляя интеграл в (1.8), учитывая условие  $\Delta R \ll R$  ( $\Delta R \rightarrow 0$ ), а также выражение (1.6), получим, что среднее значение величины напряженности гравитационного поля по объему выражается следующим образом:

$$g_{cp.V} = \frac{Gm}{2R^2}. \quad (1.9)$$

Как видим, правые части выражений (1.7) и (1.9) совпадают, т. е. среднее значение величины напряженности гравитационного поля по толщине равно среднему значению величины напряженности гравитационного поля по объему.

Таким образом, задачу по радиальному расширению тонкой сферической оболочки можно свести к задаче для сферической поверхности. При этом полагаем, что напряженность гравитационного поля сферической поверхности, включая точки самой поверхности, представится в виде

$$g(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R; \\ -\frac{Gm}{2R^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r = R; \\ -\frac{Gm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (1.10)$$

## 2 Масса массивной пылевидной сферической оболочки

Рассмотрим массивную сферическую поверхность радиуса  $R$  и массой  $m$ , сформированную пылевидной системой частиц, взаимодействующих между собой посредством только гравитационного поля. Пусть масса распределена равномерно по поверхности. Масса обуславливает наличие сил, стягивающих оболочку.

Величина напряженности гравитационного поля в точках поверхности сферы представляется соответственно (1.10) в виде

$$g = \frac{Gm}{2R^2}, \quad (2.1)$$

Вектор  $\vec{g}$  направлен к центру сферы (рисунок 2.1).

Сила, действующая на элемент поверхности площадью  $dS$  вследствие гравитационного взаимодействия (с учетом (2.1)), равна по величине

$$f_{sp} = g dm = g \frac{m}{4\pi R^2} dS = \frac{Gm^2}{8\pi R^4} dS \quad (2.2)$$

и направлена к центру сферы.

Пусть сфера изменяет радиус с величины  $R$  до величины  $R + dR$  (пунктирная окружность на рисунке 2.1) вследствие того, что каждая ее частица под действием распределенной по поверхности внешней силы  $\vec{f}$ , компенсирующей силы тяготения  $\vec{f}_{sp}$  (2.2), движется радиально от центра (с бесконечно малой скоростью).

Элементарная работа сил, растягивающих оболочку, при этом равна

$$\delta A = f 4\pi R^2 dR = \frac{Gm^2}{8\pi R^4} 4\pi R^2 dR = \frac{Gm^2}{2R^2} dR. \quad (2.3)$$

Положим, что совершаемая внешними силами работа над оболочкой (2.3) приводит к увеличению массы оболочки (вследствие взаимосвязи массы и энергии). При этом

$$\delta A = c^2 dm. \quad (2.4)$$

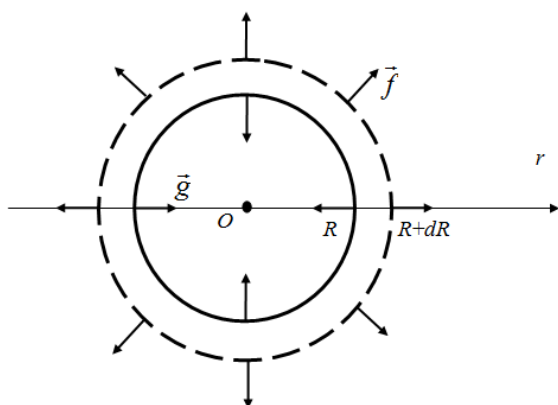


Рисунок 2.1 – Силы  $\vec{f}$ , растягивающие сферическую оболочку

Тогда, используя (2.3) и (2.4) можно записать

$$\frac{Gm^2}{2R^2} dR = c^2 dm. \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) устанавливает величину приращения массы оболочки при совершении работы против сил тяготения.

Разделим переменные в уравнении (2.5)

$$\frac{G}{2R^2} dR = c^2 \frac{dm}{m^2}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) получим

$$\int \frac{G}{2R^2} dR = \int c^2 \frac{dm}{m^2}. \quad (2.7)$$

Интегрирование выражения (2.7) дает

$$-\frac{G}{2R} = -\frac{c^2}{m} + const. \quad (2.8)$$

Таким образом, масса зависит от радиуса оболочки.

Константу интегрирования в (2.8) можно найти из условия, что на бесконечности масса равна  $M$  (свободной, не связанной гравитационным взаимодействием массе).

Тогда для константы имеем

$$const = \frac{c^2}{M}. \quad (2.9)$$

Подставив константу (2.9), получаем закон изменения массы оболочки от ее радиуса

$$-\frac{G}{2R} = -\frac{c^2}{m} + \frac{c^2}{M}. \quad (2.10)$$

Из (2.10) для величины  $m$  получим

$$m = \frac{M}{1 + \frac{GM}{2c^2 R}}. \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что масса оболочки возрастает вместе с увеличением радиуса оболочки и на бесконечности является максимальной (равна свободной массе  $M$ ).

### Заключение

Таким образом определено, что масса оболочки при произвольном радиусе меньше её свободной массы. Работа при расширении оболочки совершается против сил тяготения, поэтому по определению это есть энергия связи гравитационного поля, определяющая дефект массы оболочки.

Примечательным является то обстоятельство, что точно такое же по форме выражение (2.11) для массы сферической пылевидной оболочки получается и в калибровочной теории скалярного гравитационного поля [8] с тем лишь замечанием, что в [8] слева от знака равенства под  $m$  понимается полная масса оболочки, включая массу самого поля.

Данная работа была доложена на научном семинаре по оптике и теоретической физике, посвященному 70-летию со дня рождения А.Н. Сердюкова, который проходил в г. Гомеле (ГТУ им. Ф. Скорины) 21 мая 2014 года.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики в 5 т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005. – 560 с.
2. Савельев, И.В. Курс физики в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 352 с.
3. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. – М. : ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.
4. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Высш. шк., 1989. – 608 с.
5. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1997. – 542 с.
6. Яворский, Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М. : Наука, 1990. – 624 с.
7. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 512 с.
8. Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель : Изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.

Поступила в редакцию 30.06.14.

УДК 621.396

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРАВЛЕННОЙ АНТЕННЫ НА ОСНОВЕ СПИРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С.Д. Барсуков<sup>1</sup>, А.П. Балмаков<sup>1</sup>, И.В. Семченко<sup>1</sup>, С.А. Хахомов<sup>1</sup>,  
Т.А. Державская<sup>1</sup>, А.П. Слобожанюк<sup>2</sup>, А.Е. Краснок<sup>2</sup>, П.А. Белов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

## EXPERIMENTAL STUDIES OF THE DIRECTIONAL ANTENNA BASED ON HELICAL ELEMENTS

S.D. Barsukov<sup>1</sup>, A.P. Balmakou<sup>1</sup>, I.V. Semchenko<sup>1</sup>, S.A. Khakhomov<sup>1</sup>,  
T.A. Dzerzhavskaya<sup>1</sup>, A.P. Slobozhanyuk<sup>2</sup>, A.E. Krasnok<sup>2</sup>, P.A. Belov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>St. Petersburg National Research University of Information Technologies,  
Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia

Приведены экспериментальные результаты, полученные для одиночного спирального излучателя, а также для системы спиральных элементов, аналогичной направленной антенне Уда – Яги. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что для спиральной антенны с оптимизированными параметрами имеется возможность получения эффективного бокового излучения и построения на базе таких спиральных элементов направленной антенны. Однако, требуется оптимизация параметров системы спиральных элементов, образующих антенну, для получения более высокого коэффициента направленности и требуемой поляризации излучения.

**Ключевые слова:** антенна, поляризация, двухвитковая спираль, коэффициент эллиптичности.

Experimental results obtained for a single helical radiator, as well as for the system of helical elements similar to the directional antenna Yagi – Uda are presented. These results suggest that for a helical antenna with optimized parameters, it is possible to obtain an effective lateral radiation and design of the directional antenna based on such helical elements. However, it is necessary to optimize the system parameters of helical elements forming an antenna for higher directivity and polarization of the radiation required.

**Keywords:** antenna, polarization, double-turn helix, ellipticity coefficient.

### Введение

Развитие различных отраслей техники и радиосвязи требует применения специальных антенн, обладающих необходимыми для практического использования свойствами [1], [2]. Широкое распространение получили спиральные антенны благодаря их выдающимся характеристикам [3]. В частности, такие антенны имеют самый большой показатель по соотношению усиление – размеры и в некоторых областях (связь с космическими аппаратами) просто незаменимы. Спиральные антенны имеют малую чувствительность к погрешностям изготовления, широкую полосу пропускания, составляющую более 10% относительно основной частоты, и позволяют получать круговую поляризацию. Направление поляризации (левая/правая) определяется от разьема в сторону максимального излучения: если спираль уходит по часовой стрелке, то поляризация правая круговая, если против часовой стрелки, то левая круговая. Мы используем определение правой циркулярно поляризованной волны, обычно применяемое в радиофизике: вектор напряжённости

электрического поля такой волны вращается по часовой стрелке, если наблюдатель смотрит вслед волне [4]. Следует отметить, что электрический вектор такой волны формирует в пространстве левый винт в фиксированный момент времени, поэтому во многих случаях такую волну называют левой циркулярно поляризованной. К примеру, при приеме право поляризованной волны на антенну с левосторонней поляризацией или наоборот, происходит значительное ослабление сигнала до 38–40 дБ. При этом, при приеме сигнала с горизонтальной или вертикальной поляризацией на антенну с круговой поляризацией, входной сигнал ослабляется всего на 3 дБ (в два раза) и сила сигнала при этом не зависит от положения приемной антенны [5]. Поэтому применение спиральных антенн круговой поляризации актуально и, в некоторых случаях, может быть единственно возможным решением для практических задач радиосвязи. Спиральные антенны применяются как самостоятельные приемо-передающие антенны, так и в составе сложных антенных систем, в качестве активных и пассивных элементов.

Особый интерес представляет получение направленного излучения от антенны с круговой поляризацией. Такие антенны находят широкое применение в спутниковой, наземной цифровой и радиолокационной связи [6]. В качестве направленных антенн с круговой поляризацией обычно применяют скрещенные под углом 90 градусов антенны Уда – Яги («волновой канал»), при питании этих самых антенн сигналом высокой частоты с разностью фаз  $\pi/2$ . Однако такие антенные системы имеют свои недостатки. К ним можно отнести громоздкость конструкции, необходимость сложной схемы питания и согласования антенн. Поэтому нами впервые было предложено использование спиральных антенных элементов в качестве излучателей электромагнитных волн с круговой поляризацией, объединенных в антенную систему по принципу антенны Уда – Яги. Предполагается, что если спиральная антенна имеет круговую диаграмму направленности и эллиптическую поляризацию, близкую к круговой, то система из спиральных антенных элементов, созданная по аналогии с антенной Уда – Яги, будет иметь некоторую направленность диаграммы поля электромагнитного излучения с сохранением исходных параметров поляризации излучения.

В статье приводятся результаты экспериментальных исследований отдельных спиральных элементов с заданными параметрами, а также конструкция антенной системы типа Уда – Яги на спиральных элементах.

### 1 Экспериментальные исследования антенны на основе спиральных элементов

Экспериментальные исследования проводились в лаборатории «Метаматериалы» университета ИТМО, г. Санкт-Петербург. Безэховая камера размером 9 м×5 м×4 м, использовавшаяся во время экспериментов, покрыта высокоэффективными широкополосными пирамидальными поглотителями Eccosorb VHR-12-NRL (рисунок 1.1). Измерения проводились с помощью векторного анализатора электрических цепей Agilent PNA E8362C, в качестве излучателя и приемника СВЧ применялись сверхширокополосные антенны TMA 1.0–18.0 КВ, а также азимутально-поворотное устройство (АПУ) и прецизионный 3-х координатный сканер (X, Y, Z).

С целью получения направленного поляризованного излучения были экспериментально исследованы излучающие спиральные элементы антенны для определения их оптимальных параметров. Также получена диаграмма направленности и поляризация излучаемой волны для отдельного спирального элемента.

Так как нас интересует лишь боковое излучение спиральной антенны, то мы ограничиваемся режимом работы спирали, когда ток на протяжении всего витка спирали имеет одинаковую

фазу (одинаковое направление). Поэтому такой виток эквивалентен магнитному диполю, не излучающему вдоль оси витка. Диаграмма направленности антенны в таком режиме имеет форму тора.

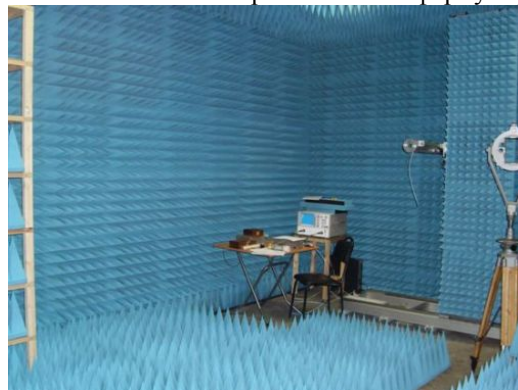


Рисунок 1.1 – Безэховая камера размером (9×5×4) м с пирамидальными поглотителями

Нами был изготовлен двухвитковой спиральный излучатель и получены экспериментальные результаты для него. Излучатель изготовлен из медной проволоки диаметром  $D = 1$  мм, радиус спирали  $r = 5,27$  мм, шаг спирали  $h = 3,67$  мм, угол подъема спирали  $\alpha = 6,35^\circ$ , длина спирали в развернутом состоянии  $L = 66,63$  мм. Спираль разрезана в середине и запитана с помощью согласующего шлейфа  $\lambda/4$ . Используя согласующий шлейф, можно выделить полуволновой резонанс на длине провода спирального излучателя. С учетом смещения резонанса из-за влияния согласующих элементов экспериментально полученный резонанс лежал в области 2,55 ГГц.

На рисунке 1.2 приведен вид спирали, ее геометрические характеристики и результат экспериментальных измерений коэффициента отражения (S11-параметр).

Основные параметры, которые исследовались в работе – это диаграмма направленности спирального излучателя, а также коэффициент эллиптичности излучаемых электромагнитных волн. На рисунке 1.3 приведена диаграмма направленности одиночного спирального излучателя с согласованием.

Главная ось спирали была расположена в горизонтальной плоскости, что соответствует пространственной ориентации вектора напряженности электрического поля для приемной рупорной антенны. Необходимо отметить сходство диаграммы направленности спирального излучателя с диаграммой классического диполя. Однако есть некоторые отличия, во-первых, это несимметричность диаграммы направленности относительно главного направления излучения, во-вторых, это отклонение диаграммы направленности на некоторый угол относительно перпендикуляра к главной оси симметрии спирального излучателя. В случае обычного дипольного



излучателя наибольшая энергия была бы направлена в перпендикулярном направлении. Такое свойство диаграммы направленности можно объяснить, если рассмотреть положение максимумов тока в спиральном излучателе, которые находятся в середине каждого из витков, с учетом угла подъема витков спирали (рисунок 1.3 (а)). В общем, эта особенность является следствием сложной конфигурации излучающих элементов спиральной антенны.

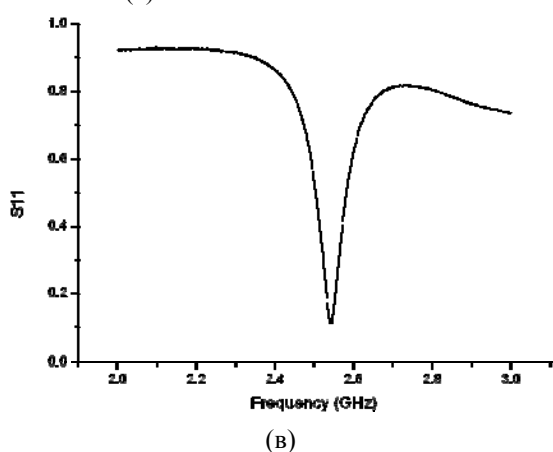
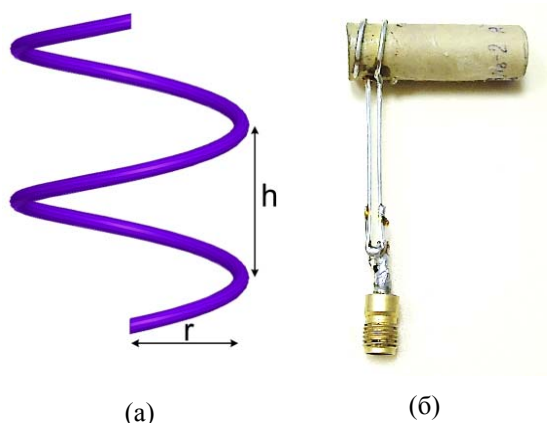


Рисунок 1.2 – Геометрические характеристики двухвитковой спирали (а), общий вид излучателя с согласованием (б), параметр s11 отражения при питании излучателя от коаксиальной линии (в)

Частотная зависимость коэффициента направленности спирального излучателя приведена на рисунке 1.3 (б). Из графика следует, что максимум направленности лежит в области частот резонанса для нашего излучателя, то есть 2,55 ГГц.

Для одиночного двухвиткового спирального излучателя были получены значения эллиптичности электромагнитных волн, измеренные в  $E$  (вертикальной) и  $H$  (горизонтальной) плоскостях. Значения эллиптичности были рассчитаны по следующему методу:

$$\varepsilon = A / B,$$

где

$$A = \left[ \frac{1}{2} \left( E_x^2 + E_y^2 - [E_x^4 + E_y^4 + 2E_x^2 E_y^2 \cos(2\Delta\phi)]^{1/2} \right) \right]^{1/2},$$

$$B = \left[ \frac{1}{2} \left( E_x^2 + E_y^2 + [E_x^4 + E_y^4 + 2E_x^2 E_y^2 \cos(2\Delta\phi)]^{1/2} \right) \right]^{1/2}.$$

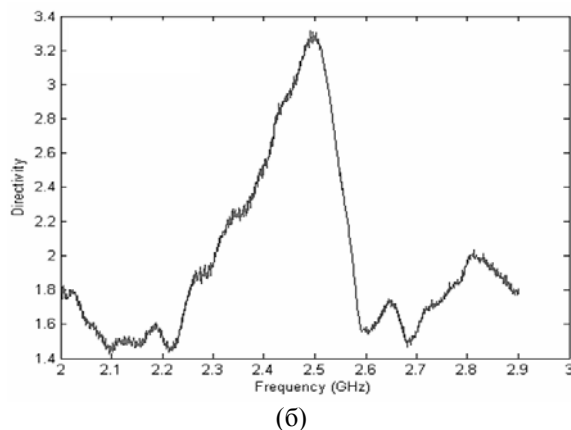
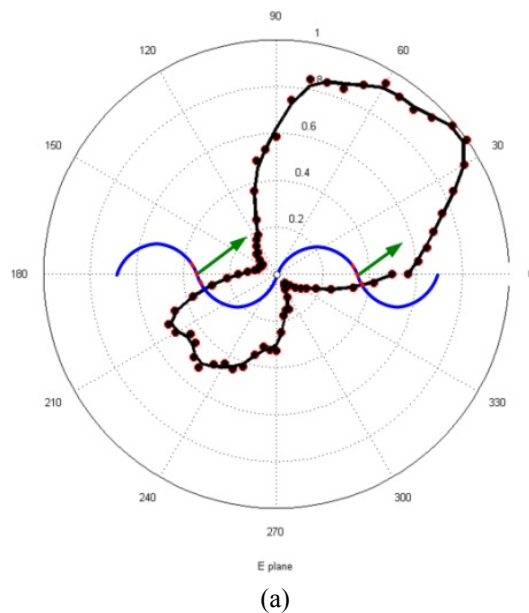


Рисунок 1.3 – Диаграмма направленности одиночного спирального излучателя с согласованием (а), частотная зависимость коэффициента направленности излучателя в относительных единицах (б)

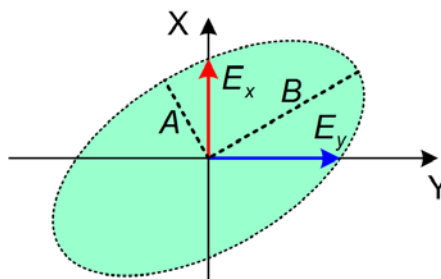


Рисунок 1.4 – К расчету эллиптичности электромагнитной волны



Экспериментальный график зависимости коэффициента эллиптичности от полярного угла приведен на рисунке 1.5.

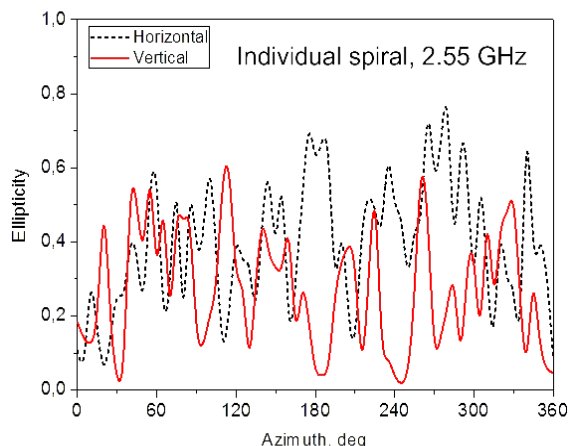


Рисунок 1.5 – Значения коэффициента эллиптичности в полярных координатах для одиночного спирального излучателя

Из графика можно сделать вывод, что во всех направлениях преобладает эллиптическая поляризация.

## 2 Экспериментальные исследования направленной антенны на основе пяти спиральных элементов

Направленная антенна Уда – Яги построена на основе пяти одинаковых спиральных элементов с установленными ранее оптимальными параметрами спиралей. Конфигурация пятиэлементной направленной спиральной антенны приведена на рисунке 2.1 (а). Расстояние между директорами и излучателем выбрано теоретически, с учетом резонансной частоты  $f = 2,4$  ГГц. Таким образом,  $a = 0,3 \lambda = 3,5$  см, а расстояние между рефлектором и излучателем чуть меньше:  $b = 0,25 \lambda = 3$  см.

Как следует из рисунка 2.1 (б), резонанс спиральной антенны сместился вниз по частоте до 2,4 ГГц, при этом резонанс одиночного излучателя наблюдался на частоте 2,55 ГГц. Это произошло вследствие взаимного влияния активных и пассивных элементов антенны.

Экспериментальные диаграммы направленности пятиэлементной спиральной антенны приведены на рисунке 2.2. Диаграммы направленности построены для двух плоскостей ( $E$  и  $H$ ), при этом антенна расположена в горизонтальной плоскости.

Для направленной спиральной пятиэлементной антенны были получены значения эллиптичности, результаты приведены на рисунке 2.3, откуда следует, что во всех направлениях излучается эллиптически поляризованная волна, которая для угла, приблизительно равного 120 градусам, имеет коэффициент эллиптичности 0,8. В этом случае поляризация волны близка к круговой (рисунок 2.3).

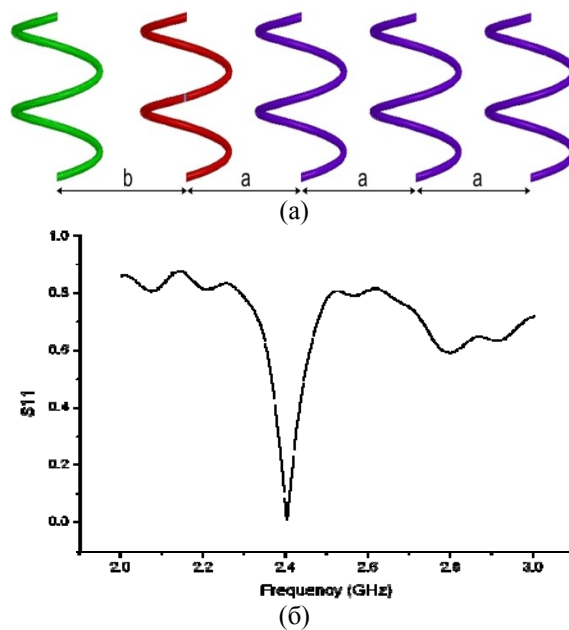


Рисунок 2.1 – Конфигурация направленной антенны из пяти элементов (а), параметр  $S_{11}$  отражения при питании антенны от коаксиальной линии (б)

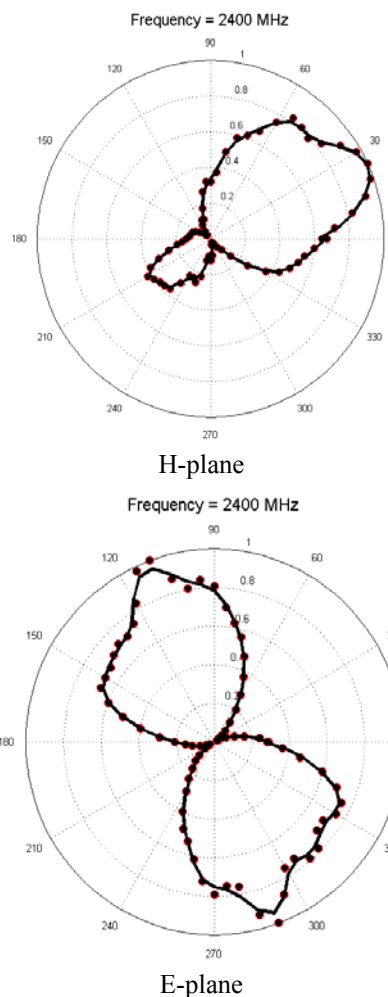


Рисунок 2.2 – Диаграмма направленности спиральной антенны из пяти элементов

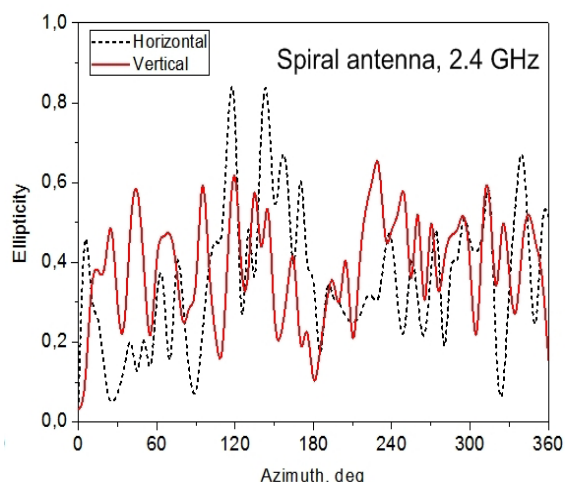


Рисунок 2.3 – Значения коэффициента эллиптичности в полярных координатах для спиральной антенны Уда – Яги

#### Заключение

Таким образом, в работе приведены экспериментальные результаты, полученные для одиночного спирального излучателя, а также для системы спиральных элементов, аналогичной направленной антенне Уда – Яги. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что для спиральной антенны с оптимизированными параметрами имеется возможность получения эффективного бокового

излучения и построения на базе таких спиральных элементов направленной антенны. Однако требуется оптимизация параметров системы спиральных элементов, образующих антенну, для получения более высокого коэффициента направленности и требуемой поляризации излучения. При конструировании антенны на спиральных элементах следует также учитывать направление, в котором излучается наибольшая энергия отдельной спиралью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг, Г.З. Антенны ультракоротких волн / Г.З. Айзенберг. – М. : «Связьиздат», 2007. – 700 с.
2. Лавров, А.С. Антенно-фидерные устройства / А.С. Лавров. – М. : «Ростехн», 2003. – 368 с.
3. Белоцерковский, Г.Б. Основы радиотехники и антенны : в 2 ч. Ч. 2. Антенны / Г.Б. Белоцерковский. – М. : Радио и связь, 2005. – 293 с.
4. Григоров, И. Антенны с круговой поляризацией / И. Григоров // Радио хобби. – 2000. – № 3. – С. 28.
5. Долбик, А.И. Устройства СВЧ и антенны / А.И. Долбик. – М. : «Оборонгиз», 2004. – 368 с.
6. Белоцерковский, Г.Б. Базы радиотехники и антенны : в 2 ч. Ч. 2. Антенны / Г.Б. Белоцерковский. – М. : Радио и связь, 1983. – 296 с.

Поступила в редакцию 21.05.14.

УДК 539.12.01

## МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО ПОВОРОТА ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ И РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Ю.А. Гришечкин, М.С. Данильченко, В.Н. Капшай

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

## COMPLEX SCALING METHOD FOR TWO-PARTICLE EQUATIONS IN THE MOMENTUM REPRESENTATION AND RESONANCE STATES

Y.A. Grishechkin, M.S. Danilchenko, V.N. Kapshai

*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

Метод комплексного поворота применён к нерелятивистским и релятивистским двухчастичным уравнениям в импульсном представлении для нахождения резонансных состояний. Проведено сравнение полученных в импульсном представлении спектров резонансных состояний с аналогичными результатами, полученными в координатном представлении для уравнения Шрёдингера и релятивистском конфигурационном представлении для двухчастичных релятивистских уравнений. Показано хорошее согласие результатов, полученных в различных представлениях.

**Ключевые слова:** релятивистские двухчастичные уравнения, метод комплексного поворота, резонансные состояния, импульсное представление, релятивистское конфигурационное представление.

The complex scaling method is applied to the non-relativistic and relativistic two-particle equations in the momentum representation for resonance states finding. The comparison of the resonance states spectra obtained in the momentum representation with the similar results obtained in the coordinate representation for the Schrödinger equation and in the relativistic configurational representation for the two-particle relativistic equations is carried out. A good agreement of the results obtained in different representations is shown.

**Keywords:** relativistic two-body equations, complex scaling method, resonance states, momentum representation, relativistic configuration representation.

### Введение

Проблема нахождения спектров резонансных состояний двухчастичных систем – одна из актуальных в квантовой теории. Резонансным состояниям соответствуют полюса  $S$ -матрицы (и амплитуды рассеяния), лежащие в четвёртом квадранте комплексной плоскости импульса  $q$  [1], [2]. Однако прямое численное решение уравнения Шрёдингера (без его преобразования) возможно только в полуплоскости  $\text{Im } q \geq \tilde{q}_{\min}$ , т. е. если и можно найти комплексные резонансные значения импульса, то очень ограниченное их число. При таком прямом решении резонансы, для которых  $\text{Im } \tilde{q} < \tilde{q}_{\min}$ , остаются не выявленными. Для решения проблемы их нахождения в работах [3], [4] было предложено использовать метод комплексного поворота для дифференциального уравнения Шрёдингера в координатном представлении. Впоследствии этот метод применялся в очень большом количестве работ для исследования резонансных состояний квантово-механических систем. В работах [5]–[7] было предложено применять метод комплексного поворота для интегральных уравнений квантовой механики.

Метод комплексного поворота позволяет изменить область существования численных

решений уравнения Шрёдингера и определить резонансы, которые без этого метода не выявляются. В работе [8] было предложено применить метод комплексного поворота для нахождения резонансных состояний релятивистских составных систем к двухчастичным интегральным уравнениям [9], [10] в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [11]. В отличие от случая квантовой механики, получение решений релятивистских двухчастичных интегральных уравнений без комплексного поворота возможно только в полосе  $\tilde{q}_{\min} \leq \text{Im } q \leq \tilde{q}_{\max}$ . В результате применения метода комплексного поворота решение двухчастичных интегральных уравнений возможно также в некоторой полосе комплексной области  $q$ , повернутой относительно исходной.

При решении нерелятивистских и релятивистских уравнений в импульсном представлении (ИП) проблема нахождения резонансов остаётся. При этом многие потенциалы, входящие в эти уравнения, могут быть сформулированы в импульсном представлении и **не могут** быть записаны в виде аналитических выражений в координатном представлении или в РКП. В связи с этим возникает вопрос о возможности применения метода комплексного поворота в ИП.

В данной работе метод комплексного поворота использован для нахождения резонансных состояний на основании решения уравнения Липпмана – Швингера и релятивистских двухчастичных уравнений в импульсном представлении.

**1 Релятивистские уравнения для резонансных состояний**

Релятивистские уравнения в импульсном представлении для сферически симметричных волновых функций  $\psi_{(j)}(\chi_q, \chi)$ , описывающих состояния рассеяния системы двух частиц равной массы  $m$  имеют вид

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \chi) = \frac{\pi}{2m} \delta(\chi_q - \chi) - \frac{2m}{\pi} G_{(j)}(\chi_q, \chi) \int_0^\infty d\chi' V(\chi, \chi') \psi_{(j)}(\chi_q, \chi'), \quad (1.1)$$

где индекс  $j = 1, 2, 3, 4$  соответствует одному из вариантов квазипотенциального подхода [9]–[11]:  $j = 1$  ( $j = 3$ ) – уравнение Логунова – Тавхелидзе (модифицированное),  $j = 2$  ( $j = 4$ ) – уравнение Кадышевского (модифицированное). В уравнениях (1.1) величина  $\chi_q \geq 0$  – быстрота, связанная с импульсом  $q$  соотношением  $q = m \operatorname{sh} \chi_q$  (аналогично  $p = m \operatorname{sh} \chi$ ,  $k = m \operatorname{sh} \chi'$ ),  $V(\chi, \chi')$  – потенциал,  $G_{(j)}(\chi_q, \chi)$  – функции Грина имеющие вид:

$$G_{(1)}(\chi_q, \chi) = \frac{1}{m^2 (\operatorname{ch}^2 \chi - \operatorname{ch}^2 \chi_q - i0)};$$

$$G_{(2)}(\chi_q, \chi) = \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \chi (2 \operatorname{ch} \chi - 2 \operatorname{ch} \chi_q - i0)}; \quad (1.2)$$

$$G_{(3)}(\chi_q, \chi) = \frac{\operatorname{ch} \chi}{m^2 (\operatorname{ch}^2 \chi - \operatorname{ch}^2 \chi_q - i0)};$$

$$G_{(4)}(\chi_q, \chi) = \frac{1}{m^2 (2 \operatorname{ch} \chi - 2 \operatorname{ch} \chi_q - i0)}.$$

Для резонансных состояний быстрота  $\chi_q$  становится комплексной  $\chi_q = \xi_q + iw_q$ , а уравнения (1.1) модифицируются в однородные:

$$\psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, \chi) = -\frac{2m}{\pi} G_{(j)}(\xi_q + iw_q, \chi) \times \int_0^\infty d\chi' V(\chi, \chi') \psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, \chi'). \quad (1.3)$$

В РКП уравнения для резонансных состояний (1.3) принимают вид

$$\psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, r) = \int_0^\infty dr' G_{(j)}(\xi_q + iw_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, r'), \quad (1.4)$$

где  $r$  – модуль радиус-вектора в РКП. Волновые функции, функции Грина и потенциалы в ИП связаны с соответствующими величинами в РКП соотношениями

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \int_0^\infty d\chi \sin(\chi mr) \psi_{(j)}(\chi_q, \chi); \quad (1.5)$$

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = -\frac{2m}{\pi} \int_0^\infty d\chi \sin(\chi mr) G_{(j)}(\chi_q, \chi) \sin(\chi mr'); \quad (1.6)$$

$$V(\chi, \chi') = \int_0^\infty dr \sin(\chi mr) V(r) \sin(\chi' mr). \quad (1.7)$$

Функции Грина в РКП, полученные подстановкой выражений (1.2) в формулу (1.6) и последующим вычислением интегралов, имеют следующий вид [12], [13]:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'); \quad (1.8)$$

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{m \operatorname{sh} 2\chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi/2 + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh} \pi mr/2};$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{2m \operatorname{sinh} \chi_q} \frac{\operatorname{ch}(\pi/2 + i\chi_q)mr}{\operatorname{ch} \pi mr/2};$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m \operatorname{ch} \chi_q)^{-1}}{\operatorname{ch} \pi mr/2} - \frac{i}{m \operatorname{sh} 2\chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh} \pi mr};$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{2m \operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh} \pi mr}.$$

Нерелятивистский предел ( $\chi_q \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ ) уравнений (1.1), (1.3), (1.4) и функций Грина (1.2), (1.8) даёт уравнения квантовой механики [1], [2]

$$\psi_{(0)}(q, p) = \frac{\pi}{2} \delta(q - p) - \frac{2}{\pi} G_{(0)}(q, p) \int_0^\infty dk V(p, k) \psi_{(0)}(q, k), \quad (1.9)$$

$$\psi_{(0)}(q_1 + iq_2, p) = -\frac{2}{\pi} G_{(0)}(q_1 + iq_2, p) \times \int_0^\infty dk V(p, k) \psi_{(0)}(q_1 + iq_2, k), \quad (1.10)$$

$$\psi_{(0)}(q_1 + iq_2, r) = \int_0^\infty dr' G_{(0)}(q_1 + iq_2, r, r') V(r') \psi_{(0)}(q_1 + iq_2, r'), \quad (1.11)$$

и их функции Грина

$$G_{(0)}(q, p) = \frac{1}{q^2 - p^2 - i0};$$

$$G_{(0)}(q, r, r') = \frac{-i}{2q} [\exp(iq|r - r'|) - \exp(iq(r + r'))], \quad (1.12)$$

где введены следующие обозначения для нерелятивистских импульсов

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\chi_q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \chi_q m &= q, \\ \lim_{\substack{\chi \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \chi m &= p, \\ \lim_{\substack{\chi' \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \chi' m &= k, \\ \lim_{\substack{\xi_q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \xi_q m &= q_1, \\ \lim_{\substack{w_q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} w_q m &= q_2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Не проводя в этой работе доказательства возможности применения метода комплексного поворота в ИП, мы, тем не менее, воспользуемся этим методом для решения релятивистских уравнений (1.3) и уравнения квантовой механики (1.10).

Суть метода комплексного поворота в координатном представлении и в РКП заключается в замене в уравнениях (1.4) и (1.11) вещественных переменных  $r$  и  $r'$  комплексными  $z = r \exp(i\theta)$  и  $z' = r' \exp(i\theta)$ , т. е. в повороте координат в комплексной плоскости на угол  $\theta$  против часовой стрелки [3], [4], [8]. В нерелятивистском уравнении (1.10) в ИП перейдем от вещественных импульсов  $p, k$  к комплексным  $P = p \exp(-i\theta)$ ,  $P' = k \exp(-i\theta)$  и представим полученное таким образом уравнение в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi_{(0)}^{(\theta)}(q_1 + iq_2, p) &= -\frac{2}{\pi} G_{(0)}^{(\theta)}(q_1 + iq_2, p) \times \\ &\times \int_0^\infty dk V^{(\theta)}(p, k) \psi_{(0)}^{(\theta)}(q_1 + iq_2, k), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \psi_{(0)}^{(\theta)}(q, p) &= \psi_{(0)}(\chi_q, P); \\ G_{(0)}^{(\theta)}(q, p) &= G_{(0)}(q, P); \\ V^{(\theta)}(p, k) &= \exp(-i\theta) V(P, P'). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Совершим аналогичные преобразования в релятивистских уравнениях (1.3) перейдя от вещественных быстроев  $\chi, \chi'$  к комплексным величинам  $\zeta = \chi \exp(-i\theta)$ ,  $\zeta' = \chi' \exp(-i\theta)$  и запишем преобразованные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, \chi) &= -\frac{2}{\pi m} G_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, \chi) \times \\ &\times \int_0^\infty d\chi' V^{(\theta)}(\chi, \chi') \psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, \chi'), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, \chi) &= \psi_{(j)}(\chi_q, \zeta); \\ G_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, \chi) &= G_{(j)}(\chi_q, \zeta); \\ V^{(\theta)}(\chi, \chi') &= \exp(-i\theta) V(\zeta, \zeta'). \end{aligned}$$

Таким образом, в ИП совершается поворот переменных  $p$  и  $k$  ( $\chi$  и  $\chi'$ ) в комплексной плоскости на угол  $\theta$  по часовой стрелке.

## 2 Результаты численного анализа

Для численного решения интегральных уравнений (1.14) и (1.16) был использован метод составных квадратур Гаусса, который применялся ранее для решения аналогичных уравнений в случае связанных состояний в работе [14]. Замена в уравнениях интегралов суммами по квадратурной формуле даёт однородные системы линейных алгебраических уравнений

$$M\psi = 0, \quad (2.1)$$

где  $M$  – основные матрицы систем,  $\psi$  – векторы, составленные из значений волновых функций в узловых точках квадратурной формулы. Условие существования ненулевого решения системы уравнений  $D = \det M = 0$  выполняется лишь для некоторых комплексных значений импульса  $q = q_1 + iq_2$  (комплексных значений быстроев в релятивистском случае  $\chi_q = \xi_q + iw_q$ ), которые являются резонансными значениями.

Решения уравнений (1.14) и (1.16) найдём в случае следующего потенциала:

$$V(r) = V_2 r^2 e^{-\alpha r}. \quad (2.2)$$

Потенциал (2.2) был использован ранее для изучения резонансных состояний в квантовой механике [5]–[7] и в релятивистской теории [8]. При этом в нерелятивистском случае  $r$  – модуль радиус-вектора в координатном представлении, а в релятивистском случае координата в РКП. В ИП в релятивистском случае потенциал (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} V(\chi, \chi') &= \\ &= V_2 \alpha \left[ \frac{\alpha^2 - 3m^2 (\chi - \chi')^2}{(m^2 (\chi - \chi')^2 + \alpha^2)^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2 - 3m^2 (\chi + \chi')^2}{(m^2 (\chi + \chi')^2 + \alpha^2)^3} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

в нерелятивистском случае выражение  $V(p, k)$  аналогично (2.3) с заменой  $m\chi \rightarrow p$  и  $m\chi' \rightarrow k$ . На рисунке 2.1 приведены нули детерминанта как функции мнимой и действительной части импульса  $q$  для значений угла  $\theta = 0.7$ , полученные при решении уравнения Шрёдингера в координатном представлении и уравнения (1.14) в импульсном представлении: нули действительной части детерминанта основной матрицы системы  $M$  изображены сплошной линией, а нули мнимой части – штриховой, резонансы обведены кружками. На рисунках 2.2 и 2.3 приведены результаты вычислений резонансов системы, полученные при решении релятивистских уравнений  $j = 1, 3$  в РКП и ИП для  $m = 1, \alpha = 1, \theta = 0.7, V_2 = 15$ .

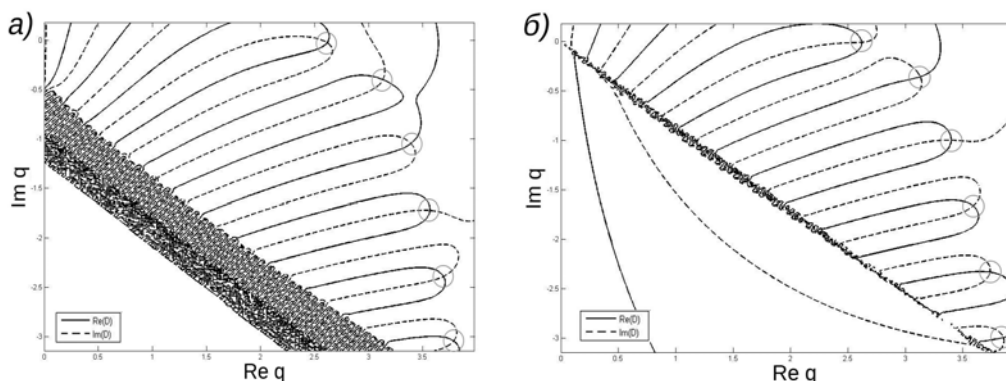


Рисунок 2.1 – Нули детерминанта, полученные решением уравнения Шредингера после комплексного поворота ( $\theta = 0.7$ ):

а) в координатном представлении; б) в импульсном представлении

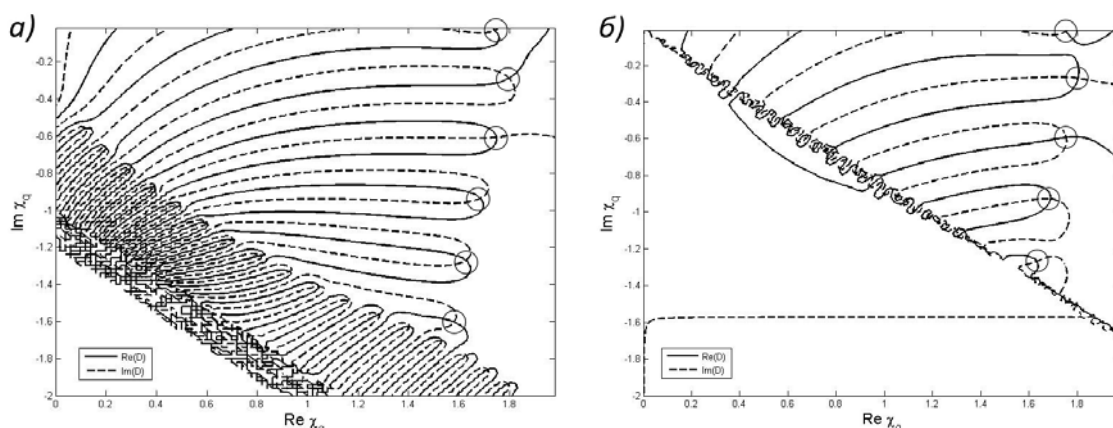


Рисунок 2.2 – Нули детерминанта, полученные решением уравнения  $j = 1$

а) в РКП; б) в ИП

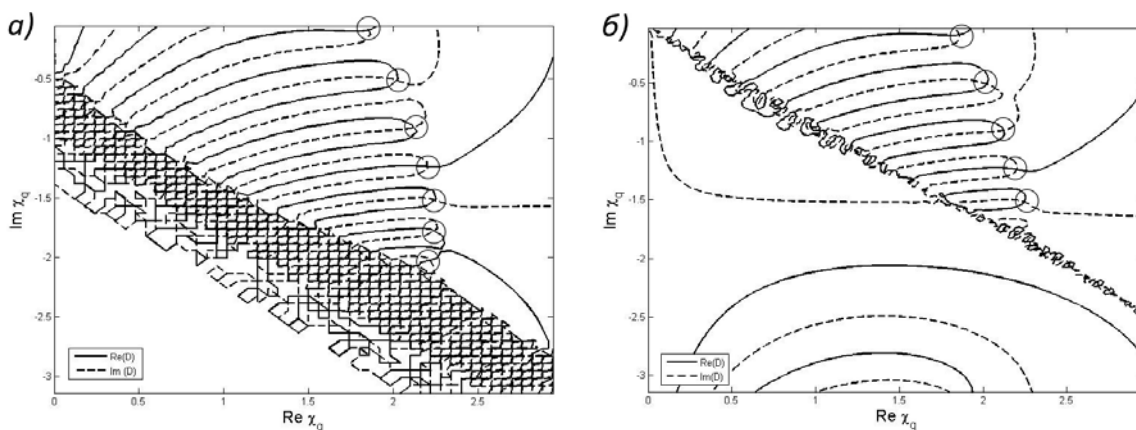


Рисунок 2.3 – Нули детерминанта, полученные решением уравнения  $j = 3$  в

а) в РКП; б) в ИП

На рисунках видно, что резонансные значения импульса, полученные решением уравнений в ИП и в координатном представлении (или в РКП) совпадают, т. е. метод комплексного поворота может быть использован в ИП. Количество резонансов, открываемых при повороте в координатном представлении (или в РКП) и в ИП на один и тот же угол, не обязательно одинаково.

В дальнейшем мы планируем исследовать различные свойства метода комплексного поворота в импульсном представлении.

#### Заключение

В работе предложено применение метода комплексного поворота для нахождения резонансных состояний на основании нерелятивистского и

релятивистских уравнений в импульсном представлении. Сравнение результатов, полученных при решении уравнений после применения метода комплексного поворота в двух разных представлениях (координатном и импульсном, релятивистском конфигурационном и импульсном) показало, что метод комплексного поворота даёт правильные результаты в импульсном представлении. В дальнейшем мы планируем применить метод комплексного поворота для исследования других нерелятивистских и релятивистских потенциалов в импульсном представлении, в том числе не допускающих аналитического вида в координатном или в релятивистском конфигурационном представлениях и изучить его различные свойства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Тейлор, Дж.* Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – Москва : Мир, 1975. – 568 с.
2. *Ньютон, Р.* Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон. – Москва : Мир, 1969. – 608 с.
3. *Nutall, J.* Method of Complex Coordinates for Three-Body Calculations above the Breakup Threshold / J. Nutall, H.L. Cohen // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 188. – P. 1542–1544.
4. *Balslev, E.* Spectral properties of many body Schrodinger operators with dilation-analytic interactions / E. Balslev, J.M. Combes // *Commun. Math. Phys.* – 1971. – Vol. 22. – P. 280–294.
5. *Kapshai, V.* Integral equations for the Jost solutions and decaying resonance states / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // *Известия Гомельского государственного университета.* – 2006. – № 6 (39). – С. 3–8.
6. *Kapshai, V.* Integral equations for different wave functions and their use for resonance finding / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // *J. Phys. B.* – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 044001.
7. *Капшай, В.Н.* Определение влияния резонансов на сечение рассеяния на основе интегрального уравнения Фредгольма / В.Н. Капшай,

К.П. Шиляева // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2010. – № 4 (5). – С. 10–17.

8. *Капшай, В.Н.* Резонансные состояния составных систем и ковариантные двухчастичные уравнения теории поля / В.Н. Капшай, К.П. Шиляева, Ю.А. Гришечкин // *Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности: Сборник научных трудов / Ин-т физики НАН Беларуси.* – Минск, 2011. – С. 79–88.

9. *Logunov, A.A.* Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // *Nuovo Cimento.* – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

10. *Kadyshevsky, V.G.* Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // *Nucl. Phys.* – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148

11. *Кадышевский, В.Г.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // *ЭЧАЯ.* – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

12. *Alferova, T.A.* Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // *Nonlinear phenomena in complex systems: Proceed. of the Sixth Annual Seminar NPC'S'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys.* – Minsk, 1998. – P. 78–85.

13. *Kapshai, V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of  $\delta$ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // *J. Phys. A.* – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

14. *Grishechkin, Yu.A.* Numerical solution of relativistic problems on bound states of systems of two spinless particles / Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai // *Russian Physics Journal.* – 2013. – Vol. 56, № 4. – P. 435–443.

*Поступила в редакцию 24.07.14.*



## ВОДНЫЕ КОМПОЗИЦИИ НА ОСНОВЕ НАНОРАЗМЕРНЫХ ЧАСТИЦ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ ДЛЯ ХИМИКО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ПОЛИРОВКИ ПЛАСТИН МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ

Я.А. Косенок<sup>1</sup>, В.Е. Гайшун<sup>1</sup>, О.И. Тюленкова<sup>1</sup>, В.Г. Денисман<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Филиал «Камертон» ОАО «Интеграл», Пинск, Беларусь

## AQUEOUS COMPOSITIONS BASED ON NANOSIZED SILICA PARTICLES FOR CHEMICAL-MECHANICAL POLISHING OF SILICON WAFERS

Ya.A. Kosenok<sup>1</sup>, V.E. Gaishun<sup>1</sup>, O.I. Tyulenkova<sup>1</sup>, V.G. Denisman<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>«Kamerton» subsidiary of JSC «INTEGRAL», Pinsk, Belarus

Описывается методика приготовления суспензий на основе наноразмерных частиц пирогенного диоксида кремния. Исследуется процесс и приводятся результаты химико-механической полировки пластин монокристаллического кремния, проведенные в производственных условиях. Даются рекомендации по использованию полирующих композиций в процессе химико-механической полировки. При использовании полирующих суспензий СПС-81М и СПС-55М в процессе ХМП пластин монокристаллического кремния достигается высокое структурное совершенство и атомарная гладкость поверхности с шероховатостью на уровне десятых долей нанометра.

**Ключевые слова:** химико-механическое полирование, пирогенный диоксид кремния, наноразмерные частицы, поверхность, шероховатость.

The method of preparation of suspensions based on nano-sized particles of fumed silica is described. The process and results of chemical-mechanical polishing of silicon wafers carried out in industrial environments are investigated. Recommendations on the use of polishing compositions in the chemical-mechanical polishing are making. When using the polishing suspensions SPS-81M and SPS-55M in the process of single-crystal silicon wafer CMP, high structural perfection and atomic smoothness of the surface roughness are achieved at the level of tenths of a nanometer.

**Keywords:** chemical-mechanical polishing, fumed silica, nanosized particles, surface, roughness.

### Введение

При обработке полупроводниковых подложек для микроэлектроники особое внимание уделяется микрорельефу (шероховатости) поверхности. Основными требованиями, обеспечивающими пригодность подложки для выращивания эпитаксиальных полупроводниковых плёнок, являются высокое структурное совершенство и атомарная гладкость поверхности с шероховатостью на уровне десятых долей нанометра. В настоящее время постоянно происходит поиск новых методов обработки и материалов для их осуществления [1]. Одно из решений этой задачи состоит в разработке новых полирующих суспензий на основе высокодисперсных кремнезёмов (аэросилов), синтезированных путем высокотемпературного гидролиза тетраоксида кремния в пламени водородно-кислородной горелки и относящихся к наноматериалам вследствие нанометровых размеров первичных частиц ( $d = 5\text{--}50$  нм). Жидкофазные суспензии на их основе применяются в различных отраслях науки и техники: при производстве высокотемпературной износостойкой керамики, полимеров, кварцевого стекла коллоидным золь-гель методом, для полировки полупроводниковых и других материалов. Тем не менее, физико-химические процессы,

протекающие в суспензиях на основе наноразмерных частиц  $\text{SiO}_2$ , а также их физико-химические, реологические, структурные и полирующие свойства, изучены недостаточно.

Эффективность химико-механической полировки (ХМП) пластин монокристаллического кремния заключается в получении зеркальной, гладкой, ровной поверхности с нанометровой (субнанометровой) шероховатостью при достаточно высокой скорости съёма материала. Концентрированная суспензия на основе  $\text{SiO}_2$  должна содержать частицы минимальных размеров для обеспечения однородности геометрических и структурных свойств полируемых поверхностей. Также суспензии должны быть однородными по фазовому и элементному составу, высокостабильными, простыми в приготовлении и использовании, дешевыми и экологически безопасными [2].

В настоящее время за рубежом ряд компаний (Degussa и Wacker (Германия), Nalco (США) и др.) производят различные марки концентрированных дисперсий на основе  $\text{SiO}_2$  [3]–[5]. Применение готовых суспензий упрощает процесс приготовления полирующих композиций, но в то же время эти суспензии имеют низкое значение pH, что приводит к увеличению времени предварительной полировки и их использование

требует дорогостоящих импортных полировальников и повышенного расхода суспензии (до 200–300 мл/мин), что ведет к существенному удорожанию процесса полировки. В странах СНГ концентрированные суспензии, содержащие наноразмерные частицы диоксида кремния, не производятся в промышленных объемах.

Так, на стадии полировки пластин монокристаллического кремния на филиале «Камертон» ОАО «Интеграл» (г. Пинск) используется суспензия фирмы Nalko (США). При этом существуют проблемы, связанные с возникновением нарушенного слоя после финишной полировки этими суспензиями. Таким образом, исследования по разработке и внедрению высокоэффективных полирующих композиций являются актуальными для нашей республики и других стран СНГ.

### 1 Экспериментальная часть

Нами разработаны высококонцентрированные суспензии на основе наноразмерных частиц диоксида кремния, которые могут использоваться в качестве полирующих композиций на I и II стадиях химико-механической полировки пластин монокристаллического кремния.

Форма и размер частиц в полирующих суспензиях существенно влияют на скорость съема и шероховатость полируемой поверхности. В качестве полирующих частиц был выбран пирогенный кремнезём (аэросил) ОХ-50 (Degussa AG, Германия) с минимальной удельной поверхностью ( $S_{БЭТ} \approx 50 \text{ м}^2/\text{г}$ ) и слабой агрегированностью первичных частиц. Индивидуальные частицы аэросила ОХ-50 оказываются настолько слабо связанными между собой, что их можно диспергировать до агрегатов коллоидных размеров (рисунок 1.1).

Методика приготовления водных полирующих композиций включает три стадии: смешение исходных компонент, ультразвуковое диспергирование и очистку полученной смеси от технологических примесей путём центрифугирования (рисунок 1.2). Для повышения концентрации суспензий, что экономически целесообразно, в состав добавляют различные поверхностно-активные вещества (этиленгликоль, глицерин и др.) [6]. Благодаря этому увеличивается также

смачиваемость поверхности пластин при полировке и возрастает скорость съема. В качестве стабилизаторов использовались этилендиамин, для суспензий применяемых на I стадии полировки, и гидроксид натрия, для суспензий применяемых на II стадии полировки.

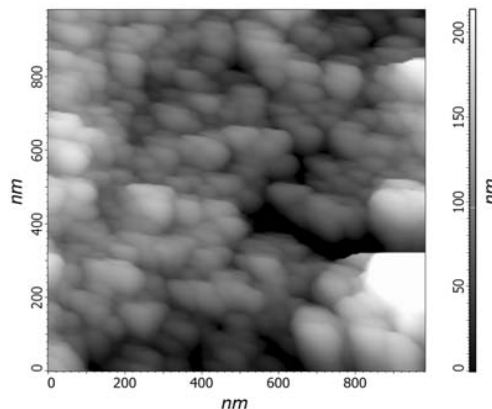


Рисунок 1.1 – АСМ изображение сухого остатка водной суспензии аэросила ОХ-50

Контроль параметров включает измерения плотности, рН и вязкости суспензий. Полирующие композиции представляют собой суспензии молочного цвета и имеют характеристики, представленные в таблице 1.1.

Испытания полирующих композиций осуществляли в производственных условиях филиала «Камертон» ОАО «Интеграл» на станках Ю1МЗ.105.016 типа «Ладья». Опробование проводилось на пластинах 100 КЭФ 0,5(111) СП10. Для корректировки рН суспензии добавляли этилендиамин в разбавленную суспензию. В качестве полировальников использовали политан на I стадии полировки и сегаль – на II стадии. После прохождения партий пластин по всему маршруту обработки проводилось сравнение геометрических параметров и параметров внешнего вида пластин. Контроль качества поверхности пластин проводился с помощью микроскопа. Исследования топографии поверхности пластин монокристаллического кремния проводились на высокоразрешающем атомно-силовом микроскопе SOLVER P 47-PRO (фирмы «NT – MDT», Россия).



Рисунок 1.2 – Схема получения водных полирующих композиций

Таблица 1.1 – Основные характеристики полирующих композиций для ХМП полупроводниковых пластин кремния

Характеристика	Марка суспензии	
	СПС-55М	СПС-81М
Стабилизирующее основание	NaOH	Этилендиамин
Содержание SiO <sub>2</sub> , масс. %	25,0	23,0
Диаметр частиц SiO <sub>2</sub> , нм	80–100	60–80
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,168–1,172	1,138–1,142
pH при 20 °С	10,4–10,8	12,4–12,8
Вязкость, мПа·с	3,5	3,1
Внешний вид суспензии	Жидкость молочного цвета	
Срок годности	не менее 6 месяцев	

## 2 Результаты и их обсуждение

Современный процесс изготовления полупроводниковых пластин – это комплекс взаимосвязанных друг с другом операций. Параметры плоскостности закладываются на операциях доводки свободным или связанным абразивом, а окончательное формирование рельефа поверхности пластин происходит на этапе химико-механического полирования. В настоящее время принята определенная последовательность операций при финишной обработке полупроводниковых пластин кремния (рисунок 2.1).

При ХМП с помощью полирующих композиций необходимо учитывать связь коллоидно-химических свойств полировального состава со свойствами обрабатываемой поверхности. Так, входными факторами являются дисперсионная среда, размер и форма частиц твердой фазы, вязкость композиции, а также температура окружающей среды [1]. Основные технологические параметры разработанных полирующих композиций приведены в таблице 2.1.

В основе процесса химико-механической полировки лежат химические реакции между компонентами жидкой среды и полируемым материалом. На начальной стадии происходит растравливание поверхности подложки, по дефектам образуются грубые риски и ямки в зависимости от характера нарушений. Использование в ХМП щелочных сред приводит к образованию на поверхности полупроводников их оксидов, которые хорошо растворимы в щелочах, или рыхлых с низкой прочностью гидроокисей, которые легко удаляются механически.

При создании щелочных сред были использованы щелочи этилендиамин (CH<sub>2</sub>)<sub>2</sub>(NH<sub>2</sub>)<sub>2</sub> (для I стадии полировки) и NaOH (для II стадии полировки). Химическая реакция взаимодействия может быть записана в следующем виде:

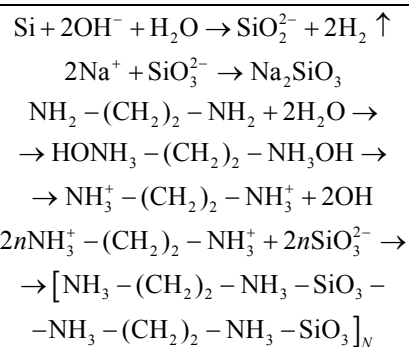


Таблица 2.1 – Основные технологические параметры процесса ХМП пластин монокристаллического кремния полируемыми композициями на основе наноразмерных частиц диоксида кремния

Характеристика	Марка суспензии	
	СПС-81М	СПС-55М
Стадия использования	I стадия	II стадия
Рекомендуемое разбавление	1:10	1:10
pH после разбавления	11,2–11,6	10,4–10,6
Плотность после разбавления, г/см <sup>3</sup>	1,005	1,01
Давление, кгс/см <sup>2</sup>	0,4	1,0
Расход суспензии, мл/мин	50	200
Температура полировки, °С	51–55	48–50
Время обработки, мин	50	8
Величина съёма, мкм	30	1
Рекомендуемый тип полировальника	политан	сегаль

Величина pH в данном случае играет большую роль. При pH<10 химическая реакция образования щелочных соединений неустойчива и возможен контакт частиц твердой фазы с поверхностью монокристалла. Напротив, высокая концентрация щелочи приводит к постепенному переходу от полирования к химическому травлению поверхности пластин с высокими скоростями. В средах с pH>13 характерно появление областей локального вытравливания (ямок) (рисунок 2.2). В этих условиях уменьшается влияние твердых частиц SiO<sub>2</sub> на выравнивание рельефа вследствие их растворения в избытке щелочи до образования монокремниевой кислоты.

Длительное или многократное использование одной суспензии также обуславливает переход от полирования к травлению вследствие уменьшения концентрации щелочного компонента при химическом взаимодействии с кремнием. Рекомендуются для I стадии полирования среды с pH=11,0–13,0, а для II стадии – с pH=10,5–11,0.

С помощью полировальника подают полировальный состав к поверхности обрабатываемого материала, снимают материал и отводят продукты обработки. Из-за малого размера частиц

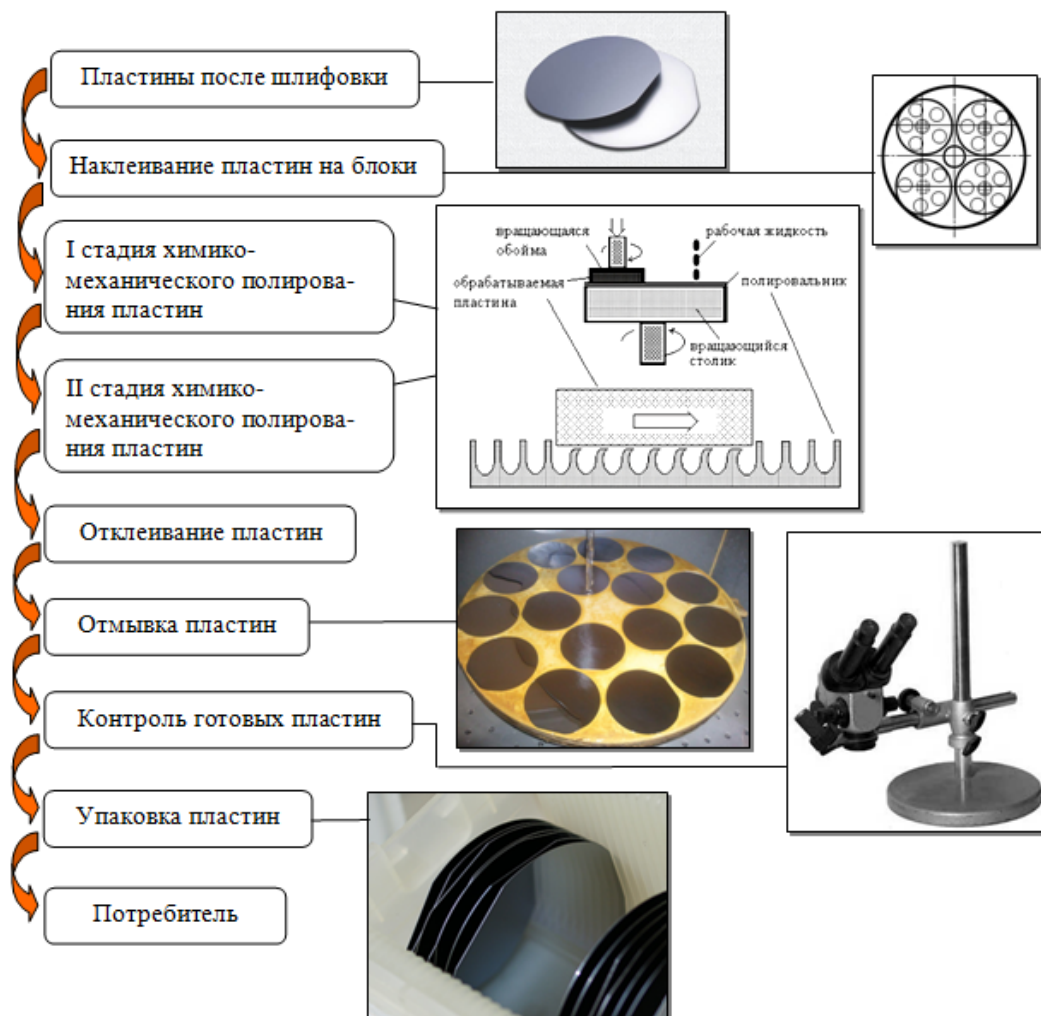


Рисунок 2.1 – Схема финишной обработки полупроводниковых пластин кремния

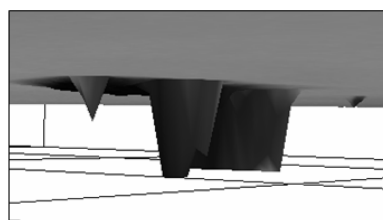
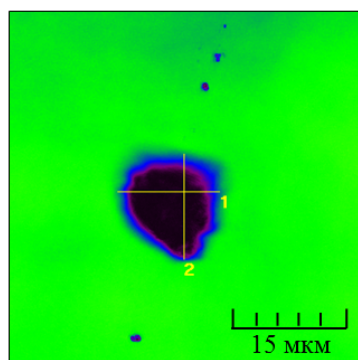


Рисунок 2.2 – Изображение участка пластины, полученное с помощью конфокального микроскопа

между ними и обрабатываемым материалом прямого контакта почти не происходит, благодаря чему поверхность пластин получается без рисок и царапин. В зависимости от состава используемой суспензии, температуры обработки и давления на пластины может преобладать химическая или механическая составляющая процесса полирования.

После прохождения партий пластин по всему маршруту обработки проводилось сравнение геометрических параметров и параметров внешнего вида пластин (таблица 2.2). Приведенные данные показывают, что при использовании суспензий СПС-81М и СПС-55М достигается требуемое качество пластин. Отличие по качеству пластин по сравнению с использованием суспензий

Nalko 2358 Nalko 2360 состоит в отсутствии нарушенного слоя. При исследовании поверхности пластин кремния после I и II стадий химико-механической полировки с использованием АСМ (рисунок 2.3) наличие поверхностных дефектов и нарушение поверхностного слоя не установлено. Шероховатость поверхности оценивается тремя возможными параметрами:  $R_a$ ,  $R_z$  и  $R_{max}$ . Параметр  $R_a$  характеризуется средним арифметическим отклонением точек измеренного профиля от его средней линии. Параметр  $R_z$  показывает высоту неровностей рельефа по десяти точкам. Параметр  $R_{max}$  характеризует наибольшую высоту неровностей профиля на балловой длине  $L$  [1]. При использовании полирующих суспензий СПС-81М и СПС-55М в процессе ХМП пластин монокристаллического кремния достигается высокое структурное совершенство и атомарная гладкость поверхности с шероховатостью на уровне десятых долей нанометра.

Таблица 2.2 – Параметры полупроводниковых пластин после финишной обработки суспензиями СПС-81М и СПС-55М

Параметр	Значение
Клин, мкм	6–12
Микроцарапины, %	10
Реставрация, %	10
Шероховатость рабочей поверхности после I стадии ХМП	
$R_a$ , нм	0,55–1,07
$R_z$ , нм	1,21–1,35
$R_{max}$ , нм	3,67
Шероховатость рабочей поверхности после II стадии ХМП	
$R_a$ , нм	0,195–0,202
$R_z$ , нм	0,90
$R_{max}$ , нм	0,54–0,61
Дефектность поверхностного слоя	Полное отсутствие нарушенного слоя

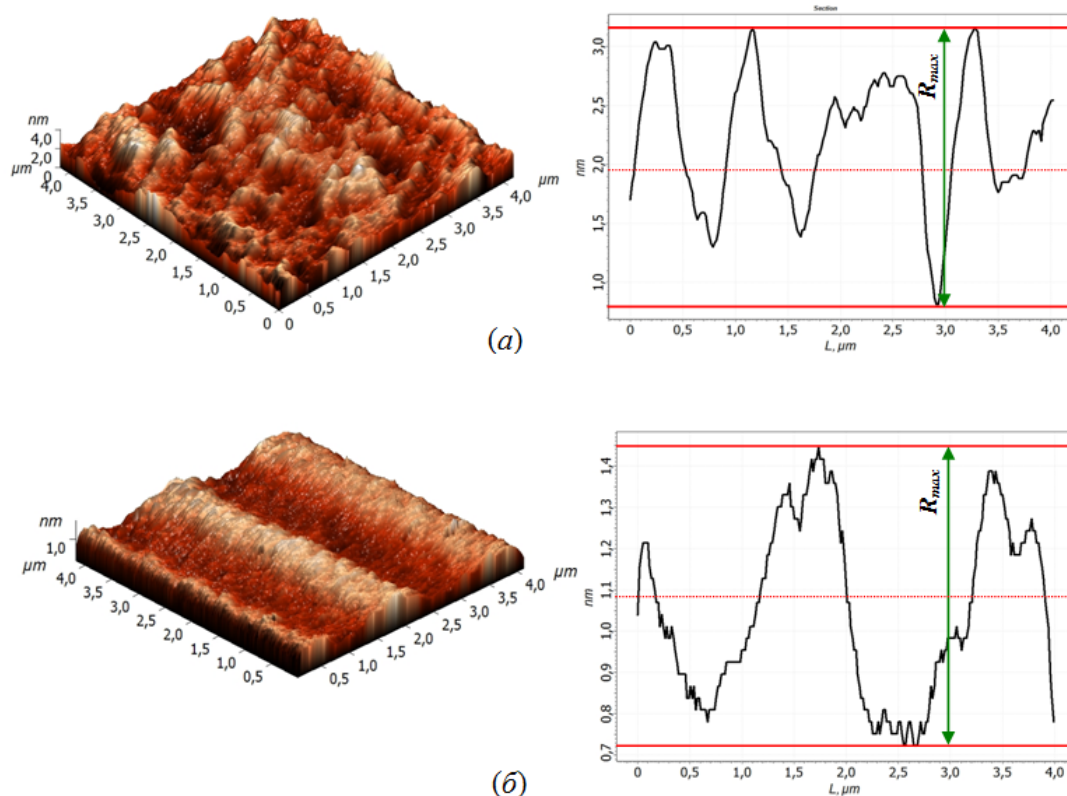


Рисунок 2.3 – АСМ изображения и сечение поверхности кремния после I стадии ХМП (а) и II стадии ХМП (б) суспензией на основе аэросила ОХ-50

### Заключение

При оптимальных соотношениях концентрации компонентов в полирующих композициях обеспечивается эффективное ХМП пластин монокристаллического кремния с шероховато-

стью на уровне десятых долей нанометра и полным отсутствием нарушенного слоя. Предварительные испытания показали, что полирующие композиции удовлетворяют основным требованиям для ХМП пластин монокристаллического

кремния трех кристаллографических ориентаций (111), (110), (100) марок КЭС, КЭФ и КДБ с различным удельным сопротивлением. Разработка технологии получения концентрированных суспензий на основе наноразмерных частиц пирогенного диоксида кремния, позволит отказаться от дорогостоящих материалов для её приготовления и снизить затраты на производство единицы конечной продукции. В Республике Беларусь в разработке подобных материалов заинтересованы предприятия электронной промышленности, в частности, филиал «Камертон» (г. Пинск, ОАО «Интеграл») и ряд родственных предприятий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юзова, В.А. Актуальные проблемы современной электроники и наноэлектроники: курс лекций / В.А. Юзова, Г.Н. Шелованова. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – 220 с.

2. Артемов, А.С. Инновационные аспекты технологии химико-механического нанополирования (ХМП) материалов полупроводниковой электроники / А.С. Артемов, И.Г. Рузавин, С.Б. Фарафонов // Нанотехнологии и наноматериалы: современное состояние и перспективы развития

в условиях Волгоградской области. – Волгоград: ВолГУ, 2009. – С. 27–50.

3. *Process for producing polishing composition*: pat. 6248144 US, МПК С 01 В 33/141, С 09 К 3/14 / Kazusei Tamai, Katsuyoshi Ina; заявитель Fujimi Incorporated. – № 09/616974; заявл. 14.07.00; опубл. 19.06.01. – 2001. – 10 с.

4. *Silica-based slurry*: pat. 6656241 US, МПК G 09 G 1/02, G 09 G 1/07 / Stuart D. Hellring, Colin P. McCann, Yuzhuo Li, Jason Keleher; заявитель PPG Industries Ohio, Inc. – № 09/882548; заявл. 14.06.01; опубл. 02.12.03. – 2003. – 20 с.

5. *Chemical mechanical polishing slurry and method for using same*: pat. 6533832 US, МПК С 09 G 1/04 / J. Scott Steckenrider, Brian L. Mueller; заявитель Cabot Microelectronics Corporation. – № 2002/0032987; заявл. 26.06.98; опубл. 21.03.02. – 2003. – 5 с.

6. *Состав полирующей суспензии*: пат. 2280056 Российская Федерация, МПК С 09 G 1/02 / В.Е. Гайшун, О.И. Тюленкова, И.М. Мельниченко, Я.А. Косенок; заявитель Гомельский гос. ун-т. – № 2003137240/04; заявл. 23.12.03; опубл. 10.06.05. – 2006. – 6 с.

Поступила в редакцию 25.07.14.



УДК 539.12

## СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

**Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, К.В. Казмерчук**

*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь*

## SCALAR PARTICLE WITH INTRINSIC STRUCTURE IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN CURVED SPACE-TIME

**E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, K.V. Kazmerchuk**

*I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

Релятивистская теория Кокса для скалярной неточечной частицы с внутренней структурой развита в присутствии внешних электромагнитных и гравитационных полей, последние описываются с помощью псевдоримановой структуры пространства-времени. Показано, что обобщенная типа Прока система тензорных уравнений содержит члены неминимального взаимодействия через тензор электромагнитного поля  $F_{\beta\alpha}$  и тензор Риччи  $R_{\beta\alpha}$ . Обобщенное скалярное уравнение типа Клейна – Фока – Гордона оказывается существенно сложнее обычного волнового уравнения.

**Ключевые слова:** спин 0, внутренняя структура, частица Кокса, обобщенное волновое уравнение, риманово пространство.

Relativistic theory of the Cox's scalar not point-like particle with intrinsic structure is developed in the presence of external electromagnetic and gravitational fields; the latter is described by pseudo-Riemannian space-time geometry. It is shown that the generalized Proca-like tensor system of equations of the first order contains non minimal interaction terms through electromagnetic tensor  $F_{\beta\alpha}$  and Ricci tensor  $R_{\beta\alpha}$ . Generalized scalar equation of the Klein – Fock – Gordon type turns out to be much more complicated than the ordinary wave equation.

**Keywords:** spin zero, intrinsic structure, Cox's particle, generalized wave equation, Riemannian space.

### **Введение**

В 1982 г. Кокс построил обобщенную систему уравнений первого порядка, которая, как оказалось [1], описывает скалярную частицу с внутренней структурой, проявляющейся во внешних электромагнитных полях. Он исходил из идеи построения нового волнового уравнения для скалярной частицы при использовании большего набора тензорных функций, чем в подходе Прока. Кокс использовал набор из скаляра, 4-вектора, антисимметричного и (неприводимого) симметричного тензоров, таким образом, исходил из 20-компонентной волновой функции. Исследуем эту систему уравнений при наличии внешних гравитационных полей, описываемых в рамках искривленной пространственно-временной геометрии [2].

### **1 Система уравнений Кокса с учетом неевклидовой геометрии**

Будем исходить из полной системы уравнений Кокса [3] для частицы со спином 0, включающей дополнительные симметричный и антисимметричный тензоры:

$$\begin{aligned} \lambda_1 D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi &= 0, \\ \lambda_1^* D_\beta \Phi + \lambda_2 D^\alpha \Phi_{[\alpha\beta]} - \lambda_3 D^\alpha \Phi_{(\alpha\beta)} - \mu \Phi_\beta &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_2^* (D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha) - \mu \Phi_{[\alpha\beta]} = 0, \quad (1.1)$$

$$\lambda_3^* \left( D_\alpha \Phi_\beta + D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\rho \Phi_\rho \right) - \mu \Phi_{(\alpha\beta)} = 0,$$

где вспомогательные числовые параметры  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  подчиняются условиям связи:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \lambda_2^* - \lambda_3 \lambda_3^* &= 0, \\ \lambda_1 \lambda_1^* - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* &= 1; \end{aligned} \quad (1.2)$$

символ  $D_\alpha$  обозначает производную, учитывающую присутствие внешних электромагнитного и гравитационного полей

$$D = i\hbar \nabla_\alpha - i \frac{e}{c} A_\alpha, \quad \mu = Mc.$$

С помощью третьего и четвертого уравнений в (1.1) исключим тензорные компоненты

$$\begin{aligned} \mu^{-1} (\lambda_2^* (D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha)) &= \Phi_{[\alpha\beta]}, \\ \mu^{-1} \left( \lambda_3^* \left( D_\alpha \Phi_\beta + D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\rho \Phi_\rho \right) \right) &= \Phi_{(\alpha\beta)} \end{aligned}$$

из оставшихся двух:

$$\begin{aligned} \lambda_1 D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi &= 0, \\ \lambda_1^* D_\beta \Phi + \lambda_2 D^\alpha \mu^{-1} [\lambda_2^* (D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha)] - \end{aligned} \quad (1.3)$$



$$-\lambda_3 D^\alpha \mu^{-1} \left( \lambda_3^* \left( D_\alpha \Phi_\beta + D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\rho \Phi_\rho \right) \right) - \mu \Phi_\beta = 0. \quad (1.4)$$

Выполним преобразования в (1.4):

$$\lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} \lambda_2 \lambda_2^* \left( D^\alpha D_\alpha \Phi_\beta - D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha \right) - \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* \left( D^\alpha D_\alpha \Phi_\beta + D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\rho D^\rho \Phi_\rho \right) - \mu \Phi_\beta = 0;$$

подчеркнутые члены с учетом (1.2) сокращаются:

$$\lambda_1^* D_\beta \Phi - \mu^{-1} (\lambda_2 \lambda_2^* + \lambda_3 \lambda_3^*) D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha + \frac{1}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta D^\rho \Phi_\rho - \mu \Phi_\beta = 0. \quad (1.5)$$

С учетом (1.2) возможна замена

$$(\lambda_2 \lambda_2^* + \lambda_3 \lambda_3^*) = 2 \lambda_3 \lambda_3^*$$

и, следовательно,

$$\lambda_1^* D_\beta \Phi - \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha + \frac{1}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta = 0.$$

Воспользуемся тождеством

$$D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha = D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) \Phi^\alpha = D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + \hbar^2 \left( -i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} \right) \Phi^{\alpha\alpha}.$$

Уравнение (1.5) можно преобразовать в виду:

$$\lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left( i \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \Phi^\alpha - \frac{3}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta (D_\alpha \Phi^\alpha) - \mu \Phi_\beta = 0.$$

Учитывая уравнение (1.3) получим

$$D_\alpha \Phi^\alpha = \frac{\mu}{\lambda_1} \Phi; \quad \lambda_1 \lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left( i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \lambda_1 \Phi^\alpha - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta \Phi - \mu \lambda_1 \Phi_\beta = 0. \quad (1.6)$$

Используя второе условие в (1.2)

$$\lambda_1 \lambda_1^* - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* = 1,$$

уравнение (1.6) упрощаем к виду:

$$D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left( i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \lambda_1 \Phi^\alpha - \mu \lambda_1 \Phi_\beta = 0.$$

Учитывая уравнение (1.3), получим

$$\lambda_1 D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0.$$

Параметр  $\lambda_1$  можно внести в обозначение векторной компоненты

$$\lambda_1 \Phi_1 \rightarrow \Phi_1.$$

Таким образом, получаем уравнения:

$$D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0,$$

$$D_\beta \Phi - i \frac{\hbar^2}{Mc} (2 \lambda_3 \lambda_3^*) \left( \frac{e}{\hbar c} F_{\beta\alpha} + i R_{\beta\alpha} \right) \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta = 0. \quad (1.7)$$

Система (1.7) учитывает неминимальное взаимодействие скалярной частицы Кокса с внешним геометрическим фоном через тензор Риччи.

Далее будем использовать параметр:

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{Mc \hbar c} (2i \lambda_3 \lambda_3^*).$$

Уравнения (1.7) можно переписать в виде:

$$D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0, \quad D_\beta \Phi - \lambda \left( F_{\beta\alpha} + i \frac{\hbar c}{e} R_{\beta\alpha} \right) \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta = 0. \quad (1.8)$$

В отсутствие электромагнитного поля уравнения (1.8) упрощаются (напоминаем, что  $i\lambda$  – вещественный параметр)

$$D^\beta \Phi_\beta = \mu \Phi, \quad D_\beta \Phi = \left( i \lambda \frac{\hbar c}{e} R_{\beta\alpha}(x) + \mu g_{\beta\alpha}(x) \right) \Phi^\alpha.$$

Это геометрическая модификация теории скалярной частицы в подходе Кокса.

## 2 Обобщенное уравнение Клейна – Фока – Гордона

Представим уравнения (1.8) в виде (напоминаем, что  $\lambda^* = -\lambda$ ; временно коэффициент  $\hbar c / e$  внесем в обозначение тензора Риччи):

$$D^\beta \Phi_\beta = \mu \Phi, \quad [\mu \delta_\alpha^\beta + \lambda (F_\alpha^\beta + i R_\alpha^\beta)] \Phi_\beta = D_\alpha \Phi. \quad (2.1)$$

С использованием обозначения

$$\Lambda_\alpha^\beta = \mu \delta_\alpha^\beta + \lambda (F_\alpha^\beta + i R_\alpha^\beta),$$

уравнения (2.1) можно записать следующим образом:

$$\Phi_\rho = (\Lambda^{-1})_\rho^\alpha D_\alpha \Phi, \quad D^\rho \Phi_\rho = \mu \Phi,$$

и далее следует обобщенное скалярное уравнение типа Клейна – Фока – Гордона

$$(D^\rho (\Lambda^{-1})_\rho^\alpha (x) D_\alpha - \mu) \Phi(x) = 0.$$

Поскольку характеристическое уравнение [4] для матрицы

$$F_\alpha^\beta + i R_\alpha^\beta = G_\alpha^\beta,$$

$$G^4 = g_0 + g_1 G + g_2 G^2 + g_3 G^3$$

позволяет выразить четвертую степень матрицы  $G_\alpha^\beta$  через  $G^0, G^1, G^2, G^3$ , то можно искать обратную матрицу в виде:

$$(\Lambda^{-1})_\rho^\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 G + \lambda_2 G^2 + \lambda_3 G^3.$$

Из уравнения  $\Lambda \Lambda^{-1} = I$ :

$$I = (\mu + \lambda G)(\lambda_0 + \lambda_1 G + \lambda_2 G^2 + \lambda_3 G^3) = \mu \lambda_0 + \mu \lambda_1 G + \mu \lambda_2 G^2 + \mu \lambda_3 G^3 +$$

$$+\lambda\lambda_0G + \lambda\lambda_1G^2 + \lambda\lambda_2G^3 +$$

$$+\lambda\lambda_3(g_0 + g_1G + g_2G^2 + g_3G^3)$$
 получаем линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 G^0: \quad & \mu\lambda_0 + \lambda\lambda_3g_0 = 1, \\
 G: \quad & \mu\lambda_1 + \lambda\lambda_0 + \lambda\lambda_3g_1 = 0, \\
 G^2: \quad & \mu\lambda_2 + \lambda\lambda_1 + \lambda\lambda_3g_2 = 0, \\
 G^3: \quad & \mu\lambda_3 + \lambda\lambda_2 + \lambda\lambda_3g_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Представим систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \lambda g_0 \\ \lambda & \mu & 0 & \lambda g_1 \\ 0 & \lambda & \mu & \lambda g_2 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu + \lambda g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= -\frac{\mu^3 + \mu^2 \lambda g_3 - \mu \lambda^2 g_2 + \lambda^3 g_1}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}, \\
 \lambda_1 &= -\frac{-\mu^2 \lambda - \mu \lambda^2 g_3 + \lambda^3 g_2}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}, \\
 \lambda_2 &= -\frac{\mu \lambda^2 + \lambda^3 g_3}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}, \\
 \lambda_3 &= -\frac{-\lambda^3}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}.
 \end{aligned}$$

Для дальнейшего введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 g_0 = p_4, \quad g_1 = p_3, \quad g_2 = p_2, \quad g_3 = p_1, \\
 G^4 = +p_1G^3 + p_2G^2 + p_3G + p_4,
 \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \frac{\mu^3 + \mu^2 \lambda p_1 - \mu \lambda^2 p_2 + \lambda^3 p_3}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}, \\
 \lambda_1 &= \frac{-\mu^2 \lambda - \mu \lambda^2 p_1 + \lambda^3 p_2}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}, \\
 \lambda_2 &= \frac{\mu \lambda^2 + \lambda^3 p_1}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}, \\
 \lambda_3 &= \frac{-\lambda^3}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Степеням матрицы  $G$  можно сопоставить следующие инварианты [4]:

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}(G) &= g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = s_1, \\
 s_1 &= G_\alpha^\alpha(x), \\
 \text{Sp}(G^2) &= g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 = s_2, \\
 s_2 &= G_\alpha^\rho(x)G_\rho^\alpha(x), \\
 \text{Sp}(G^3) &= g_1^3 + g_2^3 + g_3^3 + g_4^3 = s_3, \\
 s_3 &= G_\alpha^\rho(x)G_\rho^\sigma(x)G_\sigma^\alpha(x), \\
 \text{Sp}(G^4) &= g_1^4 + g_2^4 + g_3^4 + g_4^4 = s_4, \\
 s_4 &= G_\alpha^\rho(x)G_\rho^\delta(x)G_\delta^\sigma(x)G_\sigma^\alpha(x);
 \end{aligned}$$

$g_1, \dots, g_4$  обозначают собственные значения матрицы  $G$ .

Инварианты  $s_i$  и  $p_i$  связаны рекуррентными формулами Ньютона [4]:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= s_1 = \text{Sp}(G), \\
 p_2 &= \frac{1}{2}(s_2 - p_1s_1) = \frac{1}{2}[\text{Sp}(G^2) - p_1\text{Sp}(G)], \\
 p_3 &= \frac{1}{3}(s_3 - p_1s_2 - p_2s_1) = \\
 &= \frac{1}{3}[\text{Sp}(G^3) - p_1\text{Sp}(G^2) - p_2\text{Sp}(G)], \\
 p_4 &= \frac{1}{4}(s_4 - p_1s_3 - p_2s_2 - p_3s_1) = \\
 &= \frac{1}{4}[\text{Sp}(G^4) - p_1\text{Sp}(G^3) - p_2\text{Sp}(G^2) - p_3\text{Sp}(G)].
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют следующие представления для инвариантов  $p_i$ :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \text{Sp}(G), \\
 p_2 &= \frac{1}{2}\text{Sp}(G^2) - \frac{1}{2}\text{Sp}^2(G), \\
 p_3 &= \frac{1}{3}\left[\text{Sp}(G^3) - \text{Sp}(G)\text{Sp}(G^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(\text{Sp}(G^2) - \text{Sp}^2(G))\text{Sp}(G)\right] = \\
 &= \frac{1}{3}\text{Sp}(G^3) - \frac{1}{2}\text{Sp}(G^2)\text{Sp}(G) + \frac{1}{6}\text{Sp}^3(G), \\
 p_4 &= \frac{1}{4}\left[\text{Sp}(G^4) - \text{Sp}(G)\text{Sp}(G^3) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(\text{Sp}(G^2) - \text{Sp}^2(G))\text{Sp}(G^2) - p_3\text{Sp}(G)\right] = \\
 &= \frac{1}{4}\left[\text{Sp}(G^4) - \text{Sp}(G)\text{Sp}(G^3) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}\text{Sp}^2(G^2) + \frac{1}{2}\text{Sp}^2(G)\text{Sp}(G^2) - \frac{1}{3}\text{Sp}(G^3)\text{Sp}(G) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}\text{Sp}(G^2)\text{Sp}^2(G) - \frac{1}{6}\text{Sp}^3(G)\text{Sp}(G)\right],
 \end{aligned}$$

окончательно для  $p_4$  находим выражение:

$$\begin{aligned}
 p_4 &= \frac{1}{4}\left[\text{Sp}(G^4) - \frac{4}{3}\text{Sp}(G)\text{Sp}(G^3) - \frac{1}{2}\text{Sp}^2(G^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \text{Sp}^2(G)\text{Sp}(G^2) - \frac{1}{6}\text{Sp}^4(G)\right].
 \end{aligned}$$

В случае, если матрица  $G$  антисимметрична, выполняются равенства

$$\begin{aligned}
 \tilde{G} &= -G, \quad p_1 = \text{Sp}G = 0, \\
 G^3 &= -G^3, \quad \text{Sp}(G^3) = 0, \\
 p_1 &= 0, \quad p_2 = \frac{1}{2}\text{Sp}(G^2),
 \end{aligned}$$

$$p_3 = 0, \quad p_4 = \frac{1}{4}\text{Sp}(G^4) + \frac{1}{8}\text{Sp}^2(G^2)$$

и характеристическое уравнение принимает вид:

$$G^4 - p_2G^2 - p_4 = 0;$$

именно этот случай реализуется при построении характеристического многочлена для электромагнитного тензора. При этом формулы (2.2) принимают вид:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{\mu^3 - \mu \lambda^2 p_2}{\mu^4 - \mu^2 \lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}, \\ \lambda_1 &= \frac{-\mu^2 \lambda + \lambda^3 p_2}{\mu^4 - \mu^2 \lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}, \\ \lambda_2 &= \frac{\mu \lambda^2}{\mu^4 - \mu^2 \lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}, \\ \lambda_3 &= \frac{-\lambda^3}{\mu^4 - \mu^2 \lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}.\end{aligned}$$

Для дополнительной проверки рассмотрим простой случай: когда пространство-время описывается тензором Риччи вида (элементарными примерами являются пространства де Ситтера):

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta} &= \frac{R}{4} g_{\alpha\beta}, \quad G_{\alpha}^{\beta} = \frac{R}{4} \delta_{\alpha}^{\beta}, \\ \text{Sp}G &= R, \quad \text{Sp}(G^2) = \frac{1}{4} R^2, \\ \text{Sp}(G^3) &= \frac{1}{4^2} R^3, \quad \text{Sp}(G^4) = \frac{1}{4^3} R^4,\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}p_1 &= R, \\ p_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{2} R^2 = -\frac{3}{8} R^2, \\ p_3 &= \frac{1}{3} \frac{1}{16} R^3 - \frac{1}{2} \frac{1}{4} R^2 R + \frac{1}{6} R^3 = \frac{1}{16} R^3, \\ p_4 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{16 \cdot 4} R^4 - \frac{4}{3} R \frac{1}{16} R^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{16} R^4 + R^2 \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{6} R^4 \right] = -\frac{1}{4^4} R^4.\end{aligned}$$

Полученные выражения для  $p_i$  отвечают следующему характеристическому уравнению:

$$G = (G_{\alpha}^{\beta}), \quad \left( G - \frac{R}{4} \right)^4 = 0.$$

Отметим, что в случае присутствия именно такого геометрического фона

$$D^{\beta} \Phi_{\beta} - \mu \Phi = 0,$$

$$D_{\beta} \Phi - \lambda \left( F_{\beta\alpha} + i \frac{\hbar c}{e} \frac{R(x)}{4} g_{\beta\alpha}(x) \right) \Phi^{\alpha} - \mu \Phi_{\beta} = 0$$

и при отсутствии электромагнитного поля система уравнений примет вид:

$$D^{\beta} \Phi_{\beta} = Mc\Phi,$$

$$D_{\beta} \Phi = \left( Mc + i\lambda \frac{\hbar c}{e} \frac{R(x)}{4} \right) \Phi_{\beta}. \quad (2.3)$$

### Заключение

Полученная модификация уравнений Прока (2.1), и более простой случай (2.3), существенно отличается от неминимальной системы уравнений

Прока для безмассовой частицы, которая в безмассовом случае обеспечивает конформную инвариантность волнового уравнения

$$\begin{aligned}i \nabla_{\alpha} \Phi &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_{\alpha}, \\ i \nabla_{\alpha} \Phi^{\alpha} &= \frac{mc}{\hbar} \left( 1 + \sigma \frac{R(x)}{m^2 c^2 / \hbar^2} \right) \Phi.\end{aligned}$$

Конформная инвариантность уравнений Максвелла была установлена Кунингхэмом [5] и Бейтманом [6], безмассового уравнения Дирака – Паули [7]; специально модифицированного уравнения для безмассовой скалярной частицы – Гюрши [8]–[10].

В частности, в случае пространств де Ситтера ( $R(x) = R$ ) уравнение (2.3) примет вид (появляется эффективная добавка со знаком плюс или минус к массе частицы):

$$D^{\beta} \Phi_{\beta} = Mc\Phi,$$

$$D_{\beta} \Phi = \left( Mc + i\lambda \frac{\hbar c}{e} \frac{R}{4} \right) \Phi_{\beta}.$$

Таким образом, скалярная частица с внутренней структурой Кокса оказывается очень чувствительной к геометрии, в частности, к тензору Риччи пространства-времени. Обобщенное скалярное уравнение типа Клейна – Фока – Гордона для такой частицы оказывается очень сложным, гораздо более простым представляется использование обобщенной системы уравнений первого порядка типа Прока. Примеры решения предложенных уравнений будут рассмотрены в отдельных работах.

Авторы благодарны В.В. Киселю и В.М. Редькову за обсуждение работы и полезные советы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кисель, В.В. Точные решения уравнения Кокса для частицы со спином 0 во внешних электромагнитных полях / В.В. Кисель // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 2. – С. 82–85.
2. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 486 с.
3. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // J. Phys. Math. Gen. – 1982. – Vol. 15, № 2. – P. 627–635.
4. Гантмахер, Ф.П. Теория матриц / Ф.П. Гантмахер. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. Cunningham, E. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof / E. Cunningham // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 8. – P. 77–98.
6. Bateman, H. On the conformal transformations of the space of four dimensional and their applications to geometric optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 7. – P. 70–92.

---

7. Pauli, W. Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1940. – Bd. 13. – S. 204–208.

8. Gürsey, F. On a conform invariant spinor wave equation / F. Gürsey // Nuovo Cim. – 1956. – Vol. 3, № 10. – P. 988–1006.

9. Gürsey, F. On some conform invariant world-lines / F. Gürsey // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. A. – 1956. – Vol. 21. – P. 129–142.

10. Gürsey, F. Reformulation of general relativity in accordance with Mach's principle / F. Gürsey // Ann. Phys. – 1963. – Vol. 24. – P. 211–244.

*Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ (Беларусь – Украина), проект Ф13К-079 (2013–2015 гг.).*

*Поступила в редакцию 13.06.14.*

УДК 546.3

## ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТЖИГА И ТИПА ПРИМЕСИ НА РАЗМЕР НАНОЧАСТИЦ В ПЛЕНКАХ $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$

В.В. Сидский<sup>1</sup>, А.В. Семченко<sup>1</sup>, А.Г. Рыбаков<sup>1</sup>, В.В. Колос<sup>2</sup>, А.С. Турцевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск, Беларусь

## EFFECT OF THE ANNEALING TEMPERATURE AND TYPE OF IMPURITIES ON THE SIZE OF THE NANOPARTICLES $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$

V.V. Sidsky<sup>1</sup>, A.V. Semchenko<sup>1</sup>, A.G. Rybakov<sup>1</sup>, V.V. Kolos<sup>2</sup>, A.S. Turtsevych<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>JSC «INTEGRAL», Minsk, Belarus

В работе приведены данные по установлению влияния примеси Nb, La и температуры отжига на структурные характеристики слоёв  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ . В качестве методов исследования использовались атомно-силовая микроскопия и метод дифракции рентгеновских лучей.

**Ключевые слова:** золь-гель метод, сегнетоэлектрик, золь, термообработка, SBT-плёнка, перовскит, метод рентгеноструктурного анализа, метод атомно-силовой микроскопии.

The data of the influence of the impurity Nb, La and annealing temperature on the structural characteristics of the layers  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$  are discussed. As research methods the atomic force microscopy and X-ray diffraction method were used.

**Keywords:** sol-gel method, ferroelectric sol, heat treatment, SBT-film perovskite, X-ray diffraction method, method of atomic force microscopy.

### Введение

Идеальный материал для использования в качестве конденсаторного слоя в памяти FRAM должен иметь высокую остаточную поляризацию, низкое коэрцитивное напряжения и определенную температуру Кюри (намного выше, чем рабочая температура устройства и ниже, чем температура пленкообразования), причем скорость переключения материала должна быть на уровне наносекунд. Сегнетоэлектрический конденсатор должен обладать такими важными характеристиками для военных и космических применений, как выносливость и радиационная стойкость. Поиск новых материалов для использования в качестве сегнетоэлектрических структур является актуальной задачей. На сегодняшний день известны два семейства материалов, ЦТС и SBT, которые были широко исследованы для использования в качестве конденсатора FRAM. Исследователи приложили много усилий для улучшения свойств слоистых сегнетоэлектриков со структурой перовскита путем добавления альтернативных катионов или их заменой [1]–[4].

Метод получения сегнетоэлектриков оказывает заметное влияние на эволюцию свойств материалов в период эксплуатации. Для снижения температуры синтеза необходимо, чтобы состав и пространственное распределение ионов металлов внутри пленки перед последней стадией высокотемпературного синтеза были максимально приближены к его кристаллической структуре.

Поэтому метод получения сегнетоэлектриков должен не только снабдить материал требуемыми свойствами, но и обеспечить стабильность этих свойств или заданное изменение их во времени при воздействии внешних факторов. Методы [6] получения сегнетоэлектриков являются достаточно многочисленными и разнообразными. В частности, к химическим методам следует отнести золь-гель-технологии, гидротермальный синтез, реакции в расплавах солей, седиментацию, восстановление из оксидов и других соединений, термическое разложение веществ и т. д. Применение золь-гель метода для синтеза конденсаторных слоёв SBT может обеспечить высокое качество на подложках большой площади при относительно низкой стоимости технологического процесса.

### 1 Методика эксперимента

В качестве исходных соединений использовали неорганические соли металлов класса ОСЧ. Молярное соотношение между стронцием, висмутом и танталом составляло 1:2:2, содержание лантана или ниобия составляло 0,2 моля. Пленки наносили на пластины монокристаллического кремния с платиновым подслоем методом центрифугирования с различной частотой вращения подложки (500–1000 об/мин). Для достижения требуемой толщины (200–250 нм) применялось послойное нанесение золя (2–3 слоя) с последующей термообработкой каждого слоя при

температуре 300°C в течение 5 минут. Затем проводили повторный отжиг, с целью формирования структуры перовскита, в атмосфере кислорода при температуре 600°C – 800°C в течение 60 мин.

Наноструктурные свойства тонких плёнок  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ , в зависимости от температуры, исследовали методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) SOLVER Pro 47 (производство фирмы «NT-MDT») и методом рентгеноструктурного анализа на дифрактометре ARL X'tra (Thermo Fisher Scientific, Швейцария) в режиме отражения (геометрия Брегга – Брентано) с использованием  $\text{Cu K}\alpha 1$  и  $\text{K}\alpha 2$ -излучения. Съёмка проводилась методом скользящего падения рентгеновского излучения. Для обработки изображений, полученных на атомно-силовом и электронном микроскопах, использовалась модульная программа анализа данных сканирующей зондовой микроскопии Gwyddion [6].

## 2 Результаты и обсуждение

Исследование рентгенограмм плёнок SBT (рисунок 2.1), отожженных при различных температурах, показывают, что кристалличность плёнок возрастает с температурой отжига, о чем свидетельствует уменьшение ширины пика (115).

Интенсивный узкий пик при  $2\theta \approx 28^\circ$ , наблюдаемый при температурах отжига образцов 750°C и 800°C, относится к основному пику (115) фазы SBT, который указывает на образование фазы перовскита в SBT. Второй узкий пик  $2\theta \approx 40^\circ$  соответствует платине с ориентацией (111) (электрод).

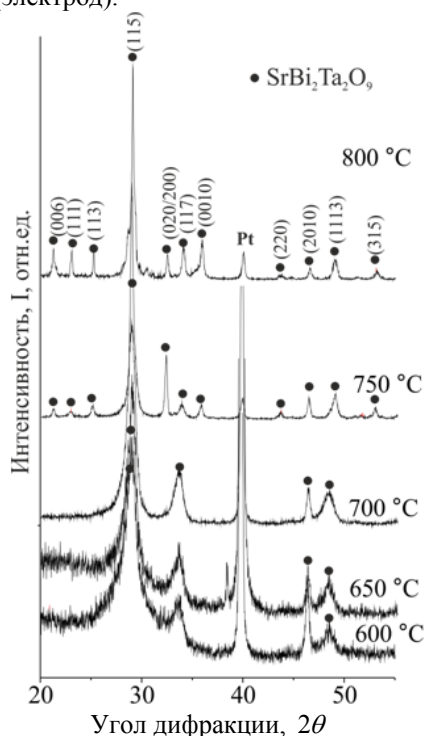


Рисунок 2.1 – Рентгенограммы SBT-плёнок в зависимости от температуры отжига в атмосфере кислорода

При температуре отжига 600–650°C наблюдается начало образования фазы перовскита, о чем свидетельствует появление широкого основного пика (115) и дополнительных (2010), (1113). При температуре отжига 650–700°C возникает еще одна группа пиков ( $45^\circ > 2\theta > 50^\circ$ ), которая соответствует образованию фазы перовскита. Для образцов, отожженных при температуре отжига 750–800°C в течение часа, интенсивность пиков возрастает, что свидетельствует о завершении формирования фазы преобразования. При температуре отжига 800°C пики фазы перовскита становятся более резкими, указывающими на повышение степени кристалличности материала. При этом, при температуре обработки выше 700°C положения максимумов пиков сдвигаются вправо, и пики, соответствующие фазе перовскита, становятся доминирующими, а их интенсивность увеличивается.

Исследована также морфология поверхности синтезированных золь-гель методом SBT-плёнок методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в зависимости от температуры обработки (рисунок 2.2).

При исследовании АСМ-изображений можно проследить изменение топографии поверхности, а также процесс образования зёрен на поверхности SBT-плёнок в зависимости от температуры обработки. Обработку изображений проводили с использованием модульной программы анализа данных сканирующей зондовой микроскопии Gwyddion. Для уменьшения погрешности статистической обработки анализ АСМ-изображений проводили на площади поверхности 4×4 мкм в зависимости от температуры.

Таблица 2.1 – Характеристика зёрен SBT-плёнок на площади поверхности 4×4 мкм в зависимости от температуры

Характеристика	$T_{\text{отж}}, ^\circ\text{C}$				
	600	650	700	750	800
Число зёрен	432	488	505	765	816
Шероховатость, $R_a$ , нм	6,05	4,72	5,31	4,03	3,73
Средний размер зерна, нм	110	98	97	80	82

При увеличении температуры отжига от 650 до 700 °C наблюдается уменьшение зерна до 97–98 нм и увеличение числа зёрен соответственно. При дальнейшем увеличении температуры отжига до 750–800°C грубые, различные по размерам кристаллические зерна превращаются в мелкие, одинаковые по размерам зерна порядка 80 нм. Эти данные согласуются с ростом сегнетоэлектрических свойств SBT-пленки, отожженной при температуре 750°C.

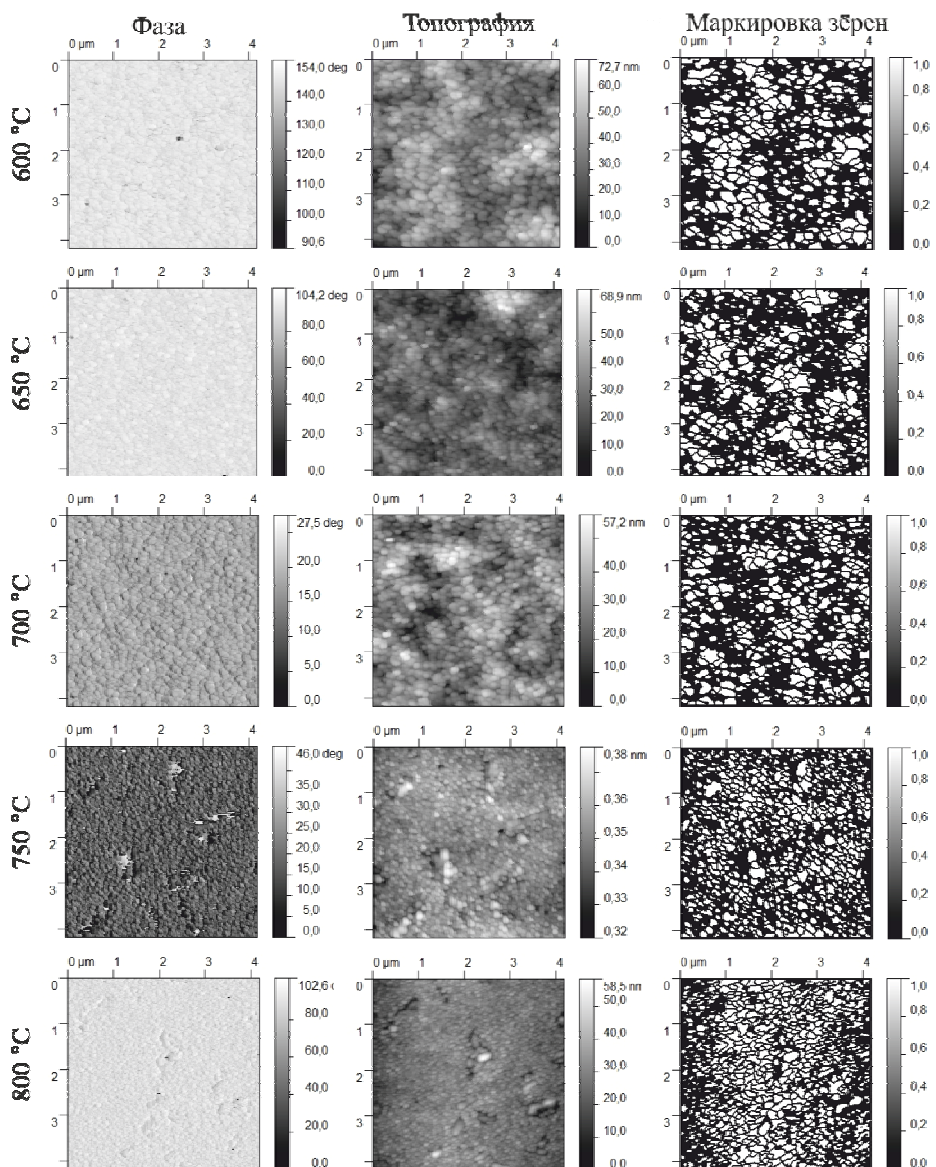


Рисунок 2.2 – АСМ-изображение SBT-плёнок в зависимости от температуры отжига в атмосфере кислорода после обработки в модульной программе Gwyddion

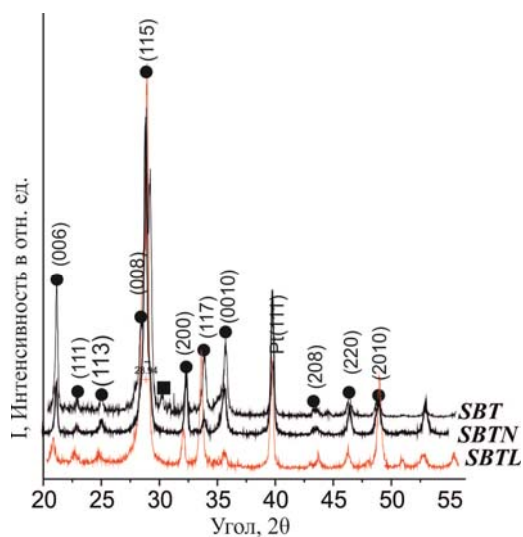


Рисунок 2.3 – Рентгенограммы плёнок  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$  в зависимости от примеси Nb, La



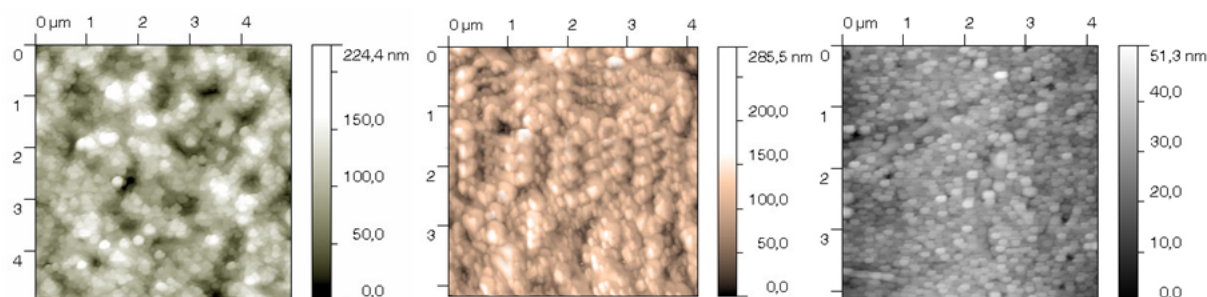


Рисунок 2.4 – АСМ-изображение плёнок  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$  в зависимости от примеси Nb, La

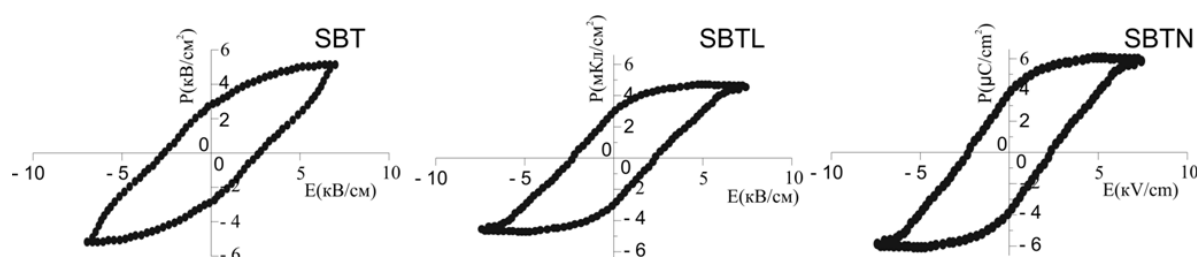


Рисунок 2.5 – Петли гистерезиса  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ -плёнок

Анализ рентгенограммы SBTN-плёнки показал, что незначительная замена Ta на Nb в SBTN решетке приводит к заметному увеличению степени кристалличности SBTN-плёнки по сравнению с содержанием фазы в плёнке SBT. Аналогичный эффект наблюдается в SBTL-плёнках. Доля перовскитоподобной фазы увеличивается для SBTL-плёнки по сравнению с SBT-плёнкой, и остаётся на одном уровне с SBTN-плёнкой.

Таблица 2.2 – Характеристика зёрен на поверхности SBTL-, SBTN-плёнки, полученные методом золь-гель (размер области составляет  $4 \times 4$  мкм)

Характеристика	SBTL-film	SBTN-film
Число зёрен	225	379
Шероховатость, $R_a$ , нм	10	17,6
Средний размер зерна, нм	105	80

В таблице приведена статистика зерен на поверхности SBTN и SBTL-плёнок, полученных золь-гель методом на поверхности монокристаллического кремния с платиновым подслоем. Средний размер частиц на поверхности SBTN-плёнки составляет около 80 нм, а размер зерна на поверхности SBTL-плёнки – около 105 нм. Шероховатость SBTL-плёнки на поверхности монокристаллического кремния с платиновым подслоем почти в 2 раза меньше чем на поверхности SBTN-плёнки. Частицы SBTL-плёнки на поверхности монокристаллического кремния имеют более «плоскую» форму по сравнению с частицами на поверхности SBT-плёнки. На первый взгляд, увеличение

размера зерна в SBTL-плёнке не является преимуществом, однако некоторые исследователи указывают, что рост размера сегнетоэлектрических частиц до более 100 нм приводит к улучшению сегнетоэлектрических характеристик материала.

На рисунке 2.5 приведены петли гистерезиса  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ -плёнок в зависимости от примеси Nb, La. Из рисунка видно, что наличие катионной примеси приводит как к увеличению значения остаточной поляризации, так и к оптимизации формы петли гистерезиса в SBTN и SBTL плёнках по сравнению с SBT-плёнкой. Дополнительное введение примеси La в SBT ведёт к нелинейным изменениям сегнетоэлектрических свойств.

### Заключение

Таким образом, в ходе исследования было обнаружено, что при получении SBT-плёнок золь-гель методом формирование фазы перовскита начинается при температуре  $700^\circ\text{C}$  и завершается в диапазоне  $750\text{--}800^\circ\text{C}$ . Исследование морфологии поверхности методом атомно-силовой микроскопии показало, что при термобработке  $750^\circ\text{C}$  в атмосфере кислорода наблюдается более равномерное распределение зёрен по размерам. Доля перовскитоподобной фазы увеличивается для  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ -плёнок по сравнению с SBT-плёнкой. Незначительная замена Ta на Nb в SBT решетке приводит к заметному увеличению степени кристалличности SBTN-плёнки по сравнению с содержанием фазы в плёнке SBT, а также к заметному увеличению остаточной поляризации  $P_r$ , по сравнению с SBT и SBTL-плёнками, но незначительно влияет на

коэффициентную силу  $E_c$ . Выявлено влияние примеси на средний размер наночастиц в  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Me}_{1-x})_2\text{O}_9$ -пленке.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Impedance study of  $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9$  and  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_{0.9}\text{V}_{0.1})_2\text{O}_9$  ferroelectrics* / Wu Yun [et al.] // *Materials Science and Engineering*. – 2001. – В. 86. – P. 70–78.

2. *Jaffe, B.* Determination of the piezoelectric coefficients  $d_{ij}$  of PZT ceramics and composites by laser interferometry / B. Jaffe, Jr. W.R. Cook, H. Jaffe // *Journal of the European Ceramics*. – 2001. – Vol. 21, № 10–11. – P. 1387–1390.

3. *European standard EN 50324–2:2002 – CENELEC European Committee for Electrotechnical Standardization* / Piezoelectric properties of ce-

ramic materials and components. Part 2 : Methods of measurement – Low power, Accessed on: 2002.

4. *Influence of layer defects on the damping in ferroelectric thin films* / S.H. Kim [et al.] // *Appl. Phys.* – 2003. – № 42. – P. 5952.

5. *Varela Structural and microstructural characterization of  $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_{0.5}\text{Nb}_{0.48}\text{W}_{0.02})_2\text{O}_9$  powders* / N.L. Amsei [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2008. – № 454. – P. 61–65.

6. *Кушков, В.Д.* Формирование стеклообразной структуры оксидных пленок, осаждаемых в вакууме при различной температуре подложек / В.Д. Кушков, А.М. Заславский, А.В. Мельников // *Физ. и хим. стекла*. – 1991. – Т. 17, № 6. – С. 506–508.

Поступила в редакцию 08.07.14

УДК 535.4; 53.5

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СМЕШАННЫХ ГОЛОГРАММ В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛЕ ВТО СРЕЗА ( $\bar{1}\bar{1}0$ )

В.В. Шепелевич<sup>1</sup>, А.В. Макаревич<sup>1</sup>, С.М. Шандаров<sup>2</sup><sup>1</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь<sup>2</sup>Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия

## OPTIMIZATION OF THE OUTPUT CHARACTERISTICS OF MIXED HOLOGRAMS IN THE ( $\bar{1}\bar{1}0$ )-CUT VTO PHOTOREFRACTIVE PIEZOCRYSTAL

V.V. Shepelevich<sup>1</sup>, A.V. Makarevich<sup>1</sup>, S.M. Shandarov<sup>2</sup><sup>1</sup>I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus<sup>2</sup>Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russia

Представлены результаты теоретических исследований по оптимизации процесса считывания смешанных пропускающих голограмм, сформированных в фоторефрактивном пьезокристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  среза ( $\bar{1}\bar{1}0$ ). Показано, что в сравнении со случаем чисто фазовых голограмм, традиционно рассматриваемым в фоторефрактивных кристаллах, дополнительный учет амплитудной составляющей голографической решетки приводит к качественным и количественным изменениям ориентационной зависимости поляризационно-оптимизированных значений дифракционной эффективности голограмм, записанных в этом кристалле.

**Ключевые слова:** дифракционная эффективность, фазовая решетка, амплитудная решетка, смешанная голограмма, фоторефрактивный пьезокристалл, ВТО.

The results of theoretical research of the optimization process of readout mixed transmission holograms formed in the ( $\bar{1}\bar{1}0$ )-cut  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  photorefractive piezoelectric crystal are presented. It is shown that in comparison with the case of pure phase holograms, traditionally regarded in photorefractive crystals, additional accounting of the amplitude component of the holographic grating leads to a qualitative and quantitative changes in the orientation dependence of the polarization-optimized values of the diffraction efficiency of holograms recorded in this crystal.

**Keywords:** diffraction efficiency, phase grating, amplitude grating, mixed hologram, photorefractive piezocrystal, VTO.

### Введение

Известно, что для эффективного использования фоторефрактивных кристаллов в прикладных целях необходимо оптимизировать условия считывания сформированных в них фазовых голограмм [1]–[3]. В частности, данные условия могут быть реализованы посредством выбора оптимальных значений ориентационного угла кристалла и азимута линейной поляризации считывающего голографическую решетку пучка [3]. При этом обязательным является учет оптической активности кристалла [4], электрооптического эффекта [5] и открытого в 1986 году дополнительного вклада в фоторефрактивный отклик, обусловленного обратным пьезоэлектрическим эффектом и фотоупругостью (ПЭФ) [6].

Однако известны работы, в которых указывается на то, что при освещении фоторефрактивных кристаллов пространственно-периодическим световым полем (интерференционной картиной) в них возможно формирование дополнительной амплитудной голографической решетки, возникновение которой обусловлено изменениями коэффициента поглощения среды под действием

светового излучения [7], [8]. При этом совокупность фазовой и амплитудной (абсорбционной или фотохромной) голографических решеток принято называть смешанной голограммой [9].

Так, например, в работе [10] теоретически и экспериментально изучена возможность существования смешанных голограмм в фоторефрактивном кристалле GaAs:Cr класса симметрии  $43m$ . Теоретическое моделирование возможного увеличения дифракционной эффективности голограмм в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  посредством учета фотохромных решеток представлено в [11].

Проведенные нами экспериментальные исследования зависимости дифракционной эффективности ненаклонных пропускающих голограмм, записанных в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (ВТО) среза ( $\bar{1}\bar{1}0$ ) толщиной 7.7 мм, от ориентационного угла кристалла показали, что даже для качественного соответствия полученных экспериментальных данных с результатами теоретических расчетов недостаточно использования модели чисто фазовых голограмм, а необходимо дополнительное привлечение феноменологической модели амплитудных голограмм [12]. При этом в

недавно вышедших работах [13], [14], посвященных изучению вклада флексоэлектрического эффекта во встречное взаимодействие распространяющихся в кристалле ВТО световых волн, указывалось на возможность существования в этом кристалле амплитудных голографических решеток.

В связи с этим, с учетом полученных нами экспериментальных данных, в рамках настоящей работы при теоретической оптимизации процесса считывания голограмм, сформированных в кристалле ВТО исследованного среза, принята во внимание дополнительная феноменологическая модель амплитудных голографических решеток.

### 1 Теоретическая модель

Для оптимизации процесса считывания смешанных ненаклонных пропускающих голограмм в кристалле ВТО среза ( $\bar{1}\bar{1}0$ ) толщиной  $d$  выберем положение кристалла и направление отсчета его ориентационного угла  $\theta$  относительно рабочей системы координат  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , связанной с плоскостью распространения опорной  $R$  и предметной  $S$  световых волн, а также вектором голографической решетки  $\vec{K}$  ( $\vec{K} = -\vec{e}_2$ ), как это показано на рисунке 1.1. Отсчет азимута линейной поляризации  $\Psi_0$ , задающего начальные положения колебания векторов напряженности электрического поля  $\vec{R}_0$  и  $\vec{S}_0$ , формирующих в кристалле голограмму волн  $R$  и  $S$ , будем проводить от прямых, образованных ортогональными проекциями этих векторов на плоскость падения при  $\Psi_0 = 0$ , в соответствии с направлением, указанным на рисунке. При изменении угла  $\theta$  поворот кристалла осуществляется вокруг оси  $OO'$ . Угол Брэгга  $\varphi_0$  для волн  $R$  и  $S$  в случае ненаклонной голограммы будет одинаковым.

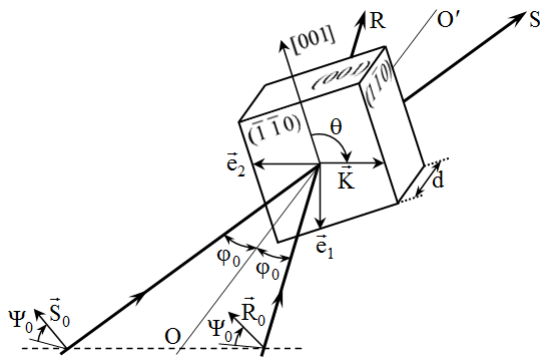


Рисунок 1.1 – Ориентация кристаллической пластинки относительно рабочей системы координат

При перекрытии предметной световой волны  $S$ , участвующей в записи голограммы, процесс ее восстановления, происходящий за счет дифракции опорной волны  $R$  на записанной в кристалле смешанной голографической решетке, может быть описан при использовании следующей

системы линейных дифференциальных уравнений связанных волн:

$$\begin{cases} \frac{dR_{\perp}}{dz} = -\alpha R_{\perp} + \rho R_{\parallel} + \left( ie^{-i\delta} \chi_1 - \frac{\varepsilon_i}{\cos \varphi} \right) S_{\perp} + ie^{-i\delta} \chi_2 S_{\parallel}, \\ \frac{dR_{\parallel}}{dz} = -\rho R_{\perp} - \alpha R_{\parallel} + e^{-i\delta} \chi_3 S_{\perp} + \left( ie^{-i\delta} \chi_4 - \frac{\varepsilon_i \cos 2\varphi}{\cos \varphi} \right) S_{\parallel}, \\ \frac{dS_{\perp}}{dz} = \left( ie^{i\delta} \chi_1 - \frac{\varepsilon_i}{\cos \varphi} \right) R_{\perp} + ie^{i\delta} \chi_3 R_{\parallel} - \alpha S_{\perp} + \rho S_{\parallel}, \\ \frac{dS_{\parallel}}{dz} = ie^{i\delta} \chi_2 R_{\perp} + \left( ie^{i\delta} \chi_4 - \frac{\varepsilon_i \cos 2\varphi}{\cos \varphi} \right) R_{\parallel} - \rho S_{\perp} - \alpha S_{\parallel}. \end{cases}$$

Здесь  $R_{\perp}$  и  $R_{\parallel}$ ,  $S_{\perp}$  и  $S_{\parallel}$  – проекции векторных амплитуд восстанавливающей опорной  $R$  и восстанавливаемой предметной  $S$  световых волн на направления, перпендикулярное к плоскости падения ( $\perp$ ) и лежащее в плоскости падения ( $\parallel$ );  $\alpha = \alpha_z / \cos \varphi$ , где  $\alpha_z$  – коэффициент поглощения кристалла для данной длины волны электромагнитного излучения, а  $\varphi$  – угол Брэгга внутри кристалла;  $\rho = \rho_0 / \cos \varphi$ , где  $\rho_0$  – удельное вращение плоскости поляризации световой волны;  $\varepsilon_i$  – параметр для характеристики амплитудной решетки;  $\delta = \pi/2$  – фазовый сдвиг фазовой составляющей голографической решетки относительно амплитудной составляющей этой решетки, совпадающей по фазе с пространственным распределением интенсивности света в интерференционной картине при записи в кристалле голограммы;  $\chi_k$  – постоянные связи, включающие вклад электрооптического, обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов, где  $k = 1, 2, 3, 4$  [3].

Определяя величину дифракционной эффективности голограммы как

$$\eta(d) = \frac{I_S(d)}{I_R(0)} \cdot 100\%,$$

где  $I_S(d)$  – интенсивность восстановленной предметной волны  $S$  на выходе из кристалла, а  $I_R(0)$  – интенсивность восстанавливающей опорной волны  $R$  на входе в кристалл и используя известное в голографии приближение  $I \sim E^2$  (интенсивность  $I$  электромагнитной волны пропорциональна квадрату ее модуля вектора напряженности электрического поля  $E$ ), несложно получить выражение для определения величины дифракционной эффективности голограммы в данном случае в виде:

$$\eta(d) = \frac{S_{\perp}^2(d) + S_{\parallel}^2(d)}{R_{\perp}^2(0) + R_{\parallel}^2(0)} \cdot 100\%,$$

где  $R_{\perp}(0)$  и  $R_{\parallel}(0)$  – проекции векторной амплитуды восстанавливающей волны  $R$  на направления, перпендикулярное к плоскости падения и лежащее в плоскости падения на входе в кристалл, а  $S_{\perp}(d)$  и  $S_{\parallel}(d)$  – соответствующие проекции векторной амплитуды восстановленной волны  $S$  на выходе из кристалла.

При теоретических расчетах использованы следующие параметры кристалла ВТО: пьезоэлектрический коэффициент  $e_{14} = 1.1$  Кл/м<sup>2</sup>; электрооптический коэффициент  $r_{41}^S = 4.75$  пм/В; коэффициенты упругости  $c_{11} = 13.7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{12} = 2.8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{44}^E = 2.6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>; фотоупругие постоянные  $p_{11} = 0.173$ ,  $p_{12} + p_{13} = -0.003$ ,  $p_{44}^E = -0.005$ ; показатель преломления  $n = 2.58$  [15]; удельное вращение плоскости поляризации  $\rho = 112$  рад/м и коэффициент поглощения  $\alpha = 38.2$  м<sup>-1</sup> были измерены на исследуемом образце кристалла в [12]. В случае чисто фазовой голограммы параметр для характеристики амплитудной решетки  $\varepsilon_i$  считался равным 0, а в случае учета абсорбционной составляющей голограммы составлял  $2.1$  м<sup>-1</sup> (значение было определено путем экспериментальных измерений). Кроме того, угол Брэгга  $\varphi_0$  вне кристалла принимался равным  $12^\circ$  (совпадает с углом Брэгга при проведении экспериментов), а амплитуда электрического поля решетки пространственного заряда  $E_G$  составляла  $9 \cdot 10^4$  В/м.

## 2 Результаты и обсуждение

Результаты теоретических расчетов по оптимизации процесса считывания ненаклонных пропускающих голограмм в кристалле ВТО среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$  за счет выбора оптимальных значений азимута линейной поляризации  $\Psi_0$  считывающего пучка, при котором для фиксированных значений толщины  $d$  и ориентационного угла кристалла  $\theta$  достигается максимальное (поляризационно-оптимизированное) значение дифракционной эффективности  $\eta_{\Psi_0}^{\max}$  записанных голограмм, представлены на рисунке 2.1.

Из рисунка 2.1 видно, что в случае пренебрежения амплитудной составляющей голографической решетки поляризационно-оптимизированная зависимость дифракционной эффективности пропускающих голограмм от ориентационного угла и толщины кристалла имеет четыре равных локальных максимума (рисунк 2.1, а). При этом в случае учета абсорбционной составляющей голограммы четырехгорбая поверхность, изображенная на рисунке 2.1, а, качественно преобразуется: дифракционная эффективность в двух средних локальных максимумах (втором и третьем) под действием фотохромного эффекта уменьшается, а в двух крайних (первом и четвертом) локальных максимумах – увеличивается (рисунк 2.1, б). Это позволяет сделать вывод о том, что при практическом применении реального кристалла ВТО среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$  фиксированной толщины максимальное значение записанных в нем голограмм может быть достигнуто только при двух значениях его ориентационных углов. Графические зависимости оптимальных значений азимута линейной поляризации  $\Psi_{0\eta}^{\max}$  и

ориентационного угла  $\theta_\eta^{\max}$ , при которых достигаются первый и четвертый локальные дифракционные максимумы  $\eta_{\Psi_0, \theta}^{\max}$ , от толщины кристалла  $d$  в случае смешанных голограмм, изображены на рисунке 2.2.

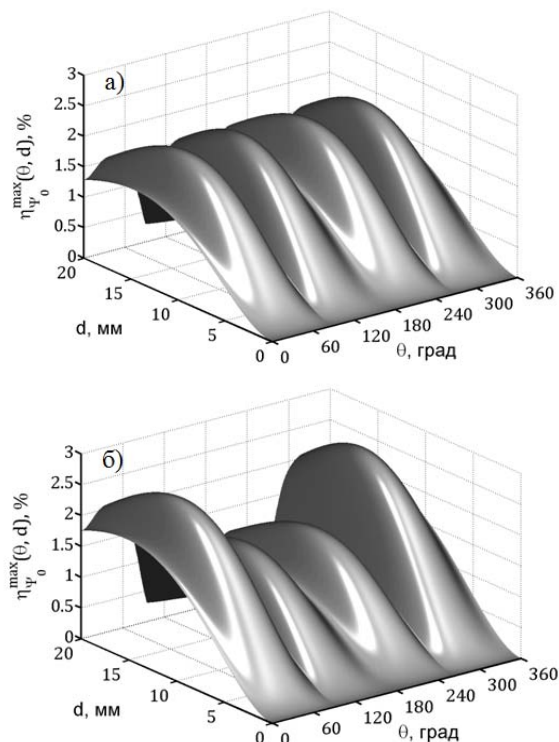


Рисунок 2.1 – Зависимость максимальных значений дифракционной эффективности голограмм  $\eta_{\Psi_0}^{\max}$ , сформированных в кристалле ВТО, от ориентационного угла  $\theta$  и толщины кристалла  $d$ : а) в случае чисто фазовых голограмм; б) в случае смешанных голограмм

Отметим, что представленные на рисунке 2.2 зависимости  $\Psi_{0\eta}^{\max}(d)$  и  $\theta_\eta^{\max}(d)$  очень важны для приложений и, в частности, их значения, пересчитанные для конкретных условий формирования голографической решетки, могут быть использованы при оптимизации оптических схем голографических интерферометров, выполненных на основе кристалла ВТО данного среза. При этом сравнение величин  $\eta_{\Psi_0, \theta}^{\max}$  для случаев чисто фазовых и смешанных голограмм представлено на рисунке 2.3.

Из анализа рисунка 2.3 следует, что учет абсорбционной составляющей голографической решетки приводит к заметному увеличению значений локальных максимумов дифракционной эффективности смешанных голограмм по сравнению со случаем чисто фазовых голограмм, для которых экстремально высокое значение дифракционной эффективности достигается при толщине кристалла  $d_m = 13.21$  мм (точка А). В случае смешанных голограмм соответствующее



значение достигается при толщине кристалла  $d_m = 13.67$  мм (точка В) при значениях  $\Psi_{0\eta}^{\max} \approx 60^\circ$  и  $\theta_\eta^{\max} \approx 45^\circ$  в случае первого локального дифракционного максимума, а также  $\Psi_{0\eta}^{\max} \approx 29^\circ$  и  $\theta_\eta^{\max} \approx 315^\circ$  в случае четвертого локального дифракционного максимума.

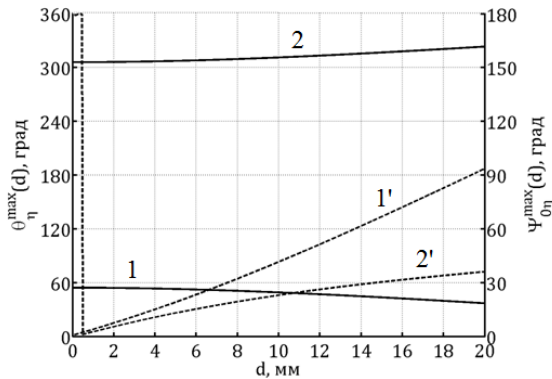


Рисунок 2.2 – Зависимость значений ориентационного угла  $\theta_\eta^{\max}$  (сплошная линия)

и азимутов линейной поляризации  $\Psi_{0\eta}^{\max}$  (штриховая линия) от толщины кристалла  $d$ , при выборе совокупности которых достигаются локальные дифракционные максимумы смешанных голографических решеток, записанных в кристалле ВТО среза ( $\bar{1}\bar{1}0$ ): 1 и 1' – в случае первого локального дифракционного максимума; 2 и 2' – в случае четвертого локального дифракционного максимума

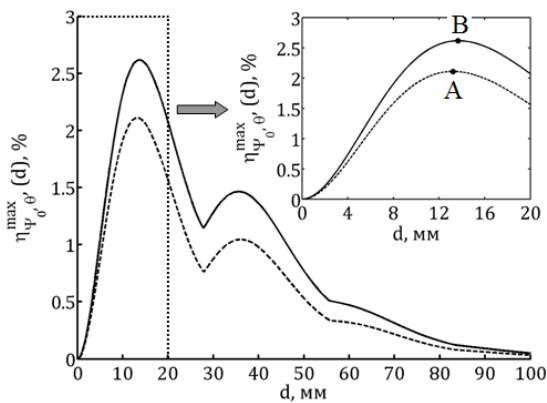


Рисунок 2.3 – Зависимость величины локальных дифракционных максимумов  $\eta_{\psi_0, \theta}^{\max}$  от толщины кристалла  $d$ : штриховая линия – в случае чисто фазовых голограмм; сплошная линия – в случае смешанных голограмм

Гофрированный характер графических зависимостей, представленных на рисунке 2.3, связан с естественной гиротропией кристалла, причем значения толщины кристалла, при которой периодически наблюдаются провалы в данных

локальных максимумах, определяются выражением  $d = (\pi t \cos \varphi) / \rho$ , где  $t$  – целое положительное число.

Отметим, что учет амплитудной составляющей голографической решетки в кристалле ВТО среза ( $\bar{1}\bar{1}0$ ) сыграл важную роль в оптимизации оптической схемы голографического адаптивного интерферометра для контроля толщины покрытий, наносимых на оптические элементы, что позволило осуществлять мониторинг исследуемых объектов в отсутствие внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу [16].

### Заключение

Таким образом, в рамках настоящей работы представлены результаты теоретических исследований по оптимизации процесса считывания ненаклонных пропускающих голограмм, сформированных в фоторефрактивном пьезокристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  среза ( $\bar{1}\bar{1}0$ ), с учетом амплитудной составляющей смешанной голографической решетки. Полученные в работе данные могут быть применены для рационального использования этого образца кристалла в оптических схемах адаптивных голографических интерферометров, реализуемых на основе пропускающей геометрии записи голограмм в фоторефрактивном кристалле.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Петров, М.П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – СПб.: Наука. С.-Петербургское отд-ние, 1992. – 320 с.
2. Фоторефрактивные эффекты в электрооптических кристаллах: монография / С.М. Шандаров [и др.]. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 242 с.
3. Шепелевич, В.В. Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах: монография / В.В. Шепелевич. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 254 с.
4. Шепелевич, В.В. Влияние оптической активности на дифракционную эффективность голограмм и поляризацию дифрагированного света в фоторефрактивных кубических кристаллах / В.В. Шепелевич // ЖТФ. – 1986. – Т. 56, № 3. – С. 618–619.
5. Петров, М.П. Фоточувствительные электрооптические среды в голографии и оптической обработке информации / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – Ленинград: Наука, 1983. – 270 с.
6. Влияние пьезоэффекта на процессы записи и восстановления голограмм в фоторефрактивных кристаллах / А.А. Изванов [и др.] // Автоматрия. – 1986. – № 2. – С. 79–84.
7. Андреева, О.В. Прикладная голография: учебное пособие / О.В. Андреева. – СПб: СПбГУ-ИТМО, 2008. – 184 с.

8. Ханун, Х.К. Фотохромные эффекты в фоторефрактивных кристаллах титаната висмута: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.05 / Х.К. Ханун; Белорус. госуд. ун-т. – Минск, 2013. – 23 с.
9. Montemezzani, G. Light diffraction at mixed phase and absorption gratings in anisotropic media for arbitrary geometries / G. Montemezzani, M. Zgonik // Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 55, № 1. – P. 1035–1047.
10. Contribution of nonlinear absorption and elasto-optic effect in photorefractive grating recording in GaAs / K. Shcherbin [et al.] // Opt. Soc. Am. B. – 1996. – Vol. 13, № 10. – P. 2268–2277.
11. Theoretical analysis of mechanism of photorefractive enhancement of photochromic gratings in BSO / D.A. Fish [et al.] // Opt. Comm. – 1993. – Vol. 98, № 4–6. – P. 349–356.
12. Шепелевич, В.В. Смешанные пропускающие голограммы в фоторефрактивном пьезокристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  / В.В. Шепелевич, А.В. Макаревич, С.М. Шандаров // Письма в ЖТФ. – 2014. – Т. 40, № 22. – С. 83–89.
13. Обнаружение вклада обратного флексоэлектрического эффекта в фоторефрактивный отклик в монокристалле титаната висмута / С.М. Шандаров [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 2012. – Т. 95, № 12. – С. 699–702.
14. Contribution of the inverse flexoelectric effect to counterpropagating two-wave mixing of light beams in photorefractive crystals / S.M. Shandarov [et al.] // J. Opt. Technol. – 2013. – Vol. 80, № 7. – P. 409–414.
15. Diffusion recording in photorefractive sillenite crystals: an analytical approach for engineering purposes / E. Shamonina [et al.] // Opt. Comm. – 2000. – Vol. 180, № 1–3. – P. 183–190.
16. Голографический интерферометр на основе фоторефрактивного кристалла для контроля изменения толщины покрытий оптических элементов / А.В. Макаревич [и др.] // Вестник ФФИ. – 2013. – № 4. – С. 70–79.
- Работа выполнена при поддержке Государственной комплексной программы научных исследований «Электроника и фотоника», задание 2.2.18, а также Минобрнауки Российской Федерации в рамках задания № 2014/225 (проект № 2491).

Поступила в редакцию 16.07.14.



УДК 512.542

О  $P$ -СВОЙСТВЕ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Баожун Ли, Амир Лиу

*Колледж прикладной математики, Ченгдуйский университет информационной технологии,  
Ченгду, Китай*ON  $P$ -PROPERTY OF SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

Baojun Li, Aming Liu

*College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu, China*

Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$ . Мы говорим, что  $H$  имеет  $P$ -свойство в  $G$ , если  $|G/K : N_{G/K}(HK/K \cap L/K)|$  является  $p$ -числом для любого  $pd$ -главного фактора  $L/K$  группы  $G$ . Используя это понятие, найдены некоторые новые критерии  $p$ -нильпотентности групп.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $p$ -нильпотентная группа,  $P$ -свойство подгруппы.

Let  $H$  be a subgroup of a group  $G$ . We say that  $H$  has  $P$ -property in  $G$  if  $|G/K : N_{G/K}(HK/K \cap L/K)|$  is a  $p$ -number for any  $pd$ -chief factor  $L/K$  of  $G$ . Using this property of subgroups, some new criterions of  $p$ -nilpotency of groups are obtained.

**Keywords:** finite group,  $p$ -nilpotent group,  $P$ -property of subgroup.

**Introduction**

Throughout this paper, all groups considered are finite and  $G$  always denotes a finite group. We use  $\pi(G)$  to denote the set of all prime divisors of the order  $|G|$  of  $G$ ,  $\pi$  denotes a set of some primes and  $\pi'$  is the complement of  $\pi$  in the set  $\mathbb{P}$  of all primes. An integer  $n$  is called a  $\pi$ -number if all its prime divisors belong to  $\pi$ .  $G$  is said to be a  $\pi$ -group if  $\pi(G) \subseteq \pi$ .  $G$  is called a  $\pi d$ -group if  $\pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$ . A class  $\mathfrak{F}$  of groups is called a formation if  $\mathfrak{F}$  is closed under taking homomorphic image and subdirect product. A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be saturated if it contains every group  $G$  with  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ . All unexplained notions and terminology are standard, as in [1], [2] or [3].

Recall that a subgroup  $A$  of  $G$  is said to permute with a subgroup  $B$  if  $AB = BA$ . It is known that  $AB$  is a subgroup of  $G$  if and only if  $A$  permutes with  $B$ . Thus the permutability of subgroups is very important. A subgroup  $H$  of  $G$  is called quasinormal [4] or permutable [3] in  $G$  if  $H$  permutes with all subgroups of  $G$ . If  $H$  permutes with all Sylow subgroups of  $G$ , then  $H$  is called  $s$ -permutable in  $G$  [5]. After the work in [5], [6], many authors attempted to study and apply other kinds of embedding properties of subgroups. For instance, a subgroup  $H$  in  $G$  is called seminormal [7], [8] if  $H$  is permutable with all subgroups of some supplement of  $H$  in  $G$ ; A subgroup  $H$  of  $G$  is called semipermutable in  $G$  [9] if it is permutable with every subgroup  $K$  of  $G$  with  $(|H|, |K|) = 1$ ;

A subgroup  $H$  of a group  $G$  is said to be  $S$ -quasinormally embedded in  $G$  [10] if for each prime  $p$  dividing  $|H|$ , a Sylow  $p$ -subgroup of  $H$  is also a Sylow  $p$ -subgroup of some  $s$ -permutable subgroup of  $G$ ; A subgroup  $H$  of  $G$  is said to be conditionally permutable in  $G$  if  $H$  permutes with some conjugate of any subgroup of  $G$  [11]. More recently, W. Guo and A.N. Skiba [12] studied the structure of group by  $s$ -embedded and  $n$ -embedded subgroups.

It is known that if a  $p$ -group  $H$  is  $s$ -permutable in  $G$  then  $|G : N_G(H)|$  is a  $p$ -number. Generalizing this property we give the following definition:

**Definition 0.1.** Let  $H$  be a subgroup of  $G$ . We call that  $H$  has  $P$ -property in  $G$  if for any  $pd$ -chief factor  $L/K$  of  $G$ ,  $|G/K : N_{G/K}(HK/K \cap L/K)|$  is a  $p$ -number.

In any finite soluble group  $G$ , it is easy to see that all permutable and  $s$ -permutable subgroups have  $P$ -property in  $G$ . Also, suppose that  $H$  is a  $p$ -subgroup of a group  $G$  ( $G$  is not necessary soluble), then  $H$  has  $P$ -property if  $H$  is seminormal, semipermutable,  $s$ -quasinormal embedded or so on in  $G$  (see proofs in Section 1).

The subgroups having  $P$ -property deeply influence the structure of a group. In this paper, we shall give some new criteria of  $p$ -nilpotency of groups.

**2 Elementary Properties**

In this section, we give some elementary results of  $P$ -property of subgroups, some of which are also lemmas of our main results.

**Lemma 1.1.** *Let  $H$  be a subgroup of  $G$  and  $N$  a normal subgroup of  $G$ . If  $H$  has  $P$ -property in  $G$ , then  $HN/N$  has  $P$ -property in  $G/N$ .*

*Proof.* (1) Let  $(L/N)/(K/N)$  be a  $pd$ -chief factor of  $G/N$ . Then  $L/K$  is a  $pd$ -chief factor of  $G$  and hence  $|G/K : N_{G/K}(HK/K \cap L/K)|$  is a  $p$ -number. It follows directly that

$$|(G/N)/(K/N):$$

$N_{(G/N)/(K/N)}((HK/N)/(K/N) \cap (L/N)/(K/N))|$  is a  $p$ -number and hence the lemma holds.

Let  $X$  be a subset of  $G$ , a subgroup  $H$  is said  $X$ -permutable with  $T$  if there is an element  $x \in X$  such that  $HT^x = T^xH$  (cf. [13]).

**Proposition 1.2.** *Let  $H$  be a  $p$ -subgroup of  $G$ . Then  $H$  has  $P$ -property in  $G$  if one of the following holds:*

- (1)  $H$  is normal in  $G$ ;
- (2)  $H$  is permutable in  $G$ ;
- (3)  $H$  is  $s$ -permutable in  $G$ ;
- (4)  $H$  is  $X$ -permutable with all Sylow subgroups of  $G$ , where  $X$  is a soluble normal subgroup of  $G$ .

*Proof.* Since all normal subgroups, all permutable subgroups and all  $s$ -permutable subgroups in  $G$  are  $X$ -permutable with all Sylow subgroups in  $G$  for any subgroup  $X$  of  $G$ , we only need to prove that  $H$  satisfies  $P$ -property in  $G$  when (4) holds. Let  $L/K$  be any  $pd$ -chief factor of  $G$ . Then  $HK/K$  is  $XK/K$ -permutable with all Sylow subgroups of  $G/K$  and  $XK/K$  is a soluble normal subgroup of  $G/K$ . If  $K \neq 1$ , then, by induction on  $|G|$ , we can assume that  $HK/K$  satisfies  $P$ -property in  $G/K$  and hence

$$|G/K : N_{G/K}(HK/K \cap L/K)|$$

is a  $p$ -number. Assume that  $K=1$ . Then  $L$  is minimal normal in  $G$ . Assume that  $L$  is abelian. Then  $L$  is a  $p$ -subgroup. If  $H \cap L = 1$ , then it holds clearly that  $|G : N_G(H \cap L)| = 1$  is a  $p$ -number. Assume that  $H \cap L \neq 1$ . We claim that  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $p$ -number. Let  $q$  be any prime divisor of  $|G|$  with  $q \neq p$  and  $G_q$  a Sylow  $q$ -subgroup of  $G$ . Then there is an element  $x \in X$  such that  $HG_q^x = G_q^xH$ . Since  $L$  is a normal  $p$ -group, we have that  $L \cap HG_q^x = L \cap H$  is a normal subgroup of  $HG_q^x$ . Hence  $G_q^x \subseteq N_G(H \cap L)$  and so  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $q'$ -number. Now, by the choice of  $q$ , we have obtained that  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $p$ -number when  $L$  is abelian. Assume that  $L$  is nonabelian. Then  $L \cap X = 1$  and hence  $X \subseteq C_G(L)$ . Let  $q$  be any prime divisor of  $|L|$  and  $Q$  a Sylow  $q$ -subgroup of  $L$ . Put  $G_q$  be a Sylow  $q$ -subgroup of  $G$  such that  $Q \leq G_q$ . By hypotheses, there is an element  $x \in X$

such that  $HG_q^x = G_q^xH$ . Clearly,

$$(|HG_q^x : H|, |HG_q^x : G_q^x|) = 1$$

and  $L \cap HG_q^x \leq HG_q^x$ . By [2, Lemma 3.8.2],

$$\begin{aligned} L \cap HG_q^x &= (L \cap HG_q^x \cap H)(L \cap HG_q^x \cap G_q^x) = \\ &= (H \cap L)(L \cap G_q^x) = (H \cap L)Q^x. \end{aligned}$$

Since  $X \subseteq C_G(L)$ ,  $Q^x = Q$  and so  $H \cap L$  permutes with  $Q$ . By the choice of  $Q$ , we see that  $H \cap L$  is  $s$ -permutable in  $L$  and so is subnormal in  $L$ . Since  $L$  is minimal normal in  $G$ ,  $L$  is a product of some simple groups. Thus  $H \cap L \trianglelefteq L$ . Now consider that  $q$  is a prime different from  $p$ . Then  $H \cap L$  char  $(H \cap L)Q$  since  $(H \cap L)Q \leq L$ . On the other hand,  $(H \cap L)Q = L \cap HG_q^x \leq HG_q^x$  by the above argument. Thus  $G_q^x \subseteq N_G(H \cap L)$  and hence  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $q'$ -number for any  $q \neq \pi(H \cap L)$ . Therefore,  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $p$ -number and the proposition holds.

**Proposition 1.3.** *Let  $H$  be a  $p$ -subgroup of  $G$ . If  $H$  is seminormal or semipermutable in  $G$ , then  $H$  satisfies  $P$ -property in  $G$ .*

*Proof.* Assume that  $H$  is seminormal in  $G$  and let  $T$  be a supplement of  $H$  in  $G$  such that  $H$  permutes with all subgroup of  $T$ . Let  $q$  be any prime divisor of  $|G|$  different from  $p$  and  $G_q$  an arbitrary Sylow  $q$ -subgroup of  $G$ . Then  $G_q^x \subseteq T$  for some  $x \in H$  since  $G = HT$  and  $H$  is a  $p$ -subgroup. Thus  $H$  permutes with  $G_q^x$  and so  $(HG_q^x)^x = HG_q^x$  is a subgroup of  $G$ . It follows that  $H$  permutes with  $G_q$ . Let  $L/K$  be any  $pd$ -chief factor of  $G$ . Clearly,  $HK/K$  is seminormal in  $G/K$ . If  $K \neq 1$ , then, by induction on  $|G|$ , we can assume that  $HK/K$  satisfies  $P$ -property in  $G/K$  and hence  $|G/K : N_{G/K}(HK/K \cap L/K)|$  is a  $p$ -number. Assume that  $K=1$ . Then  $L$  is minimal normal in  $G$ . If  $L$  is abelian, then it can be obtained that  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $p$ -number by an argument as in Proposition 1.2. Assume that  $L$  is nonabelian. We claim that  $H \cap L = 1$ . Let  $Q$  be any Sylow  $q$ -subgroup of  $L$  and choose  $G_q$  to be a Sylow  $q$ -subgroup of  $G$  containing  $Q$ . Then  $HG_q = G_qH$  and, by [2, Lemma 3.8.2],

$$L \cap HG_q = (L \cap H)(L \cap G_q) = (H \cap L)Q.$$

This induce that  $H \cap L$  permutes with all Sylow  $q$ -subgroup of  $L$ . Since  $L$  is nonabelian,  $(H \cap L)Q \neq L$  by Burnside  $p^a q^b$ -Theorem. It follows from [14, Theorem 3] that there is a proper normal subgroup  $N$  of  $L$  such that  $H \cap L \subseteq N$  or  $Q \subseteq N$ . But  $Q \subseteq N$  is nonsense since  $Q$  is a Sylow

$q$ -subgroup of  $L$  and  $L$  is a direct product of some nonabelian simple groups which are isomorphic to each other. Hence  $H \cap L \subseteq N$ . Repeat this argument, we can find finally that  $H \cap L$  is subnormal in  $L$ . Thus  $H \cap L \subseteq O_p(L) = 1$ . It follows that  $H \cap L \trianglelefteq G$  and, certainly  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $p$ -number. Similarly, one can prove that  $H$  satisfies  $P$ -property in  $G$  if  $H$  is semipermutable in  $G$  and the proposition holds.

**Lemma 1.4.** *Let  $H$  be a  $p$ -subgroup of  $G$  and  $N$  a minimal normal subgroup of  $G$ . Assume that  $H$  has  $P$ -property in  $G$ . If there is a Sylow  $p$ -subgroup  $G_p$  of  $G$  such that  $H \cap N \trianglelefteq G_p$ , then  $H \cap N = N$  or  $1$ .*

*Proof.* Since  $H$  has  $P$ -property in  $G$ ,  $|G : N_G(H \cap N)|$  is a  $p$ -number. On the other hand, since  $H \cap N \trianglelefteq G_p$ ,  $|G : N_G(H \cap N)|$  is a  $p'$ -number. Thereby,  $H \cap N$  is normal in  $G$  and it follows that  $H \cap N = N$  or  $1$  since  $N$  is minimal normal in  $G$  and the lemma holds.

**Lemma 1.5.** *Let  $H$  be a  $p$ -subgroup of  $G$  for some prime divisor  $p$  of  $|G|$  and assume that  $H$  has  $P$ -property in  $G$ . Then any  $G$ -chief factor  $L/K$  which does not avoid by  $H$  is a  $p$ -factor and hence is abelian.*

*Proof.* Assume that  $L/K$  is a  $G$ -chief factor which does not avoid by  $H$ . Then  $(L/K)/(K/K)$  is a chief factor of  $G/K$  and does not avoid by  $HK/K$ . Since  $HK/K$  satisfies  $P$ -property in  $G/K$  by lemma 1.1, we can obtain that  $L/K \cong (L/K)/(K/K)$  is a  $p$ -factor by induction on  $|G|$  if  $K \neq 1$ . Assume that  $K = 1$ . Since  $H$  has  $P$ -property in  $G$ ,  $|G : N_G(H \cap L)|$  is a  $p$ -number. This induces that  $G = G_p N_G(H \cap L)$ , where  $G_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  contained  $H \cap L$ . By [2, Lemma 3.4.9],  $(H \cap L)^G \subseteq G_p$  and hence  $(H \cap L)^G \subseteq O_p(G)$ . It follows that  $L \subseteq O_p(G)$  since  $L \cap O_p(G) \supseteq H \cap L \neq 1$  and  $L$  is minimal normal in  $G$ . Thus the lemma holds.

Recall that a group is called a  $C_\pi$ -group if it has at least one Hall  $\pi$ -subgroups and all its Hall  $\pi$ -subgroups are conjugate.

**Lemma 1.6.** *Let  $G$  be a  $C_\pi$ -group and  $p \notin \pi$ . Assume that  $P$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . If every maximal subgroup of  $P$  (except one) has a  $\pi$ -closed supplement in  $G$ , then  $G$  is  $\pi$ -closed.*

*Proof.* It can be proved similar to Lemma 2.2 in [15] by choose  $Q$  to be a Hall  $\pi$ -subgroup of  $G$ .

## 2 Some Results

**Theorem 2.1.** *Let  $p$  be a minimal prime divisor of  $|G|$ ,  $E$  be a normal subgroup of  $G$  such that  $G/E$  is  $p$ -nilpotent. Suppose that  $P$  is a Sylow*

*$p$ -subgroup of  $E$ . If there is a subgroup  $D$  of  $P$  with  $1 < |D| < |P|$  such that every subgroup  $H$  in  $\Sigma_D = \{H \subseteq P \mid |H| = |D|, \text{ or } |H| = 2|D| \text{ and } \exp(H) > 2 \text{ whenever } P \text{ is nonabelian } 2\text{-group and } |P : D| > 2\}$  either has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$  or  $P$ -property in  $G$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

*Proof.* Assume that the theorem does not hold and choose  $G$  to be a counter example of minimal order. We divide the proof into the following steps.

$$(1) O_{p'}(G) = 1.$$

If  $O_{p'}(G) \neq 1$ , then the hypotheses still hold on  $G/O_{p'}(G)$  by Lemma 1.1. It follows from the choice of  $G$  that  $G/O_{p'}(G)$  is  $p$ -nilpotent and so is  $G$ .

$$(2) O_p(E) = O_p(G) \cap E \neq 1.$$

Let  $N$  be a minimal normal subgroup of  $G$  with  $N \subseteq E$ . Then  $p \mid |N|$  by (1). Let  $G_p$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  with  $P \subseteq G_p$ . If there is a subgroup  $H$  of order  $|D|$  such that  $1 \neq H \cap N \trianglelefteq G_p$  and  $H$  has  $P$ -property in  $G$ , then  $N$  is a  $p$ -group by lemma 1.5 and hence  $O_p(E) \neq 1$ . Assume that any such subgroup  $H$  is not  $P$ -normal in  $G$ . Then  $H$  have a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ . Let  $P_1$  be any maximal subgroup of  $G_p$ . If  $P_1 \cap N \neq 1$ , then there must be a subgroup  $H \subseteq P \cap P_1$  of order  $|D|$  with  $1 \neq H \cap N \trianglelefteq G_p$ . In fact, if  $|D| < P_1 \cap N$ , then we can choose  $H$  to be a subgroup of  $P_1 \cap N$ , otherwise, we can choose  $H$  with  $P_1 \cap N \leq H \leq P \cap P_1$  since  $|D| \leq |P \cap P_1|$ . Thereby,  $H$  and so  $P_1$  has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ . If  $N_p = G_p \cap N$ , which is a Sylow  $p$ -subgroup of  $N$ , is not of order  $p$ , then, for every maximal subgroup  $P_1$  of  $G_p$ , we have  $P_1 \cap N = P_1 \cap N_p \neq 1$ . By the above argument, every maximal subgroup  $P_1$  of  $G_p$  has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ . If  $p > 2$ , then  $G$  is soluble and so is a  $C_{p'}$ -group. If  $p = 2$ , then  $G$  is a  $C_{p'}$ -group by [16, Main Theorem]. Now, by Lemma 1.6,  $G$  is  $p'$ -closed and so is  $p$ -nilpotent, a contradiction. Assume that  $N_p$  is cyclic of order  $p$ . Then  $N$  is simple since  $N$  is minimal normal in  $G$ . But  $p$  is the minimal prime divisor of  $|G|$  and so is of  $|N|$ . Thus  $N$  is soluble since  $N_p$  is cyclic. It follows that  $|N| = p$  and hence  $O_p(E) \supseteq N \neq 1$ .

$$O_p(E) = O_p(G) \cap E \text{ is clear and (2) holds.}$$

(3) *Let  $N$  be a minimal normal subgroup of  $G$  with  $N \subseteq O_p(E)$ . Then  $|N| = |D|$ .*

If  $|N| > |D|$ , then there is a subgroup  $H$  of  $N$

such that  $|H|=|D|$  and  $H \trianglelefteq G_p$ . If  $H$  has  $P$ -property in  $G$ , then  $H=H \cap N=N$  or  $1$  by lemma 1.4, a contradiction. Assume that  $H$  has a  $p$ -nilpotent supplement  $U$  in  $G$ . Then  $G=HU=NU$  and it follows that  $N \cap U \neq 1$ . Clearly,  $N \cap U \trianglelefteq G$ , so  $N \subseteq U$  and  $G=U$  is  $p$ -nilpotent, a contradiction. Thus we can assume that  $|N| \leq |D|$ . If  $|N| < |D|$ , then, by lemma 1.1, we see that the hypotheses hold on  $G/N$  and, by the choice of  $G$ ,  $G/N$  is  $p$ -nilpotent. If  $N \subseteq \Phi(G)$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent since the formation of all  $p$ -nilpotent group is saturated. Assume that  $N \not\subseteq \Phi(G)$ . Then  $N$  is complemented in  $G$ . Let  $X$  be a complement of  $N$  in  $G$  and  $Q$  a Hall  $p'$ -subgroup of  $X \cap E$ . Then, since

$$X \cap E \cong (X \cap E)N/N = E/N \leq G/N$$

is  $p$ -nilpotent,  $NQ/N \text{ char } E/N \trianglelefteq G/N$  and so  $NQ \trianglelefteq G$ . By Frattini Argument,

$$G = (NQ)N_G(Q) = NN_G(Q).$$

Since  $O_p(G)=1$ ,  $N_G(Q) \neq G$ . Hence  $G_p \not\subseteq N_G(Q)$  and so  $G_p \cap N_G(Q) < G_p$ . Assume that  $P_1$  is a maximal subgroup of  $G_p$  containing  $G_p \cap N_G(Q)$ . If  $N \subseteq P_1$ , then

$$G_p = G_p \cap NN_G(Q) = N(G_p \cap N_G(Q)) \subseteq NP_1 = P_1,$$

a contradiction. Thus  $N \not\subseteq P_1$ . Since  $P_1$  is maximal in  $G_p$ ,  $N \cap P_1$  is maximal in  $N$  and  $N \cap P_1 \trianglelefteq G_p$ . Clearly,  $P \cap P_1$  is maximal in  $P$  and

$$|N \cap P_1| < |N| < |D| \leq |P \cap P_1|,$$

so there is a subgroup  $H$  of  $P_1$  such that  $N \cap P_1 < H \leq P \cap P_1$  and  $|H|=|D|$ . Thus  $N \cap P_1 = N \cap H$ . If  $H$  has  $P$ -property in  $G$ , then, by lemma 1.4,  $N \cap P_1 = N \cap H = 1$  or  $N$ . If  $N \cap P_1 = N$ , then  $N \subseteq P_1$ , a contradiction. Thus  $N \cap P_1 = 1$ . It follows that  $N$  is cyclic of order  $p$  and therefore,  $G$  is  $p$ -nilpotent since  $G/N$  is  $p$ -nilpotent and  $p$  is a minimal prime divisor of  $|G|$ . This contradicts to the choice of  $G$ . By hypotheses,  $H$  has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$  and so has a  $p$ -nilpotent supplement in  $E$ . Assume that  $E=HU$  for some  $p$ -nilpotent subgroup  $U$  of  $E$ . Then  $U$  contains some conjugate of  $Q$  since  $E$  is clearly  $p$ -soluble and  $U$  contains some Hall  $p'$ -subgroup of  $E$ . Without loss of generality, we can assume that  $Q \subseteq U$ . Hence  $U \subseteq N_G(Q)$ . Since

$$E = HU = (P \cap P_1)U,$$

$$\begin{aligned} P &= P \cap E = P \cap (P \cap P_1)U = \\ &= (P \cap P_1)(P \cap U) = \\ &= (P \cap P_1)(P \cap N_G(Q) \cap U) \leq \\ &\leq (P \cap P_1)(P_1 \cap U) = P \cap P_1. \end{aligned}$$

It follows that  $P \subseteq P_1$  and so  $N \subseteq P \subseteq P_1$ , a contradiction. This contradiction shows that (3) holds.

(4)  $N$  is cyclic and so  $|D|=|N|=p$ .

Assume that  $N$  is noncyclic. We claim that all minimal subgroup of  $E/N$  of order  $p$  either has  $p$ -nilpotent supplement in  $G$  or has  $P$ -property in  $G$ . Assume  $A/N$  is of order  $p$  and  $A/N \subseteq E/N$ . Clearly,  $A$  is noncyclic since  $N$  is. Thus there is a maximal subgroup  $H$  of  $A$  different from  $N$ . Therefore,  $A/N = HN/N$  and  $|H|=|N|=|D|$ . If  $A/N$  has no  $p$ -nilpotent supplement in  $G/N$ , then clearly,  $H$  has no  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ . Hence, by hypotheses,  $H$  has  $P$ -property in  $G$ . By lemma 1.1,  $A/N = HN/N$  has  $P$ -property in  $G/N$ . Analogously, one can prove that if  $P$  is a nonabelian 2-group and  $|P:D| > 2$ , then every cyclic subgroup of  $P/N$  of order 4 either has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G/N$  or has  $P$ -property in  $G/N$ . Thus, if  $N$  is noncyclic, then the hypotheses hold on  $G/N$ . Thereby,  $G/N$  is  $p$ -nilpotent by the choice of  $G$ . By a similar argument as in (3), one can prove that  $G$  is  $p$ -nilpotent. This contradicts to the choice of  $G$  and hence  $N$  is cyclic and  $|N|=|D|=p$ .

(5)  $O_p(E) \leq Z_\infty(G)$ .

Since  $p$  is the minimal divisor of  $G$ , it is equivalent to prove that every  $G$ -chief factor  $L/K$  in  $O_p(E)$  is of prime order.

Assume that there exists a  $G$ -chief factor in  $O_p(G)$  which is not of prime order. Then we can choose a  $G$ -chief factor  $L/K$  in  $O_p(G)$  such that  $|L/K|$  is not a prime but  $|U/V|$  is a prime for all chief factor  $U/V$  of  $G$  with  $U \subseteq P$  and  $|U| < |L|$ .

Let  $W = \bigcap_{U \subseteq K} C_G(U/V)$ , where  $U/V$  is a

$G$ -chief factor. Then, by [3, A, (12.3)], all elements in  $W$  of  $p'$ -order act trivially on  $K$  since they act trivially on each  $G$ -chief factor of  $K$ . Let  $C = C_G(K)$ .

Assume  $L \not\subseteq C$ . If  $L \subseteq KC$ , then

$$L \cap C / K \cap C \cong L/K$$

is a chief factor of  $G$ . By the choice of  $L/K$ ,  $|L/K|=|L \cap C / K \cap C|$  is a prime, a contradiction.

If  $L \not\subseteq KC$ , then it is easily to see that

$$LC/K = L/K \times KC/K$$

and thereby, all  $p'$ -elements in  $C$  act trivially on  $L/K$ . It follows that all  $p'$ -elements in  $W$  act trivially on  $L/K$ . Hence  $W \subseteq C_G(L/K)$ . Since  $G/W = G / \bigcap_{U \subseteq K} C_G(U/V)$  is an abelian group of exponent dividing  $p-1$  and  $W \subseteq C_G(L/K)$ ,  $G/C_G(L/K)$  is an abelian group of exponent

dividing  $p-1$ . Since  $L/K$  is  $G$ -irreducible,  $L/K$  is of prime order by [17, I, Lemma 1.3], a contradiction.

Now assume that  $L \subseteq C$ . Then  $K \subseteq Z(L)$ . Let  $a, b$  be elements of order  $p$  in  $L$ . Suppose  $p > 2$  or  $P$  is abelian. Then  $(ab)^p = a^p b^p [b, a]^{\frac{p(p-1)}{2}} = 1$ . Hence the product of elements of order  $p$  is still of order  $p$  and so  $\Omega = \{a \in L \mid a^p = 1\}$  is a subgroup of  $L$ . If  $\Omega \subseteq K$ , then all elements of  $W$  with  $p'$ -order act trivially on every element of  $L$  of order  $p$  since they act trivially on  $K$ . It follows from [18, IV, Satz 5.12] that all elements in  $W$  of  $p'$ -order act trivially on  $L$ . Thus  $W \subseteq C_G(L/K)$  and, as above argument,  $L/K$  is of prime order, a contradiction. If  $\Omega \not\subseteq K$ , then  $L = \Omega K$ . Choose an element  $a$  in  $\Omega \setminus K$  such that  $\langle a \rangle K / K \subseteq L/K \cap Z(G_p/K)$ . Let  $H = \langle a \rangle$ . If  $H$  has a  $p$ -nilpotent supplement  $U$  in  $G$ , then  $HK/K$  has a  $p$ -nilpotent supplement  $UK/K$  in  $G/K$ . Thus

$$G/K = (HK/K)(UK/K) = (L/K)(UK/K).$$

Since  $L/K$  is minimal normal in  $G/K$  and is abelian,  $L/K \cap UK/K = 1$  or  $L/K \subseteq UK/K$  and  $UK/K = G/K$ . If  $L/K \cap UK/K = 1$ , then

$$\begin{aligned} |L/K| &= |G/K : UK/K| = \\ &= |HUK/K : UK/K| \leq |H| = p. \end{aligned}$$

It follows that  $L/K$  is cyclic of order  $p$ , which contradicts to the choice of  $L/K$ . If  $L/K \subseteq UK/K = G/K$ , then  $L/K$  is cyclic since  $L/K$  is minimal normal in  $G/K$  and  $G/K = UK/K \cong U/U \cap K$  is  $p$ -nilpotent. Hence  $H$  has no  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ . Since  $a$  is of order  $p$ , by the hypotheses and (4),  $H$  has  $P$ -property in  $G$  and so  $HK/K$  satisfies  $P$ -property in  $G/K$ . It follows from lemma 1.4 that

$$L/K = HK/K \cap L/K = HK/K$$

is cyclic, a contradiction. This contradiction shows that (5) holds.

(6)  $E$  is  $p$ -nilpotent.

Assume that  $E$  is not  $p$ -nilpotent. Then  $E$  is not a  $p$ -group and so  $O_p(E) < E$ . Let  $R/O_p(E)$  be a  $G$ -chief factor with  $R \leq E$ . Then, clearly,  $R$  is not  $p$ -nilpotent. Let  $X$  be a minimal non- $p$ -nilpotent subgroup of  $R$ . Then  $X = A \rtimes B$ , where  $A$  is a  $p$ -group of exponent  $p$  or 4 (when  $A$  is a nonabelian 2-group) and  $B$  is a  $p'$ -group. If  $A \subseteq O_p(E)$ , then  $B$  acts trivially on  $A$  by (5), a contradiction. Thus  $A \not\subseteq O_p(E)$ . Hence, if  $p > 2$  or  $P$  is abelian, then there are elements of order  $p$  in  $R \setminus O_p(E)$ , and, if  $P$  is a nonabelian 2-group, then there are elements of order 2 or 4 in  $R \setminus O_p(E)$ . Assume that there is an element  $a$  of order  $p$  in  $R \setminus O_p(E)$  and let

$H = \langle a \rangle$ . Assume that  $H$  has a  $p$ -nilpotent supplement  $U$  in  $G$ . If  $H \subseteq U$ , then  $G = U$  is  $p$ -nilpotent. If  $H \not\subseteq U$ , then  $|G : U| = |H| = p$ . Since  $p$  is the minimal prime divisor of  $|E|$ ,  $U \trianglelefteq G$ . It follows that  $G$  is  $p$ -nilpotent since  $U$  is. Thus  $H$  has no  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ . By hypotheses and (4),  $H$  has  $P$ -property in  $G$ . It follows that  $HO_p(G)/O_p(G)$  has  $P$ -property in  $G/O_p(G)$ . Since  $H \not\subseteq O_p(G)$ , we have that

$$R/O_p(G) = HO_p(G)/O_p(G)$$

by Lemma 1.4. Thus  $R = HO_p(G)$  is a  $p$ -group, a contradiction. Thus there is no element of order  $p$  in  $R \setminus O_p(E)$ . Hence  $p = 2$  and there is an element  $a$  of order 4 in  $R \setminus O_p(E)$  and  $a^2 \in O_p(G)$ . By a similar argument as above, we can get a contradiction and hence  $E$  must be  $p$ -nilpotent.

(7) *The final contradiction*

By (1) and (6), we have that  $E$  is a  $p$ -group and hence  $E \leq Z_\infty(G)$  by (5). Again by (5), we see that  $G$  is  $p$ -nilpotent since  $G/E$  is. This is the final contradiction and the theorem holds.

By Theorem 2.1, we can obtain the following corollaries.

**Corollary 2.2.** *Let  $p$  be the minimal prime divisor of  $|G|$  and  $E$  be a normal subgroup of  $G$  such that  $G/E$  is  $p$ -nilpotent. Let  $P$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $E$ . If every maximal subgroup of  $P$  either has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$  or has  $P$ -property in  $G$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

*Proof.* If  $P$  is of order  $p$ , then  $E$  is clear  $p$ -nilpotent. By induction, we can assume that  $O_p(G) = 1$ . It follows that  $E$  is a  $p$ -group and so is of order  $p$ . By  $N/C$ -Theorem,  $G/C_G(E)$  is isomorphic to a subgroup of  $\text{Aut}(E)$  and hence is of order dividing  $p-1$ . Since  $p$  is the minimal prime divisor of  $|G|$ , we see that  $G/C_G(E) = 1$  and so  $E \leq Z(G)$ . Thus  $G$  is  $p$ -nilpotent since  $G/E$  is. If  $P$  is not of order  $p$ , then its maximal subgroup is not trivial and hence  $G$  is  $p$ -nilpotent by Theorem 2.1.

**Corollary 2.3.** *Let  $p$  be the minimal prime divisor of  $|G|$  and  $E$  be a normal subgroup of  $G$  such that  $G/E$  is  $p$ -nilpotent. Let  $P$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $E$ . If every subgroup of  $P$  of order 2 and 4 (if  $P$  is a nonabelian 2-group) either has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$  or  $P$ -property in  $G$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

*Proof.* It can be proved similar as Corollary 2.2.

The following corollary is direct from Propositions 1.2, 1.3 and Theorem 2.1.

**Corollary 2.4.** *Let  $p$  be the minimal prime divisor of  $|G|$  and  $E$  be a normal subgroup of  $G$*

such that  $G/E$  is  $p$ -nilpotent. Let  $P$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $E$ . If there is a subgroup  $D$  of  $P$  with  $1 < |D| < |P|$  such that for every subgroup  $H$  in  $\Sigma_D = \{H \subseteq P \mid |H| = |D|, \text{ or } |H| = 2|D| \text{ and } \exp(H) > 2 \text{ whenever } P \text{ is nonabelian } 2\text{-group and } |P : D| > 2\}$ , one of the following holds:

- (1)  $H$  is  $s$ -permutable in  $G$ ;
- (2)  $H$  is seminormal in  $G$ ;
- (3)  $H$  is semipermutable in  $G$ ;
- (4)  $H$  is  $X$ -permutable in  $G$ , where  $X$  is a soluble normal subgroup of  $G$ ;
- (5)  $H$  has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent.

#### REFERENCES

1. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow : Nauka, 1989.
2. Guo, W. The theory of classes of groups / W. Guo. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers Group, 2000.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1992.
4. Ore, O. Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5, № 2. – P. 431–460.
5. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – № 78. – P. 205–221.
6. Deskins, W. On quasinormal subgroups of finite groups / W. Deskins // Math. Z. – 1963. – № 82. – P. 125–132.
7. Su, X. Seminormal subgroups of finite groups / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 5–10.
8. Foguel, T. On seminormal subgroups / T. Foguel // J. Algebra. – 1994. – Vol. 165, № 3. – P. 633–635.

9. Wang, L. On  $s$ -semipermutable maximal and minimal subgroups of Sylow  $p$ -subgroups of finite groups / L. Wang, Y. Wang // Comm. Algebra. – 2006. – Vol. 34, № 1. – P. 143–149.

10. Ballester-Bolinches, A. Sufficient conditions for supersolubility of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Pure Appl. Algebra. – 1998. – Vol. 127, № 2. – P. 113–118.

11. Guo, W. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Southeast Asian Bull. Math. – 2005. – № 29. – P. 493–510.

12. Guo, W. Finite groups with given  $s$ -embedded and  $n$ -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2009. – Vol. 321, № 10. – P. 2843–2860.

13. Guo, W.  $X$ -permutable maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Ukrain. Mat. Zh. – 2006. – Vol. 58, № 10. – P. 1299–1309.

14. Kegel, O. Produkte nilpotenter gruppen / O. Kegel // Arch. Math. – 1961. – № 12. – P. 90C93.

15. Skiba, A. On weakly  $s$ -permutable subgroups of finite groups / A. Skiba // J. Algebra, Vol. 315, № 1. – P. 192–209.

16. Gross, F. Conjugacy of odd order Hall subgroups / F. Gross // Bull. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 19, № 4. – P. 311–319.

17. Weinstein, M. Between nilpotent and solvable / M. Weinstein (ed.). – Washington : Polygonal Publ. House, N. J., 1982.

18. Huppert, B. Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.

*The author were supported by the NNSF of P.R. China (Grant 11471055) and the Scientific Research Foundation of CUIT (Grant CSRF201008).*

*Поступила в редакцию 29.07.14.*

УДК 512.542

## О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФОРМАЦИИ ВСЕХ ГРУПП С $K$ - $\mathfrak{F}$ -СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.С. Вегера

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

## ON LOCAL PROPERTIES OF THE FORMATIONS OF GROUPS WITH $K$ - $\mathfrak{F}$ -SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.S. Vegera

*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

Рассматривается класс всех конечных групп, силовские подгруппы которых являются  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальными. Исследуется условие его насыщенности, а также устанавливается локальный экран в разрешимом случае.

**Ключевые слова:** конечная группа, силовская подгруппа,  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа, насыщенная формация, локальная формация.

The class of all finite groups with Sylow  $K$ - $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups is considered. The condition of saturation of this class is investigated, as well as the local screen in solvable case is established.

**Keywords:** finite group, Sylow subgroup,  $K$ - $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup, saturated formation, local formation.

### Введение

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа  $G$  нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной в  $G$ . В 1969 году Т. Хоукс [1] обобщил понятие субнормальности, введя определение  $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы в разрешимой группе. В 1978 году Л.А. Шеметков в монографии [2] распространил понятие  $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы на произвольные конечные группы. Понятие  $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы активно изучалось в различных направлениях и нашло многочисленные приложения [3]. В 1978 году О. Кегель [4] ввел понятие  $\mathfrak{F}$ -достижимой ( $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальной, согласно [3]) подгруппы.

В работе [5] А.Ф. Васильевым было начато рассмотрение следующей задачи. Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация. Что можно сказать о структуре группы  $G$ , если все ее силовские подгруппы  $\mathfrak{F}$ -субнормальны в  $G$ ? В статье [6] А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой был введен и исследован класс  $w\mathfrak{F}$  всех групп, силовские подгруппы которых являются  $\mathfrak{F}$ -субнормальными.

В работе [7] изучались свойства класса  $\bar{w}\mathfrak{F}$  всех групп, у которых силовские подгруппы являются  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальными. В частности, в классе разрешимых групп было установлено, что если  $\mathfrak{F}$  – наследственная насыщенная формация, то и класс  $\bar{w}\mathfrak{F}$  является наследственной насыщенной формацией.

В настоящей работе продолжено исследование свойств класса  $\bar{w}\mathfrak{F}$  для непустой формации  $\mathfrak{F}$ . В частности, доказана насыщенность формации  $\bar{w}\mathfrak{F}$  в общем случае (без ограничения разрешимости). Кроме того, найдено локальное задание формации  $\bar{w}\mathfrak{F}$  в разрешимом случае.

### 1 Предварительные результаты

В работе используются стандартные обозначения, определения и результаты. Необходимые сведения из теории групп и их формаций можно найти в монографиях [2], [3], [9].

Напомним, что  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел;  $\mathfrak{G}$  – это класс всех групп;  $\mathfrak{G}_\pi$  – класс всех  $\pi$ -групп, где  $\pi$  – некоторое множество простых чисел ( $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_\pi$  для  $\pi = \{p\}$ );  $\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп;  $\mathfrak{N}_\pi$  – класс всех нильпотентных  $\pi$ -групп;  $\mathfrak{S}$  – класс всех разрешимых групп.

Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется формацией, если он является замкнутым относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Формация  $\mathfrak{F}$  называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т. е. если из  $G/N \in \mathfrak{F}$  и  $N \leq \Phi(G)$  всегда следует, что  $G \in \mathfrak{F}$ . Формация  $\mathfrak{F}$  называется наследственной, если  $\mathfrak{F}$  вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через  $G^\mathfrak{F}$  обозначается  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. наименьшая нормальная подгруппа из  $G$ , для которой  $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$ .



**Определение 1.1** [3, с. 236]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$  (записывается  $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ), если либо  $H = G$ , либо существует цепь подгрупп  $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$  такая, что  $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$  для  $i = 1, \dots, n$ .

**Определение 1.2** [3, с. 236]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$  (записывается  $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$ ), если существует цепь подгрупп  $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$  такая, что либо  $H_{i-1} \triangleleft H_i$ , либо  $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$  для  $i = 1, \dots, n$ .

Через  $\pi(G)$  обозначается множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\pi$ -подгруппой, если  $\pi(H)$  содержится в некотором множестве  $\pi$  простых чисел.

$O_p(G)$  – наибольшая нормальная  $p$ -подгруппа группы  $G$ , где  $p \in \mathbb{P}$ .

$O_\pi(G)$  – наибольшая нормальная  $\pi$ -подгруппа группы  $G$ , где  $\pi \subseteq \mathbb{P}$ .

$\text{Syl}_p(G)$  – множество всех силовских  $p$ -подгрупп группы  $G$  для некоторого  $p \in \mathbb{P}$ . Тогда  $\text{Syl}(G) = \bigcup_{p \in \pi(G)} \text{Syl}_p(G)$  – это множество всех силовских подгрупп группы  $G$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольный класс групп. Тогда будем обозначать  $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$ .

**Определение 1.3** [9, с. 16]. Пусть  $\mathfrak{F}_1$  – класс групп,  $\mathfrak{F}_2$  – формация. Корадикальным произведением  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  называется класс

$$\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1).$$

**Определение 1.4** [3, с. 95]. Пусть  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  – формации. Тогда  $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2) \cap (\mathfrak{F}_2 \circ \mathfrak{F}_1)$  называется прямым произведением формаций  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$ .

Функция  $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$  называется локальным экраном. Через  $LF(f)$  обозначим класс всех групп, у которых для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$  и для каждого простого числа  $p$ , делящего  $|H/K|$ , выполняется  $G/C_G(H/K) \in f(p)$ . Формация называется локальной, если существует локальный экран  $f$  такой, что  $\mathfrak{F} = LF(f)$ .

Экран  $f$  формации  $\mathfrak{F}$  называется внутренним, если  $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$  для любого  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ . Внутренний экран  $f$  формации  $\mathfrak{F}$  называется максимальным внутренним, если для любого ее внутреннего экрана  $h$  имеет место включение  $h(p) \subseteq f(p)$  для любого  $p \in \mathbb{P}$ .

В работе [6] исследован класс групп  $w\mathfrak{F}$ , определяемый следующим образом.

**Определение 1.5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Класс групп  $w\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \text{ и } \forall H \in \text{Syl}(G): H \mathfrak{F}\text{-sn } G)$ .

В дальнейшем будем использовать следующие свойства класса  $w\mathfrak{F}$ .

**Лемма 1.6** [6, лемма 1.4]. Если  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация, то  $w\mathfrak{F}$  – наследственная формация.

**Теорема 1.7** [6, теорема В]. Если  $\mathfrak{F}$  – наследственная насыщенная формация, то  $w\mathfrak{F}$  – наследственная насыщенная формация.

В работе [7] изучается следующий класс групп.

**Определение 1.8.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Класс групп

$$\bar{w}\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid \forall H \in \text{Syl}(G): H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G).$$

**Лемма 1.9** [7, лемма 11]. Если  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация, то  $\bar{w}\mathfrak{F}$  – наследственная формация.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие результаты.

**Теорема 1.10** [3, с. 95]. Пусть  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  – формации и  $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) = \emptyset$ . Обозначим  $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi_1$  и  $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi_2$ . Тогда

$$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G = O_{\pi_1}(G) \times O_{\pi_2}(G)),$$

где  $O_{\pi_1}(G) \in \mathfrak{F}_1$  и  $O_{\pi_2}(G) \in \mathfrak{F}_2$  – формация. Более того, если  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  – наследственные насыщенные формации, то  $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$  – также наследственная насыщенная формация.

**Лемма 1.11** [10, лемма 2.1]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$ ,  $p$  – простое число и  $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ . Тогда  $O_p(H) \leq O_p(G)$ .

**Лемма 1.12** [10, лемма 2.2]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация, группа  $G = HA$ , где  $H$  –  $\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа,  $A$  –  $\pi(\mathfrak{F})'$ -подгруппа и  $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$ . Тогда  $H \triangleleft G$ .

**Теорема 1.13** [11, лемма 3.1.1]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация. Если подгруппа  $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-субнормальна}$  в  $G$ , то  $H \cap M K\text{-}\mathfrak{F}\text{-субнормальна}$  в  $M$  для любой  $M \leq G$ .

**Лемма 1.14** [11, лемма 3.1.9]. Если  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация,  $H \leq G \in \mathfrak{F}$  и все композиционные факторы группы  $G$  принадлежат  $\mathfrak{F}$ , то  $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$  тогда и только тогда, когда  $HK\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$ .

**Лемма 1.15** [9, лемма 4.13]. Пусть  $G$  – группа. Если  $N \triangleleft G$ ,  $N$  и  $G/N$  – разрешимы, то  $G$  разрешима.

**Лемма 1.16** [2, лемма 4.5]. Пусть  $f$  – локальный экран формации  $\mathfrak{F}$ . Группа  $G$  тогда и

только тогда принадлежит  $\mathfrak{F}$ , когда  $G/F_p(G) \in f(p)$  для любого  $p \in \pi(G)$ .

Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация и  $h$  – ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через  $h^*$  – локальный экран такой, что  $h^*(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \forall H \in \text{Syl}(G) : H \in h(p))$  для любого простого  $p$ .

**Теорема 1.17** [6, теорема D]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая наследственная насыщенная формация,  $h$  – ее максимальный внутренний локальный экран,  $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$ . Тогда  $w\mathfrak{F} = LF(h^*)$ , где  $h^*$  – максимальный внутренний локальный экран формации  $w\mathfrak{F}$ .

**Лемма 1.18** [2, теорема 3.3]. Локальная формация  $\mathfrak{F}$  имеет единственный максимальный внутренний локальный экран  $f$ , причем  $f$  удовлетворяет следующему условию:  $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$  для любого простого  $p$ .

**Лемма 1.19** [2, лемма 3.9]. Если  $H/K$  – главный фактор группы  $G$  и  $p \in \pi(H/K)$ , то  $G/C_G(H/K)$  не содержит неединичных нормальных  $p$ -подгрупп, причем  $F_p(G) \leq C_G(H/K)$ .

## 2 Насыщенность формации $\overline{w\mathfrak{F}}$

**Лемма 2.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация, группа  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$  и  $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ . Тогда каждый композиционный фактор группы  $G$  принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим композиционный ряд  $1 = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft \dots \triangleleft A_n = G$ . Тогда фактор  $A_i/A_{i-1}$  является простой группой для любого  $i = 1, \dots, n$ . Обозначим произвольный фактор  $A_i/A_{i-1}$  через  $H$ . Из леммы 1.9 следует, что  $A_i \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Так как  $\overline{w\mathfrak{F}}$  – гомоморф, то  $H \cong A_i/A_{i-1} \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Пусть  $P \in \text{Syl}(H)$ . Если  $P = H$ , то  $|H| = p^a$ , где  $p \in \mathbb{P}$ . Так как  $H$  – простая группа, то  $|H| = p$ . По условию  $\pi(H) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ . Поэтому,  $H \in \mathfrak{F}$ . Пусть теперь  $P \neq H$ . Так как подгруппа  $P$   $K\mathfrak{F}$ -sn  $H$  и  $H$  – простая неабелева группа, то существует цепь  $P = P_0 \leq \dots \leq P_{k-1} < P_k = H$  и  $P_k^\delta = H^\delta \leq P_{k-1}$ . Так как  $H^\delta \triangleleft H$ , то  $H^\delta = 1$ . Следовательно,  $H \in \mathfrak{F}$ .  $\square$

Следующая теорема устанавливает связь между классами  $\overline{w\mathfrak{F}}$  и  $w\mathfrak{F}$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация. Тогда  $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$ , где  $\pi = \pi(\mathfrak{F})$  и  $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ .

*Доказательство.* Докажем, что для любой группы  $G \in \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$  следует, что  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Пусть  $G \in \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$ . Тогда существуют такие подгруппы

$A \in \mathfrak{N}_\pi$  и  $B \in w\mathfrak{F}$  в  $G$ , что  $G = A \times B$ . Рассмотрим произвольную силовскую подгруппу  $P \leq G$ . Возможны два случая. Пусть  $P \leq A$ . Так как  $A$  – нильпотентная группа, то  $P \triangleleft A$ . Тогда имеем цепь подгрупп  $P \triangleleft A \triangleleft G$ . Следовательно, по определению,  $P$   $K\mathfrak{F}$ -sn  $G$ . Рассмотрим второй случай. Пусть  $P \leq B$ . Так как  $B \in w\mathfrak{F}$ , то  $P$   $\mathfrak{F}$ -sn  $B$ . Из  $B \triangleleft G$ , следует  $P$   $K\mathfrak{F}$ -sn  $G$ . Поэтому произвольная силовская подгруппа  $P$   $K\mathfrak{F}$ -sn  $G$ . Таким образом,  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ .

Докажем теперь, что для любой группы  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$  выполняется  $G \in \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$ . Согласно теореме 1.10, необходимо доказать, что группа  $G$  представима в виде  $G = O_{\pi'}(G) \times O_\pi(G)$ , где  $O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{N}_\pi$  и  $O_\pi(G) \in w\mathfrak{F}$ .

Пусть  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Пусть  $n$  – число всех силовских  $p$ -подгрупп группы  $G$ , где  $p \in \pi'$ . Рассмотрим  $P_i$  – произвольную силовскую  $p_i$ -подгруппу группы  $G$ , где  $p_i \in \pi'$  и  $i = 1, \dots, n$ . Тогда по лемме 1.11 подгруппа  $P_i = O_{p_i}(P_i) \subseteq O_{p_i}(G)$ . При этом порядок  $|O_{p_i}(G)| \leq |P_i|$ , поэтому  $P_i = O_{p_i}(G)$ . Следовательно,  $P_i \triangleleft G$ . Рассмотрим произведение  $A = P_1 P_2 \dots P_n$ . Ясно, что  $A$  является нормальной нильпотентной подгруппой группы  $G$ . Так как  $|A|$  и  $|G:A|$  взаимно просты, то  $A$  –  $\pi'$ -холлова подгруппа группы  $G$ . Следовательно,  $A = O_{\pi'}(G)$  и  $A \in \mathfrak{N}_\pi$ .

По теореме Шура-Цассенхауза [8] подгруппа  $A$  имеет дополнение в  $G$ , то есть существует подгруппа  $B$  порядка  $|G:A|$  такая, что  $G = AB$  и  $A \cap B = 1$ . Пусть  $H$  – силовская подгруппа из  $B$ . Рассмотрим подгруппу  $HA$ . Так как  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация и  $H$   $K\mathfrak{F}$ -sn  $G$ , то по лемме 1.13 подгруппа  $HA \cap H = H$  является  $K\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $HA$ . По лемме 1.12 подгруппа  $H \triangleleft HA$ . Тогда  $A \subseteq N_G(H)$ . Обозначим через  $m$  – число всех силовских  $p$ -подгрупп группы  $G$ , где  $p \in \pi(B)$ . Так как любая подгруппа порождается своими силовскими подгруппами, то  $B = \langle H_1, H_2, \dots, H_m \rangle$ , где  $H_i \in \text{Syl}(B)$  и  $i = 1, \dots, m$ . При этом  $A \subseteq N_G(H_i)$  для любого  $i = 1, \dots, m$ , то есть для любых  $a \in A$  и  $h_i \in H_i$  следует, что  $h_i^a \in H_i$ . Рассмотрим произвольный элемент  $h_1 h_2 \dots h_m$  из группы  $B$ . Тогда  $(h_1 h_2 \dots h_m)^a = h_1^a h_2^a \dots h_m^a \in \langle H_1 H_2 \dots H_m \rangle$ . Следовательно,  $A \subseteq N_G(B)$ . Таким образом,  $N_G(B) = G$ . Тогда  $B \triangleleft G$ . Так как  $|B|$  и  $|G:B|$  взаимно просты, то  $B$  –  $\pi$ -холлова подгруппа в  $G$ . Следовательно,  $B = O_\pi(G)$ . Итак,  $G = A \times B = O_{\pi'}(G) \times O_\pi(G)$ .

Так как  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация, то согласно лемме 1.9 класс  $\overline{w\mathfrak{F}}$  – наследственная формация. Значит,  $B \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Тогда из леммы 2.1 следует, что каждый композиционный фактор  $B$  принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Пусть  $S$  – произвольная силовская подгруппа из  $B$ . Так как  $S$   $K$ - $\mathfrak{F}$ -sn  $B$ , то по лемме 1.14 подгруппа  $S$   $\mathfrak{F}$ -sn  $B$ . Тогда  $B \in w\mathfrak{F}$ .

Итак,  $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$ .  $\square$

**Следствие 2.3.** Если  $\mathfrak{F}$  – наследственная насыщенная формация, то  $\overline{w\mathfrak{F}}$  – наследственная насыщенная формация.

*Доказательство.* Согласно лемме 1.9 класс групп  $\overline{w\mathfrak{F}}$  является наследственной формацией. По теореме 2.2 класс групп  $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$ . Заметим, что  $\mathfrak{N}_{\pi'}$  – насыщенная формация. И  $w\mathfrak{F}$  – насыщенная формация согласно теореме 1.7. Тогда по теореме 1.10 прямое произведение двух насыщенных формаций также является насыщенной формацией.  $\square$

### 3 Локальный экран формации $\overline{w\mathfrak{F}}$

Для дальнейших рассуждений сформулируем и докажем две следующие леммы.

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая формация. Если в группе  $G \in \mathfrak{E}$  существует разрешимая  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа, то  $G$  – разрешимая группа.

*Доказательство.* Пусть  $H$  – разрешимая  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа некоторой группы  $G$ . Тогда существует цепь подгрупп  $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$  такая, что  $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Так как  $H_1^{\mathfrak{F}} \leq H_0$  и  $H_0$  разрешима, то  $H_1^{\mathfrak{F}}$  – разрешимая подгруппа. Так как фактор-группа  $H_1 / H_1^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$  и по условию  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$ , то  $H_1 / H_1^{\mathfrak{F}}$  – разрешимая группа. Следовательно, по лемме 1.15 группа  $H_1$  разрешима. Аналогично для любого  $i$  получаем, что из  $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$  следует разрешимость  $H_i^{\mathfrak{F}}$  и  $H_i / H_i^{\mathfrak{F}}$  и, следовательно, разрешимость группы  $H_i$  (где  $i = 2, \dots, n$ ). Таким образом,  $H_n = G$  – разрешимая группа.  $\square$

**Лемма 3.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая формация. Тогда  $w\mathfrak{F}$  и  $\overline{w\mathfrak{F}}$  – разрешимые формации.

*Доказательство.* Пусть  $G \in w\mathfrak{F}$ . Так как любая силовская подгруппа группы  $G$  разрешима и  $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ , то согласно лемме 3.1 группа  $G$  разрешима. Следовательно,  $w\mathfrak{F}$  – разрешимая формация.

Пусть теперь  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . По теореме 2.2 группа  $G \in \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$ . Так как формации  $\mathfrak{N}_{\pi'}$  и  $w\mathfrak{F}$  разрешимы, то группа  $G$  разрешима.  $\square$

**Лемма 3.3.** Пусть  $\mathfrak{F}_i$  – формация и  $f_i$  – ее локальный экран, где  $i = 1, 2$ . Если  $f_1(p) \subseteq f_2(p)$  для любого  $p \in \mathbb{P}$ , то  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ .

*Доказательство.* Пусть  $G \in \mathfrak{F}_1$ . Тогда по лемме 1.16 фактор-группа  $G / F_p(G) \in f_1(p)$  для любого  $p \in \pi(G)$ . Так как по условию  $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ , то  $G / F_p(G) \in f_2(p)$  для любого  $p \in \pi(G)$ . Тогда по лемме 1.16 группа  $G \in \mathfrak{F}_2$ .  $\square$

**Лемма 3.4.** Пусть  $\mathfrak{F} = LF(f)$  – локальная формация, где  $f$  – ее разрешимый локальный экран. Тогда  $\mathfrak{F}$  – разрешимая формация.

*Доказательство.* Осуществляется проверкой соответствующих определений.  $\square$

Согласно теореме Гашюца – Любезедер – Шмида любая насыщенная формация является локальной, и наоборот. Поэтому в силу следствия 2.3 возникает задача о нахождении локального задания формации  $\overline{w\mathfrak{F}}$ .

Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация и  $h$  – ее максимальный внутренний локальный экран, который существует и единственен по теореме 1.18. Обозначим через  $h^*$  – локальный экран такой, что  $h^*(p) = (G \in \mathfrak{E} \mid \forall H \in \text{Syl}(G) : H \in h(p) \text{ и } H \text{ K-}\mathfrak{F}\text{-sn } G)$  для любого простого  $p$ . Следующая теорема устанавливает локальный экран  $\overline{w\mathfrak{F}}$  для разрешимой наследственной насыщенной формации  $\mathfrak{F}$ .

**Теорема 3.5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая наследственная насыщенная формация,  $h$  – ее максимальный внутренний локальный экран,  $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ ,  $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ . Тогда  $\overline{w\mathfrak{F}} = LF(f)$ , где  $f$  – максимальный внутренний локальный экран формации  $\overline{w\mathfrak{F}}$  такой, что

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi'; \\ \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi}, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть формация  $\mathfrak{X} = LF(f)$ . Покажем, что  $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{X}$ . Вначале докажем, что  $\overline{w\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{X}$ .

Напомним, что  $\mathfrak{N}_{\pi'} = LF(f_1)$ , где

$$f_1(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi', \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

По теореме 1.17  $w\mathfrak{F} = LF(f_2)$ , где

$$f_2(p) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } p \in \pi' \\ \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi}, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

Так как  $f_1(p) \subseteq f(p)$  и  $f_2(p) \subseteq f(p)$  для любого  $p \in \mathbb{P}$ , то по лемме 3.3 следует, что  $\mathfrak{N}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{X}$  и  $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ . А так как любая формация замкнута относительно прямых произведений, то  $\mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ . Тогда по теореме 2.2 формация  $\overline{w\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{X}$ .

Докажем теперь, что  $\mathfrak{X} \subseteq \overline{w\mathfrak{F}}$ . Предположим, что  $\mathfrak{X} \not\subseteq \overline{w\mathfrak{F}}$ . Пусть  $G$  – группа наименьшего порядка из  $\mathfrak{X} \setminus \overline{w\mathfrak{F}}$ . Покажем, что  $\Phi(G) = 1$ . Предположим обратное. Тогда  $|G/\Phi(G)| < |G|$ . Таким образом,  $G/\Phi(G) \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Так как  $\overline{w\mathfrak{F}}$  – насыщенная формация, то  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Получили противоречие. Итак,  $\Phi(G) = 1$ .

Пусть  $N$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Предположим, что существует минимальная нормальная подгруппа  $K$  группы  $G$  такая, что  $K \neq N$ . Тогда  $|G/N| < |G|$  и  $|G/K| < |G|$ . Следовательно,  $G/N \in \overline{w\mathfrak{F}}$  и  $G/K \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Ясно, что  $N \cap K = 1$ . Так как  $\mathfrak{X}$  – формация, то  $G/(N \cap K) \simeq G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Получили противоречие. Итак, группа  $G$  имеет единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$  и  $G/N \in \overline{w\mathfrak{F}}$ .

Так как  $G \in \mathfrak{X}$ , то по лемме 3.4 группа  $G$  разрешима. Тогда  $N$  является элементарной абелевой  $p$ -группой. В этом случае  $G = NM$ , где  $M$  – максимальная подгруппа  $G$  и  $N \cap M = 1$ . Ясно, что  $N \leq C_G(N)$ . Предположим, что  $N < C_G(N)$ . Так как  $C_G(N)M = G$ , то  $C_G(N) \cap M \neq 1$ . Тогда  $D = C_G(N) \cap M \triangleleft M$ . Так как  $G = NM$ , то рассмотрим произвольный элемент  $g = nm$  группы  $G$ , где  $n \in N$ ,  $m \in M$ . Очевидно  $D^n = D^m = D^g = D$ . Следовательно,  $D \triangleleft G$ . Но при этом,  $N \cap D = 1$ . Получили противоречие, так как  $N$  – единственная минимальная нормальная подгруппа в  $G$ . Следовательно,  $N = C_G(N)$ .

Пусть  $N = \pi'$ -группа. Так как  $G \in \mathfrak{X} = LF(f)$ , то  $G/C_G(N) \in f(p) = \mathfrak{N}_p$ , где  $p \in \pi'$ . Согласно лемме 1.19 фактор-группа  $G/C_G(N)$  не содержит неединичных нормальных  $p$ -подгрупп. Следовательно,  $G/C_G(N) = 1$ . То есть,  $G = C_G(N) = N$ . Так как группа  $N = G$  – элементарная абелева  $p$ -группа, где  $p \in \pi'$ , то  $G \in \mathfrak{N}_{\pi'}$ . Согласно теореме 2.2 группа  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ .

Пусть  $N = \pi$ -группа. Так как  $G \in \mathfrak{X} = LF(f)$ , то  $G/C_G(N) = G/N \in f(p) = \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi}$ , где  $p \in \pi$ . По лемме 1.19  $G/N \in h^*(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi}$ . Тогда любая силовская подгруппа из  $G/N$  является  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальной. Так как

$$G/N \in \mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

то по лемме 1.14 следует, что любая силовская подгруппа из  $G/N$  является  $\mathfrak{F}$ -субнормальной. Следовательно,  $G/N \in w\mathfrak{F}$ . С другой стороны,

$G/C_G(N) = G/N \in h^*(p)$ . Отсюда  $G \in w\mathfrak{F}$ . Тогда по теореме 2.2 группа  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ .

Таким образом, доказано, что  $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$ . Получили противоречие. Значит,  $\mathfrak{X} \subseteq \overline{w\mathfrak{F}}$ .

Итак,  $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{X}$ .

Заметим, что по построению локальный экран  $f$  является максимальным внутренним.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hawkes, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
4. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.
5. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
6. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.
7. Вегера, А.С. О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп / А.С. Вегера // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 154–158.
8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
9. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
10. Мурашко, В.И. О классе конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 55–61.
11. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. навука, 2003. – 254 с.

Поступила в редакцию 30.05.14.

УДК 512.542

## ЗАВИСИМОСТЬ ПРОИЗВОДНОЙ $p$ -ДЛИНЫ $p$ -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ ОТ ПОРЯДКА ЕЕ СИЛОВСКОЙ $p$ -ПОДГРУППЫ

Д.В. Грицук

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

## DEPENDENCE OF THE DERIVED $p$ -LENGTH OF A $p$ -SOLVABLE GROUP ON THE ORDER OF ITS SYLOW $p$ -SUBGROUP

D.V. Gritsuk

*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

Доказывается, что производная  $p$ -длина  $l_p^a(G)$   $p$ -разрешимой группы  $G$  с силовской  $p$ -подгруппой порядка  $p^n$  не превышает  $1 + \frac{n}{2}$ , а если  $p \notin \{2, 3\}$ , то  $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ .

**Ключевые слова:** конечная группа,  $p$ -разрешимая группа, силовская подгруппа, производная  $p$ -длина.

It is proved that the derived  $p$ -length  $l_p^a(G)$  of the  $p$ -solvable group  $G$  in which the Sylow  $p$ -subgroup has order  $p^n$  is at most  $1 + \frac{n}{2}$  and if  $p \notin \{2, 3\}$  then  $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ .

**Keywords:** finite group,  $p$ -solvable group, Sylow subgroup, derived  $p$ -length.

### Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

В 1956 году Ф. Холл и Г. Хигмэн [3] предложили понятие  $p$ -длины  $p$ -разрешимой группы и исследовали ее зависимость от некоторых инвариантов силовской  $p$ -подгруппы [2, VI.6.6]. В частности,  $p$ -длина  $p$ -разрешимой группы с силовской  $p$ -подгруппой порядка  $p^n$  не превышает  $n$ . Эта оценка существенно снижена Е.Г. Брюхановой [4], которая доказала, что  $p$ -длина  $p$ -разрешимой группы не превышает производной длины ее силовской  $p$ -подгруппы. А. Манн [5] установил, что производная длина разрешимой группы  $G$  порядка  $p^n$  не превышает наибольшего значения  $d$ , удовлетворяющего неравенству:  $n \geq 2^{d-1} + 2d - 4$ .

В.С. Монахов [6] предложил следующее определение производной  $p$ -длины  $p$ -разрешимой группы. Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом,

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (0.1)$$

факторы которого являются либо  $p'$ -группами, либо абелевыми  $p$ -группами. Наименьшее число абелевых  $p$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы  $G$  называется производной  $p$ -длиной группы  $G$  и обозначается через  $l_p^a(G)$ . Ясно, что производная  $p$ -длина  $p$ -группы совпадает с ее производной длиной. Некоторые

оценки производной  $p$ -длины получены в работах [7]–[9]. В частности, в [8] установлено, что производная  $p$ -длина конечной  $p$ -разрешимой группы  $G$  с бициклической силовской  $p$ -подгруппой не превышает 2 при  $p \geq 3$  и  $l_2^a(G) \leq 3$ . Понятно, что

$$l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot d(G_p), \quad (0.2)$$

где  $l_p(G)$  –  $p$ -длина  $p$ -разрешимой группы  $G$ , а  $d(G_p)$  – производная длина ее силовской  $p$ -подгруппы. Из неравенства (0.2) и [4] получаем общую оценку производной  $p$ -длины  $p$ -разрешимой группы  $G$ :

$$l_p^a(G) \leq (d(G_p))^2. \quad (0.3)$$

Но эта оценка неточная. Из (0.3) для симметрической группы  $S_4$  степени 4 получаем, что  $l_2^a(S_4) \leq 4$ , в то время как  $l_2^a(S_4) = 2$ . Соответствующие примеры можно привести для любого простого  $p$ .

В настоящей статье исследуется производная  $p$ -длина  $p$ -разрешимой группы  $G$  в зависимости от порядка  $p^n$  ее силовской  $p$ -подгруппы. Доказывается, что  $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$ , а если  $p \notin \{2, 3\}$ , то  $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ .

### 1 Используемые понятия и обозначения

Зафиксируем некоторое множество простых чисел  $\pi$ . Если  $\pi(m) \subseteq \pi$ , то натуральное число  $m$  называется  $\pi$ -числом. Группа  $G$  называется

$\pi$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi$ , и  $\pi'$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi'$ . В последнем случае  $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$ .

Цепочку подгрупп (0.1) называют субнормальным рядом группы  $G$ , если подгруппа  $G_{i+1}$  нормальна в  $G_i$  для каждого  $i$ . Фактор-группы  $G_i / G_{i+1}$  называют факторами ряда (0.1).

Группа называется  $p$ -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (0.1) факторы которого являются либо разрешимыми  $p$ -группами, либо  $p'$ -группами. Наименьшее число  $p$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы  $G$  называется  $p$ -длиной  $p$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_p(G)$ .

Производной длиной группы  $G$  называют наименьшее натуральное число  $m$ , для которого выполняется равенство  $G^{(m)} = 1$ , и обозначают через  $d(G)$ . Здесь  $G'$  – коммутант группы  $G$  и  $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ .

## 2 Вспомогательные леммы

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

При  $\pi = \{p\}$  из [7] получаем утверждения следующих двух лемм.

**Лемма 2.1.** Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если  $H$  – подгруппа группы  $G$ , то  $l_p^a(H) \leq l_p^a(G)$ ;
- 2) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $l_p^a(G/N) \leq l_p^a(G), l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + l_p^a(N)$ ;
- 3) если  $N$  – нормальная  $p'$ -подгруппа группы  $G$ , то  $l_p^a(G/N) = l_p^a(G)$ ;
- 4) если  $G$  и  $V$  –  $p$ -разрешимые группы, то  $l_p^a(G \times V) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\}$ ;
- 5) если  $N_1$  и  $N_2$  – нормальные подгруппы в  $G$ , то  $l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\}$ .

**Лемма 2.2.** Если  $N$  – нормальная  $p$ -подгруппа  $p$ -разрешимой группы  $G$ , то

$$l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + d(G_p).$$

**Лемма 2.3** [9, Лемма 2.5]. Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа, а  $G_p$  – ее силовская  $p$ -подгруппа. Тогда:

- 1) если  $G_p$  имеет порядок  $p$  или  $p^2$ , то  $l_p^a(G) \leq 1$ ;
- 2) если  $G_p$  имеет порядок  $p^3$ , то  $l_p^a(G) \leq 2$  для всех  $p$  и  $l_p(G) \leq 1$  для  $p > 3$ ;
- 3) если  $G_p$  имеет порядок  $p^4$ , то  $l_p^a(G) \leq 2$  для  $p \geq 5$  и  $l_p^a(G) \leq 3$  для  $p \in \{2, 3\}$ . Кроме того,  $l_p(G) \leq 2$  для всех  $p$ .

**Лемма 2.4** [5, Теорема 1]. Пусть  $G$  –  $p$ -группа порядка  $p^m$  и производной длины  $d$ . Тогда

$$m \geq 2^{d-1} + 2d - 4.$$

Через  $O_{p'}(G)$  обозначается наибольшая нормальная  $p'$ -подгруппа группы  $G$ . Из [10, Лемма 2] при  $\pi = \{p\}$  получаем следующую лемму.

**Лемма 2.5.** Если  $G$  –  $p$ -разрешимая группа и  $O_{p'}(G) = 1$ , то  $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$  и  $O_p(G) = F(G)$ .

**Лемма 2.6.** Если  $G$  – неединичная  $p$ -разрешимая группа и  $O_{p'}(G) = 1$ , то  $\Phi(G)$  – собственная подгруппа в  $F(G)$ .

*Доказательство.* Пусть  $G$  – неединичная  $p$ -разрешимая группа,  $O_{p'}(G) = 1$  и  $\Phi(G)$  – подгруппа Фраттини. Тогда фактор-группа  $G/\Phi(G)$  – неединичная  $p$ -разрешимая группа. Пусть  $N/\Phi(G)$  – минимальная нормальная подгруппа в фактор-группе  $G/\Phi(G)$ . Известно, что в этом случае  $N/\Phi(G)$  либо элементарная абелева  $p$ -группа, либо  $p'$ -группа.

Если  $N/\Phi(G)$  – элементарная абелева  $p$ -группа, то  $N/\Phi(G)$  нильпотентна и  $N$  – нильпотентная группа по теореме Гашюца [1, Теорема 3.24]. Отсюда,  $\Phi(G) < N \leq F(G)$  и лемма доказана.

Если  $N/\Phi(G)$  –  $p'$ -группа, то  $N = [\Phi(G)]K$  по [2], где  $K$  –  $p'$ -холлова подгруппа в  $N$ .  $K$  нормальной подгруппе  $N$  и  $p'$ -холловой подгруппе  $K$  можно применить лемму Фраттини:

$$G = N_G(K)N = N_G(K)\Phi(G) = N_G(K),$$

следовательно,  $K$  нормальна в  $G$  и  $K \leq O_{p'}(G) = 1$ , противоречие. Лемма доказана.

## 3 Оценка производной $p$ -длины

**Теорема 3.1.** Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа,  $G_p$  – ее силовская  $p$ -подгруппа порядка  $p^n$ . Если  $p \notin \{2, 3\}$ , то  $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ . Если  $p \in \{2, 3\}$ , то  $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$ .

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы  $G$ . Если  $n \leq 2$ , то  $G_p$  абелева и по лемме 2.3 (1)  $l_p^a(G) = 1 \leq \frac{n+1}{2}$ . Далее считаем, что  $n \geq 3$ .

По лемме 2.1 (3) можно считать, что  $O_{p'}(G) = 1$ . Покажем, что в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное. Пусть  $N_1$  и  $N_2$  – две минимальные нормальные подгруппы группы  $G$ . Так как  $|G/N_i| < |G|$ ,  $i = 1, 2$ , то по предположению индукции  $l_p^a(G/N_i) \leq \frac{n+1}{2}$ . По лемме 2.1 (5)  $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ . Итак, в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа  $N$ .

Так как группа  $G$   $p$ -разрешима и  $O_{p'}(G) = 1$ , то подгруппа Фиттинга  $F(G)$  является  $p$ -подгруппой, поэтому  $F(G) = O_p(G)$ . По лемме 2.5

$$C_G(F(G)) \subseteq F(G), \text{ т. е. } C_G(F(G)) = Z(F(G)).$$

Пусть  $|F(G)| = p^m$ , а  $d(F(G)) = d$ . Тогда по индукции  $l_p^a(G/F(G)) \leq \frac{n-m+1}{2}$ . По лемме 2.2

$$l_p^a(G) \leq d(F(G)) + l_p^a(G/F(G)) \leq d + \frac{n-m+1}{2} = \frac{n+1}{2} + d - \frac{m}{2}.$$

Ясно, что теорему надо доказывать в случае, когда  $d - \frac{m}{2} > 0$ , т. е. когда  $2d > m$ .

По лемме 2.4  $m \geq 2^{d-1} + 2d - 4$ , поэтому  $2d > m \geq 2^{d-1} + 2d - 4, 0 > 2^{d-1} - 4, d \in \{1, 2\}$ .

При  $d = 1$  из неравенства  $2d > m$  получаем, что  $|F(G)| = p$ . Теперь  $G/F(G)$   $p'$ -группа как группа автоморфизмов группы  $F(G)$  и  $|G_p| = p$ , противоречие.

Следовательно,  $d = 2$ , подгруппа  $F(G)$  абелева, значит  $m = 3$  и  $C_G(F(G)) = Z(F(G)) = \Phi(F(G))$  – подгруппа порядка  $p$ . Поскольку  $1 \neq \Phi(F(G)) \subseteq \Phi(G)$ , то  $\Phi(G) \neq 1$ . По лемме 2.6  $\Phi(G)$  – собственная подгруппа в  $F(G)$ , поэтому  $|F(G) : \Phi(G)| = p$  или  $p^2$ . Из [1, Теорема 4.24] имеем, что фактор-группа  $F(G)/\Phi(G)$  является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы  $G/\Phi(G)$ . Так как  $|F(G)/\Phi(G)| \leq p^2$ , то число прямых сомножителей не более 2.

Пусть  $F(G)/\Phi(G) = K_1/\Phi(G) \times K_2/\Phi(G)$ , где  $K_i/\Phi(G)$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G/\Phi(G)$ . Ясно, что  $|K_i/\Phi(G)| = p$  для  $i \in \{1, 2\}$ . Поэтому фактор-группа

$$(G/\Phi(G))/C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G))$$

будет  $p'$ -группой. По [1, Лемма 2.33]

$$(G/\Phi(G))/\bigcap_{i=1}^2 C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G))$$

также будет  $p'$ -группой. Так как

$$\bigcap_{i=1}^2 C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G)) = C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) \subseteq F(G)/\Phi(G),$$

то  $(G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) \simeq G/F(G)$  будет  $p'$ -группой и  $F(G) = G_p$  – имеет порядок  $p^3$ . По лемме 2.3 (2)  $l_p^a(G) \leq 2 \leq \frac{3+1}{2}$ , т. е. теорема справедлива.

Остается случай, когда  $F(G)/\Phi(G)$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G/F(G)$ . По [1, Теорема 2.8]

$$C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G),$$

$$G/\Phi(G)/C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) \simeq G/F(G)$$

будет группой автоморфизмов для  $F(G)/\Phi(G)$ . Так как  $|F(G)/\Phi(G)| = p$  или  $p^2$ , то  $G/F(G)$  будет  $p'$ -группой или изоморфна подгруппе группы  $GL(2, p)$ . В последней силовская  $p$ -подгруппа имеет простой порядок, поэтому  $|G_p| = p^3$  или  $p^4$ . Если  $|G_p| = p^3$ , то опять по лемме 2.3 (2)  $l_p^a(G) \leq 2 \leq \frac{3+1}{2}$ . Если  $|G_p| = p^4$ , то по лемме 2.3 (3)  $l_p^a(G) \leq 2 \leq \frac{4+1}{2}$  для  $p > 3$  и  $l_p^a(G) \leq 3 \leq 1 + \frac{4}{2}$  для  $p \in \{2, 3\}$ . Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
- 2 Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
- 3 Hall, P. The  $p$ -length of a  $p$ -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
- 4 Брюханова, Е.Г. Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы / Е.Г. Брюханова // Математические заметки. – 1981. – Т. 29, № 2. – С. 161–170.
- 5 Mann, A. The derived length of  $p$ -groups / A. Mann // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
- 6 Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
- 7 Грицук, Д.В. О производной  $\pi$ -длине  $\pi$ -разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
- 8 Грицук, Д.В. О конечных  $\pi$ -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 61–66.
- 9 Грицук, Д.В. Производная  $\pi$ -длина  $\pi$ -разрешимой группы, силовские  $p$ -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок  $p^3$  / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
- 10 Монахов, В.С. О нильпотентной  $\pi$ -длине максимальных подгрупп конечных  $\pi$ -разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2009. – № 6. – С. 3–8.

Поступила в редакцию 15.08.14.



УДК 512.542

## ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ГИПЕРРАДИКАЛЬНОЙ ФОРМАЦИИ

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

## ONE EXAMPLE OF HYPERRADICAL FORMATION

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

Устанавливается существование гиперрадикальных формаций, которые не являются наследственными.

**Ключевые слова:** формация, гиперрадикальная формация, сверхрадикальная формация, конечная группа.

The existence of hyperradical formations which are not hereditary is established.

**Keywords:** formation, hyperradical formation, superradical formation, finite group.

**Введение**

Как отмечено в [1]–[2], понятие  $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы, введенное в классе конечных разрешимых групп Картером и Хоуксом [3], а в произвольном случае – Л.А. Шеметковым [4], сформировало в теории конечных групп содержательные направления, связанные с изучением гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций. Оба объекта, интересные своим дуализмом с формациями Фиттинга, нашли замечательные приложения (в первую очередь, для изучения решеточных и факторизационных свойств конечных групп).

Понимание значимости гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций привело к постановке задач их полного описания. К настоящему времени большой прогресс в решении этих задач достигнут в случае наследственных формаций. В частности, в работах [5]–[6] описаны все разрешимые гиперрадикальные формации. При этом доказано, что любая разрешимая гиперрадикальная формация является наследственной. Из результатов работы [7] следует описание наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций в классе всех конечных групп. Что касается сверхрадикальных формаций, то отметим лишь работы [8]–[11] последних лет, в которых построены широкие серии наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций.

В то же время, за последние два десятилетия обращения к отмеченным задачам не найдено ни одного примера гиперрадикальной или сверхрадикальной формации, которая не является наследственной. Первые такие примеры строятся в данной работе.

**1 Основные определения**

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [12].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -субнормальной, если либо  $H = G$ , либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что

$$H_{i-1} / \text{Core}_{H_{i-1}}(H_i) \in \mathfrak{F}$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Мы используем запись  $s\mathfrak{F}$  ( $s_n\mathfrak{F}$ ) для обозначения класса всех групп  $G$ , для которых  $G \subseteq H \in \mathfrak{F}$  (класса всех групп  $G$  таких, что  $G \triangleleft H \in \mathfrak{F}$ ). Если  $s\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$  ( $s_n\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ ), то класс  $\mathfrak{F}$  называется *наследственным* (*нормально наследственным*).

Формация  $\mathfrak{F}$  называется *гиперрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1)  $\mathfrak{F}$  – нормально наследственная формация;
- 2) любая группа  $G = \langle A, B \rangle$ , где  $A$  и  $B$  –

$\mathfrak{F}$ -субнормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы из  $G$ , принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

*Класс Фиттинга* – это нормально наследственный класс, обладающий тем свойством, что из  $G = AB$ , где  $A \triangleleft G$ ,  $B \triangleleft G$ ,  $A \in \mathfrak{F}$ ,  $B \in \mathfrak{F}$ , всегда следует  $G \in \mathfrak{F}$ .

Формация  $\mathfrak{F}$  называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1)  $\mathfrak{F}$  – нормально наследственная формация;
- 2) любая группа  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  –  $\mathfrak{F}$ -суб-

нормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы из  $G$ , принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

Простая проверка определений показывает, что каждая гиперрадикальная формация является сверхрадикальной. Обратное утверждение неверно, на что указывает следующий пример из [10].

Пусть  $G \cong Sz(2^3)$  и  $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация, обладающая таким локальным экраном  $f$ , что  $f(q)$  – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных  $G$ , если  $q \in \pi$ , и  $f(q)$  – класс всех разрешимых групп, если  $q \notin \pi$ .

Тогда:

1)  $\mathfrak{F}$  является наследственной насыщенной сверхрадикальной формацией;

2) если  $H$  – критическая группа формации  $\mathfrak{F}$ , имеющая единичную подгруппу Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а)  $H$  – простая неабелева группа из следующего списка:  $PSL_2(2^p)$ ,  $p$  – простое число;  $PSL_2(3^p)$ ,  $p$  – нечетное простое число;  $PSL_2(p)$ ,  $p$  – простое число, большее 3, для которого  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ;  $Sz(2^p)$ ,  $p$  – нечетное простое число;  $PSL_3(3)$ ;  $Sz(2^9)$ ;

б)  $H$  – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем  $N$  ( $N$  – прямое произведение групп, изоморфных  $G$ ) и  $H/N$  – группа простого порядка  $q \in \pi(G)$ ;

в)  $H$  – примитивная группа с абелевым цоколем  $N$  и  $H = [N]M$ , где  $(|N|, |M|) = 1$  и  $M/\Phi(M) \cong G$ .

Из описания наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций, вытекающего из работы [7], следует, что формация  $\mathfrak{F}$  не является гиперрадикальной.

Напомним, что группа  $G$  называется *примитивной*, если она обладает такой максимальной подгруппой  $M$ , что  $Core_G(M) = 1$ . В этом случае подгруппа  $M$  называется *примитиватором* группы  $G$ . Через  $Core_G(M)$  обозначается ядро подгруппы  $M$  в группе  $G$ , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в подгруппе  $M$ .

## 2 Предварительные результаты

Следующий фундаментальный результат о примитивных группах, принадлежащий Бэру [13], мы приведем в виде леммы.

**Лемма 2.1.** Пусть  $G$  – примитивная группа и  $M$  – ее примитиватор. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

(1) группа  $G$  обладает единственной минимальной нормальной подгруппой  $N$ , подгруппа  $N$  является абелевой и  $M$  – дополнение к  $N$  в  $G$ ;

(2) группа  $G$  обладает единственной минимальной нормальной подгруппой  $N$ , подгруппа  $N$  является неабелевой и  $M$  – добавление к  $N$  в  $G$ ;

(3) группа  $G$  обладает двумя неабелевыми минимальными нормальными подгруппами  $N$  и  $N^*$  и  $M$  является дополнением в группе  $G$  к подгруппам  $N$  и  $N^*$ ;  $C_G(N) = N^*$ ,  $C_G(N^*) = N$  и  $N \cong N^* \cong NN^* \cap M$ ; если  $V$  – максимальная подгруппа группы  $G$  и  $VN = VN^* = G$ , то  $V \cap N = V \cap N^* = 1$ .

Следуя [12], класс всех примитивных групп будем обозначить через  $\mathfrak{P}$ . Если группа  $G$  примитивна, то полагаем, что  $G \in \mathfrak{P}$ , если группа  $G$  удовлетворяет условию (i) леммы 2.1 ( $i = 1, 2$  или  $3$ ).

Нам понадобятся следующие два результата из [12], которые мы также приведем в виде лемм.

**Лемма 2.2** [12, лемма А.15.4]. Если  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$ , то  $G/Core_G(M)$  – примитивная группа.

Если  $A$  – некоторая группа, то через  $form(A)$  обозначается наименьшая формация, содержащая группу  $A$ , а через  $Fit(A)$  – наименьший класс Фиттинга, содержащий  $A$ .

**Лемма 2.3** [12, пример П.2.12]. Пусть  $A$  – простая неабелева группа. Тогда  $form(A) = Fit(A)$ . Кроме того, тогда и только тогда группа  $G$  принадлежит формации  $form(A)$ , когда  $G$  представима в виде прямого произведения групп, изоморфных  $A$ .

**Лемма 2.4.** Пусть  $A$  – простая неабелева группа и  $\mathfrak{F} = form(A)$ . Если  $M$  –  $\mathfrak{F}$ -нормальная максимальная подгруппа группы  $G$ , то либо  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$ , либо  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$ .

*Доказательство.* Из определения  $\mathfrak{F}$ -нормальной максимальной подгруппы следует, что  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ . Поэтому ввиду леммы 2.3 группа  $G/Core_G(M)$  представима в виде прямого произведения групп, изоморфных  $A$ . В частности, каждая минимальная нормальная подгруппа группы  $G/Core_G(M)$  является неабелевой. Отсюда и из лемм 2.1 и 2.2 следует, что либо  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$ , либо  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.5.** Пусть  $A$  – простая неабелева группа и  $\mathfrak{F} = form(A)$ . Если  $M$  –  $\mathfrak{F}$ -нормальная максимальная подгруппа группы  $G$  и  $M \in \mathfrak{F}$ , то  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$ .

*Доказательство.* Из леммы 2.4 следует, что либо  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$ , либо  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$ . Предположим, что  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$ . Тогда группа  $G/Core_G(M)$  имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Поэтому из  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{F}$  ввиду леммы 2.3 имеем, что

$G/Core_G(M) \simeq A$ . Так как  $\mathfrak{F}$  является формацией и  $M \in \mathfrak{F}$ , то  $M/Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ . Отсюда и из  $G/Core_G(M) \simeq A$  следует, что группа  $A$  содержит максимальную подгруппу, принадлежащую формации  $\mathfrak{F}$ . Ввиду леммы 2.3 это невозможно. Пришли к противоречию. Следовательно,  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.6.** Пусть  $A$  – простая неабелева группа и  $\mathfrak{F} = form(A)$ . Если  $M$  –  $\mathfrak{F}$ -нормальная максимальная подгруппа группы  $G$  и  $M \in \mathfrak{F}$ , то  $G/Core_G(M) \simeq A \times A$  и  $M/Core_G(M) \simeq A$ .

*Доказательство.* Ввиду леммы 2.5 группа  $G/Core_G(M)$  принадлежит классу  $\mathfrak{P}_3$ , а значит, имеет две минимальные нормальные подгруппы. Кроме того, из  $G/Core_G(M) \in \mathfrak{F}$  ввиду леммы 2.3 следует, что группа  $G/Core_G(M)$  представима в виде прямого произведения групп, изоморфных  $A$ . Поэтому  $G/Core_G(M) \simeq A \times A$ . Так как  $\mathfrak{F}$  является формацией и  $M \in \mathfrak{F}$ , то

$$M/Core_G(M) \in \mathfrak{F}.$$

Поэтому либо  $M/Core_G(M) \simeq A \times A$ , либо  $M/Core_G(M) \simeq A$ . Так как  $M/Core_G(M)$  – собственная подгруппа группы  $G/Core_G(M)$ , то  $M/Core_G(M) \simeq A$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.7.** Пусть  $A$  – простая неабелева группа и  $\mathfrak{F} = form(A)$ . Если  $M$  –  $\mathfrak{F}$ -нормальная максимальная подгруппа группы  $G$  и  $M \in \mathfrak{F}$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ .

*Доказательство.* Ввиду леммы 2.6 имеем, что  $G/Core_G(M) \simeq A \times A$  и  $M/Core_G(M) \simeq A$ . Так как  $M \in \mathfrak{F}$ , то на основании леммы 2.3 подгруппа  $M$  представима в виде  $M = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$ , где  $A_i \simeq A$  для всех  $i = 1, 2, \dots, t$ . Отметим, что из  $M/Core_G(M) \simeq A$  следует, что  $t \geq 1$ . Так как  $Core_G(M) \triangleleft M$ , то ввиду леммы A.4.14 из [12], не нарушая общности рассуждений, можем считать, что  $Core_G(M) = A_2 \times \dots \times A_t$ . Так как  $Core_G(M) \triangleleft G$ , то  $C_G(Core_G(M)) \triangleleft G$ . Поэтому

$$C_G(Core_G(M)) \cdot Core_G(M)$$

– нормальная подгруппа группы  $G$ . Так как  $M = A_1 \times Core_G(M)$ , то подгруппа  $M$  содержится в  $C_G(Core_G(M)) \cdot Core_G(M)$ . Отсюда и из максимальности подгруппы  $M$  следует, что

$$C_G(Core_G(M)) \cdot Core_G(M) = G.$$

Так как  $Core_G(M) = A_2 \times \dots \times A_t$  и для любого  $i = 2, \dots, t$  подгруппа  $A_i$  является неабелевой, то

$$C_G(Core_G(M)) \cap Core_G(M) = 1.$$

Следовательно,

$$G = C_G(Core_G(M)) \times Core_G(M).$$

Так как формация  $\mathfrak{F}$  является нормально наследственной, то  $Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ . Ввиду изоморфизма

$$\begin{aligned} C_G(Core_G(M)) &\simeq \\ &\simeq C_G(Core_G(M)) \times Core_G(M) / Core_G(M) = \\ &= G / Core_G(M) \simeq A \times A \end{aligned}$$

и леммы 2.3 имеем также, что  $C_G(Core_G(M)) \in \mathfrak{F}$ .

Так как класс  $\mathfrak{F}$  является формацией, то из  $Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ ,  $C_G(Core_G(M)) \in \mathfrak{F}$  и

$$C_G(Core_G(M)) \cap Core_G(M) = 1$$

имеем окончательно, что  $G \in \mathfrak{F}$ . Лемма доказана.

### 3 Основные результаты

Следующая теорема имеет самостоятельное значение.

**Теорема 3.1.** Пусть  $A$  – простая неабелева группа и  $\mathfrak{F} = form(A)$ . Если  $H$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы  $G$  и  $M \in \mathfrak{F}$ , то либо  $H = G$ , либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что

$$H_{i-1} / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A \times A \text{ и } H_i / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Доказательство.* Если  $H$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы  $G$  и  $H \neq G$ , то по определению существует максимальная цепь подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = H$$

такая, что

$$G_{i-1} / Core_{G_{i-1}}(G_i) \in \mathfrak{F}$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Применим индукцию по  $k$ . Отметим, что  $H$  –  $\mathfrak{F}$ -нормальная максимальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы  $G_{k-1}$ . Поэтому ввиду леммы 2.6  $G_{k-1} / Core_{G_{k-1}}(H) \simeq A \times A$  и  $H / Core_{G_{k-1}}(H) \simeq A$ . Кроме того, ввиду леммы 2.7  $G_{k-1} \in \mathfrak{F}$ .

Рассмотрим теперь максимальную цепь

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_{k-1}.$$

Так как ее длина равна  $k-1$ , а подгруппа  $G_{k-1}$  является  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$  и принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ , то по индукции существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{n-1} = G_{k-1}$$

такая, что

$$H_{i-1} / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A \times A \text{ и } H_i / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Положим теперь  $H_n = H$ .

Тогда максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

является искомой. Теорема доказана.

**Лемма 3.1.** Пусть  $A$  – простая неабелева группа и  $\mathfrak{F} = \text{form}(A)$ . Если группа  $G$  обладает  $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппой, принадлежащей формации  $\mathfrak{F}$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ .

*Доказательство.* Пусть  $H$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы  $G$ . Если  $H = G$ , то утверждение леммы очевидно. Значит,  $H \neq G$ . Тогда по определению существует максимальная цепь подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = H$$

такая, что

$$G_{i-1} / \text{Core}_{G_{i-1}}(G_i) \in \mathfrak{F}$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Применим индукцию по  $k$ . Рассмотрим максимальную цепь  $G_1 \supset \dots \supset G_k = H$ . Так как ее длина равна  $k-1$ , а подгруппа  $H$  является  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G_1$  и принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ , то по индукции  $G_1 \in \mathfrak{F}$ . Отсюда ввиду леммы 2.7 следует, что группа  $G$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Лемма доказана.

**Теорема 3.2.** Если  $A$  – простая неабелева группа, то формация  $\mathfrak{F} = \text{form}(A)$  является гиперрадикальной.

*Доказательство.* Ввиду леммы 2.3 формация  $\mathfrak{F}$  является нормально наследственной. Пусть  $G = \langle C, B \rangle$ , где  $C$  и  $B$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы из  $G$ . Тогда ввиду леммы 3.1 группа  $G$  принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Следовательно,  $\mathfrak{F}$  – гиперрадикальная формация. Теорема доказана.

**Следствие.** Если  $A$  – простая неабелева группа, то формация  $\mathfrak{F} = \text{form}(A)$  является сверхрадикальной.

**Замечание.** Формация  $\mathfrak{F}$  называется *решеточной*, если в любой группе множество всех ее  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. В [7] доказано, что каждая наследственная насыщенная решеточная формация является гиперрадикальной.

В [1, с. 182] поставлен вопрос 3.5.5 о существовании решеточных формаций, которые не являются наследственными. Очевидно, построенный в теореме 3.2 пример ответ на этот вопрос не дает.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников,

М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 256 с.

2. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

3. Carter, R. The  $\mathfrak{F}$ -normalisers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

4. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

5. Васильев, А.Ф. Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6. – С. 62–70.

6. Каморников, С.Ф. Разрешимые гиперрадикальные формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 55–58.

7. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев : Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

8. Каморников, С.Ф. Критические группы наследственной локальной сверхрадикальной формации / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 66–75.

9. Семенчук, В.Н. О конечных группах, факторизуемых обобщенно субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 58–60.

10. Каморников, С.Ф. Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 97–108.

11. Ballester-Bolinches, A. On a problem of L.A. Shemetkov on superradical formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyaynov // J. Algebra. – 2014. – Vol. 403. – P. 69–76.

12. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

13. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

Поступила в редакцию 17.03.14.

УДК 519.853

## АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ИНДЕКСОВ В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МНОГОГРАННЫМ МНОЖЕСТВОМ ИНДЕКСОВ

**М.В. Кулагина**

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

## THE ALGORITHM FOR DETERMINATION OF IMMOBILE INDEXES IN CONVEX SIP PROBLEMS WITH POLYHEDRAL INDEX SETS

**M.V. Kulahina**

*Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

Рассматриваются выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов. Для этих задач описывается и обосновывается конечный алгоритм построения неподвижных индексов и их порядков неподвижности вдоль допустимых направлений. Приводится пример, иллюстрирующий работу алгоритма.

**Ключевые слова:** полубесконечное программирование, выпуклое программирование, неподвижный индекс, порядок неподвижности, конус допустимых направлений, экстремальный луч.

The convex Semi-Infinite Programming (SIP) problems with polyhedral index sets are considered. For these problems a finite algorithm for determination of immobile indexes and their immobility orders along the feasible directions is described and justified. An example illustrating the application of the algorithm is provided.

**Keywords:** semi-infinite programming, convex programming, immobile index, immobility order, cone of feasible directions, extreme ray.

### **Введение**

Задачи полубесконечного программирования – это задачи нахождения экстремума некоторой функции на множестве, которое задается бесконечным числом ограничений в конечномерном пространстве.

В последние десятилетия продолжается активное исследование задач полубесконечной оптимизации [1], [2], поскольку они часто встречаются в различных областях математики и имеют большое практическое значение. Вопрос об условиях оптимальности является одним из основных направлений исследования задач полубесконечного программирования [3], [4]. Важную роль в данном вопросе играют условия регулярности [5], [6]. Почти все известные условия оптимальности для полубесконечного программирования предполагают выполнение тех или иных условий регулярности. Поскольку на практике условия регулярности часто нарушаются, то актуальным является доказательство новых условий оптимальности без требования выполнения условий регулярности [7].

В [8] был предложен новый подход в полубесконечной оптимизации на основе концепции неподвижных индексов и их порядков неподвижности. Этот подход позволяет сформулировать условия оптимальности для задач полубесконечного программирования с точки зрения условий оптимальности для конечномерных задач нелинейного программирования. В [8], [9]

был описан алгоритм, находящий все неподвижные индексы и их порядки неподвижности для линейных задач полубесконечного программирования с одномерным и многомерным множеством индексов соответственно.

В данной статье исследуются выпуклые задачи полубесконечного программирования (ПБП) с многогранным множеством индексов. Для этих задач рассматриваются понятия неподвижных индексов и их порядков неподвижности, которые были введены в работе [8].

Основная цель статьи: основываясь на работах [9], [10], описать и обосновать конечный алгоритм, который определяет неподвижные индексы и их порядки неподвижности вдоль допустимых направлений в выпуклых задачах полубесконечного программирования.

### **1 Постановка задачи, необходимые определения и обозначения**

Рассмотрим задачу полубесконечного программирования вида

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c(x) \quad (1.1)$$

$$f(x, t) \leq 0, \forall t \in T,$$

где

$$T = \{t \in \mathbb{R}^s : h_k^T t \leq \Delta h_k, k \in K\}$$

– выпуклый многогранник,  $K$  – конечное множество индексов, вектора  $h_k \in \mathbb{R}^s$  и числа  $\Delta h_k, k \in K$ , заданы, функции  $f(x, t), t \in T, c(x)$

выпуклые по  $x \in \mathbb{R}^n$ . Предположим, что функция ограничения  $f(x, t)$  достаточно гладкая по  $t$  и  $x$ . Здесь и далее символ  $^T$  означает транспонирование.

Обозначим через  $X$  множество допустимых планов задачи (1.1):

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x, t) \leq 0, \forall t \in T\}. \quad (1.2)$$

Для данного  $t \in T$  обозначим  $K_a(t) \subset K$  множество активных ограничений в  $t$ :

$$K_a(t) = \{k \in K : h_k^T t = \Delta h_k\}$$

и через  $L(t)$  – множество допустимых направлений для индекса  $t$  в  $T$ :

$$L(t) = \{l \in \mathbb{R}^s : h_k^T l \leq 0, k \in K_a(t)\}.$$

Введем согласно работе [8] следующие определения:

**Определение 1.1.** Будем говорить, что индекс  $\bar{t} \in T$  – неподвижный в задаче (1.1), если  $f(x, \bar{t}) = 0, \forall x \in X$ .

Обозначим через  $T^*$  множество всех неподвижных индексов задачи (1.1).

**Определение 1.2.** Будем говорить, что неподвижный индекс  $\bar{t} \in T^*$  имеет порядок неподвижности  $q(\bar{t}, \bar{l}), q(\bar{t}, \bar{l}) \in \{0, 1, \dots\}$ , вдоль допустимого направления  $\bar{l} \in L(\bar{t}), \bar{l} \neq 0$ , если

$$1^0) \frac{d^i f(x, \bar{t} + \alpha \bar{l})}{d\alpha^i} \Big|_{\alpha=+0} = 0, \forall x \in X, \\ i = 0, \dots, q(\bar{t}, \bar{l});$$

$$2^0) \text{ существует вектор } \tilde{x} = x(\bar{t}, \bar{l}) \in X$$

$$\text{такой, что } \frac{d^{q(\bar{t}, \bar{l})+1} f(\tilde{x}, \bar{t} + \alpha \bar{l})}{d\alpha^{q(\bar{t}, \bar{l})+1}} \Big|_{\alpha=+0} \neq 0.$$

Здесь предполагаем, что

$$\frac{d^0 f(x, \bar{t} + \alpha \bar{l})}{d\alpha^0} \Big|_{\alpha=+0} = f(x, \bar{t}).$$

Согласно работе [9], множество допустимых направлений для индекса  $\bar{t}$  может быть представлено в следующем виде:

$$L(\bar{t}) = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : l = \sum_{i \in \bar{P}} \beta_i \bar{b}_i + \sum_{i \in \bar{I}} \alpha_i \bar{a}_i, \alpha_i \geq 0, i \in \bar{I} \right\},$$

где вектора  $\bar{b}_i, i \in \bar{P}$  – двунаправленные лучи,  $\bar{a}_i, i \in \bar{I}$  – однонаправленные лучи,  $\bar{P}$  и  $\bar{I}$  – конечные множества индексов.

**Предположение 1.1.** Предположим, что  $X \neq \emptyset$ , множество  $T$  ограничено и

$$q(\bar{t}, l) \leq 1, l \in L(\bar{t}) \setminus \{0\}, \forall \bar{t} \in T^*.$$

Согласно работе [9] из Предположения 1.1 следует, что множество индексов  $T^*$  состоит из конечного числа элементов:  $T^* = \{\bar{t}_j, j \in J_*\}$  с некоторым конечным множеством индексов  $J_*$ .

Целью данного исследования является описание и обоснование алгоритма, который для задачи (1.1) определит множество неподвижных индексов и их порядки неподвижности вдоль экстремальных лучей соответствующих множеств допустимых направлений.

## 2 Описание алгоритма

Для данного  $x \in X$  обозначим через  $T_a(x) \subset T$  множество активных индексов в  $x$ :

$$T_a(x) = \{t \in T : f(x, t) = 0\}.$$

Как было показано в работе [10], при выполнении Предположения 1.1 существует такой план  $\bar{x} \in X$ , что  $|T_a(\bar{x})| < \infty$ , т. е. множество активных индексов  $T_a(\bar{x})$  допускает представление

$$T_a(\bar{x}) = \{\bar{t}_j, j \in \bar{J}\}, |\bar{J}| < \infty. \quad (2.1)$$

Предположим, что известен допустимый план  $\bar{x}$ , удовлетворяющий (2.1). Заметим, здесь  $T^* \subset T_a(\bar{x})$ .

Далее будем использовать для данного  $\bar{t}_j, j \in \bar{J}$ , экстремальные лучи соответствующего множества допустимых направлений  $L(\bar{t}_j)$ :

$$b_i(j), i \in P(j), a_i(j), i \in I(j), j \in \bar{J}.$$

Поскольку правило построения этих векторов описано в работе [9], далее будем считать их заданными.

Введем обозначение

$$\tilde{I}(j) = \left\{ i \in I(j) : \frac{\partial^T f(\bar{x}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0 \right\}, j \in \bar{J}.$$

Описанный ниже алгоритм основан на работе [9].

**Инициализация.** Установим  $J_*^{(0)} := \emptyset, k = 0$ .

**Общая итерация.** На  $(k+1)$ -ой итерации алгоритма ( $k \geq 0$ ) имеем следующие множества, построенные на предыдущих итерациях:

$$J_*^{(k)} \subset \bar{J}, I_0^{(k)}(j) \subset \tilde{I}(j), j \in J_*^{(k)}.$$

Заметим, что на первой итерации не используются множества  $I_0^{(k)}(j) \subset \tilde{I}(j), j \in J_*^{(k)}$ , так как множество  $J_*^{(0)}$  пустое.

Для данного  $j \in J_*^{(k)}$  обозначим

$$L_j^{(k)} := \left\{ l \in \mathbb{R}^s : \|l\| = 1, l = \sum_{i \in P(j)} \beta_i b_i(j) + \sum_{i \in I_0^{(k)}(j)} \alpha_i a_i(j), \right. \\ \left. \alpha_i \geq 0, l^T \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l = 0 \right\},$$

и построим следующее множество:

$$X^{(k+1)} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x, \bar{t}_j) \leq 0, j \in \bar{J} \setminus J_*^{(k)}, \right. \\ \left. f(x, \bar{t}_j) = 0, \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j), \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) &= 0, i \in I_0^{(k)}(j), \\ \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) &\leq 0, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0^{(k)}(j), \\ l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l &\leq 0, \forall l \in L_j^{(k)}, j \in J_*^{(k)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.2)$$

Можно показать, что  $\bar{x} \in X^{(k+1)}$ .

Для каждого  $j \in \bar{J} \setminus J_*^{(k)}$  решаем вспомогательную задачу:

$$\min_{x \in X^{(k+1)}} f(x, \bar{t}_j). \quad (2.3)$$

Положим  $x^{(j)} := \bar{x}$ , если  $\bar{x}$  – оптимальный план этой задачи, иначе в качестве  $x^{(j)}$  возьмем другой вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x^{(j)} \in X^{(k+1)}, f(x^{(j)}, \bar{t}_j) < 0.$$

Положим

$$\Delta J_*^{(k+1)} := \{j \in \bar{J} \setminus J_*^{(k)} : f(x^{(j)}, \bar{t}_j) = 0\}. \quad (2.4)$$

Для всех  $i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0^{(k)}(j), j \in J_*^{(k)}$ , решаем следующую вспомогательную задачу:

$$\min_{x \in X^{(k+1)}} \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j). \quad (2.5)$$

Положим  $x^{(ji)} := \bar{x}$ , если  $\bar{x}$  – оптимальный план этой задачи, иначе в качестве  $x^{(ji)}$  возьмем другой вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x^{(ji)} \in X^{(k+1)}, \left( \frac{\partial f(x^{(ji)}, \bar{t}_j)}{\partial t} \right)^T a_i(j) < 0.$$

Положим

$$\Delta I_0^{(k+1)}(j) = \left\{ i \in (\tilde{I}(j) \setminus I_0^{(k)}(j)) : \frac{\partial f^T(x^{(ji)}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0 \right\}, j \in J_*^{(k)}. \quad (2.6)$$

Если  $\Delta J_*^{(k+1)} = \emptyset$  и  $\Delta I_0^{(k+1)}(j) = \emptyset, j \in J_*^{(k)}$ , то останавливаем алгоритм с

$$T^* = \{\bar{t}_j, j \in J_* := J_*^{(k)}\}; \quad (2.7)$$

$$q(\bar{t}_j, a_i(j)) = 1, i \in I_0(j) := I_0^{(k)}(j),$$

$$q(\bar{t}_j, a_i(j)) = 0, i \in I_*(j) := I(j) \setminus I_0^{(k)}(j), j \in J_*.$$

Иначе, строим множества

$$J_*^{(k+1)} := J_*^{(k)} \cup \Delta J_*^{(k+1)},$$

$$I_0^{(k+1)}(j) := I_0^{(k)}(j) \cup \Delta I_0^{(k+1)}(j), j \in J_*^{(k)},$$

$$I_0^{(k+1)}(j) := \emptyset, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$$

и переходим к следующей итерации.

### 3 Обоснование алгоритма

В дальнейшем будем считать, что для данного алгоритма выполняется Предположение 1.1, и, следовательно, число итераций данного алгоритма является конечным.

**Теорема 3.1.** Пусть выпуклая задача (1.1) удовлетворяет Предположению 1.1. Построенные в алгоритме индексы  $\bar{t}_j, j \in J_*$  и только они являются неподвижными индексами в задаче (1.1). Их порядки неподвижности определяются следующим образом

$$q(\bar{t}_j, l) = 1, l \in L_j^0, \quad (3.1)$$

$$q(\bar{t}_j, l) = 0, l \in L_j^* := L(\bar{t}_j) \setminus L_j^0, j \in J_*.$$

В начале докажем несколько вспомогательных лемм, которые будем использовать при доказательстве теоремы.

**Лемма 3.1.** Пусть даны множество  $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$  и точка  $\bar{t} \in T$  такие, что

(1)  $\tilde{X}$  – выпуклое множество;

(2) для любого  $t \in T$  функция  $f(x, t)$  – выпукла по  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

(3) справедливо равенство  $f(x, \bar{t}) = 0$  для любого вектора  $x \in \tilde{X}$ .

Тогда для любого  $l \in L(\bar{t})$  функция  $\frac{\partial f^T(x, \bar{t})}{\partial t} l$  является выпуклой по  $x$  на  $\tilde{X}$ .

*Доказательство.* Возьмем любые  $x_1, x_2 \in \tilde{X}$ .

Следовательно для них выполняется

$$f(x_1, \bar{t}) = 0, f(x_2, \bar{t}) = 0. \quad (3.2)$$

Обозначим  $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ . Так как множество  $\tilde{X}$  выпуклое, то  $x(\lambda) \in \tilde{X}$  и, с учетом условия (3) данной леммы, имеем

$$f(x(\lambda), \bar{t}) = 0, \lambda \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Поскольку функция  $f(x, t)$  выпуклая по  $x \in \tilde{X}$ , то

$$f(x(\lambda), t) \leq \lambda f(x_1, t) + (1 - \lambda)f(x_2, t), \lambda \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Рассмотрим любое  $l \in L(\bar{t})$ . Существует достаточно малое  $\bar{\theta} > 0 : \forall \theta \in (0, \bar{\theta})$  можно указать  $t : t = \bar{t} + \theta l, t \in T$ . Подставим разложение в ряд Тейлора функции  $f(x(\lambda), t)$  при достаточно малом  $\theta$  первого порядка в (3.4):

$$f(x(\lambda), \bar{t}) + \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t})}{\partial t} \theta l + o(\theta) \leq \lambda \left( f(x_1, \bar{t}) + \frac{\partial f^T(x_1, \bar{t})}{\partial t} \theta l \right) + \quad (3.5)$$

$$+ (1 - \lambda) \left( f(x_2, \bar{t}) + \frac{\partial f^T(x_2, \bar{t})}{\partial t} \theta l \right) + o(\theta).$$

Учитывая (3.2) и (3.3), разделим (3.5) на  $\theta$  и найдем предел при  $\theta \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t})}{\partial t} l \leq \lambda \frac{\partial f^T(x_1, \bar{t})}{\partial t} l + (1 - \lambda) \frac{\partial f^T(x_2, \bar{t})}{\partial t} l, \lambda \in [0, 1], l \in L(\bar{t}). \quad (3.6)$$



Таким образом из (3.6) следует, что для любого  $l \in L(\bar{t})$  функция  $\frac{\partial f^T(x, \bar{t})}{\partial t} l$  выпуклая по  $x$  на  $\tilde{X}$ .  $\square$

**Лемма 3.2.** *Рассмотрим точку  $\bar{t} \in T$ . Пусть заданы множества  $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{I}_0 \subset \bar{I}$ ,  $\tilde{L}(\bar{t}) \subset L(\bar{t})$  такие, что*

- (i)  $\tilde{X}$  – выпуклое множество;
- (ii) для любого  $t \in T$  функция  $f(x, t)$  – выпуклая по  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii) справедливы равенства

$$f(x, \bar{t}) = 0, \frac{\partial f^T(x, \bar{t})}{\partial t} l = 0, \forall l \in \tilde{L}(\bar{t})$$

для любого  $x \in \tilde{X}$ .

Тогда для любого  $l \in \tilde{L}(\bar{t})$  функция  $l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t})}{\partial t^2} l$  – выпуклая по  $x$  на  $\tilde{X}$ .

*Доказательство.* Возьмем любые  $x_1, x_2 \in \tilde{X}$ . Обозначим  $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ . Так как множество  $\tilde{X}$  выпуклое, очевидно,  $x(\lambda) \in \tilde{X}, \lambda \in [0, 1]$ . Следовательно, для  $x_1, x_2, x(\lambda)$  выполняется:

$$\begin{aligned} f(x_1, \bar{t}) = 0, f(x_2, \bar{t}) = 0, f(x(\lambda), \bar{t}) = 0; \\ \frac{\partial f^T(x_1, \bar{t})}{\partial t} l = 0, \frac{\partial f^T(x_2, \bar{t})}{\partial t} l = 0, \\ \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t})}{\partial t} l = 0, \forall l \in \tilde{L}(\bar{t}), \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как функция  $f(x, t)$  выпуклая по  $x$  на  $\tilde{X}$ , то  $f(x(\lambda), t) \leq \lambda f(x_1, t) + (1-\lambda)f(x_2, t), \lambda \in [0, 1].$  (3.8)

Рассмотрим любое  $l \in \tilde{L}(\bar{t})$ . Существует достаточно малое  $\bar{\theta} > 0: \forall \theta \in (0, \bar{\theta})$  можно указать  $t: t = \bar{t} + \theta l, t \in T$ . Подставим разложение в ряд Тейлора функции  $f(x(\lambda), t)$  при достаточно малом  $\theta$  второго порядка в (3.8):

$$\begin{aligned} f(x(\lambda), \bar{t}) + \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t})}{\partial t} \theta l + \\ + \frac{1}{2} \theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \bar{t})}{\partial t^2} l + o(\theta^2) \leq \\ \lambda (f(x_1, \bar{t}) + \frac{\partial f^T(x_1, \bar{t})}{\partial t} \theta l + \\ + \frac{1}{2} \theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \bar{t})}{\partial t^2} l) + \\ + (1-\lambda) (f(x_2, \bar{t}) + \frac{\partial f^T(x_2, \bar{t})}{\partial t} \theta l + \\ + \frac{1}{2} \theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \bar{t})}{\partial t^2} l) + o(\theta^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учитывая условие  $l \in \tilde{L}(\bar{t})$  и (3.7), получим, что первые два члена разложения в ряд Тейлора исчезают и остается:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \bar{t})}{\partial t^2} l + o(\theta^2) \leq \\ \leq \lambda \left( \frac{1}{2} \theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \bar{t})}{\partial t^2} l \right) + \\ + (1-\lambda) \left( \frac{1}{2} \theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \bar{t})}{\partial t^2} l \right) + o(\theta^2). \end{aligned}$$

Разделив на  $\frac{1}{2} \theta^2$  и найдя предел при  $\theta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \bar{t})}{\partial t^2} l \leq \lambda \left( l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \bar{t})}{\partial t^2} l \right) + \\ + (1-\lambda) \left( l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \bar{t})}{\partial t^2} l \right), l \in \tilde{L}(\bar{t}), \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом из (3.10) следует, что  $l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t})}{\partial t^2} l$  для любого  $l \in \tilde{L}(\bar{t})$  является выпуклой функцией по  $x$  на  $\tilde{X}$ .  $\square$

**Лемма 3.3.** *Пусть выполняется Предположение 1.1, тогда на каждой  $(k+1)$ -ой итерации алгоритма справедливы следующие утверждения:*

- 1) точки  $\bar{t}_j, j \in J_*^{(k)}$ , являются неподвижными, т. е.  $\bar{t}_j \in T^*, j \in J_*^{(k)}$ ;
- 2) выполняются равенства  $q(\bar{t}_j, l) = 1, l \in L_j^{(k)}, j \in J_*^{(k)}$ ;
- 3) верны включения  $X \subset X^{(k+1)} \subset X^{(k)} \subset X^{(0)}$ , где  $X^{(0)} = \mathbb{R}^n$ ;
- 4) множество  $X^{(k+1)}$  выпуклое.

*Доказательство.* Докажем лемму по индукции. Для  $k=0$  имеем  $J_*^{(0)} = \emptyset, J_0^{(0)}(j) = \emptyset, j \in J_*^{(0)}$ . Следовательно, утверждения 1), 2) данной леммы очевидны для  $k=0$ . Из (1.2), (2.2) имеем

$$X \subset X^{(1)} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x, \bar{t}_j) \leq 0, j \in \bar{J}\}.$$

Тогда утверждения 3, 4 справедливы для  $k=0$ .

Предположим, что все утверждения 1)–4) выполняются для  $(k+1) > 0, (k+1) < k_*$ . Докажем утверждения 1)–4) для  $(k+2)$ -ой итерации.

Рассмотрим утверждение 1). Известно, что  $J_*^{(k+1)} = J_*^{(k)} \cup \Delta J_*^{(k+1)}$ . Из предположения о справедливости данного утверждения для  $(k+1)$ -ой итерации, имеем  $\bar{t}_j \in T^*, j \in J_*^{(k)}$ . Осталось доказать, что  $\bar{t}_j \in T^*, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$ . Учитывая соотношение (2.4), где  $x^{(j)}$  – оптимальный план задачи (2.3), имеем для любого  $x \in X^{(k+1)}$

$$f(x, \bar{t}_j) = 0, j \in \Delta J_*^{(k+1)}.$$

Из этого, в силу включения  $X \subset X^{(k+1)}$  имеем, что  $\bar{t}_j \in T^*, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$  являются неподвижными индексами также, следовательно,  $\bar{t}_j \in T^*, j \in J_*^{(k+1)}$  – неподвижные индексы.

Рассмотрим утверждение 2). Известно, что  $I_0^{(k+1)}(j) = I_0^{(k)}(j) \cup \Delta I_0^{(k+1)}(j)$ . Из предположения о справедливости данного утверждения для  $(k+1)$ -ой итерации, имеем  $q(\bar{t}_j, l) = 1, l \in L_j^{(k)}, j \in J_*^{(k)}$ . На  $(k+2)$ -ой итерации добавляются индексы  $i \in \Delta I_0^{(k+1)}(j), j \in J_*^{(k)}$  и  $i \in P(j), j \in J_*^{(k+1)}$ . Учитывая соотношение (2.6), где  $x^{(j)}$  – оптимальный план задачи (2.5), имеем для любого  $x \in X^{(k+1)}$

$$\frac{\partial f^T(x^{(j)}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in \Delta I_0^{(k+1)}(j), j \in J_*^{(k)}.$$

Тогда, учитывая Предположение 1.1, правило построения множества  $l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k+1)}$  и в силу включения  $X \subset X^{(k+1)}$  получаем:

$$q(\bar{t}_j, l) = 1, l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k+1)}.$$

Рассмотрим утверждения 3), 4). Из предположения о справедливости данного утверждения для  $(k+1)$ -ой итерации, имеем  $X \subset X^{(k+1)}$ , где в начале  $(k+1)$ -ой итерации описанного алгоритма оно имеет вид (2.2). В конце  $(k+1)$ -ой итерации, в следствии пройденных шагов по алгоритму, его можно будет записать следующим образом:

$$X^{(k+1)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x, \bar{t}_j) \leq 0, j \in \bar{J} \setminus J_*^{(k+1)}, \right. \\ \left. f(x, \bar{t}_j) = 0, j \in J_*^{(k+1)}; \right. \\ \left. \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j), \right. \\ \left. \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_0^{(k+1)}(j), \right. \\ \left. \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \leq 0, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0^{(k+1)}(j), \right. \\ \left. l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, \forall l \in L_j^{(k)}, j \in J_*^{(k)} \right\}.$$

Тогда множество  $X^{(k+2)}$  можно представить как

$$X^{(k+2)} = X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_1^{(k+1)} \cap \widehat{X}_2^{(k+1)},$$

где

$$\widehat{X}_1^{(k+1)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, \right. \\ \left. \forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)} \right\}, \\ \widehat{X}_2^{(k+1)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j); \right. \\ \left. \frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \leq 0, i \in \tilde{I}(j); \right. \\ \left. l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, \forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in \Delta J_*^{(k+1)} \right\}.$$

Из ранее сделанного предположения имеем  $X^{(k+1)}$  – выпуклое. Покажем, что  $X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_1^{(k+1)}$ ,  $X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_2^{(k+1)}$  – выпуклые.

Рассмотрим множество  $X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_1^{(k+1)}$ . Зафиксируем  $j \in J_*^{(k)}$ . Возьмем любые  $x_1, x_2 \in X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_1^{(k+1)}$ . Поскольку  $x_1, x_2 \in \widehat{X}_1^{(k+1)}$ , то для них будет выполняться:

$$l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, \quad (3.11) \\ \forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)}.$$

Заметим, что также  $x_1, x_2 \in X^{(k+1)}$ . Обозначим  $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ . Очевидно  $x(\lambda) \in X^{(k+1)}$ , поскольку оно выпуклое по предположению. Для любого  $l \in L_j^{(k+1)}$  функции  $l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l$  выпук-

лые по  $x$  на множестве  $X^{(k+1)}$  по лемме 3.2, для этого достаточно положить в ней

$$\tilde{X} = X^{(k+1)}, \bar{t} = \bar{t}_j, \bar{I}_0 = I_0^{(k+1)}(j),$$

$$\tilde{L}(\bar{t}) = L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)}.$$

Тогда из выпуклости данных функций имеем

$$l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq \lambda \left( l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \right) + \\ + (1-\lambda) \left( l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \right), \\ \lambda \in [0, 1], \forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)}.$$

С учетом (3.11) и того, что сумма двух не положительных чисел является не положительным числом, можем положить:

$$l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, \forall l \in L_j^{(k+1)}, \lambda \in [0, 1],$$

что и означает, что  $x(\lambda) \in \widehat{X}_1^{(k+1)}$ . Следовательно  $X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_1^{(k+1)}$  – выпуклое.

Рассмотрим множество  $X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_2^{(k+1)}$ . Зафиксируем  $j \in \Delta J_*^{(k+1)}$ . Возьмем любые

$$x_1, x_2 \in X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_2^{(k+1)}.$$

Поскольку  $x_1, x_2 \in \widehat{X}_2^{(k+1)}$ , то для них будет выполняться:

$$\frac{\partial f^T(x_1, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, \frac{\partial f^T(x_2, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j), \\ \frac{\partial f^T(x_1, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \leq 0, \\ \frac{\partial f^T(x_2, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \leq 0, i \in \tilde{I}(j), \quad (3.12)$$

$$l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, \forall l \in L_j^{(k+1)}.$$

Заметим, что также  $x_1, x_2 \in X^{(k+1)}$ . Положим

$$x(\lambda) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in [0, 1].$$

Очевидно  $x(\lambda) \in X^{(k+1)}$ .

а) Функции  $\frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j), i \in P(j)$  вы-

пуклые по  $x$  на множестве  $X^{(k+1)}$ , что следует из леммы 3.1, для этого достаточно положить в ней  $\tilde{X} = X^{(k+1)}, \bar{t} = \bar{t}_j, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$ . Тогда из выпуклости данных функций имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in P(j)} \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) \leq \\ & \leq \lambda \sum_{i \in P(j)} \frac{\partial f^T(x_1, \bar{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) + \\ & + (1 - \lambda) \sum_{i \in P(j)} \frac{\partial f^T(x_2, \bar{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j), \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

С учетом (3.12) имеем

$$\sum_{i \in P(j)} \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) \leq 0, \lambda \in [0, 1].$$

Зафиксировав  $i^* \in P(j)$ , положим  $\beta_{i^*} = \pm 1, \beta_i = 0, i \in P(j) \setminus i^*$  получим

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} \beta_{i^*} b_{i^*}(j) \leq 0, \lambda \in [0, 1], \beta_{i^*} = \pm 1.$$

Так как данное неравенство должно выполняться при  $\beta_{i^*} = \pm 1$ , тогда

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} b_{i^*}(j) = 0, \lambda \in [0, 1].$$

Таким образом, для всех  $i \in P(j)$  будем иметь

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) = 0, i \in P(j), \lambda \in [0, 1].$$

б) Функции  $\frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j), i \in \tilde{I}(j)$  являют-

ся выпуклыми по  $x$  на множестве  $X^{(k+1)}$  по лемме 3.1, для этого достаточно положить в ней  $\tilde{X} = X^{(k+1)}, \bar{t} = \bar{t}_j, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$ . Из выпуклости данных функций и (3.12) следует, что

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \leq 0, i \in \tilde{I}(j), \lambda \in [0, 1].$$

в) Функции  $l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l, \forall l \in L_j^{(k+1)}$  – вы-

пуклые по  $x$  на множестве  $X^{(k+1)}$  по лемме 3.2, для этого достаточно положить в ней

$$\tilde{X} = X^{(k+1)}, \bar{t} = \bar{t}_j, I_0 = \emptyset,$$

$$\tilde{L}(\bar{t}) = L_j^{(k+1)}, j \in \Delta J_*^{(k+1)}.$$

Из выпуклости данных функций и (3.12) следует,

$$\text{что } l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq 0, \forall l \in L_j^{(k+1)}, \lambda \in [0, 1].$$

Тогда из а), б), в) следует, что  $x(\lambda) \in \widehat{X}_2^{(k+1)}$ . Следовательно,  $X^{(k+1)} \cap \widehat{X}_2^{(k+1)}$  выпуклое. Следовательно,  $X^{(k+2)}$  – выпуклое, как пересечение выпуклых множеств, и  $X^{(k+2)} \subset X^{(k+1)}$ . А так как  $X \subset X^{(k+1)} \Rightarrow X \subset X^{(k+2)}$ .  $\square$

Рассмотрим последнюю итерацию алгоритма  $(k+1)$ . Из леммы 3.3 следует, что поскольку  $\bar{t}_j, j \in J_*$  – неподвижные индексы и  $q(\bar{t}_j, l) = 1, l \in L_j^{(k)}, j \in J_*$ , то для любого  $x \in X^{(k+1)}$  выполняются соотношения:

$$f(x, \bar{t}_j) = 0,$$

$$\frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial f^T(x, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_0(j), j \in J_*.$$

Доказательство следующих лемм основывается на работах [9], [10].

**Лемма 3.4.** Пусть выпуклая задача (1.1) удовлетворяет Предположению 1.1. Рассмотрим некоторый неподвижный индекс  $\bar{t}_j (j \in J_*)$  и соответствующее множество  $I_0(j)$ , построенное согласно (2.7) на последней итерации алгоритма. Тогда существует вектор  $x^* = x^*(\bar{t}_j) \in X$  такой, что

$$l^T \frac{\partial^2 f(x^*, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0,$$

$$\forall l \in L_j^0 = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : \|l\| = 1, l = \sum_{i \in P(j)} \beta_i b_i(j) + \sum_{i \in I_0(j)} \alpha_i a_i(j), \alpha_i \geq 0, i \in I_0(j) \right\}. \quad (3.14)$$

*Доказательство.* Из леммы 3.3 имеем

$$q(\bar{t}_j, l) = 1, l \in L_j^0. \quad (3.15)$$

Обозначим через  $(\widehat{Q})$  следующую задачу:

$$\begin{aligned} (\widehat{Q}): \quad & \min_{\xi, x} \xi \\ & x \in X, l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq \xi, \forall l \in L_j^0. \end{aligned}$$

В задаче  $(\widehat{Q})$ , множество  $X$  выпуклое, целевая функция и функции ограничений – выпуклые по  $x \in \mathbb{R}^n$ . Эти ограничения удовлетворяют условию Слейтера 1-го типа [10]:

$$\exists(\bar{x}, \bar{\xi}) : l^T \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l \leq \bar{\xi}, \forall l \in L_j^0,$$

где

$$\bar{x} \in X, \bar{\xi} = \max_{\|l\|=1} l^T \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l + 1.$$

Следовательно, они удовлетворяют условию Слейтера 2-го типа также. Заметим, что из утверждения 1 из [10] следует, что существуют  $n+1$  вектора  $l_i \in L_j^0, i=1, \dots, n+1$ , такие, что  $val(\hat{Q}) = val(\hat{Q}_D)$ , где  $val(A)$  – оптимальное значение целевой функции задачи  $A$ , а задача  $\hat{Q}_D$  – следующая:

$$(\hat{Q}_D): \quad \min_{\xi, x} \xi$$

$$x \in X, l_i^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i \leq \xi, i=1, \dots, n+1.$$

Из (3.15) и определения 1.2 следует, что для каждого  $l_i, i=1, \dots, n+1$ , существует  $x^{(i)} \in X$ , удовлетворяющий неравенству

$$l_i^T \frac{\partial^2 f(x^{(i)}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i < 0, i=1, \dots, n+1.$$

Так как  $\bar{t}_j$  – неподвижный индекс и  $x^{(i)}$  – допустимое решение задачи (1.1), тогда для любого  $k \in \{1, \dots, n+1\}, k \neq i$  выполняется  $l_k^T \frac{\partial^2 f(x^{(i)}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l_k \leq 0$ .

Рассмотрим вектор  $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{(k)}}{n+1}$ . Очевидно  $\bar{x} \in X$ .

Подставим этот вектор в левую часть ограничения задачи  $(\hat{Q}_D)$  и из выпуклости функции  $l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l$  по  $x$  на  $X$ , получим

$$l_i^T \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i \leq \sum_{k=1}^{n+1} \left( l_i^T \frac{\partial^2 f(x^{(k)}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i / (n+1) \right) < 0,$$

$$i=1, \dots, n+1.$$

Тогда получим, что  $val(\hat{Q}_D) < 0$ . Следовательно,  $val(\hat{Q}) < 0$  что и предполагает существование вектора  $x^* \in X: l^T \frac{\partial^2 f(x^*, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0, l \in L_j^0$ .  $\square$

**Лемма 3.5.** *Рассмотрим выпуклую задачу (1.1), удовлетворяющую Предположению 1.1. Пусть  $\bar{t}_j, I_0(j), j \in J_*$  – построенные в алгоритме индексы и множества. Тогда существует вектор  $\tilde{x} \in X$ , такой, что*

$$f(\tilde{x}, \bar{t}_j) = 0, \frac{\partial f^T(\tilde{x}, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j),$$

$$\frac{\partial f^T(\tilde{x}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_0(j),$$

$$\frac{\partial f^T(\tilde{x}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) < 0, i \in I(j) \setminus I_0(j),$$

$$l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x}, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0, \forall l \in L_j^0, j \in J_*;$$

$$f(\tilde{x}, t) < 0, t \in T \setminus \{\bar{t}_j, j \in J_*\},$$

где  $L_j^0$  определено в (3.14).

*Доказательство.* Предположим, что алгоритм останавливается на  $(k+1)$  итерации, т.е.  $k_* = k+1$ . Тогда имеем множества  $J_* \subset \bar{J}$ ,  $I_0(j) \subset \tilde{I}(j), j \in J_*$ , и вектора

$$x^{(j)} \in X^{(k+1)}, j \in \bar{J} \setminus J_*,$$

$$x^{(ji)} \in X^{(k+1)}, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j), j \in J_*$$

такие, что

$$f(x^{(j)}, \bar{t}_j) < 0, j \in \bar{J} \setminus J_*,$$

$$\frac{\partial f^T(x^{(ji)}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) < 0, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j), j \in J_*.$$

Положим

$$\hat{x} = \left( \sum_{j \in \bar{J} \setminus J_*} x^{(j)} + \sum_{j \in J_*} \sum_{i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j)} x^{(ji)} \right) / r,$$

где  $r = |\bar{J} \setminus J_*| + \sum_{j \in J_*} |\tilde{I}(j) \setminus I_0(j)|$ . Поскольку множество  $X^{(k+1)}$  выпуклое по лемме 3.3 и функция  $f(x, t)$  выпуклая по  $x \in X^{(k+1)}$ , и для  $i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j), j \in J_*$  функции  $\frac{\partial f^T(x^{(ji)}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j)$  – выпуклые по  $x$  на  $X^{(k+1)}$  по лемме 3.1, то  $\hat{x} \in X^{(k+1)}$  и

$$f(\hat{x}, \bar{t}_j) < 0, j \in \bar{J} \setminus J_*,$$

$$\frac{\partial f^T(\hat{x}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) < 0, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j), j \in J_*. \quad (3.16)$$

Рассмотрим вектор  $\tilde{x}^* = \sum_{j \in J_*} \frac{x^{*j}}{|J_*|}$ , где  $x^{*j} \in X, j \in J_*$  – вектор из леммы 3.4. Тогда из выпуклости функций  $l^T \frac{\partial^2 f(x, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l, l \in L_j^0, j \in J_*$  по  $x \in X$  следует, что  $\tilde{x}^*$  удовлетворяет условию

$$l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x}^*, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0, \forall l \in L_j^0, j \in J_*.$$

С учетом того, что  $\tilde{x}^* \in X$  и (3.13), то для  $\tilde{x}^*$  будут выполняться следующие соотношения:

$$f(\tilde{x}^*, \bar{t}_j) = 0, \frac{\partial f^T(\tilde{x}^*, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j),$$

$$\frac{\partial f^T(\tilde{x}^*, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_0(j),$$

$$\frac{\partial f^T(\tilde{x}^*, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \leq 0, i \in I(j) \setminus I_0(j),$$

$$l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x}^*, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0, \forall l \in L_j^0, j \in J_*.$$

Рассмотрим вектор  $z = \frac{1}{2}(\tilde{x}^* + \bar{x}) \in X$ , где  $\bar{x}$  – вектор введенный в пункте 3. Тогда по построению:

$$f(z, \bar{t}_j) \leq 0, j \in \bar{J} \setminus J_*, f(z, \bar{t}_j) = 0, j \in J_*;$$

$$\frac{\partial f^T(z, \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^T(z, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) &= \begin{cases} < 0, i \in I(j) \setminus \tilde{I}(j), \\ \leq 0, i \in \tilde{I}(j), \end{cases} \\ l^T \frac{\partial^2 f(z, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l &< 0, \forall l \in L_j^0, \\ l^T \frac{\partial^2 f(z, \bar{t}_j)}{\partial t^2} l &\leq 0, \forall l \in L_j^1, j \in J_*; \\ f(z, t) &< 0, \forall t \in T \setminus \bigcup \{\bar{t}_j, j \in \bar{J}\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $L_j^0$  определенно согласно (3.14),

$$L_j^1 = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : \|l\|=1, l = \sum_{i \in P(j)} \beta_i b_i(j) + \sum_{i \in I(j)} \alpha_i a_i(j), \right. \\ \left. \alpha_i \geq 0, i \in I(j), \frac{\partial f^T(z, \bar{t}_j)}{\partial t} l = 0 \right\}, j \in J_*.$$

Для данного  $\lambda \in [0, 1]$  рассмотрим новый вектор  $x(\lambda) = (1 - \lambda)z + \lambda \hat{x}$ . Очевидно  $x(\lambda) \in X^{(k+1)}$ . Заметим, что здесь вектор  $\hat{x} \in X^{(k+1)}$  удовлетворяет (3.16). Принимая во внимание выпуклость  $f(x, t)$  по  $x$ , имеем

$$f(x(\lambda), t) \leq (1 - \lambda)f(z, t) + \lambda f(\hat{x}, t). \quad (3.18)$$

Принимая во внимание выпуклость функций и соотношения (3.13), (3.16), (3.17), можем заключить, что для  $0 < \lambda < 1$  выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f(x(\lambda), \bar{t}_j) &< 0, j \in \bar{J} \setminus J_*, \\ f(x(\lambda), \bar{t}_j) = 0, \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) &= 0, i \in P(j), \\ \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) &= 0, i \in I_0(j), \\ \frac{\partial f^T(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) &< 0, i \in I(j) \setminus I_0(j), \\ l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \bar{t}_j)}{\partial t^2} l &< 0, \forall l \in L_j^0, j \in J_*. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Покажем, что для достаточно малых  $\lambda > 0$  существует  $\varepsilon(\lambda) > 0$  такое, что

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda) &\rightarrow +0 \text{ при } \lambda \rightarrow +0 \\ \text{и } f(x(\lambda), t) &< 0, t \in T \setminus \bigcup_{j \in J_*} T_{\varepsilon(\lambda)}(\bar{t}_j), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где  $T_\varepsilon(t) = \{\tau \in T : \|\tau - t\| \leq \varepsilon\}$ .

Возьмем некоторое  $\bar{\varepsilon} > 0$  такое, чтобы оно было в два меньше, чем минимальное расстояние между двумя любыми  $\bar{t}_j, j \in J_*$  и  $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ .

Обозначим

$$\tilde{T}_\varepsilon = T \setminus \bigcup_{j \in J_*} T_\varepsilon(\bar{t}_j),$$

$$T_\varepsilon^+ = cl \left\{ t \in \tilde{T}_\varepsilon : f(\hat{x}, t) > 0 \right\}, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}],$$

где  $clT$  – замыкание множества  $T$ . Принимая во внимание соотношения (3.18), (3.19) имеем

$$f(x(\lambda), t) < 0, \forall \lambda \in (0, 1) \forall t \in \tilde{T}_\varepsilon \setminus T_\varepsilon^+, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]. \quad (3.21)$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{\lambda}_\varepsilon(t) = \frac{f(z, t)}{f(z, t) - f(\hat{x}, t)}, t \in T_\varepsilon^+, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}].$$

Покажем, что  $\bar{\lambda}_\varepsilon(t) > 0, t \in T_\varepsilon^+, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ . По построению имеем  $f(\hat{x}, \bar{t}_j) < 0, j \in \bar{J} \setminus J_*$ . Из этого следует, что для любого  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  верно включение  $T_\varepsilon^+ \subset cl \left( T \setminus \bigcup_{j \in \bar{J}} T_\varepsilon(\bar{t}_j) \right)$ . Тогда, учитывая это и соотношения (3.17) имеем

$$f(z, t) < 0, \forall t \in T_\varepsilon^+, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]. \quad (3.22)$$

Обозначим

$$\bar{\delta}(\varepsilon) = \min_{t \in T_\varepsilon^+} |f(z, t)|, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}],$$

$$\delta^* = \sup_{t \in T^+} |f(z, t) - f(\hat{x}, t)| < \infty,$$

где  $T^+ = cl \left\{ t \in T : f(\hat{x}, t) > 0 \right\}$ . В силу соотношения (3.22) справедливо неравенство  $\bar{\delta}(\varepsilon) > 0, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ . Тогда для  $t \in T_\varepsilon^+$  получаем

$$\bar{\lambda}_\varepsilon(t) = \frac{f(z, t)}{f(z, t) - f(\hat{x}, t)} \geq \frac{\bar{\delta}(\varepsilon)}{\delta^*} := \nu(\varepsilon) > 0, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}].$$

Положим  $\bar{\nu}(\varepsilon) = \min\{\varepsilon, \nu(\varepsilon)\} > 0$  при  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ . Тогда

$$f(x(\lambda), t) < 0, \forall t \in T_\varepsilon^+, \forall \lambda \in (0, \bar{\nu}(\varepsilon)), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$$

и с учетом соотношения (3.21) получаем

$$f(x(\lambda), t) < 0, \forall t \in \tilde{T}_\varepsilon, \forall \lambda \in (0, \bar{\nu}(\varepsilon)), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}].$$

Заметим, что из построения функции  $\bar{\nu}(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  видно, что она обладает следующими свойствами: •  $\bar{\nu}(\varepsilon) > 0$  при  $\varepsilon > 0$ ; •  $\bar{\nu}(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Покажем, что функция  $\bar{\nu}(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  также является неубывающей. Для начала покажем, что функция  $\nu(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  является неубывающей, т. е.  $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \bar{\varepsilon} \Rightarrow \nu(\varepsilon_1) \leq \nu(\varepsilon_2)$ . Поскольку  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , то  $T_{\varepsilon_2}^+ \subseteq T_{\varepsilon_1}^+$ . Тогда, учитывая построение функции  $\nu(\varepsilon)$ , получим:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \bar{\varepsilon} \Rightarrow \\ \min_{t \in T_{\varepsilon_1}^+} |f(z, t)| &\leq \min_{t \in T_{\varepsilon_2}^+} |f(z, t)|. \end{aligned}$$

Таким образом функция  $\nu(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  является неубывающей, а из этого следует, что и функция  $\bar{\nu}(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  является неубывающей как минимум неубывающих функций.

Заметим, что функция  $\bar{\nu}(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  обладает еще одним свойством – непрерывность, что следует непосредственно из непрерывности функции  $\nu(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ .

Определим  $\varepsilon^* := \bar{\varepsilon} > 0, \lambda^* := \bar{\nu}(\varepsilon^*) > 0$ . Тогда по построению имеем, что для любого

$\lambda \in (0, \lambda^*]$  существует  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]: \lambda = \bar{v}(\varepsilon)$ . Построим обратную функцию следующим образом: для любого  $\lambda \in (0, \lambda^*]$  поставим в соответствии число  $\varepsilon(\lambda) = \inf_{\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]} \varepsilon$ .

Покажем, что  $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Предположим противное, т. е.  $\exists \bar{\varepsilon} > 0: \varepsilon(\lambda) \rightarrow \bar{\varepsilon}$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . По построению имеем  $\bar{v}(\varepsilon(\lambda)) = \lambda$ , перейдя к пределу в данном равенстве при  $\lambda \rightarrow 0$  получим:  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{v}(\varepsilon(\lambda)) = 0, \bar{v}(\bar{\varepsilon}) = 0$ , а это противоречит тому, что  $\bar{v}(\bar{\varepsilon}) > 0$ .

Из всего выше изложенного следует, что для  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  существует  $\varepsilon(\lambda)$  такое, что  $\varepsilon(\lambda) \rightarrow +0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  и

$$f(x(\lambda), t) < 0, \forall t \in T \setminus \bigcup_{j \in J_*} T_{\varepsilon(\lambda)}(\bar{t}_j).$$

Таким образом доказано соотношение (3.20).

Для  $j \in J_*$  соотношения (3.19) являются достаточным условием того, что точка  $\bar{t}_j$  является строгим локальным решением задачи  $\max_{\tau \in T} f(x(\lambda), \tau), \forall \lambda \in (0, 1)$ . Тогда из определения строгого локального максимума следует, что для любого  $\lambda \in (0, 1)$  существует число  $\check{\varepsilon}(\lambda) > 0$ , такое что

$$\begin{aligned} f(x(\lambda), t) < f(x(\lambda), \bar{t}_j) = 0, \\ t \in T_{\check{\varepsilon}(\lambda)}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}, j \in J_*. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Зафиксируем  $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ . Тогда для него существует  $\check{\varepsilon}(\bar{\lambda}) =: \check{\varepsilon} > 0: f(x(\bar{\lambda}), t) < 0, \forall t \in T_{\check{\varepsilon}}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}, j \in J_*$ .

Покажем, что

$$\begin{aligned} \forall \lambda: \lambda \in (0, \bar{\lambda}) \text{ и } \check{\varepsilon} > 0: f(x(\lambda), t) < 0, \\ \forall t \in T_{\check{\varepsilon}}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}, j \in J_*. \end{aligned}$$

Предположим противное, т. е.  $\exists \bar{\lambda}: \bar{\lambda} \in (0, \bar{\lambda})$

$$\exists j_0 \in J_*, \exists \bar{t}_{j_0} \in T_{\check{\varepsilon}}(\bar{t}_{j_0}) \setminus \{\bar{t}_{j_0}\}: f(x(\bar{\lambda}), \bar{t}_{j_0}) \geq 0.$$

Поскольку  $\bar{\lambda} < \bar{\lambda}$ , то  $\bar{\lambda}$  можно представить в виде  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda} + \Delta\lambda, \Delta\lambda > 0$ . Учитывая это и соотношение (3.18) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x(\bar{\lambda}), \bar{t}_{j_0}) &\leq (1 - \bar{\lambda})f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\lambda}f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) = \\ &= (1 - \bar{\lambda} + \Delta\lambda)f(z, \bar{t}_{j_0}) + (\bar{\lambda} - \Delta\lambda)f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) = \\ &= (1 - \bar{\lambda})f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\lambda}f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) + \\ &\quad + \Delta\lambda(f(z, \bar{t}_{j_0}) - f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0})). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} (1 - \bar{\lambda})f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\lambda}f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) + \\ + \Delta\lambda(f(z, \bar{t}_{j_0}) - f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0})) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Поскольку  $f(z, \bar{t}_{j_0}) < 0$ ,

$$(1 - \bar{\lambda})f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\lambda}f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) < 0,$$

$\Delta\lambda > 0$  тогда, чтобы выполнялось соотношение (3.24) должно выполняться

$$\begin{cases} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) > 0, \\ f(z, \bar{t}_{j_0}) - f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) > 0, \\ f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) < 0. \end{cases}$$

Данная система противоречива, это и доказывает, что

$$\begin{aligned} \forall \lambda: \lambda \in (0, \bar{\lambda}) \text{ и } \check{\varepsilon}(\lambda) = \check{\varepsilon} > 0: \\ f(x(\lambda), t) < 0, \forall t \in T_{\check{\varepsilon}}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}, j \in J_*. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из условия  $\varepsilon(\lambda) \rightarrow +0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  и соотношения (3.25) следует, что всегда существует такое  $\lambda^* \in (0, \bar{\lambda})$ , что  $\check{\varepsilon} > \varepsilon(\lambda^*)$ . Тогда из этого и соотношений (3.20) и (3.23) получим, что существует  $\lambda^*$  такое, что

$$f(x(\lambda^*), t) < 0, \forall t \in T \setminus \{\bar{t}_j, j \in J_*\}. \quad (3.26)$$

Таким образом, из соотношений (3.19), (3.26) получили, что данный вектор  $x(\lambda^*)$  для достаточно малого  $\lambda^*$  является планом задачи, т. е.  $x(\lambda^*) \in X$  и удовлетворяет условиям доказываемого утверждения.  $\square$

*Доказательство теоремы 3.1.* Из леммы 3.3 следует, что индексы  $\bar{t}_j, j \in J_*$  являются неподвижными и их порядки неподвижности определяются согласно (3.1). Из леммы 3.5 следует, что это все неподвижные индексы.  $\square$

Заметим здесь также был построен вектор  $\bar{x} \in X$  такой, что

$$T_a(\bar{x}) = T^*,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^T(\bar{x}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) < 0, i \in I(j) \setminus I_0(j), \\ l^T \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{t}_j)}{\partial^2 t} l < 0, l \in L_j^0, j \in J_*, \\ f(\bar{x}, t) < 0, \forall t \in T \setminus \{\bar{t}_j, j \in J_*\}. \end{aligned}$$

#### 4 Пример

Проиллюстрируем работу описанного алгоритма на примере. Пусть

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4, t = (t_1, t_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{и } f_1(x, t) := 5t_2x_1^2 - t_1x_2^2 - (t_1 + 1)^2t_2x_3 + t_2^2x_4^2 - 2t_2^2 - (t_1 + 1)^2,$$

$$f_2(x, t) := t_1x_2^2 - x_1 - (2t_1^3 + t_2^3)x_3 - t_1^2x_4 + 2t_2^2 - t_2,$$

$$T_1 := \{t \in \mathbb{R}^2: -3 \leq t_1 \leq -1, 0 \leq t_2 \leq 2, t_2 - t_1 \leq 4\},$$

$$T_2 := \{t \in \mathbb{R}^2: t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_2 + t_1 \leq 4\}.$$

Рассмотрим выпуклую задачу полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов вида:

$$\begin{aligned} \min(-x_2 - 8x_3 + x_4^2), \\ f_1(x, t) \leq 0, \forall t \in T_1, f_2(x, t) \leq 0, \forall t \in T_2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что  $\bar{x} = (0, 0, 1, 1)$  является допустимым планом данной задачи. Множество активных индексов для  $\bar{x}$  имеет вид  $T_a(\bar{x}) = \{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ , где  $t^{(1)} = (-1, 0)^T \in T_1$ ,  $t^{(2)} = (0, 0)^T \in T_2$ ,  $t^{(3)} = (0, 1)^T \in T_2$ .

Используя правила, описанные в работе [9], построим для каждой активной точки экстремальные лучи в соответствующем множестве индексов: для  $t^{(1)} \in T_1$  имеем  $a_1(1) = (0, 1)$ ,  $a_2(1) = (-1, 0)$ , для  $t^{(2)} \in T_2$  имеем  $a_1(2) = (0, 1)$ ,  $a_2(2) = (1, 0)$ , для  $t^{(3)} \in T_2$  имеем  $b_1(3) = (0, 1)$ ,  $a_1(3) = (1, 0)$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^T f_1(\bar{x}, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1) &= \frac{\partial^T f_1(\bar{x}, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1) = 0, \\ \frac{\partial^T f_2(\bar{x}, t^{(2)})}{\partial t} a_2(2) &= 0, \frac{\partial^T f_2(\bar{x}, t^{(3)})}{\partial t} a_1(3) = 0, \\ \frac{\partial^T f_2(\bar{x}, t^{(2)})}{\partial t} a_1(2) &\neq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие множества:

$$\bar{J} = \{1, 2, 3\}, \tilde{I}(1) = \{1, 2\}, \tilde{I}(2) = \{2\}, \tilde{I}(3) = \{1\}.$$

На первой итерации алгоритма  $k = 0, J_*^{(0)} = \emptyset$ .

Построим множество

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x, t^{(1)}) \leq 0, \\ &f_2(x, t^{(2)}) \leq 0, f_2(x, t^{(3)}) \leq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2^2 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_1 - x_3 + 1 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для каждого  $j \in \bar{J} = \{1, 2, 3\}$ .

Когда  $j = 1$ , тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(1)}} f_1(x, t^{(1)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(1)}} x_2^2).$$

Тогда оптимальным решением будет

$$x^{(1)} = \bar{x} = (0, 0, 1, 1) : f_1(x^{(1)}, t^{(1)}) = 0.$$

Когда  $j = 2$ , тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(1)}} f_2(x, t^{(2)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(1)}} -x_1).$$

Положим  $x^{(2)} = (1, 0, 0, 0) : f_2(x^{(2)}, t^{(2)}) < 0$ .

Когда  $j = 3$ , тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(1)}} f_2(x, t^{(3)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(1)}} -x_1 - x_3 + 1).$$

Положим  $x^{(3)} = (1, 0, 1, 0) : f_2(x^{(3)}, t^{(3)}) < 0$ .

Найдем множества

$$\Delta J_*^{(1)} = \{j \in \bar{J} : f(x^{(j)}, t^{(j)}) = 0\} = \{1\}, \Delta I_0^{(1)}(1) = \emptyset.$$

Поскольку  $\Delta J_*^{(1)} = \{1\} \neq \emptyset$ , переходим к следующей итерации с  $J_*^{(1)} = J_*^{(0)} \cup \Delta J_*^{(1)} = \{1\}$ ,  $I_0^{(1)}(1) = \Delta I_0^{(1)}(1) = \emptyset$  и  $\bar{J} \setminus J_*^{(1)} = \{2, 3\}$ .

На следующей итерации ( $k = 1$ ) строим множество

$$X^{(2)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f_1(x, t^{(1)}) = 0, \right.$$

$$\left. \begin{aligned} f_2(x, t^{(2)}) \leq 0, f_2(x, t^{(3)}) \leq 0, \\ \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1) \leq 0, \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1) \leq 0, \\ l^T \frac{\partial^2 f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t^2} l \leq 0, l \in I_0^{(1)} \end{aligned} \right\}.$$

Заметим,  $I_0^{(1)} = \emptyset$  (поскольку  $P(1) = \emptyset, I_0^{(1)}(1) = \emptyset$ ), тогда

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2^2 = 0, -x_1 \leq 0, \\ &-x_1 - x_3 + 1 \leq 0, 5x_1^2 \leq 0, x_2^2 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для каждого  $j \in \bar{J} \setminus J_* = \{2, 3\}$ .

Когда  $j = 2$ , тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} f_2(x, t^{(2)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} -x_1).$$

Положим оптимальное решение  $x^{(2)} = (0, 0, 1, 1) : f_2(x^{(2)}, t^{(2)}) = 0$ .

Когда  $j = 3$ , тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} f_2(x, t^{(3)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} -x_1 - x_3 + 1).$$

Положим  $x^{(3)} = (0, 0, 2, 0) : f_2(x^{(3)}, t^{(3)}) < 0$ .

Построим множество

$$\Delta J_*^{(2)} = \{j \in \{2, 3\} : f(x^{(j)}, t^{(j)}) = 0\} = \{2\}.$$

Поскольку  $\tilde{I}(1) \setminus I_0^{(1)}(1) = \{1, 2\}$ , рассмотрим решение следующих вспомогательных задач:

При  $i = 1$  задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} 5x_1^2).$$

Положим оптимальное решение

$$x^{(11)} = x^0 = (0, 0, 1, 1) : \frac{\partial f_1^T(x^{(11)}, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1) = 0.$$

При  $i = 2$  задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} x_2^2).$$

Положим оптимальное решение

$$x^{(12)} = \bar{x} = (0, 0, 1, 1) : \frac{\partial f_1^T(x^{(12)}, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1) = 0.$$

В соответствии с алгоритмом, определяем множество

$$\Delta I_0^{(2)}(1) = \left\{ i \in \{1, 2\} : \frac{\partial f_1^T(x^{(i)}, t^{(1)})}{\partial t} a_i(1) = 0 \right\} = \{1, 2\}.$$

Построим множества

$$J_*^{(2)} = J_*^{(1)} \cup \Delta J_*^{(2)} = \{1, 2\},$$

$$I_0^{(2)}(1) = I_0^{(1)}(1) \cup \Delta I_0^{(2)}(1) = \{1, 2\}, I_0^{(2)}(2) = \emptyset,$$

переходим к следующей итерации.

На следующей итерации ( $k = 2$ ) строим множество

$$\begin{aligned} X^{(3)} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : f_1(x, t^{(1)}) = 0, f_1(x, t^{(2)}) = 0, \right. \\ &f_2(x, t^{(3)}) \leq 0, \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_i(1) &= 0, i \in I_0^{(2)}(1), \\ l^T \frac{\partial^2 f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t^2} l &\leq 0, l \in L_1^{(2)}, \\ \frac{\partial f_2^T(x, t^{(2)})}{\partial t} a_i(2) &\leq 0, i \in \tilde{I}(2), \\ l^T \frac{\partial^2 f_2^T(x, t^{(2)})}{\partial t^2} l &\leq 0, l \in L_2^{(2)}. \end{aligned} \right\}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= \left\{ l \in \mathbb{R}^2 : \|l\| = 1, l = \sum_{i \in I_0^{(2)}(1)} \alpha_i a_i(1) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \alpha_i \geq 0, l^T \frac{\partial^2 f_1^T(\bar{x}, t^{(1)})}{\partial t^2} l = \\ &\quad = (-\alpha_2 \alpha_1) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \\ &\quad \left. = -2\alpha_2^2 - 2\alpha_1^2 \neq 0 \right\} = \emptyset, \end{aligned}$$

$L_2^{(2)} = \emptyset$  (поскольку  $P(2) = \emptyset, I_0^{(2)}(2) = \emptyset$ ), перепишем множество  $X^{(3)}$  в виде

$$\begin{aligned} X^{(3)} &= \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2^2 = 0, -x_1 = 0, \\ &\quad -x_1 - x_3 + 1 \leq 0, 5x_1^2 = 0, x_2^2 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для  $j \in \bar{J} \setminus J_*^{(2)} = \{3\}$ .

Задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(3)}} f_2(x, t^{(3)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(3)}} -x_1 - x_3 + 1).$$

Положим  $x^{(3)} = (0, 0, 2, 1) : f_2(x^{(3)}, t^{(3)}) < 0$ .

Тогда множество  $\Delta J_*^{(3)} = \emptyset$ . Рассмотрим множество  $J_*^{(2)}$ . Здесь  $\tilde{I}(1) \setminus I_0^{(2)}(1) = \emptyset$ . Поскольку  $\tilde{I}(2) \setminus I_0^{(2)}(2) = \{2\}$  рассмотрим решение следующей вспомогательной задачи:

$$\min_{x \in X^{(3)}} \frac{\partial f_2^T(x, t^{(2)})}{\partial t} a_2(2), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(3)}} x_2^2).$$

Положим оптимальное решение

$$x^{(22)} = \bar{x} = (0, 0, 1, 1) : \frac{\partial f_2^T(x^{(22)}, t^{(2)})}{\partial t} a_2(2) = 0.$$

В соответствии с алгоритмом, имеем

$$\Delta I_0^{(3)}(2) = \left\{ i \in \tilde{I}(2) : \frac{\partial f_2^T(x^{(2i)}, t^{(2)})}{\partial t} a_i(2) = 0 \right\} = \{2\}.$$

Построим множества

$$J_*^{(3)} = J_*^{(2)} \cup \Delta J_*^{(3)} = \{1, 2\},$$

$$I_0^{(3)}(1) = I_0^{(2)}(1) = \{1, 2\}, I_0^{(3)}(2) = \{2\},$$

переходим к следующей итерации.

На следующей итерации ( $k = 4$ ) строим множество

$$\begin{aligned} X^{(4)} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : f_1(x, t^{(1)}) = 0, \right. \\ &\quad \left. f_2(x, t^{(2)}) = 0, f_2(x, t^{(3)}) \leq 0, \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_i(1) &= 0, i \in I_0^{(3)}(1), \\ l^T \frac{\partial^2 f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t^2} l &\leq 0, l \in L_1^{(3)}, \\ \frac{\partial f_2^T(x, t^{(2)})}{\partial t} a_i(2) &= 0, i \in I_0^{(3)}(2), \\ l^T \frac{\partial^2 f_2^T(x, t^{(2)})}{\partial t^2} l &\leq 0, l \in L_2^{(3)}. \end{aligned} \right\}.$$

Учитывая  $L_1^{(3)} = L_1^{(2)} = \emptyset$  и

$$\begin{aligned} L_2^{(3)} &= \left\{ l \in \mathbb{R}^2 : \|l\| = 1, l = \sum_{i \in I_0^{(3)}(2)} \alpha_i a_i(2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \alpha_i \geq 0, l^T \frac{\partial^2 f_2^T(\bar{x}, t^{(2)})}{\partial t^2} l = \\ &\quad \left. = (\alpha_1 \ 0) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\alpha_1^2 \neq 0 \right\} = \emptyset, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} X^{(4)} &= \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2^2 = 0, -x_1 = 0, \\ &\quad -x_1 - x_3 + 1 \leq 0, 5x_1^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для  $j \in \bar{J} \setminus J_*^{(3)} = \{3\}$ .

Задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(4)}} f_2(x, t^{(3)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(4)}} -x_1 - x_3 + 1).$$

Положим  $x^{(3)} = (0, 0, 2, 1) : f_2(x^{(3)}, t^{(3)}) < 0$ . Тогда множество  $\Delta J_*^{(4)} = \emptyset$ .

Поскольку  $\tilde{I}(1) \setminus I_0^{(3)}(1) = \emptyset, \tilde{I}(2) \setminus I_0^{(3)}(2) = \emptyset$ , то  $\Delta I_0^{(4)}(j) = \emptyset, j \in J_*^{(3)}$ .

Тогда  $\Delta J_*^{(4)} = \emptyset, \Delta I^{(4)}(1) = \emptyset, \Delta I^{(4)}(2) = \emptyset$  и, следовательно, останавливаем алгоритм с  $T^* = \{t^{(1)}, t^{(2)}\}$ .

Для найденных неподвижных индексов порядки неподвижности вдоль соответствующих экстремальных лучей являются

$$q(t^{(1)}, a_i(1)) = 1, i \in I_0(1) = \{1, 2\};$$

$$q(t^{(2)}, a_2(2)) = 1, i \in I_0(2) = \{2\},$$

$$q(t^{(2)}, a_i(2)) = 0, i \in I(2) \setminus I_0(2) = \{1\}.$$

### Заключение

В данной работе были рассмотрены выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов. Был описан и обоснован конечный алгоритм, который определяет неподвижные индексы и их порядки неподвижности вдоль допустимых направлений для данных задач. Приведен пример, иллюстрирующий работу данного алгоритма. Полученный результат усиливает результат, полученный в работе [9], т. е. класс исследуемых задач расширяется от задач линейного полубесконечного программирования до задач выпуклого полубесконечного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hettich, R.* Semi-infinite programming: theory, methods and applications / R. Hettich, K.O. Kortanek // *SIAM Reviev.* – 1993. – Vol. 35, № 3. – P. 380–429.
2. *Still, G.* Generalized semi-infinite programming: Theory and methods / G. Still // *European Journal of Operational Research.* – 1999. – Vol. 119. – P. 301–313.
3. *Stein, O.* On optimality conditions for generalized semi-infinite programming problems / O. Stein, G. Still // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 2000. – Vol. 104, № 2. – P. 443–458.
4. *Ruckmann, J.J.* First-order optimality conditions in generalized semi-infinite programming / J.J. Ruckmann, A. Shapiro // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 1999. – Vol. 101, № 3. – P. 677–691.
5. *Klatte, D.* Stable local minimizers in semi-infinite optimization: regularity and second-order conditions / D. Klatte // *J. Comput. Appl. Math.* – 1994. – Vol. 56. – P. 137–157.
6. *Moldovan, A.* On Regularity for Constrained Extremum Problems. Part 2: Necessary Optimality Conditions / A. Moldovan, L. Pellegrini // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 2009. – Vol. 142. – P. 165–183.
7. *Kostyukova, O.I.* Sufficient optimality conditions for convex semi-infinite programming / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // *Optimization Methods and Software.* – 2010. – Vol. 25, № 2. – P. 279–297.
8. *Kostyukova, O.I.* On the algorithm of determination of immobile indices for convex SIP problems / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova, S.A. Yermalinskaya // *International Journal on Mathematics and Statistics.* – 2008. – Vol. 13, № 8. – P. 13–33.
9. *Kostyukova, O.I.* A constructive algorithm for determination of immobile indices in convex SIP problems with polyhedral index sets / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova. – Aveiro, 2012. – 17 p. – (Preprint / Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Mathematical Department, University of Aveiro).
10. *Kostyukova, O.I.* Implicit optimality criterion for convex SIP problem with box constrained index set / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2012. – Vol. 20. – P. 475–502.

Поступила в редакцию 06.06.14.

УДК 517.983.23: 517.983.5

## ОБРАЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ РЕЗОЛВЕНТЫ ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

## INVERSION OF A LINEAR COMBINATION OF VALUES OF THE RESOLVENT OF A CLOSED OPERATOR

A.R. Mirotin, A.A. Atvinovskii

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Решается задача вычисления левого обратного к линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора в банаховом пространстве. Сформулированы нерешенные задачи.

**Ключевые слова:** замкнутый оператор, левый обратный оператор, резольвента, банахово пространство, функциональное исчисление, функция Маркова.

The problem of the computation of the left inverse of a linear combination of values of the resolvent of a closed operator in a Banach space is solved. Several unsolved problems are formulated.

**Keywords:** closed operator, left inverse of an operator, resolvent, Banach space, functional calculus, Markov function.

### Введение

Данная заметка посвящена решению следующей задачи. Рассмотрим рациональную функцию вида

$$f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\lambda_j - z}, \quad (0.1)$$

где  $n > 1$ ,  $c_j > 0$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), и пусть  $a = \min \lambda_j$ ,  $b = \max \lambda_j$ . Функция  $f$  нигде не обращается в нуль на множестве  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ , так как

$$f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j (\lambda_j - x)}{|\lambda_j - \bar{z}|^2} + iy \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{|\lambda_j - \bar{z}|^2}.$$

Кроме того, очевидно, что функция (0.1) голоморфна на множестве  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  и в бесконечности и имеет в бесконечности нуль первого порядка. Следовательно, если  $A$  – замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве  $X$ , спектр  $\sigma(A)$  которого не пересекается с отрезком  $[a, b]$ , то в силу известного свойства голоморфного функционального исчисления [1, с. 643, теорема 9] оператор

$$f(A) = \sum_{j=1}^n c_j R(\lambda_j, A)$$

(здесь и ниже  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$  – резольвента оператора  $A, I$  – единичный оператор в  $X$ ) имеет левый обратный  $f(A)^{-1}$ . Основным результатом данной работы дает способ его вычисления.

В связи с рассматриваемой задачей отметим, что условие  $\sigma(A) \cap [a, b] = \emptyset$  существенно

для левосторонней обратимости оператора  $f(A)$ , что видно из следующего тождества:

$$\begin{aligned} R(\lambda_1, A) + R(\lambda_2, A) &= \\ &= 2R(\lambda_1, A) \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - A \right) R(\lambda_2, A). \end{aligned}$$

### 1 Вспомогательные сведения

Нам понадобятся некоторые сведения о функциях классов  $R[a, b]$  и  $Q[a, b]$  и функциональном исчислении с символами из  $Q[a, b]$  [2].

Пусть  $a < b$ . Говорят, что функция  $g$  относится к классу  $R[a, b]$ , если она голоморфна в верхней полуплоскости, отображает ее в себя, а также голоморфна и положительна на  $(-\infty, a)$  и голоморфна и отрицательна на  $(b, +\infty)$  (функции этого класса называются функциями Маркова). Известно [3], что  $g$  можно единственным образом представить в виде

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t - z},$$

где  $\tau$  – ограниченная положительная борелевская мера, сосредоточенная на отрезке  $[a, b]$  (представляющая мера).

Ясно, что  $f \in R[a, b]$ .

Положим также

$$Q[a, b] = \{\varphi \mid \varphi = 1/g, \quad g \in R[a, b]\}$$

(любая функция  $g \in R[a, b]$  не обращается в нуль на  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ ).

Если функция  $\varphi$  принадлежит классу  $\mathcal{Q}[a, b]$ , то ее можно единственным образом представить в виде

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z - h(z),$$

где  $h \in R[a, b]$ , интегралы, представляющие,  $h(a)$  и  $h(b)$ , сходятся, а числа  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Следующая лемма дает способ вычисления этих чисел, если известна представляющая мера функции  $1/\varphi$ .

**Лемма 1.1.** Пусть функция  $\varphi$  принадлежит  $\mathcal{Q}[a, b]$ ,  $\varphi = 1/g$ ,  $g \in R[a, b]$ ,  $\tau$  – представляющая мера для  $g$ . Тогда

$$\beta = -\frac{1}{\tau([a, b])}, \quad \alpha = \frac{1}{\tau([a, b])^2} \int_a^b t d\tau(t).$$

*Доказательство.* Выше было отмечено, что  $\varphi(z) = \alpha + \beta z - h(z)$ , где  $h \in R[a, b]$ , причем из очевидного равенства  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$  вытекает, что коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются следующим образом:

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x}, \quad \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x) - \beta x).$$

Следовательно,  $\beta = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} xg(x)}$ . Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xg(x) = \int_a^b \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{t-x} d\tau(t) = -\tau([a, b]).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{g(x)} + \frac{x}{\tau([a, b])} \right) = \\ &= \frac{1}{\tau([a, b])} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tau([a, b]) + \int_a^b \frac{x}{t-x} d\tau(t)}{\int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-x}} = \\ &= \frac{1}{\tau([a, b])} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tau([a, b]) + \int_a^b \frac{d\tau(t)}{yt-1}}{y \int_a^b \frac{d\tau(t)}{yt-1}}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{yt-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} y^n t^n$$

и интегрируя степенной ряд почленно, получаем окончательно

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\tau([a, b])} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tau([a, b]) - \sum_{n=0}^{\infty} y^n \int_a^b t^n d\tau(t)}{-\sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} \int_a^b t^n d\tau(t)} = \\ &= \frac{1}{\tau([a, b])^2} \int_a^b t d\tau(t). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

## 2 Основной результат

**Теорема 2.1.** Пусть функция  $f$  задана формулой (0.1),  $A$  – замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве  $X$ , спектр которого не пересекается с отрезком  $[a, b]$ . Тогда левый обратный к оператору  $f(A)$  имеет вид

$$f(A)^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j}{\left( \sum_{j=1}^n c_j \right)^2} I - \frac{1}{\sum_{j=1}^n c_j} A - \sum_{k=1}^{n-1} a_k R(t_k, A),$$

где  $t_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) – все нули функции  $f$ ,

$$a_k = \frac{1}{f'(t_k)}.$$

*Доказательство.* Как было сказано выше, если  $\varphi = 1/f$ , то  $\varphi(z) = \alpha + \beta z - h(z)$ , где  $h \in R[a, b]$ . Пусть  $h$  имеет представляющую меру  $\mu$ . В силу теоремы обращения из [2], левый обратный к оператору  $f(A)$  есть  $\varphi(A)$ , т. е.

$$f(A)^{-1} = \alpha I + \beta A - \int_a^b R(t, A) d\mu(t). \quad (2.1)$$

Так как функция  $f$  принадлежит классу  $R[a, b]$  и имеет представляющую меру  $\tau = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{\lambda_i}$ , где  $\delta_{\lambda}$  – мера Дирака, сосредоточенная в точке  $\lambda$ , то, воспользовавшись леммой 1.1, легко находим, что

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j}{\left( \sum_{j=1}^n c_j \right)^2}, \quad \beta = -\frac{1}{\sum_{j=1}^n c_j}. \quad (2.2)$$

Возможны два случая.

1)  $a \geq 0$ . Применяя прием из [4], [5], введем функцию

$$F(\zeta) := h(-\zeta) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{t + \zeta}.$$

В рассматриваемом случае эта функция есть преобразование Стильтеса меры  $\mu$ , сосредоточенной на отрезке  $[a, b]$ . Поэтому, трактуя меру  $\mu$  как обобщенную функцию, получаем в силу комплексной формулы обращения для преобразования Стильтеса обобщенных функций [6, с. 70], что

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} (F(-t - iy) - F(-t + iy)) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} (h(t + i0) - h(t - i0)) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\varphi(t - i0) - \varphi(t + i0)). \end{aligned}$$

Заметим, что функция  $f$  имеет  $n-1$  нуль  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  (они являются корнями полинома

степени  $n-1$ ), причем, как было отмечено во введении, эти нули принадлежат  $[a, b]$  и имеют кратность единица, поскольку

$$f'(t_k) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{(\lambda_j - t_k)^2} > 0.$$

Следовательно, выделяя целую часть рациональной функции  $\varphi$  и разлагая ее дробную часть на простейшие дроби, получим

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{z - t_k},$$

где  $a_k = \operatorname{res}_{z=t_k} \varphi(z) = 1/f'(t_k)$ . Используя формулы Сохоцкого [7, с. 32]

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}$$

получаем теперь, что

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{2\pi i} (\varphi(t-i0) - \varphi(t+i0)) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{(t-t_k) - i0} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{(t-t_k) + i0} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \delta(t-t_k) \end{aligned}$$

(мы воспользовались несколько другим, чем раньше, обозначением меры Дирака, принятым в теории обобщенных функций). Осталось подставить полученные значения коэффициентов  $\alpha, \beta$  и меры  $\mu$  в формулу (2.1).

2)  $a < 0$ . Рассмотрим функцию  $f_1(z) = f(z+a)$ . Если мы положим  $\lambda'_j = \lambda_j - a, t'_k = t_k - a$ , то

$$f_1(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\lambda'_j - z},$$

причем  $t'_k$  ( $k=1, \dots, n-1$ ) – все нули этой функции. Ясно, что  $f_1(A_1) = f(A)$ , где  $A_1 := A - aI$ . Так как функция  $f_1$  и оператор  $A_1$  удовлетворяют условиям, наложенным на функцию и оператор в случае 1), то по доказанному выше

$$\begin{aligned} f(A)^{-1} &= f_1(A_1)^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j \lambda'_j}{\left(\sum_{j=1}^n c_j\right)^2} I - \frac{1}{\sum_{j=1}^n c_j} A_1 - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{f_1'(t'_k)} R(t'_k, A_1) = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j}{\left(\sum_{j=1}^n c_j\right)^2} I - \frac{1}{\sum_{j=1}^n c_j} A - \sum_{k=1}^{n-1} a_k R(t_k, A), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Применяя теорию возмущений [8], из формулы (2.1) выводим такое

**Следствие.** Если оператор  $-A$  порождает ограниченную полугруппу класса  $C_0$ , то  $f(A)^{-1}$  также обладает этим свойством.

**Замечания.** Пусть

$$c_j > 0, \sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty, \lambda_j \in \mathbb{R} (j=1, 2, \dots),$$

и пусть  $a = \inf \lambda_j > -\infty, b = \sup \lambda_j < \infty$ . Тогда функция

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j - z}$$

принадлежит классу  $R[a, b]$ .

Как и выше, для любого замкнутого плотно определенного оператора  $A$  в комплексном банаховом пространстве  $X$ , спектр которого не пересекается с отрезком  $[a, b]$ , оператор  $f(A)$  имеет левый обратный вида (2.1), где коэффициенты находятся по формулам, аналогичным формулам (2.2). Представляло бы интерес точное вычисление этого обратного (т. е. нахождение для этого случая представляющей меры  $\mu$ ). Было бы также интересно получить обобщение теоремы 2.1 на случай комплексных значений  $\lambda_j$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд, Н. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 895 с.
2. Атвиновский, А.А. Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 10. – С. 3–15.
3. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука, 1973. – 552 с.
4. Миротин, А.Р. Обращение операторно монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин // Труды Института математики. Минск. – 2004. – Т. 12, № 1. – С. 104–108.
5. Атвиновский, А.А. Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 55–60.
6. Брычков, Ю.А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М. : Наука, 1977. – 286 с.
7. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
8. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Атвиновского А.А. Грантом Министерства образования РБ для студентов, аспирантов и докторантов № 20140739.

Поступила в редакцию 06.06.14.

УДК 517.925

## О РЕШЕНИЯХ УПРОЩЕННЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ В ПЛОСКОСТИ

А.Т. Сазонова

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

## ON THE SOLUTIONS OF THE SIMPLIFIED SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MOTION OF FOUR PARTICLES IN A PLANE

A.T. Sazonova

*Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus*

Рассматривается система, описывающая движение четырех частиц в плоскости. С помощью элементарных алгебраических преобразований установлены упрощенные системы, состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Для каждой упрощенной системы указаны наборы констант межчастичного взаимодействия, при которых общее решение является мероморфной функцией.

**Ключевые слова:** движение четырех тел, константа взаимодействия, свойство Пенлеве, мероморфная функция.

A system describing the motion of four bodies under the action of gravity is considered. By elementary algebraic manipulations a simple system consisting of non-linear differential equations, each of which has a second order is selected. For each simplified system there are sets of constants of interparticle interaction, in which the general solution is meromorphic.

**Keywords:** movement of four bodies, constant interaction, Painlevé property, meromorphic function.

### Введение

В последнее время значительный интерес представляет исследование следующей системы, состоящей из  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\zeta_n'' = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{m=N} a_{nm} \frac{\zeta_n' \zeta_m'}{\zeta_n - \zeta_m}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Зависимые переменные  $\zeta_n = \zeta_n(\tau)$  являются комплексными. Константы взаимодействия  $a_{nm}$  априори произвольны, за исключением требования симметрии  $a_{nm} = a_{mn}$ .

Интерес к системе вызывает тот факт, что при отождествлении комплексной  $\zeta$ -плоскости с физической плоскостью и при ограничении на вещественное  $\tau$  (интерпретируемое как «физическое время») движение  $N$  точек  $\zeta_n$  соответствует решению задачи многих тел в плоскости, характеризуемой ньютоновскими уравнениями движения с интересным свойством: среди решений задачи многих тел имеются много решений с полностью периодическими траекториями.

Несмотря на кажущуюся простоту уравнений, аналитического решения данной задачи в общем виде для  $N > 3$  пока не найдено.

### 1 Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача о движении четырех частиц в плоскости.

Из исходной системы видно, что центр масс  $Z \equiv Z(\tau)$ ,

$$Z = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4}{4},$$

движется равномерно:

$$Z'' = 0,$$

$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau.$$

Положим

$$a_{12} = a_{21} = a, \quad a_{13} = a_{31} = c, \quad a_{14} = a_{41} = d,$$

$$a_{23} = a_{32} = b, \quad a_{24} = a_{42} = e, \quad a_{34} = a_{43} = f.$$

Существует интеграл движения (что непосредственно следует из [1]):

$$K = \zeta_1' \zeta_2' \zeta_3' \zeta_4' (\zeta_1 - \zeta_2)^{2a} (\zeta_2 - \zeta_3)^{2b} (\zeta_3 - \zeta_1)^{2c} \times \\ \times (\zeta_4 - \zeta_1)^{2d} (\zeta_2 - \zeta_4)^{2e} (\zeta_3 - \zeta_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс

$$u_n = \zeta_n - Z, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

чтобы выполнялось

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x, \quad u_2 = y,$$

$$u_3 = z, \quad u_4 = -x - y - z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения и интеграл движения в терминах переменных  $x, y, z$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= 2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - \\ &\quad - 2d \frac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} &= -2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ &\quad - 2e \frac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} &= -2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ &\quad - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+y+2z}, \\ K &= (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V) \times \\ &\quad \times (x-y)^{2a} (y-z)^{2b} (z-x)^{2c} \times \\ &\quad \times (2x+y+z)^{2d} (x+2y+z)^{2e} (x+y+2z)^{2f}, \end{aligned} \right. \quad (1.1)$$

где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t = \tau - \tau_0$ ,  
 $V = Z'(0)$ ,  $K = const.$

**2 Решения упрощенных систем в задаче движения четырех частиц в плоскости**

Легко проверить, что система

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= -2d \frac{\dot{x}^2}{2x}, \\ \ddot{y} &= -2a \frac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x} + 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ &\quad - 2e \frac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x}, \\ \ddot{z} &= -2c \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ &\quad - 2f \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

является инвариантной при замене переменных  $(t, x, y, z; \varepsilon t, \varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z)$ , где  $\varepsilon$  – параметр, а значит, является упрощенной для (1.1).

Рассмотрим первое уравнение системы (2.1):

$$\ddot{x} = -2d \frac{\dot{x}^2}{x}. \quad (2.2)$$

Очевидно, что дифференциальное уравнение второго порядка (2.2) имеет общее решение вида  $x = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{d+1}}$ , если  $d \neq -1$ , и общее решение вида  $x = C_1 e^{C_2 t}$ , если  $d = -1$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные,  $t = \tau - \tau_0$ .

Рассмотрим первое и второе уравнения системы (2.1):

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{y} &= -2(a+e) \frac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x} + 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}, \\ \ddot{z} &= -2(c+f) \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}. \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

Заметим сначала, что согласно [1] справедлива

**Лемма 2.1.** Для того, чтобы все решения (1.1) являлись мероморфными функциями от  $\tau$ , необходимо, чтобы все показатели  $\gamma_n, \beta_n, \Gamma$ ,  $n = \overline{1, 6}$ , определяемые через константы  $a, b, c, d, e, f$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{1+a_n}, \\ \beta_n &= -2a_n, \\ \Gamma &= \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f}, \\ a_n &\in \{a, b, c, d, e, f\}, \end{aligned}$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

Положим  $b=0$ , тогда система (2.3) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{y} &= -2(a+e) \frac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x}, \\ \ddot{z} &= -2(c+f) \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x}. \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

Разделим первое уравнение системы (2.4) на  $\dot{y}+V$ , а второе на  $\dot{z}+V$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\ddot{y}}{\dot{y}+V} &= -2(a+e) \frac{\dot{x}}{x}, \\ \frac{\ddot{z}}{\dot{z}+V} &= -2(c+f) \frac{\dot{x}}{x}. \end{aligned} \right.$$

Интегрируя каждое уравнение последней системы, будем иметь

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{y}+V &= C_4 x^{-2(a+e)}, \\ \dot{z}+V &= C_3 x^{-2(c+f)}. \end{aligned} \right.$$

Таким образом, получим, что справедлива

**Лемма 2.2.** Система (2.4) имеет общее решение вида

$$y = \frac{C_4}{C_1} \frac{d+1}{-2(a+e)+d+1} (C_1 t + C_2)^{\frac{-2(a+e)+d+1}{d+1}} - Vt + C_5,$$

$$z = \frac{C_3}{C_1} \frac{d+1}{-2(c+f)+d+1} (C_1 t + C_2)^{\frac{-2(c+f)+d+1}{d+1}} - Vt + C_6,$$

если  $d \neq -1$ , и

$$y = \frac{C_1 C_4}{-2C_2(a+e)} e^{-2C_2(a+e)t} - Vt + C_5,$$

$$z = \frac{C_1 C_3}{-2C_2(c+f)} e^{-2C_2(c+f)t} - Vt + C_6,$$

если  $d = -1$ , где  $t = \tau - \tau_0, \tau_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  – произвольные постоянные.

А значит, верна

**Теорема 2.1.** Если  $b=0$ , то для наличия у системы (2.1) свойства Пенлеве достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1) \Gamma = \frac{2}{2+a+c+d+e+f}, \Gamma - \text{целочислен-}$$

ное или бесконечное;



$$2) a, c, d, e, f \in \left\{ -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

При замене переменных  $(t, x, y, z; \varepsilon t, \varepsilon x, y, \varepsilon z)$ , где  $\varepsilon$  – параметр, для системы (1.1) получим упрощенную систему вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d) \frac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} + 2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}, \\ \ddot{y} = -e \frac{\dot{y}^2}{y}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2(b+f) \frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y}. \end{cases} \quad (2.5)$$

**Теорема 2.2.** Если  $c = 0$  и  $d = a + b + f$ , то для наличия у системы (2.5) свойства Пенлеве достаточно

$$1) d \neq a - b - f;$$

2)  $\Gamma = \frac{2}{2 + 2a + 2b + 2f + e}$ ,  $\Gamma$  – целочисленное или бесконечное;

$$3) a, b, d, e, f \in \left\{ -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

*Доказательство.*

Легко проверить, что второе уравнение системы (2.5) имеет общее решение

$$y = (C_1 t + C_2) e^{\frac{1}{e+1} t}, \quad (2.6)$$

при  $e \neq -1$  и

$$y = C_1 e^{C_2 t}$$

при  $e = -1$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные,  $t = \tau - \tau_0$ .

Рассмотрим первое и третье уравнения системы (2.5)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d) \frac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} + 2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2(b+f) \frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Прибавим первое уравнение системы (2.7) ко второму:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d) \frac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} + 2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}, \\ \ddot{x} + \ddot{z} = 2(a-d) \frac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} - 2(b+f) \frac{(\dot{z}+V)\dot{y}}{y}. \end{cases}$$

Пусть  $c = 0, a - d = -(b + f)$ , откуда

$$d = a + b + f,$$

последняя система примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d) \frac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y}, \\ \ddot{x} + \ddot{z} = -2(b+f) \frac{(\dot{x} + \dot{z} + 2V)\dot{y}}{y}. \end{cases}$$

С помощью несложных преобразований будем иметь

$$\begin{cases} \frac{\ddot{x}}{\dot{x}+V} = 2(a-d) \frac{\dot{y}}{y}, \\ \frac{\ddot{x} + \ddot{z}}{\dot{x} + \dot{z} + 2V} = -2(b+f) \frac{\dot{y}}{y}. \end{cases}$$

Дифференцирование каждого уравнения последней системы дает

$$\begin{cases} \dot{x} + V = \tilde{C}_3 y^{2(a-d)}, \\ \dot{x} + \dot{z} + 2V = \tilde{C}_4 y^{-2(b+f)}. \end{cases}$$

Теперь с учетом равенства (2.6) будем иметь

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{C}_3 (C_1 t + C_2)^{\frac{2(a-d)}{e+1}} - V, \\ \dot{z} = (\tilde{C}_4 - \tilde{C}_3) (C_1 t + C_2)^{\frac{-2(b+f)}{e+1}} - V. \end{cases}$$

Продифференцируем оба уравнения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\tilde{C}_3}{C_1} \frac{e+1}{2a-2d+e+1} \times \\ \times (C_1 t + C_2)^{\frac{2a-2d+e+1}{e+1}} - V t + C_5, \\ \dot{z} = \frac{\tilde{C}_4 - \tilde{C}_3}{C_1} \frac{e+1}{-2b-2f+e+1} \times \\ \times (C_1 t + C_2)^{\frac{-2b-2f+e+1}{e+1}} - V t + C_6, \end{cases}$$

причем  $2a - 2d + e + 1 \neq 0$  и  $-2b - 2f + e + 1 \neq 0$ , откуда находим, что  $d \neq a - b - f$ .

Таким образом, при

$$c = 0, e \neq -1, d \neq a - b - f, d = a + b + f$$

система (2.5) имеет общее решение

$$\begin{cases} x = \frac{\tilde{C}_3}{C_1} \frac{e+1}{2a-2d+e+1} \times \\ \times (C_1 t + C_2)^{\frac{2a-2d+e+1}{e+1}} - V t + C_5, \\ y = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{e+1}}, \\ z = \frac{\tilde{C}_4 - \tilde{C}_3}{C_1} \frac{e+1}{-2b-2f+e+1} \times \\ \times (C_1 t + C_2)^{\frac{-2b-2f+e+1}{e+1}} - V t + C_6, \end{cases}$$

где  $t = \tau - \tau_0, \tau_0, C_1, C_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, C_5, C_6$  – произвольные постоянные.

Аналогично для решения

$$y = C_1 e^{C_2 t}$$

при  $e = -1$  находим, что система (2.6) имеет общее решение

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tilde{C}_3 C_1}{2C_2(a-d)} e^{2C_2(a-d)t} - V t + C_5, \\ y &= C_1 e^{C_2 t}, \\ z &= \frac{(\tilde{C}_4 - \tilde{C}_3) C_1}{-2C_2(b+f)} e^{-2C_2(b+f)t} - V t + C_6, \end{aligned}$$

где  $t = \tau - \tau_0, \tau_0, C_1, C_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, C_5, C_6$  – произвольные постоянные.

Согласно лемме 2.1, а также с учетом соотношений  $c = 0, d = a + b + f$  непосредственно заключаем о справедливости второго и третьего условий теоремы.

Таким образом, теорема 2.2 доказана.

На основании теоремы 2.2 запишем наборы значений констант взаимодействия в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Наборы значений констант межчастичного взаимодействия

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
-0,5	-0,5	0	-1,5	-1,5	-0,5
-0,5	-0,5	0	-1,5	-0,5	-0,5
-0,5	-0,5	0	-1,5	0	-0,5
-0,5	-0,5	0	-1	-1,5	0
-0,5	-0,5	0	-1	-0,5	0
-0,5	-0,5	0	-1	0	0
-1	-0,5	0	-1,5	-1,5	0
-0,5	-1	0	-1,5	-1,5	0
0	-1	0	-1,5	-1,5	-0,5
0	-0,5	0	-1,5	-1,5	-1
0	-1,5	0	-1,5	-1,5	0
0	0	0	-1,5	-1,5	-1,5
-1	-0,5	0	-1,5	-0,5	0
-0,5	-1	0	-1,5	-0,5	0
0	-1	0	-1,5	-0,5	-0,5
0	-0,5	0	-1,5	-0,5	-1
0	-1,5	0	-1,5	0	0
0	-1,5	0	-1,5	-0,5	0
-1	-0,5	0	-1,5	0	0
-0,5	-1	0	-1,5	0	0
0	-1	0	-1,5	0	-0,5
0	-0,5	0	-1,5	0	-1
0	-1,5	0	-1,5	0	0
0	0	0	-1,5	0	-1,5
0	-1,5	0	-1	-1,5	-0,5
-0,5	0	0	-1	-1,5	-0,5
0	-1	0	-1	-1,5	0
0	0	0	-1	-1,5	-1
0	-0,5	0	-1	-0,5	-0,5
-0,5	0	0	-1	-0,5	-0,5
0	-1	0	-1	-0,5	0
0	0	0	-1	-0,5	-1
0	-0,5	0	-1	0	-0,5
-0,5	0	0	-1	0	-0,5
0	-1	0	-1	0	0
0	0	0	-1	0	-1
0	-0,5	0	-0,5	-1,5	0
0	0	0	-0,5	-1,5	-0,5
0	-0,5	0	-0,5	-0,5	0
0	0	0	-0,5	-0,5	-0,5
0	-0,5	0	-0,5	0	0
0	0	0	-0,5	0	-0,5

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c \frac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z} - \\ - 2d \frac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b \frac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z} - \\ - 2e \frac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{z} = -f \frac{\dot{z}^2}{z}, \end{cases} \quad (2.8)$$

которая является инвариантной для системы (1.1) при замене переменных  $(t, x, y, z; \varepsilon t, \varepsilon x, \varepsilon y, z)$ , где  $\varepsilon$  – параметр.

Легко проверить, что третье уравнение системы (2.8)

$$\ddot{z} = -f \frac{\dot{z}^2}{z}$$

имеет общее решение

$$z = (D_1 t + D_2)^{\frac{1}{f+1}},$$

при  $f \neq -1$  и

$$z = D_1 e^{D_2 t}$$

при  $f = -1$ , где  $D_1, D_2$  – произвольные постоянные,  $t = \tau - \tau_0$ .

Рассмотрим первые два уравнения системы (2.8)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2(c-d) \frac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2(b-e) \frac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Положим  $a = 0$ , тогда система (2.9) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(c-d) \frac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{y} = 2(b-e) \frac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z}. \end{cases} \quad (2.10)$$

После несложных преобразований будем иметь

$$\begin{cases} \frac{\ddot{x}}{\dot{x}+V} = 2(c-d) \frac{\dot{z}}{z}, \\ \frac{\ddot{y}}{\dot{y}+V} = 2(b-e) \frac{\dot{z}}{z}. \end{cases}$$

Интегрирование каждого уравнения последней системы дает

$$\begin{cases} \dot{x} + V = D_3 z^{2(c-d)}, \\ \dot{y} + V = D_4 z^{2(b-e)} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x} = D_3 (D_1 t + D_2)^{\frac{2(c-d)}{f+1}} - V, \\ \dot{y} = D_4 (D_1 t + D_2)^{\frac{2(b-e)}{f+1}} - V. \end{cases}$$

Таким образом, справедлива

**Лемма 2.3.** Система (2.10) имеет общее решение вида

$$x = \frac{D_3}{D_1} \frac{f+1}{2c-2d+f+1} (D_1 t + D_2)^{\frac{2c-2d+f+1}{f+1}} - Vt + D_5,$$

$$y = \frac{D_4}{D_1} \frac{f+1}{2b-2c+f+1} (D_1 t + D_2)^{\frac{2b-2c+f+1}{f+1}} - Vt + D_6,$$

если  $f \neq -1$ , и

$$x = \frac{D_1 D_3}{2D_2(c-d)} e^{2D_2(c-d)t} - Vt + D_5,$$

$$y = \frac{D_1 D_4}{2D_2(b-c)} e^{2D_2(b-c)t} - Vt + D_6,$$

если  $f = -1$ , где  $t = \tau - \tau_0, \tau_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$  – произвольные постоянные,

$$c \neq \frac{d+b}{2}, \quad 2c-2d+f+1 \neq 0.$$

А значит, верна

**Теорема 2.3.** Если  $a = 0$ , то для наличия у системы (2.8) свойства Пенлеве достаточно выполнения следующих условий:

- 1)  $c \neq \frac{d+b}{2}$ ,
- 2)  $2c-2d+f+1 \neq 0$ ,
- 3)  $\Gamma = \frac{2}{2+b+c+d+e+f}$ ,

$b, c, d, e, f \in \left\{ -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0 \right\}$ ,  $\Gamma$  – целочисленное или бесконечное.

Таким образом, заключаем, что система (2.8) при условиях, описанных с помощью теоремы 2.3, имеет общее решение вида:

$$x = \frac{D_3}{D_1} \frac{f+1}{2c-2d+f+1} (D_1 t + D_2)^{\frac{2c-2d+f+1}{f+1}} - Vt + D_5,$$

$$y = \frac{D_4}{D_1} \frac{f+1}{2b-2c+f+1} (D_1 t + D_2)^{\frac{2b-2c+f+1}{f+1}} - Vt + D_6,$$

$$z = (D_1 t + D_2)^{\frac{1}{f+1}},$$

если  $f \neq -1$ , и

$$x = \frac{D_1 D_3}{2D_2(c-d)} e^{2D_2(c-d)t} - Vt + D_5,$$

$$y = \frac{D_1 D_4}{2D_2(b-c)} e^{2D_2(b-c)t} - Vt + D_6,$$

$$z = D_1 e^{D_2 t},$$

если  $f = -1$ , где  $t = \tau - \tau_0, \tau_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$  – произвольные постоянные.

### Заключение

Рассмотрена система, описывающая движение четырех тел под действием сил гравитации, для которой с помощью различных вариаций метода малого параметра получены упрощенные системы (2.1), (2.5), (2.8), состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок.

Исследования каждой упрощенной системы дают достаточные условия наличия мероморфных решений. На основании данных условий записаны наборы констант межчастичного взаимодействия, представленные в виде таблицы 2.1.

Показано, что при найденных наборах значений констант межчастичного взаимодействия в задаче четырех тел в плоскости компоненты общего решения системы являются полиномами по  $t$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Калоджеро, Ф. Разрешимая задача трех тел и гипотезы Пенлеве / Ф. Калоджеро. – 2-е изд. – Москва : Наука, 2002. – Т. 133 : Теоретическая и математическая физика. – 149 с.

2. Лозовская, А.Т. Тест Пенлеве для некоторых систем дифференциальных уравнений, связанных с задачей трех тел / А.Т. Лозовская // Наука–2009 : сб. ст. аспирантов и магистрантов ГрГУ / ГрГУ им. Я. Купалы ; отв.ред. А.Ф. Проневич. – Гродно : ГрГУ, 2009. – С. 48–52.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М–148).

Поступила в редакцию 28.05.14.

УДК 512.542

## О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

В.Н. Тютянов<sup>1</sup>, Т.В. Тихоненко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

## ON FINITE GROUPS WITH GIVEN SYSTEM OF SYLOW SUBGROUPS

V.N. Tyutyaynov<sup>1</sup>, T.V. Tihonenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

<sup>2</sup>P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

В работе доказана разрешимость конечной группы, у которой любая силовская подгруппа либо  $\mathbb{P}$ -субнормальна, либо абнормальна.

**Ключевые слова:** силовская подгруппа, простая неабелева группа,  $\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа, абнормальная подгруппа.

The solvability of the finite group in which any Sylow subgroup is either  $\mathbb{P}$ -subnormal or abnormal, was proved.

**Keywords:** Sylow subgroup, simple non-abelian group,  $\mathbb{P}$ -subnormal subgroup, abnormal subgroup.

### Введение

Рассматриваются только конечные группы. Строение группы в значительной мере связано со свойствами ее силовских подгрупп и, в частности, со способами их вложения в группу.

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *абнормальной*, если  $x \in \langle H, H^x \rangle$  для любого  $x \in G$ . В работе [1] введено понятие  $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппы.

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$  (обозначается через  $H \mathbb{P}\text{-sn } G$ ), если либо  $H = G$ , либо существует цепь подгрупп  $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$

такая, что  $|H_i : H_{i-1}|$  – простое число для любого  $i = 1, \dots, n$ .

В работе [1] было установлено строение групп с  $\mathbb{P}$ -субнормальными силовскими подгруппами. В частности, показано, что они являются дисперсивными по Оре. В настоящей статье рассматриваются конечные группы, силовские подгруппы которых либо абнормальны, либо  $\mathbb{P}$ -субнормальны во всей группе.

С использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп доказан следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $G$  – конечная группа, у которой любая силовская подгруппа либо  $\mathbb{P}$ -субнормальна, либо абнормальна в  $G$ . Тогда группа  $G$  разрешима.

Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н. поставили следующую задачу [2, вопрос 4]:

описать группы  $G$ , у которых любая подгруппа либо  $\mathbb{P}$ -субнормальна, либо абнормальна в  $G$ .

Из теоремы следует, что группы, удовлетворяющие условиям вопроса 4 из работы [2], являются разрешимыми.

### 1 Обозначения и предварительные результаты

Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [3]–[5]. Приведем некоторые из них для удобства чтения:

$\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ ;

$Syl_p(G)$  – множество всех силовских  $p$ -подгрупп группы  $G$ ;

$[R]S$  – полупрямое произведение подгрупп  $R$  и  $S$ , где  $R$  является нормальной подгруппой в  $[R]S$ ;

$H \mathbb{P}\text{-sn } G$  – подгруппа  $H \mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ ;  
 $R^n$  – прямое произведение  $n$  экземпляров групп, изоморфных  $R$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$ ,  $N$  – нормальная подгруппа в группе  $G$ . Тогда, если  $H \mathbb{P}\text{-sn } G$ , то  $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-sn } N$  и  $HN / N \mathbb{P}\text{-sn } G / N$ .

**Доказательство.** Следует из пунктов 1 и 2 леммы 2.1 в [2].

Из теоремы 6 [6] следует, что если единичная подгруппа группы  $G$  является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ , то простые неабелевы факторы группы  $G$  принадлежат списку:  $SL_3(3)$ ,  $SL_3(5)$ ,  $PSL_2(q)$  для подходящего значения параметра  $q \geq 4$ . Мы несколько уточним данный результат.

**Лемма 1.2.** Пусть  $G$  – простая неабелева группа и  $1 \mathbb{P}$ - $sn$   $G$ . Тогда  $G \in \{SL_3(3), SL_3(5), PSL_2(7), PSL_2(11), SL_2(2^n)\}$ , где  $2^n + 1 = p$  – простое число Ферма}.

*Доказательство.* Из [3] следует, что если  $G \cong SL_3(3)$  или  $G \cong SL_3(5)$ , то  $1 \mathbb{P}$ - $sn$   $G$ . Рассмотрим случай, когда  $G \cong PSL_2(q)$ . По теореме II.8.27 [5] максимальными подгруппами  $M$  простого индекса в  $G$  могут быть  $A_4, S_4, A_5$  и борелевская подгруппа порядка  $\varepsilon^{-1}q(q-1)$ , где  $\varepsilon = (2, q-1)$ .

Если  $M \cong A_4$ , то  $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot t$ , где  $t$  – простое число и  $t \notin \{2, 3\}$ . Так как  $|\pi(G)| = 3$ , то из [4, с. 20] следует, что  $G \in \{PSL_2(2^2), PSL_2(3^2), PSL_2(7), PSL_2(2^3), PSL_2(17)\}$ . Очевидно, что только группа  $PSL_2(2^2)$  имеет максимальную подгруппу простого индекса, изоморфную  $A_4$ . Так как  $2^2 + 1 = 5$  – простое число Ферма, то  $PSL_2(2^2)$  содержится в списке групп леммы 1.2. Ясно, что  $1 \mathbb{P}$ - $sn$   $PSL_2(2^2)$ .

Если  $M \cong S_4$ , то как и в предыдущем пункте показывается, что  $G \cong PSL_2(7)$ . Очевидно, что  $1 \mathbb{P}$ - $sn$   $PSL_2(7)$ .

Пусть  $M \cong A_5$ . Так как простая неабелева группа не содержит подгрупп индекса 2 и 3, то  $|G| \in \{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t\}$ , где  $t$  – простое число и  $t \notin \{2, 3, 5\}$ . Из [4, с. 20] следует, что не существует простых неабелевых групп порядка  $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ . Значит  $|G| = |PSL_2(q)| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t$  и  $G \cong PSL_2(t)$ . Поэтому  $\frac{1}{2}t(t^2 - 1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t$  и  $t = 11$ . Следовательно,  $G \cong PSL_2(11)$  и, очевидно,  $1 \mathbb{P}$ - $sn$   $PSL_2(11)$ .

Пусть  $M$  – борелевская подгруппа. Тогда  $|G : M| = q + 1$  – простое число. Поэтому  $q = 2^n$  и  $G \cong PSL_2(2^n)$ , где  $2^n + 1 = p$  – простое число Ферма. При этом  $1 \mathbb{P}$ - $sn$   $PSL_2(2^n)$ . Лемма 1.2 доказана.

## 2 Доказательство основного результата

**Теорема 2.1.** Пусть  $G$  – конечная группа, у которой любая силовская подгруппа либо  $\mathbb{P}$ -субнормальна, либо абнормальна в  $G$ . Тогда группа  $G$  разрешима.

*Доказательство.* Будем считать, что  $G$  – минимальный контрпример к теореме. Сначала покажем, что  $G$  не является простой неабелевой группой. Если все силовские подгруппы в  $G$  абнормальны, то, очевидно, они самонормализуемы. По теореме 4.119 [4] группа  $G$  не является простой. Следовательно, существует силовская подгруппа группы  $G$ , которая  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ . Поэтому группа  $G$  имеет подгруппу  $H$  простого индекса  $r$ . Обозначим через  $\Omega$  множество всех правых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $H$  и для всякого  $g \in G$  определим отображение  $f_g : \Omega \rightarrow \Omega$  по правилу:  $(Hx)f_g = Hxg$ . Очевидно, что отображение  $f_g$  является биекцией на множестве  $\Omega$ .

Пусть  $S(\Omega)$  – группа подстановок на множестве  $\Omega$ . Очевидно, что  $S(\Omega) \cong S_r$  и отображение  $f : g \mapsto f_g$  является нетривиальным гомоморфизмом групп  $G$  и  $S(\Omega)$ . Так как  $G$  – простая неабелева группа, то ядро  $f$  тривиально. Поэтому  $G$  изоморфно вкладывается в  $S_r$  и  $r = \max \pi(G)$ . Пусть  $R \in Syl_r(G)$ . Очевидно, что  $G = HR$ . Если  $H \cap R \neq 1$ , то  $|R : H \cap R| = r$  и  $H \cap R \triangleleft R$ . По лемме Чунихина группа  $G$  не проста. Значит,  $H \cap R = 1$  и  $|R| = r$ . Если  $R$  абнормальна в  $G$ , то  $N_G(R) = C_G(R) = R$  и группа  $G$  имеет нормальное  $r$ -дополнение по теореме Бернсайда (теорема 14.3.1 [7]). Последнее невозможно. Таким образом, подгруппа  $R$  является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ . Значит, группа  $G$  имеет подгруппу простого индекса  $p \neq r$ . Как и выше показывается, что  $p = \max \pi(G)$ . Противоречие с тем, что  $r = \max \pi(G)$ . Следовательно,  $G$  не является простой неабелевой группой.

Пусть  $L \triangleleft G$ . Рассмотрим фактор-группу  $\bar{G} = G/L$ . Если подгруппа  $Q \in Syl_q(G)$  абнормальна в  $G$ , то для всех  $g \in G$  имеет место включение  $g \in \langle Q, Q^g \rangle$ , а значит  $\bar{g} \in \langle \bar{Q}, \bar{Q}^{\bar{g}} \rangle$  и подгруппа  $\bar{Q}$  является абнормальной в  $\bar{G}$ . Если  $Q$   $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ , то по лемме 1.1  $\bar{Q}$   $\mathbb{P}$ - $sn$   $\bar{G}$ . Поэтому условия теоремы выполняются для фактор-группы  $\bar{G}$ . Так как  $G$  – минимальный контрпример к теореме, то  $\bar{G}$  – разрешимая группа. Отсюда следует, что в группе  $G$  имеется нормальная подгруппа  $R$  такая, что  $|G : R| = p$  – простое число. При этом всякая силовская  $q$ -подгруппа  $Q$  ( $q \neq p$ ) содержится в подгруппе  $R$ . По лемме Фраттини  $G = RN_G(Q)$  и подгруппа  $Q$  не самонормализуема в  $G$ . Следовательно, подгруппа  $Q$   $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ .

Таким образом, все силовские  $q$ -подгруппы при  $q \neq p$  являются  $\mathbb{P}$ -субнормальными в  $G$ . Если силовская  $p$ -подгруппа  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ , то по теореме 2.3 [1] группа  $G$  будет разрешимой. Поэтому силовские  $p$ -подгруппы группы  $G$  являются абнормальными в  $G$ .

Пусть  $N$  – минимальная нормальная подгруппа в группе  $G$ . Тогда  $N = N_1 \times \dots \times N_k$ , где  $N_i$  – изоморфные простые неабелевы группы. Если  $(|N|, p) = 1$ , то по лемме 1.1 любая силовская подгруппа группы  $N$  будет  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $N$ . По теореме 2.3 [1]  $N$  – разрешимая группа, что невозможно. Следовательно,  $(|N|, p) = p$  и для всех  $r \in \pi(N) \setminus \{p\}$  силовские  $r$ -подгруппы из группы  $N$   $\mathbb{P}$ -субнормальны в  $N$ . Так как  $N = N_1 \times \dots \times N_k$ , то по лемме 1.1 все силовские  $r$ -подгруппы в  $N_1$  для  $r \in \pi(N_1) \setminus \{p\}$  являются  $\mathbb{P}$ -субнормальными в  $N_1$ ,  $p = \max \pi(N_1)$ , силовская  $p$ -подгруппа группы  $N_1$  имеет порядок  $p$  и не  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $N_1$ . Отметим также, что любая  $\mathbb{P}$ -субнормальная в  $N_1$  силовская подгруппа

содержится в максимальной подгруппе индекса  $p$  в  $N_1$ .

Поскольку  $1 \not\cong \mathbb{P}$ -сп  $N_1$ , то по лемме 1.2  $N_1 \in \{SL_3(3), SL_3(5), PSL_2(7), PSL_2(11), SL_2(2^n)\}$ , где  $2^n + 1 = p$  – простое число Ферма}. Последовательно рассмотрим все случаи.

(1)  $N_1 \cong SL_3(3)$ ,  $p = 13$ . Из [3] следует, что группа  $SL_3(3)$  содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 13, изоморфных  $3^2:2S_4$  и силовская 2-подгруппа группы  $3^2:2S_4$  не  $\mathbb{P}$ -субнормальная в  $3^2:2S_4$ . Последнее невозможно.

(2)  $N_1 \cong SL_3(5)$ ,  $p = 31$ . Из [3] следует, что группа  $SL_3(5)$  содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 31, изоморфных  $5^2:GL_2(5)$  и силовская 2-подгруппа группы  $5^2:GL_2(5)$  не  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $5^2:GL_2(5)$ , что невозможно.

(3)  $N_1 \cong PSL_2(7)$ ,  $p = 7$ . Из [3] следует, что группа  $PSL_2(7)$  содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 7, изоморфных  $S_4$  и силовская 3-подгруппа группы  $S_4$  не  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $S_4$ . Последнее невозможно.

(4)  $N_1 \cong PSL_2(11)$ ,  $p = 11$ . Из [3] следует, что группа  $PSL_2(11)$  содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 11, изоморфных  $A_5$  и силовская 5-подгруппа группы  $A_5$  не  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $A_5$ , что невозможно.

(5)  $N_1 \cong SL_2(2^n)$ ,  $p = 2^n + 1$ . В группе  $G$  только подгруппа Бореля  $B = [U]H \cong [Z_2^n]Z_{2^n-1}$  имеет индекс  $p$ . Так как  $|G| = 2^n(2^n - 1)(2^n + 1)$  и  $n \geq 2$ , то подгруппа Картана  $H \neq 1$  и является холловой подгруппой нечетного порядка в  $G$ . Борелевская

подгруппа  $B$  является группой Фробениуса с ядром  $U$  и дополнительным множителем  $H$ . Отсюда легко заключить, что любая силовская подгруппа в  $H$  не  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $B$ . Последнее невозможно. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
2. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
3. Conway, J.H. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London : Clarendon, 1985. – 252 p.
4. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн // М. : Мир, 1985.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
6. Казарин, Л.С. О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, №1. – С. 26–29.
7. Холл, М. Теория групп / М. Холл. – М. : ИЛ, 1962.

Поступила в редакцию 24.06.14.

УДК 681.3.06:624.131

## КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ РИТ-СВАЯМИ

С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

## COMPUTER ANALYSIS OF EFFICIENCY OF REINFORCING OF THE SOIL BASES OF RIT-PILES

S.V. Kirhintsava

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Исследуется осадка свай-РИТ при условии линейного и нелинейного деформирования грунта с учетом и без учета уплотнения грунтового основания в области взрыва.

**Ключевые слова:** свая-РИТ, камуфлетное уширение, грунты, математическая модель, компьютерное моделирование.

Sag of RIT-piles on condition of linear and nonlinear deformation of soil taking into account and without consolidation of the soil basis in the field of explosion is investigated.

**Keywords:** pile-RIT, camouflage broadening, soils, mathematical model, computer simulation.

### Введение

Задача минимизации затрат на устройство оснований фундаментов гражданских и промышленных зданий и сооружений всегда являлась актуальной. В силу этого одним из направлений современного строительства является определение рациональных типов фундаментов для конкретных условий строительной площадки, структура которой чаще является неоднородной и может содержать включения пониженной несущей способности. Вследствие этого возникает необходимость управления несущей способностью грунтового основания. В настоящей работе это достигается посредством армирования грунтов, которое может производиться горизонтальными и вертикальными элементами. Армирующими элементами могут быть материалы различной прочности: пленки и стержни. В работе в качестве армирующих элементов рассматриваются короткие сваи: прямые, винтовые и РИТ-сваи и оценивается их эффективность.

При устройстве РИТ-свай происходит уплотнение грунта в области взрыва. Вследствие этого образуется неоднородное по плотности грунтовое основание. Такой фундамент и грунтовое основание образуют единую сложную по структуре и свойствам нелинейную и неоднородную физическую систему [1]. В настоящей работе в этой системе фундамент и грунтовое основание рассматриваются как физически нелинейные подсистемы. Определение деформированного состояния указанной системы эффективно производить методом математического и компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов и методов численного решения нелинейных краевых задач [1], [2], [3].

### 1 Общая физическая постановка задачи

Рассматривается свая-РИТ с одним камуфлетным уширением при условии линейного и нелинейного деформирования грунтового основания. На сваю действует вертикальная нагрузка. Исследование системы «свая-РИТ – грунтовое основание» производилось методом объектно-ориентированного компьютерного моделирования на основе системного подхода и метода конечных элементов, рассмотренного совместно с методом энергетической линеаризации [1].

Виртуальная физическая модель рассматриваемой системы показана на рисунке 1.1. В силу симметрии рассматриваемой задачи, ее численное решение производилось для 1/2 деформируемой области. Дискретизация этой области проводилась треугольными конечными элементами, нумерация узлов расчетной области принята слева направо.

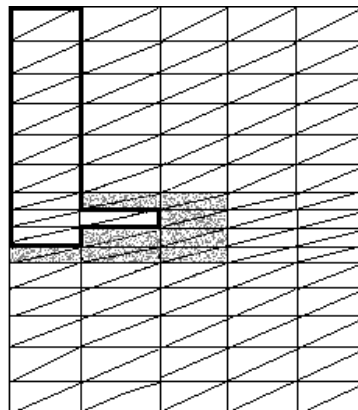


Рисунок 1.1 – Виртуальная физическая модель системы «свая-РИТ – грунтовое основание»



Ставится задача исследования зависимости осадки сваи с камуфлетным уширением от её геометрических характеристик и свойств нелинейно-деформируемого грунтового основания.

## 2 Результаты экспериментальных исследований осадок РИТ-свай

ОАО «Буровая компания «Дельта», г. Гомель, были проведены работы по устройству свай-РИТ в грунтовом основании ряда регионов Беларуси. Экспериментальные исследования по определению зависимости осадки свай-РИТ в грунтовом основании от характеристик свай, грунтовых условий, величины действующей вдавливающей нагрузки отражены в печати [4]. В таблице 2.1 представлены характеристики и результаты испытаний свай-РИТ, полученные методом натурального эксперимента [4].

Для результатов натуральных экспериментов осадок свай-РИТ при действии вдавливающей нагрузки автором были проведены исследования осадок свай-РИТ методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования. Исследование проводилось с помощью программного комплекса «Энергия-ОС» [1].

### 3 Математическая модель системы

Математическую модель исследуемой системы построим на основе принципа минимума полной энергии системы. Эта модель может быть представлена следующим образом [1]:

1. Механико-математическая модель элементов системы при линейно-упругом деформировании  $\sigma_i = E\varepsilon_i$ ; при нелинейно-упругом деформировании  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ , в частности

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \quad A > 0, \quad 0 < m < 1,$$

где  $\sigma_i, \varepsilon_i$  – интенсивности напряжений и деформаций;  $E$  – модуль деформации;  $A, m$  – параметры закона нелинейного деформирования.

2. Система краевых условий задается в соответствии с классификацией поставленной задачи как краевой задачи математической физики.

3. Ядро математической модели (условия равновесия системы):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = 0,$$

где

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\},$$

$\Pi, \{P\}$  – полная энергия деформируемой системы и вектор внешних сил;  $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{U\}$  – векторы напряжений, деформаций и перемещений;  $V$  – объём области существования исследуемой системы.

### 4 Компьютерное моделирование осадок свай-РИТ в грунтовом основании и анализ результатов

В настоящей работе для исследования осадок свай-РИТ на основании имеющихся экспериментальных данных построены три модельные задачи. Вычислительный эксперимент по определению осадки свай-РИТ проводился в зависимости от диаметра уширения и диаметра зоны уплотнения грунтового основания. Осадки свай-РИТ в зависимости от диаметра уширения без учета и с учетом уплотнения грунтового основания в области взрыва, полученные автором методом компьютерного моделирования, показаны в таблице 4.1. Диаметр уплотненной зоны определялся методом вариантного проектирования на основе экспериментальных данных. Физико-механические характеристики грунтового основания уплотненной зоны в области камуфлетного уширения определялись по формуле [5]:

$$E_{\text{упл.гр.}} = \frac{E_0}{1 - \mu} \frac{r_{\text{max}}}{r_{\text{max}} - r_c}, \quad (4.1)$$

где  $E_0, \mu$  – модуль деформации и коэффициент Пуассона грунтового основания естественного залегания;  $r_{\text{max}}$  – радиус зоны уплотнения;  $r_c$  – радиус сваи;  $E_{\text{упл.гр.}}$  – эквивалентный модуль деформации грунта в уплотнённой зоне.

Таблица 2.1 – Характеристики и осадки свай-РИТ в грунтовом основании

Объект	Объект №1	Объект №2	Объект №3
Характ.			
Пункт	Митино, мкр. 8Б, сек. 1	Митино, мкр. 8Б, сек. 1	Пр-т Вернадского
Объект	Опытная площадка	Опытная площадка	д.37, 19-эт. корпуса
$d_{\text{св}}$ , см	30	30	30
$L_{\text{св}}$ , см	1900	1900	1800
$P$ , т	240	270	234
Грунтовые условия	Насыпь, торф, песок ср. крупности	Насыпь, торф, песок ср. крупности	Техн. грунт, суглинки, песок ср. крупн.
$S_{\text{эксн}}$ , см	1,730	3,204	1,846

$d_{\text{св}}$  и  $L_{\text{св}}$  – диаметр и длина свай-РИТ соответственно;  $P$  – вертикальная нагрузка на сваи-РИТ;  $S_{\text{эксн}}$  – значения осадок свай-РИТ в грунтовом основании, полученные методом натурального эксперимента

Таблица 4.1 – Осадки длинных свай-РИТ в грунтовом основании без учета и с учетом уплотнения грунта (см)

$d_{\text{уш}}$ \ S	Объект №1				Объект №2				Объект №3			
	$S^i$	$S^u$	$S^i_{\text{упл}}$	$S^u_{\text{упл}}$	$S^i$	$S^u$	$S^i_{\text{упл}}$	$S^u_{\text{упл}}$	$S^i$	$S^u$	$S^i_{\text{упл}}$	$S^u_{\text{упл}}$
30	1,683	1,875	1,683	1,875	2,803	4,176	2,803	4,176	1,718	2,089	1,718	2,089
40	1,677	1,860	1,668	1,818	2,773	3,847	2,720	3,779	1,709	2,050	1,703	2,007
60	1,671	1,851	1,648	1,805	2,740	3,555	2,628	3,368	1,701	2,023	1,690	1,992
90	1,668	1,845	1,627	1,785	2,715	3,442	2,547	3,349	1,694	2,011	1,669	1,979
110	1,665	1,841	1,625	1,780	2,695	3,364	2,480	3,262	1,690	1,999	1,663	1,973

$d_{\text{уш}}$  – диаметр уширения свай-РИТ;  $S^i$  и  $S^u$  – значения осадок свай-РИТ без учета уплотнения грунтового основания при условии линейного и нелинейного деформирования грунта соответственно;  $S^i_{\text{упл}}$  и  $S^u_{\text{упл}}$  – значения осадок свай-РИТ с учетом уплотнения грунтового основания при условии линейного и нелинейного деформирования грунта соответственно

Таблица 4.2 – Осадки коротких свай-РИТ в грунтовом основании без учета и с учетом уплотнения грунта (см)

$L_{\text{св}}, \text{см}$ \ $d_{\text{уш}}, \text{см}$ \ S	200				300			
	$S^i$	$S^u$	$S^i_{\text{упл}}$	$S^u_{\text{упл}}$	$S^i$	$S^u$	$S^i_{\text{упл}}$	$S^u_{\text{упл}}$
20	0,585	1,086	0,585	1,086	0,449	0,606	0,449	0,606
30	0,494	0,771	0,422	0,743	0,412	0,510	0,375	0,494
40	0,384	0,423	0,320	0,431	0,362	0,358	0,317	0,365
60	0,297	0,305	0,235	0,305	0,309	0,299	0,255	0,296
70	0,247	0,219	0,194	0,227	0,260	0,226	0,218	0,227
90	0,188	0,180	0,151	0,184	0,210	0,195	0,175	0,190
100	0,139	0,114	0,111	0,108	0,168	0,150	0,147	0,142

Таблица 4.3 – Осадки короткой сваи-РИТ в грунтовом основании (см)

N \ S	$S^i$	$S^u$	$S^i_{\text{упл}}$	$S^u_{\text{упл}}$	N \ S	$S^i$	$S^u$	$S^i_{\text{упл}}$	$S^u_{\text{упл}}$
	1	0,297	0,305	0,235		0,305	11	0,283	0,290
2	0,297	0,304	0,234	0,305	12	0,289	0,296	0,225	0,296
3	0,184	0,130	0,145	0,131	13	0,195	0,141	0,152	0,147
4	0,127	0,081	0,100	0,084	14	0,139	0,086	0,108	0,095
5	0,096	0,068	0,075	0,073	15	0,104	0,076	0,081	0,082
21	0,277	0,284	0,214	0,285	31	0,273	0,280	0,210	0,280
22	0,284	0,292	0,220	0,292	32	0,281	0,288	0,215	0,288
23	0,190	0,137	0,147	0,143	33	0,186	0,134	0,142	0,141
24	0,135	0,084	0,104	0,091	34	0,132	0,083	0,101	0,091
25	0,104	0,078	0,080	0,085	35	0,102	0,079	0,078	0,086

N – номер узла расчетной области

Сравнение полученных и экспериментальных значений осадок длинных свай-РИТ в грунтовом основании позволяет сделать вывод, что грунт работает как некоторая нелинейная среда, значения осадок свай-РИТ при нелинейном деформировании грунтового основания оказались достаточно близкими значениям осадок свай-РИТ, полученным экспериментальным путем.

Анализ результатов проведенного вычислительного эксперимента (таблица 4.1) показал, что для длинных свай влияние размеров диаметра камуфлетного уширения и диаметра зоны уплотнения грунта в области взрыва оказались незна-

чительными: осадка свай-РИТ для трех рассматриваемых объектов уменьшилась в среднем на 7% и 3% соответственно. Значительный интерес представляет влияние диаметров уширений и зон уплотнения грунтового основания коротких свай-РИТ на их осадку в нелинейно-деформируемых грунтовых основаниях.

В таблице 4.2 представлены результаты компьютерного моделирования осадок коротких свай диаметром  $d_{\text{св}} = 20$  см длиной  $L_{\text{св}1} = 200$  см и  $L_{\text{св}2} = 300$  см с одним камуфлетным уширением в грунтовом основании со следующими характеристиками: модуль деформации  $E_{\text{ср}} = 30$  МПа

(300 кг/см<sup>2</sup>), коэффициент Пуассона  $\mu_{cp} = 0,32$ . Вертикальная нагрузка на сваю  $P = 20$  т.

Из данных таблицы 4.2 видно, что диаметр камуфлетного уширения коротких свай длиной  $L_{св1} = 200$  см и  $L_{св2} = 300$  см значительно влияет на осадку свай-РИТ в нелинейно-деформируемом грунтовом основании. В данном случае различия осадок свай с одним уширением достигают 90% при нелинейном деформировании грунта. Влияние диаметра зоны уплотнения грунтового основания в области взрыва на осадку коротких свай-РИТ в нелинейно-деформируемом грунтовом основании также оказалось небольшим.

В таблице 4.3 показаны осадки РИТ-свай длиной  $L_{св1} = 200$  см с диаметром камуфлетного уширения  $d_{уш} = 60$  см в разных плоскостях расчетной области.

Проанализировав данные таблицы 4.3, можно сказать, что в подобласти грунтового основания, расположенного выше плоскости камуфлетного уширения сваи, наблюдается телескопический сдвиг, т. к. на равном расстоянии от сваи вертикальные перемещения практически равны. Данный эффект наблюдался во всех модельных задачах осадок длинных и коротких РИТ-свай в грунтовом основании и получен впервые для свай с камуфлетными уширениями. Используя факт наличия телескопического сдвига, можно дать аналитическое решение задачи для одиночной РИТ-сваи, что будет отражено в следующих публикациях.

#### **Заключение**

Методом конечных элементов и методом энергетической линеаризации получены значения

осадок свай-РИТ, соответствующие экспериментальным исследованиям. Показана эффективность использования коротких свай с камуфлетным уширением в грунтовом основании для армирования грунтов. Выявлен телескопический сдвиг грунта в области, лежащей выше плоскости камуфлетного уширения свай-РИТ.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Быховцев, В.Е.* Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.
2. *Партон, В.З.* Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
3. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 540 с.
4. *Невейков, А.Н.* Свая, изготовленная по разрядно-импульсной технологии, – свая нового поколения с уширениями в Республике Беларусь / А.Н. Невейков, О.В. Козунова // ОАО «Буровая компания «Дельта» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://belniis.by/sites/default/files/neveykov\\_a.n.\\_kozunova\\_o.v.\\_svaya\\_rit.pdf](http://belniis.by/sites/default/files/neveykov_a.n._kozunova_o.v._svaya_rit.pdf).
5. *Быховцев, В.Е.* Математическое и компьютерное моделирование развития зоны уплотнения грунтового основания винтовой сваи // В.Е. Быховцев, В.В. Бондарева, С.В. Торгонская / Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 125–130.

*Поступила в редакцию 04.06.14.*

УДК 519.25

## КОНЦЕПЦИЯ ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

А.Н. Осипенко<sup>1</sup>, Н.Б. Осипенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

## CONCEPT OF PROBLEM-ORIENTED TECHNOLOGY OF MODELLING OF ACTIVE SYSTEMS

A.N. Osipenko<sup>1</sup>, N.B. Osipenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>P.O. Sukhoy Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Рассматривается задача создания эффективной технологии моделирования активной системы (АС). Активная система отличается от других сложных систем тем, что ее источник организации является внутренне автономным и обладает способностью изменять структуру и параметры функционирования системы, исходя из собственных потребностей. В качестве альтернативы традиционному методо-ориентированному подходу к технологическому конструированию моделей АС предлагается схема проблемно-ориентированной технологии моделирования. Особенностью этой технологии является то, что в ней, благодаря введению блока концептуального моделирования, а также специальных функциональных процедур, обеспечивается открытость, взаимодействие и развитие формируемых моделей целевых функционирований АС. Рассмотрены новые подходы к организации имитационного эксперимента (ИЭ) при проектном моделировании АС. В основе предложенных технологий ИЭ лежит транзактно-процессный способ формализации АС и методика исследования АС. Вопросы практического использования предлагаемой технологии интерпретируются на примере задачи моделирования деятельности производственного подразделения.

**Ключевые слова:** активная система, проблемно-ориентированная технология моделирования, концептуальное моделирование, целевое функционирование, интеллектуальная система.

Problem of effective technology of modeling of the creation of the so-called active system (AS) is considered. The active system differs from other systems by its source of organization which is internally independent and has the ability to change structure and parameters of functioning of the system based on its own needs. As alternative to the traditional method-oriented approach to technological designing of AS-models the basic circuit of problem-oriented technology of modeling is offered. The peculiarity of this technology is that the interaction and development of the formed models of the desired AS-operation are provided due to the introduction of the block of conceptual modeling and special research functioning. The new approaches to simulate experiment (SE) are considered at design AS modeling. At the heart of the proposed technologies of SE is the operational and process way of formalization and technique of AS research. The practical use of the proposed technology is interpreted by the problem of modeling activities of the production unit.

**Keywords:** active system, problem-oriented technologies of modeling, conceptual modeling, target functioning, intellectual system.

### Введение

Как показывает практика, существующие на данный момент подходы к математическому моделированию активной системы (АС) не обеспечивают адекватного представления таких существенных аспектов субъективного фактора АС, как формирование идеи деятельности субъекта, его волевых усилий и ценностных установок [1]. Отсутствие соответствующего аппарата экспертной интерпретации и моделирования процессов порождения субъектом своих действий не позволяет выходить ни на эффективный прогноз его поведения, ни на разработку способов коррекции его жизнедеятельности. Одной из первых во всем многообразии возникающих здесь задач является задача разработки аналитико-статистических и имитационных моделей (ИМ) поведения АС. Несмотря на то, что анализ данных об активных системах ведется не одно десятилетие, до сих

пор при разработке технологии исследования приходится подстраиваться под возможности имеющихся математических схем и критериев обработки данных в пространстве признаков. Специфика конкретной активной системы состоит в том, что для неё, как правило, трудно подобрать готовый алгоритм корректной обработки данных. В свою очередь, чтобы обеспечить синтез эффективной модели, необходимо подготовить информационную среду для снабжения процедур конструирования модели разнообразными априорными знаниями со стороны эксперта. То есть, особую актуальность приобретает этап концептуального моделирования целевого функционирования АС путем выделения дерева объясняющих факторов, а также этапы синтеза соответствующих фактор-признаков, формирования корректного выборочного описания и структуры имитационной модели целевого функционирования.

Обычно поведение компонент АС отражается в ИМ на двух уровнях: внешняя среда и, собственно, АС. Внешняя среда имитируется путем генерации входных потоков транзактов и требует задания только параметров этих потоков (например типы и параметры распределений интервалов поступления транзактов в ИМ активной системы). Внутренняя организация АС моделируется комбинацией взаимодействия пары транзакт – устройство. Если для внешней среды достаточно параметрического описания, то для отражения внутренних процессов в АС необходим алгоритмический подход к описанию взаимодействий пар транзакт – устройство. Поскольку этот процесс достаточно трудоемок, то актуальной является проблема автоматизации основных этапов составления концептуальной модели и формализации взаимодействий компонент АС.

Данная работа посвящена вопросам автоматизации этих этапов путем использования ряда принципов, облегчающих оперативное реконструирование ИМ активной системы.

### 1 Основные принципы моделирования АС

При моделировании АС предлагается использовать следующие три принципа представления ее деятельности: элементной и функциональной декомпозиции, а также рекурсивного описания. Охарактеризуем их.

Первый принцип элементной декомпозиции развивает транзактно-процессный подход [2] к представлению сложных систем. Суть данного подхода состоит в выделении системных компонент двух типов (транзактов и устройств) и составление алгоритмического описания процессов их взаимодействия. Предлагается расширение данной функциональной классификации компонент. Вводятся следующие пять классов компонент: субъекты, предметы, инструменты, дополнительные средства (ресурсы) и фон. Согласно транзактно-процессному подходу, здесь устройством является пара субъект – инструмент, а транзактом, соответственно, пара предмет – ресурс. Фон определяет внешние воздействия на систему и может быть представлен в виде устройства типа генератор или поглотитель. Таким образом, при построении ИМ на этапе формального описания используется следующая иерархия типов элементов АС, отражаемая на рисунке 1.1.



Рисунок 1.1 – Иерархическая классификация элементов АС

Опишем основные элементы указанной схемы декомпозиции.

**Субъект функционирования.** Представляет собой элемент системы, обладающий потенциальным пространством. Потенциальное пространство содержит накопленный опыт субъекта в виде массива знаний, в котором содержится информация о типах реальных элементов системы, все возможные связи между ними, а также содержится соответствующее данной информации поле ценностей. Благодаря наличию такого пространства субъект может моделировать свою деятельность с целью выработки оптимальных воздействий на АС и внешнюю среду.

**Предмет функционирования.** Это элемент АС, содержащий потенциальные свойства эталона, соответствующего идее субъекта о выходном предмете. Предмет функционирования подвержен основным изменениям (эти изменения носят, как правило, качественный характер).

**Инструмент функционирования.** Это элемент системы, обладающий возможностью преобразования предмета согласно идее субъекта о выходном предмете. В процессе преобразования предмета инструмент претерпевает, как правило, незначительные количественные изменения. Для этого инструменту необходимо наличие дополнительных средств, которые обеспечивают поддержание оптимального режима функционирования инструмента. При недостаточном поступлении средств на инструмент, последний может претерпевать и качественные изменения, не характерные для его функционирования.

**Средства функционирования (ресурсы).** Представляют собой элемент, определяемый субъектом, как необходимый ресурс для нормальной работы инструмента. Со стороны инструмента этот элемент подвергается и качественным, и количественным изменениям.

**Фон функционирования.** Это элемент, отражающий воздействия внешней среды на АС.

Взаимодействие элементов отражено на рисунке 1.2.

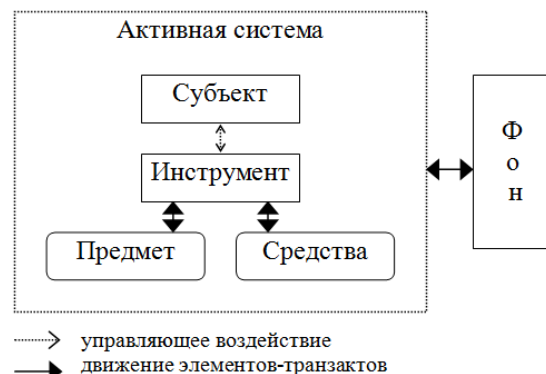


Рисунок 1.2 – Схема взаимодействия элементов АС

Согласно приведенной схеме, взаимодействие элементов происходит следующим образом.

1. Исходя из своих потребностей, субъект определяет идею о выходном предмете и формирует схему его получения (т. е. определяет вид будущего функционирования). Этот процесс происходит в потенциальном пространстве субъекта путем определения наиболее ценных для данного функционирования предмета, инструмента и соответствующих дополнительных средств. Если субъект определил схему функционирования, то, при наличии в актуальном пространстве соответствующих элементов он выдает команду начала работы инструмента. Иначе субъект оценивает функционирование как невозможное и выполняет одно из следующих действий: либо ожидает появления соответствующих элементов, либо переопределяет свои потребности и вырабатывает новые мотивы своего поведения.

2. Инструмент, получив команду начала работы, использует входные средства и выполняет преобразование входного предмета по сформированной субъектом схеме функционирования.

3. По мере преобразования предмета субъект производит его сопоставление с эталоном. На основании полученной оценки субъект вырабатывает соответствующее решение о дальнейшем функционировании АС и при определении предмета адекватным эталону на инструмент посылается команда окончания преобразования.

Данный алгоритм является абстрактной схемой взаимодействия элементов АС и его конкретизация зависит от типа исследуемого функционирования.

Согласно второму принципу функциональной декомпозиции, исследователь должен рассматривать деятельность АС, как выполнение системой пяти видов функционирований: ориентационного, преобразовательного, отражательного, коммуникативного и балансирующего. Ниже приведено назначение каждого из них.

*Ориентационное функционирование.* Назначением этого функционирования для субъекта является определение в потенциальном пространстве схемы преобразования предмета, в которой должны определяться: предмет, инструмент, средства и фон преобразования. В актуальном пространстве ориентация используется инструментом для определения реальных предмета и средств.

*Преобразовательное функционирование.* В потенциальном пространстве субъекта это функционирование ориентировано на выработку новых знаний или переоценку старых. В актуальном пространстве функционирование используется для перевода предмета в новое состояние посредством инструмента и некоторого ресурса согласно схеме выработанной на этапе ориентации.

*Отражательное функционирование.* Предназначено для выработки оценки функционирования элементов АС. Формирование соответствующих оценок происходит посредством сопоставления состояния элемента с эталонным значением.

*Коммуникативное функционирование.* Организует обменные процессы в системе.

*Балансирующее функционирование.* В актуальном пространстве осуществляет оптимальное перераспределение ресурсов элементов системы. В потенциальном пространстве – выполняет выработку мотивов поведения субъекта посредством поля ценностей.

Указанные функционирования протекают в АС одновременно. Однако, как показывает практика, в системе часто определяется одно приоритетное (целевое) функционирование. Тогда при исследовании такой АС основное внимание следует уделить моделированию этого направления деятельности системы.

Третий принцип рекурсивного описания основан на идее повторения структуры объекта на различных уровнях его рассмотрения. Согласно данному подходу, разработчик моделей может применять принципы элементной и функциональной декомпозиции, как для моделирования всей АС, так и для моделирования ее отдельных подсистем.

Предложенные принципы построения ИМ АС позволяют автоматизировать этапы формирования содержательного описания и концептуальной модели посредством использования специального инструментария, ориентированного на проблемного пользователя. В качестве такого инструментария предполагается задействовать программно-технологический комплекс имитации, который представляет собой проблемно-ориентированное программное обеспечение процесса исследования деятельности АС.

## **2 Назначение подсистемы исследования активной системы**

Исходя из функционально-эволюционного подхода [5], построим подсистему исследования (ПИ), ориентированную на типичную прикладную проблему, суть которой состоит в выработке оптимальных воздействий на некоторое целевое функционирование объектов АС со стороны управляющего субъекта [1]. Основное назначение вырабатываемых воздействий – повышение эффективности как целевого функционирования (ЦФ), так и всей жизнедеятельности объекта АС.

В отличие от известного метода-ориентированного принципа проектирования обработки данных [3], в основу которого положена независимая оптимизация в рамках отдельных методов (типа классификации или регрессии) с крайне ограниченными возможностями ввода априорной информации, выбранный нами проблемно-ориентированный подход к созданию ПИ позволит:

– за счет специального языка описания жизнедеятельности активной системы (АС) использовать в процедурах обработки данных разнообразную содержательную информацию (в том числе интуитивные представления экспертов) о

начальном состоянии предмета обработки, типе процедуры преобразования и ее параметрах, допустимом и недопустимом качестве результата, пользе или вреде (в случае существенности ошибки) от полученного результата при дальнейшем использовании;

– с помощью специальных приемов унификации разнообразной числовой и нечисловой статистической информации в той или иной степени привлекать практически все сведения, относящиеся к данной проблематике;

– используя специальную технологию межмодульного обмена данными и знаниями, обеспечить открытость всех процедур обработки к модификации заложенных в них стратегий и критериев анализа;

– за счет специальной технологии балансировки ценностных критериев на всех этапах и уровнях анализа данных обеспечить его ориентированность на конечную цель повышения эффективности целевого функционирования АС.

### **3 Состав решаемых задач**

В свете нового подхода к моделированию решения прикладной проблемы ПИ должна обслуживать следующие взаимодействующие процессы исследования.

Декомпозиция факторов в виде поиска и конструирования значимых (в аспекте заданной проблемы) структур состояния ЦФ и соответствующих факторных и фактор-признаковых описаний [1].

Формирование первичных признаков с помощью измерений, прямых или косвенных оценок значимых факторов, в частности, экспертных оценок.

Формирование фактор-признаков путем аналитического синтеза первичных признаков, а также статистических и экспертных обобщений.

Синтез интегральной динамики фактор-признака ЦФ на базе комплекса разнотипных моделей оценки динамики признака.

Поиск структуры состояний ЦФ и их распределений на основе эмпирического образа данных и экспертных представлений.

Формирование генератора смены состояния ЦФ для имитационного моделирования процессов формирования целевых свойств в виде распределенной сети моделей локальных движений ЦФ, представляющей собой систему дифференциальных уравнений связи фактор-признаков.

Поиск структуры распределения ресурсов целевого и обуславливающих его функционирований путем согласования результатов имитационного моделирования с интегральными динамиками основных фактор-признаков, полученных на основе статистического синтеза.

Поиск с помощью имитации «слабых» и «сильных» сторон ЦФ с целью выработки оптимальных решений по его модернизации со стороны управляющего субъекта.

Планирование имитационного эксперимента и генерация спектра альтернативных воздействий (или комплексов воздействий) на ЦФ.

Имитация реализации альтернативных воздействий. Принятие решений о воздействии на ЦФ. Детальная имитация полученных воздействий на ЦФ с целью выработки плана внедрения воздействий. Отслеживание процессов внедрения воздействий в режиме реального времени и выработка текущих коррекций.

При реализации выше перечисленных процессов предполагается использовать следующий набор методов анализа данных: анализ признаков; сжатие и построение эмпирического образа данных; типологическая (кластерная) регрессия; оценка динамики признака или многомерного описания.

### **4 Структура подсистемы исследования и состав компонент**

Для проблемно-ориентированного подхода каждая из традиционных процедур обработки данных (например, оценка распределения признака, классификация или регрессия) уже не является автономной и подчинена требованиям глобальной проблемной оптимизации. В таких условиях ПИ может неоднократно возвращаться к одной и той же процедуре обработки набора данных, поставляя ей корректирующие сведения и добываясь более высокой устойчивости оценки её точности и правдоподобной интерпретации. В особенности это относится к процедурам обработки, формирующим оценки признаков или фактор-признаков наиболее узких мест целевого функционирования. Таким образом, вместо набора замкнутых физических программных модулей предлагается создать методы анализа данных по поддержке перечисленных выше основных процессов проблемного исследования. Инструментальной базой для каждого такого метода должны стать: технология реализации процесса исследования; технология синтеза оценки метода и достижения более высоких показателей ее точности и устойчивости за счет привлечения разнообразной дополнительной информации; программное обеспечение для технологической цепочки подпроцесса исследования [4]; программное обеспечение для реализации технологии синтеза оценки метода, представляющее собой логически единую и открытую подсистему (по сути дела, это экспертная система оценки данного метода); библиотека физических элементарных модулей обработки данного метода; рабочая база данных метода; библиотека сервисных модулей обработки; база данных проблемного исследования.

### **5 Функциональное назначение компонент и методики их работы**

Выделим три компоненты: синтез фактор-признаков, оценка распределения признаков по



разнотипным статистическим описаниям, синтез оценки динамики признака. Приведем их описание.

*Синтез фактор-признаков.* Программно-технологическое обеспечение синтеза фактор-признаков предназначено для построения описания заданного фактора в структуре ЦФ в виде некоторого обобщающего комплексного признака. Для реализации данного процесса необходимо, чтобы пользователь выделил все признаки, относящиеся к данному фактору. Это могут быть как прямые признаки (т.е. полученные в результате измерения или непосредственной экспертной оценки), так и косвенные. Отметим, что конструируемый фактор-признак, как правило, является абстрактным и предназначен для отражения изменений в блоке функционирования, отвечающем за данный фактор. В методике синтеза фактор-признаков отметим четыре этапа.

Этап 1. Выделение доступной информации о различных проявлениях (признаках), связанных согласно схеме на рисунке 1.2 с функционированием, определяющим заданный фактор.

Этап 2. Сбор статистики по объектам обучающей выборки, куда включаются результаты измерений, экспертных или статистических оценок (т.е. значения признаков). Формирование соответствующей матрицы объект-признак.

Этап 3. Разведочный анализ каждого признака, определение его центра (эталона), порогов допустимости значений, а также уровней доверия к измерителям и значениям признаков. При необходимости признак может быть преобразован к симметричному виду своего распределения.

Этап 4. Поиск вида формулы синтеза признаков в фактор-признак на основе экспертных представлений о характере аккумуляции влияний на основное свойство данного функционирования (как правило, скрытого) тех или иных факторов, проявление которых отражены в имеющемся наборе признаков. Характер такого аккумуляции обычно носит либо аддитивный (в случае независимого накопления), либо мультипликативный, либо смешанный вид. Для уточнения предполагаемого вида формулы синтеза, в частности, нейтрализации влияния «хвостовых» значений признаков (особенно в случае несимметричности распределений) непосредственно в формуле синтеза могут быть проведены преобразования (степенное, логарифмическое, дробно-линейное) и нормировки (по эталону и/или порогам вариации), способствующие повышению степени статистической связи моделируемого фактор-признака с целевым свойством. Отметим, что корректировка формулы синтеза целевого фактор-признака, в свою очередь, может быть осуществлена по результатам оценки его статистической связи с объясняющими фактор-признаками. Исходя из требования удобства анализа и повышения точности итоговой модели в ряде случаев предлагается синтезировать

комплексные фактор-признаки, сочетающие два или более фактор-признаков.

*Оценка распределения признаков по разнотипным статистическим описаниям.* Программно-технологическое обеспечение данного метода предназначено для поэтапного уточнения значений основных параметров распределения признака (среднего и показателя отклонения в случае одномодальности или групп этих параметров и их весов в случае неодномодальности) по мере появления разнообразной информации, относящейся к данному признаку. В качестве такой дополнительной информации могут выступать:

– новый набор измерений или прямых экспертных оценок, полученных предыдущим измерителем или экспертом (здесь необходима только проверка влияния времени на условия измерения или оценки, объект измерения или оценки и самого измерителя или эксперта);

– новый набор измерений или прямых экспертных оценок, полученных другим измерителем или экспертом; здесь в сравнении с первым случаем необходимо дополнительно привлечь процедуру «увязки» значений признаков, полученных разными измерителями или экспертами (суть процедуры подобной «увязки» сводится к калибровочному преобразованию, построенному по отношению признаковых значений данного измерителя или эксперта к соответствующим признаковым значениям на общих объектах или объектах-аналогах некоторого эталонного измерителя или эксперта);

– новая косвенная оценка данного признака в виде первичного признака (в этой ситуации дополнительный признак может быть подключен в процедуру синтеза оценки распределения непосредственно с помощью уравнения линейной регрессии на него исследуемого признака, либо с помощью уравнений кластерно-регрессионной модели);

– новая косвенная оценка данного признака, полученная с помощью того или иного эмпирического уравнения связи, построенного по некоторому набору объясняющих признаков на основе кластерно-регрессионной модели.

При этом разработаны методики и процедуры, позволяющие избежать основные источники ошибок: 1) оценки среднего с помощью среднего арифметического (СА) в случае реально ассиметричного (логнормального) или бимодального распределения; 2) то или иное сжатие исходной выборки измерений (тройка из минимума, максимума и СА; СА и стандартное отклонение; грубая гистограмма с неравными интервалами наполнения; усеченное справа или слева эмпирическое распределение); 3) несоблюдение условий пропорциональности представления выборочных измерений по типам подвыборок, различающимися характеристиками объектов и условиями формирования значений исследуемого

признака, например, сезоном измерения; 4) использование методов оценки среднего без учета особенностей выборки малого объема; 5) нестабильность погрешности выборочных измерений; 6) наличие в данных неконтролируемой систематической ошибки; 7) совместное использование в модели оценок, полученных различными станциями, отличающимися типами их измерителей, методиками измерений, уровнем ошибок и степенью доверия к поставляемым этими станциями оценкам признака. Решение всех этих проблем ищется методом согласования нескольких статистических описаний одного распределения по разным периодам и источникам измерений. С этой целью авторами разрабатывается программно-технологическое обеспечение комплексного согласования описаний распределения (КСОР). Математическая идея согласования разнотипных описаний распределений сводится к синтезу проекций всех описаний распределений на нормальной вероятностной бумаге. В случае бимодального распределения предлагается использовать алгоритм расщепления смеси. В основу алгоритма расщепления также положена идея представления эмпирического распределения на вероятностной бумаге.

*Синтез оценки динамики признака.* Программно-технологическое обеспечение данного метода предназначено для получения эффективной (по точности и устойчивости) оценки динамики признака на основе группы разнотипных моделей восстановления пропущенных значений временного ряда и прогноза динамики признака с помощью кластерно-регрессионных моделей [4]. Пусть исследуется заданное целевое свойство (ЦС) у определенного вида объектов системной природы. Целевое свойство изменяется во времени на уровне индивидуального объекта (ИО), а также на уровне различного рода групповых объектов (ГО), в том числе и полного группового объекта (ПГО).

Ставится задача: на основе измерений и оценок ЦС и других связанных с ним признаков ИО, ГО и ПГО построить модель динамики целевого свойства ГО и ПГО, оптимальным образом (в смысле точности, устойчивости и ресурсоемкости измерений) синтезирующего в себе различные модели оценки: 1) модели стандартного статистического оценивания тренда временного ряда (оценка среднего, доверительного интервала, сглаживание и т. д.); 2) модель коррекции группового тренда ЦС с учетом индивидуальных динамик; 3) модель уточнения оценки целевого свойства ГО путем учета закономерностей динамики данного типа ГО у ПГО-аналогов оцениваемого ПГО, а также закономерностей соотношения целевого свойства у ГО в рамках ПГО; 4) кластерно-регрессионная модель уточнения оценки целевого свойства ГО и ПГО, учитывающую связи ЦС с другими признаками; 5) оценку целевого свойства ГО и ПГО экспертом.

Учитывая сложность задачи оценки ЦС, а также принципиальную неопределенность статистической аппроксимации, предлагается осуществить следующие действия.

1. Построить несколько моделей оценивания, опирающихся на разные закономерности формирования ЦФ и его проявления. При этом должна быть обоснована необходимость каждой оценки и подтверждена достаточность подготовленного набора моделей.

2. Принять решение о прогнозе ЦС для конкретных объектов путём синтеза групп альтернативных значений ЦС, порождёнными соответствующими моделями. Суть идеи такого синтеза состоит в выделении максимального набора групповых альтернатив, обеспечивающих оптимум функционалу совокупной согласованности.

### **6 Реализация проблемно-ориентированной технологии**

В качестве одного из примеров возможной реализации предлагаемого подхода рассмотрим проблему совершенствования деятельности некоторого производственного подразделения, например, цеха и его бригад. При этом предлагается интеллектуализировать работу лиц, принимающих решение (бригадира, мастера и вышестоящего управленца). В частности, речь идет о выработке оперативного, тактического и стратегического планов деятельности. В настоящее время из всех интеллектуальных систем (ИС) наибольшее распространение получили экспертные системы производственного типа. Однако реальной эффективности от их использования можно достичь только в тех случаях, когда в списке формируемых продукций удастся отразить скрытые идеи поведения или проявления субъектов деятельности. То есть, необходимо, чтобы при формировании базы знаний эксперты не просто задавали цепочку: признаки ситуации – вывод, но и опирались при этом на единую концептуальную схему формирования производственных процессов с учетом субъективного фактора. Это же относится и к пользователю (например, мастеру), которому ИС помогает конкретизировать образ текущей ситуации планирования по группе наиболее подходящих продукций и подобрать оптимальный план действий (включая управляющие воздействия на исполнителей) с использованием статистического, аналитического и имитационного методов моделирования.

Особенность предлагаемого подхода состоит в том, что в качестве рабочего пространства синтеза моделей плана берется не традиционная пара декартовых пространств (по признакам условий и признакам следствий), а более сложное пространство экспертного представления образа ситуации планирования согласно универсальной схеме формирования производственной деятельности. Остатываясь на проблеме представления образа ситуации планирования, отметим два момента.

Во-первых, данное представление двухъярусное. Первый ярус связан с невидимым интуитивным воображением игры факторов, формирующих производственные процессы. В зависимости от опыта, квалификации и текущей психологической установки специалист может остановиться на той или иной глубине декомпозиции и степени полноты отражения игры факторов. По отношению к данному ярусу роль ИС состоит в предоставлении пользователю универсального каркаса факторных символов и схем их взаимосвязи. В основу каркаса факторных символов и их взаимосвязей положена универсальная схема жизнедеятельности активной системы [1]. Используя соответствующий аппарат факторной настройки, пользователь интерпретирует предложенный формализм с помощью механизма распределения ценностей (по существенности вклада того или иного фактора или факторного уровня в образ ситуации планирования). Второй ярус представления образа ситуации планирования связан с видимыми проявлениями фрагментов воображаемых процессов. Традиционно эти проявления (время выполнения рабочим той или иной операции, качество выполнения, эмоциональный настрой на работу и т. д.) характеризуется некоторой сетью признаков описаний, полученных путем процедур счета, приборных измерений или интуитивной экспертной оценки.

Во-вторых, невидимый ярус образа представления ситуации является определяющим и образует контекст исследования по поиску оптимального плана. Формирование двухъярусного представления образа ситуации планирования осуществляется на основе механизма синтеза фактор-признаков. Поиск вида формулы синтеза признаков в фактор-признак осуществляется экспертом на основе представлений о характере аккумуляции влияний на основное свойство функционирования заданного фактора тех или иных факторов, проявления которых отражены в имеющемся наборе признаков. Характер такого аккумуляции обычно носит либо аддитивный, либо мультипликативный, либо смешанный вид. При этом используется аппарат регрессионного моделирования.

Получив в свое распоряжение представление образа ситуации планирования, пользователь с помощью ИС может осуществлять следующие процедуры по достижению адекватности и эффективности формируемого плана:

- при заданных условиях деятельности подыскать в базе знаний для разных фрагментов производственного процесса набор подходящих продукций и синтезировать их в намерение по реализации конкретной сети действий;

- в рамках выделенного намерения действий спрогнозировать значения тех или иных целевых показателей реализации действий с

помощью аппарата кластерно-регрессионного анализа [4];

- проимитировать реализацию того или иного фрагмента производственного процесса и выделить наиболее целесообразные действия и их параметры, а также параметры управляющих воздействий на исполнителей этих действий (предполагается использование аппарата имитационного моделирования [2]);

- проимитировать весь производственный процесс согласно сформированному плану и выбрать итоговый вариант плана.

### Заключение

Предварительная апробация предлагаемых средств автоматизации построения моделей производственного процесса была осуществлена на примере задачи совершенствования деятельности бригад технологического обслуживания вагонов по данным Белорусского госуниверситета транспорта [6], а также для решения проблемы повышения удоев молока в сельскохозяйственных предприятиях на загрязненных радионуклидами территориях Гомельской и Брестской областей [7].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Осипенко, А.Н. Метод моделирования активной системы: постановка задачи ориентационных исследований и ее интерпретация // Сб. Экология и Чернобыль, Ч. 3. – Гомель, 1996. – С. 72–77.
2. Максимей, И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ / И.В. Максимей. – М.: Радио и связь, 1988. – 232 с.
3. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян [и др.] – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
4. Программное обеспечение разведочного анализа данных натурального и имитационного эксперимента / А.Н. Осипенко [и др.] // Сб. Компьютерный анализ данных и моделирование. Т. 2. – Минск: БГУ, 1995. – С. 231–235.
5. Осипенко, А.Н. Метод и средства автоматизации моделирования активных систем: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / А.Н. Осипенко; ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 1997. – 16 с.
6. Метод экспертно-статистического моделирования для управления надежностью вагонов / А.Н. Осипенко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 2–8.
7. Пример применения метода корреляционно-регрессионного анализа в производственной проблеме / Н.Б. Осипенко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 59–64.

Поступила в редакцию 11.06.14.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25 % в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).