



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 4 (17) 2013

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

*Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by*

Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

*F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>*

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (17) 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Колядко Ж.В., Шепелевич В.В., Ничипорко С.Ф., Шандаров С.М.** Одномерные солитоноподобные тёмные нечетные пучки в кубическом оптически активном фоторефрактивном пьезокристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ 7
- Любимов Д.Н., Долгополов К.Н., Гольдаде В.А.** Виртуальные состояния в эволюции квантовых трибосистем 14
- Рогачёв А.В., Федосенко Н.Н., Арико Н.Г., Горбачев Д.Л., Руденков А.С.** Морфология и оптические свойства многослойных покрытий из тугоплавких оксидов 21
- Хассан Сейди, Гременок В.Ф., Иванов В.А.** Получение и исследование микроструктурных свойств объемных сплавов $\text{Pb}_x\text{Sn}_{1-x}\text{Te}$ 28
- Хило П.А.** Разделение ТН- и ТЕ- поляризованных бесселевых световых пучков при акусто-оптической дифракции в анизотропных кристаллах 32
- Чжоу Бин, Рогачёв А.В., Сяохун Цзян, Филиппов Д.Г., Федосенко Н.Н., Руденков А.С.** Размерные эффекты в бислойных покрытиях титан-углерод. 1. Влияние толщины подслоя титана на структуру и свойства углеродного слоя 38

МАТЕМАТИКА

- Жучок А.В.** Свободные n -динильпотентные димоноиды 43
- И Сяолан, Скиба А.Н.** О некоторых обобщениях перестановочности и S -перестановочности 47
- Каморников С.Ф.** Разрешимые гиперрадикальные формации 55
- Кирилюк Д.И.** n -Арный аналог аффинной теоремы Дезарга 59
- Мегралиев Я.Т.** О разрешимости одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка 63
- Монахов В.С., Трофимук А.А.** О силовой башне конечной группы с субнормальными нециклическими примарными подгруппами 68

ИНФОРМАТИКА

- Демиденко О.М., Чечет П.Л.** Программные приёмы реализации адаптивной яркости в устройствах отображения 72
- Неверов А.С., Пинчук Л.С., Старовойтов А.Н., Шевченко Д.Н.** Принцип объективно предопределенной локализации пространства внутри многоугольников произвольной формы и его применение в технике 77
- Осипенко Н.Б., Осипенко А.Н., Осипенко К.А.** Пример «выращивания» регрессионной модели социального явления на базе критерия правдоподобности интерпретации 85

ТЕХНИКА

- Осипов А.Н., Бондарик В.М., Кузнецов Д.Ф., Остроух Е.П., Масудян Х.** Исследование зависимости энергетических характеристик электромиограмм от параметров регистрации 89
- Покатилов А.Е.** Математическое моделирование движения биомеханической системы 95

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 04.12.13. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 100 экз. Заказ № 639.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2013
© Проблемы физики, математики и техники, 2013
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2013

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (17) 2013

CONTENTS

PHYSICS

Kolyadko Zh.V., Shepelevich V.V., Nichiporko S.F., Shandarov S.M. One-dimensional solitonlike dark odd beams in a cubic optically active photorefractive piezocrystal $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$	7
Lubimov D.N., Dolgoplov K.N., Goldade V.A. Virtual states in evolution of quantum tribosystems	14
Rogachev A.V., Fedosenko N.N., Ariko N.G., Gorbachev D.L., Rudenkov A.S. Morphology and optical properties of multilayer refractory oxide coatings	21
Hassan Seidi, Gremenok V.F., Ivanov V.A. Preparation and investigation of microstructural properties of $\text{Pb}_x\text{Sn}_{1-x}\text{Te}$ bulk alloys	28
Khilo P.A. Separation of TH- and TE- polarized Bessel light beams at acousto-optic diffraction in anisotropic crystals	32
Bing Zhou, Rogachev A.V., Xiaohong Jiang, Piliptsov D.G., Fedosenko N.N., Rudenkov A.S. Size effect in the bilayer coatings of titanium-carbon. 1. The influence of thickness of titanium interlayer on the structure and properties of carbon layer	38

MATHEMATICS

Zhuchok Anatolii V. Free n -dimilpotent dimonoids	43
Yi Xiaolan, Skiba A.N. On some generalizations of permutability and S -permutability	47
Kamornikov S.F. Soluble hyperradical formations	55
Kirilyuk D.I. n -Ary analog of affine Dezarg theorem	59
Mechraliyev Y.T. On solvability of an inverse value problem for hyperbolic equation of the second order	63
Monakhov V.S., Trofimuk A.A. On Sylow tower of finite group with subnormal non-cyclic primary subgroups	68

INFORMATION SCIENCE

Demidenko O.M., Chechat P.L. Software implementation of adaptive brightness for display devices	72
Neverov A.S., Pinchuk L.S., Starovoitov A.N., Shevchenko D.N. The principle of the objective predestined localizations of space in polygonal figure of the free form and its application in technology	77
Osipenko N.B., Osipenko A.N., Osipenko K.A. Example of the «cultivation» of the social phenomenon's regression model on the basis of criterion of plausible interpretation	85

TECHNICS

Osipov A.N., Bondarik V.M., Kuznecov D.F., Ostroukh E.P., Masudian X. The dependence of energy characteristics of electromyograms on the parameters of registration	89
Pokatilov A.E. Mathematical modelling of locomotion of biomechanical system	95

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.42

ОДНОМЕРНЫЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ ТЁМНЫЕ НЕЧЕТНЫЕ ПУЧКИ В КУБИЧЕСКОМ ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОМ ФОТОРЕФРАКТИВНОМ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛЕ $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$

Ж.В. Колядко¹, В.В. Шепелевич¹, С.Ф. Ничипорко¹, С.М. Шандаров²

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

²Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия

ONE-DIMENSIONAL SOLITONLIKE DARK ODD BEAMS IN A CUBIC OPTICALLY ACTIVE PHOTOREFRACTIVE PIEZOCRYSTAL $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$

Zh.V. Kolyadko¹, V.V. Shepelevich¹, S.F. Nichiporko¹, S.M. Shandarov²

¹I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

²Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russia

Экспериментально и теоретически изучено влияние внешнего электрического поля на распространение одномерного темного нечетного пучка в кубическом оптически активном фоторефрактивном пьезокристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ толщиной 10 мм. Установлено, что учет пьезоэлектрического эффекта при численном моделировании приводит к лучшему соответствию экспериментальных и теоретических результатов.

Ключевые слова: солитон, темный пучок, фоторефрактивный пьезокристалл.

The influence of an external electric field on the propagation of a one-dimensional odd dark beam in a cubic optically active photorefractive piezocrystal $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ with thickness of 10 mm is studied experimentally and theoretically. It is established that taking into account the piezoelectric effect at numerical modeling leads to better adequacy of the experimental and theoretical results.

Keywords: soliton, the dark beam, photorefractive piezocrystal.

Введение

Фоторефрактивные кристаллы могут поддерживать распространение как светлых, так и темных пространственных солитонов, так как в одном и том же кристалле за счет изменения поляризации приложенного к нему внешнего электрического поля может проявляться как фокусирующая, так и дефокусирующая нелинейность. Благодаря перспективе использования солитонов в оптических устройствах, выполненных на основе фоторефрактивных кристаллов [1], изучение особенностей распространения световых пучков в таких средах является актуальной проблемой.

К настоящему времени результаты изучения темных пространственных солитонов в различных нелинейных средах показывают возможность их использования для оптического управления светлыми световыми пучками, при котором могут осуществляться операции адресной локализации световых пучков и переключения оптических каналов (см., например, [2], [3]). Известно (см., например, [1]), что с помощью множественных темных пучков возможно создание специальных разветвленных канальных структур, управляющих перемещением в пространстве светлых квазисолитонных пучков, и расщеплением их на несколько светлых световых каналов.

Исследование квазисолитонного распространения (1+1)D (одномерных [4]) пространственных темных пучков [5], [6] (оптический пучок, содержащий темную область, образованную в результате появления неоднородности светового поля) позволяет находить способы создания волноводных структур, которые могут каналировать более мощные светлые пучки либо изменять их конфигурацию путем разделения на несколько пучков [7], [8].

Кубический пьезокристалл $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO) типа силленита обладает высокой светочувствительностью и является перспективной нелинейной средой для создания различных устройств оптоэлектроники на его базе (см., например, [9], [10]). Этот кристалл проявляет одновременно пьезоэлектрические свойства и естественную гиротропию (оптическую активность), под влиянием которой плоскость поляризации света, проходящего через кристалл, поворачивается на определенный угол, величина которого пропорциональна толщине кристаллической пластины [11]. Явление вращения плоскости поляризации света ухудшает, как правило, условия квазисолитонного распространения световых пучков, однако при необходимости оно может быть компенсировано магнитным полем [12].

При формировании темного пространственного солитона можно использовать два типа начальных условий [7], [8].

Первое условие называется «чётным» условием или «амплитудным скачком». Оно связано с симметричным падением амплитуды светового пучка вблизи его центра (амплитудная неоднородность) без изменения фазы пучка. Пучки такого типа называются четными темными пучками [5], [13]. Они образуют на выходе из нелинейной среды на однородном фоновом пучке четное число темных пространственных квазисолитонов. Особенности распространения четного темного пучка в фоторефрактивном кристалле BSO рассмотрены в работе [14], где показано, что в рассматриваемом кристалле возможно формирование волновода в виде Y-соединения [4].

Второе условие называется «нечётным» условием или «фазовым скачком» [7], [8]. Оно связано с задержкой фазы, введенной в половину пучка, на π (фазовая неоднородность). Пучки такого типа называются нечетными темными пучками [5], [13], которые на выходе из нелинейной среды образуют нечетное число темных пространственных квазисолитонов.

Темный солитон (одна темная полоса на однородном световом фоне) также называют темным солитоном первого порядка или фундаментальным темным солитоном [4], [15]. Несмотря на то, что обычно под термином «солитон» понимают световой пучок, который в процессе распространения в нелинейной среде не изменяет своей формы [4], в большинстве зарубежных работ при описании распространения нечетного темного солитона («odd dark soliton») [7] и изучении его перехода к более высокому порядку («high order dark spatial solitons») [8] используют термин «множественные темные солитоны» («multiple dark solitons») [16] или «темные солитоны высокого порядка». Чтобы не идти вразрез с установившимися традициями [7], [8], [16], ниже будут использованы как термины «квазисолитонные темные пучки», «темные солитоны», так и «множественные темные солитоны».

Рассмотрим закономерности формирования и распространения нечетных темных пространственных солитонов в пьезокристалле BSO. Известно [17]–[19], что электрические поля в таких кристаллах, индуцируемые светом, через обратный пьезоэлектрический эффект приводят к появлению упругих деформаций, которые в свою очередь через фотоупругий эффект дополнительно изменяют диэлектрическую проницаемость кристалла. Условно для обозначения совокупности описанных эффектов в дальнейшем будем использовать термин «пьезоэлектрический эффект». Впервые необходимость его учета в кубических фоторефрактивных кристаллах была продемонстрирована в работах [18], [19], где представлены результаты влияния пьезоэлектрических свойств

кристалла на изменение показателя преломления, а также на запись и считывание голограмм. В этих и последующих работах (см., например, [20]), экспериментально и теоретически доказана значительная роль пьезоэлектрического эффекта в кристалле при изучении дифракции света на голографических решетках.

При исследовании солитоноподобного распространения световых пучков в кубических оптически активных кристаллах пьезоэлектрическим эффектом обычно пренебрегают (см., например, [7], [8], [14], [21]). Насколько нам известно, только в небольшом количестве работ, например [22] и [23], можно встретить результаты изучения влияния пьезоэлектрического эффекта на выходные характеристики световых пучков, распространяющихся в кубических фоторефрактивных кристаллах. Так в работе [22] теоретически показано, что учет пьезоэлектрического эффекта приводит к уменьшению величины внешнего электрического поля, необходимого для реализации квазисолитонного режима распространения пучка. В работе [23] при численном моделировании распространения светового пучка в фоторефрактивном кубическом кристалле симметрии 23, помещенном в переменное электрическое поле с одновременным учетом электрооптических, пьезоэлектрических и гиротропных свойств кристалла показано, что учет всех указанных свойств одновременно может привести к существенному изменению результатов.

Таким образом, существует проблема одновременного учета электрооптических, пьезоэлектрических и гиротропных свойств кубических кристаллов при изучении солитоноподобного распространения световых пучков в этих средах.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования и компьютерного моделирования распространения (1+1)D темных нечетных пучков в кубическом фоторефрактивном пьезокристалле, проявляющем одновременно пьезоэлектрические и гиротропные свойства. Изучено влияние величины внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, на распространение темных нечетных пучков.

1 Теоретическая модель

Пусть темный пучок, сформированный с помощью фазовой неоднородности на однородном световом фоне, падает на кубический оптически активный фоторефрактивный пьезокристалл BSO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ толщиной 10 мм, к которому приложено постоянное внешнее электрическое поле \vec{E}_0 (рисунок 1.1). Рассмотрим случай, когда вектор \vec{E}_0 параллелен кристаллографическому направлению $[1\bar{1}\bar{1}]$ ($\theta \approx 35.3^\circ$, где θ – ориентационный угол, отсчитываемый по часовой стрелке от направления $[1\bar{1}0]$ к вектору

внешнего электрического поля). Ось z указывает направление распространения темного пучка. Ось x совпадает с направлением внешнего электрического поля \vec{E}_0 , приложенного к кристаллу.

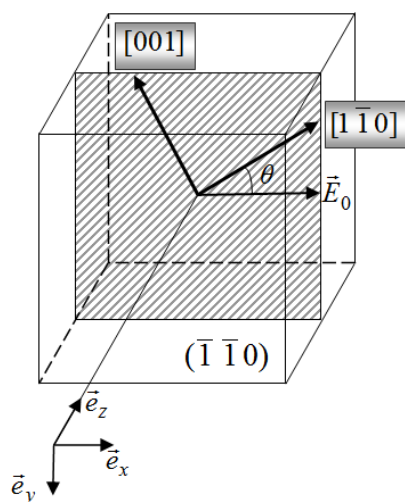


Рисунок 1.1 – Рабочая координатная система xuz и кристаллографические направления

Известно, что изменение тензора диэлектрической проницаемости можно выразить следующим образом [20]

$$\hat{\Delta}\hat{\epsilon} = -\epsilon^2\hat{\Delta}\hat{b}, \quad (1.1)$$

где ϵ – невозмущенная диэлектрическая проницаемость кристалла, $\hat{\Delta}\hat{b}$ – изменение тензора диэлектрической непроницаемости. Изменение тензора диэлектрической непроницаемости состоит из суммы вкладов, обусловленных линейным электрооптическим эффектом и совместным действием обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов [17]–[19]. Компоненты $\hat{\Delta}\hat{b}$ в случае одномерного распределения интенсивности света $I(x)$ и приложенного к фоторефрактивному пьезокристаллу внешнего электрического поля E_0 можно выразить через распределение поля пространственного заряда $E_{sc}(x)$ в виде [23]

$$\Delta b_{mn} = r_{mnp}^U E_0 + p_{mnkl}^E \gamma_{ki} e_{pij} n_j n_l E_0, \quad (1.2)$$

где r_{mnp}^U и p_{mnkl}^E – электрооптический и фотоупругий тензоры третьего и четвертого рангов, измененные при постоянных значениях упругих деформаций и напряженности электрического поля соответственно; γ_{ki} – компоненты тензора, обратного тензору $\Gamma_{ik} = C_{ijkl}^E n_j n_l$; C_{ijkl}^E и e_{pij} – компоненты тензоров модулей упругости и пьезоэлектрических констант; n_i , n_j – направляющие косинусы оси x используемой системы координат (рисунок 1.1), выраженные в кристаллофизической системе координат.

С помощью уравнений Максвелла, уравнений связи для оптически активной среды и выражений (1.1), (1.2) в параксиальном приближении

можно получить следующие уравнения для составляющих медленно меняющейся вдоль координаты z векторной огибающей светового пучка $\vec{A}(x, z)$, описывающие распространение одномерного темного нечетного пучка в кристалле ([22], [23])

$$\begin{cases} i \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{k_0 n_0^3}{2} r_{41}^T E_0 (\mu_1 A_x + \mu_2 A_y) + \\ + \frac{k_0 n_0^3}{2} E_0 \frac{(I_\infty + I_d)}{I_d + I(x, z)} (\eta_1 A_x + \eta_2 A_y) - i \rho A_y = 0, \\ i \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{k_0 n_0^3}{2} r_{41}^T E_0 (\mu_2 A_x + \mu_3 A_y) + \\ + \frac{k_0 n_0^3}{2} E_0 \frac{(I_\infty + I_d)}{I_d + I(x, z)} (\eta_2 A_x + \eta_3 A_y) + i \rho A_x = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где k_0 – длина волнового вектора световой волны в вакууме, n_0 – невозмущенный показатель преломления кристалла, I_d – темновая интенсивность, $I(x, z)$ – интенсивность светового пучка, I_∞ – значение интенсивности светового пучка при $x \rightarrow \pm \infty$, ρ – удельное вращение плоскости поляризации в кристалле, \vec{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z , r_{41}^S и r_{41}^T – электрооптические коэффициенты механически зажатого и свободного кристалла соответственно

$$(r_{41}^T = r_{41}^S + \frac{P_{44}^E e_{14}}{C_{44}^E}) \quad [24].$$

Входящие в систему уравнений (1.3) коэффициенты μ_i ($i = 1, 2, 3$) для рассматриваемой ориентации кристалла определяются выражениями [25]

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 3 \sin \theta \cos^2 \theta, \\ \mu_2 &= \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta), \\ \mu_3 &= \sin \theta (1 - 3 \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Аналитические выражения для коэффициентов η_i ($i = 1, 2, 3$), также входящих в систему уравнений (1.3), выраженные через компоненты изменения тензора диэлектрической непроницаемости [19], [20], [23], представлены в работе [22]. В рассматриваемой нами геометрии взаимодействия нетрудно выразить эти коэффициенты в виде функциональной зависимости от электрооптического коэффициента для зажатого кристалла r_{41}^S , пьезоэлектрического коэффициента e_{14} , коэффициентов упругости C_{11} , C_{12} , C_{44}^E , фотоупругих постоянных p_{11} , p_{12} , p_{13} , p_{44}^E , а также от ориентационного угла θ

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{e_{14}}{C} \{ 0.5 \cos^4 \theta \sin \theta \times \\ &\times [(2p_{11} + p_{12} + p_{13} + 4p_{44}^E)A + (p_{13} + p_{12})B] + \\ &+ \sin^3 \theta \cos^2 \theta [(p_{12} + p_{13} - 4p_{44}^E)A + p_{12}B] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2p_{44}^E B \cos^3 \theta \sin \theta \} + r_{41}^S \mu_1, \\
 \eta_2 = & \frac{e_{14}}{C} \{ 0.5 \cos^3 \theta \sin^2 \theta \times \\
 & \times [(2p_{11} + 4p_{44}^E)A + (p_{13} - p_{12})B] - \\
 & - p_{44}^E \cos \theta \cos 2\theta [2A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta] \} + r_{41}^S \mu_2, \\
 \eta_3 = & -\frac{e_{14}}{C} \{ 0.5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta \times \\
 & \times [(2p_{11} + p_{12} + p_{13} + 4p_{44}^E)A + (p_{13} + p_{12})B] + \\
 & + \sin \theta \cos^2 \theta [(p_{12} + p_{13}) \cos^2 \theta - 4p_{44}^E \sin^2 \theta]A + \\
 & + (p_{12} - 2p_{44}^E)B \cos^2 \theta \} + r_{41}^S \mu_3,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
 A = & (C_{12} - C_{44}^E) \cos^2 \theta - 2C_{11} \sin^2 \theta, \\
 B = & 4(C_{12} + C_{44}^E) \sin^2 \theta - (C_{11} + C_{12}) \cos^2 \theta - 2C_{44}^E, \\
 C = & (C_{11} \sin^2 \theta + C_{44}^E \cos^2 \theta) \times \\
 & \times [(C_{11} + C_{12}) \cos^2 \theta + 2C_{44}^E] - \\
 & - 2(C_{12} + C_{44}^E)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Следует отметить, что выражения (1.4) для величин μ_1, μ_2, μ_3 не зависят от параметров кубического фоторефрактивного кристалла в отличие от выражений (1.5) для величин η_1, η_2, η_3 [22] и, как известно (см. например [22], [23]), ориентационные зависимости $\eta_i(\theta)$ и $\mu_i(\theta)$ имеют качественно подобный характер.

При численном моделировании использованы следующие параметры кристалла BSO на длине волны $\lambda = 0.6328$ мкм: $n_0 = 2.54$, $\rho = 22$ град/мм [11], $r_{41}^S = -5 \cdot 10^{-12}$ м/В, пьезоэлектрический коэффициент $e_{14} = 1.12$ Кл/м², коэффициенты упругости $C_{11} = 12.96 \times 10^{10}$ Н/м², $C_{12} = 2.99 \times 10^{10}$ Н/м², $C_{44}^E = 2.45 \times 10^{10}$ Н/м², фотоупругие постоянные $p_{11} = -0.16, p_{12} = -0.13, p_{13} = -0.12, p_{44}^E = -0.015$ [18].

2 Сравнение экспериментальных и теоретических результатов

При проведении эксперимента использовалась установка, схематично изображенная на рисунке 2.1, где 1 – гелий-неоновый лазер ЛГН – 222 с длиной волны $\lambda = 633$ нм, 2 – коллиматор, 3 – фазовый транспарант, представляющий собой тонкую стеклянную пластинку, формирующую фазовый скачок на π в центре пучка, 4 – кристалл BSO, 5 – собирающая линза, 6 – ослабитель, 7 – CCD-камера, 8 – компьютер.

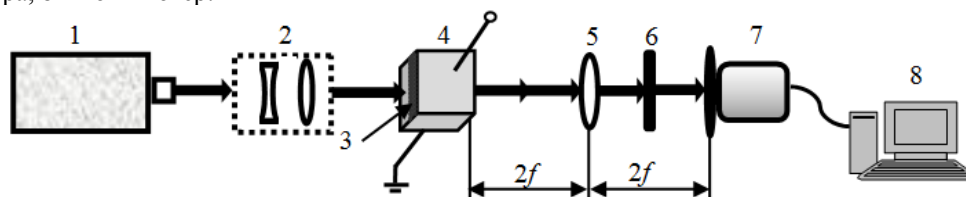


Рисунок 2.1 – Схема экспериментальной установки

Экспериментальные результаты показаны на рисунке 2.2 (1-й и 2-ой ряд). Поперечные профили интенсивности (рисунок 2.2, 2-ой ряд) были получены путем усреднения множества горизонтальных профилей распределений световой интенсивности в 1-ом ряду. По оси x отложены относительные нормированные координаты, определяемые по формуле $x_{\text{отн.ед.}} = x / d_{\text{норм.}}$, где $d_{\text{норм.}} = 48$ мкм.

Можно видеть, что в отсутствие электрического поля ширина темного пучка после прохождения кристалла увеличивается (рисунок 2.2, 1-й и 2-ой ряд, столбец 2). При значении внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, $E_0 = 2.5$ кВ/см (рисунок 2.2, 1-й и 2-ой ряд, столбец 3) ширина темного пучка мало отличается от ширины темного пучка на входе в кристалл, то есть формируется солитоноподобный темный пучок, соответствующий фундаментальному темному солитону или темному солитону первого порядка. При $E_0 = 7.5$ кВ/см (рисунок 2.2, 1-й и 2-ой ряд, столбец 4) можно наблюдать появление двух дополнительных темных полос вокруг центральной темной полосы, другими словами, формируются множественные темные солитоны, соответствующие темному солитону более высокого, в данном случае третьего, порядка.

С целью теоретической интерпретации экспериментальных результатов было проведено численное моделирование распространения темного нечетного пучка на основании системы уравнений (1.3) с учетом выражений (1.4)–(1.6), результаты которого показаны на рисунке 2.2 в сравнении с экспериментально полученными распределениями интенсивности. Для численных расчетов в качестве формы входного темного нечетного пучка использовался \tanh -подобный профиль $A(x) = \tanh(x/x_0)$ [4] (рисунок 2.2, 3-й ряд, столбец 1), где x_0 – ширина темного пучка на половине максимальной относительной интенсивности [7]. Величина x_0 была выбрана таким образом, чтобы распределение относительной интенсивности на выходе из кристалла при $E_0 = 7.5$ кВ/см качественно соответствовало экспериментальным результатам при таком же значении электрического поля, приложенного к кристаллу. Абсциссы трех минимумов интенсивности экспериментальных кривых показаны на всех графиках четвертого столбца вертикально расположенными пунктирными линиями.

Как показывают численные расчеты, использование описанной упрощенной модели формы входного темного нечетного пучка приводит к удовлетворительной корреляции теоретических результатов с экспериментальными.

Как видно из результатов численного моделирования, в отсутствие внешнего электрического поля ширина темного пучка увеличивается (рисунок 2.2, 3-й ряд, столбец 2). Так как на входе в кристалл и на выходе из кристалла в отсутствие внешнего электрического поля зависимости относительной интенсивности темного пучка от относительной координаты x , полученные без учета и с учетом пьезоэлектрического эффекта, совпадают, два графика в строке 4 (столбцы 1 и 2) на рисунке 2.2 не показаны.

Для сравнения результатов моделирования дифракции темного пучка без учета пьезоэлектрического эффекта и с его учетом снова рассмотрим рисунок 2.2. При значении внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, $E_0 = 2.5$ кВ/см, графики зависимости относительной интенсивности огибающей темного пучка от относительной координаты x качественно похожи. При $E_0 = 7.5$ кВ/см (3-й и 4-й ряд, столбец 4) с помощью численного моделирования можно наблюдать формирование множественных темных пространственных солитонов третьего порядка.

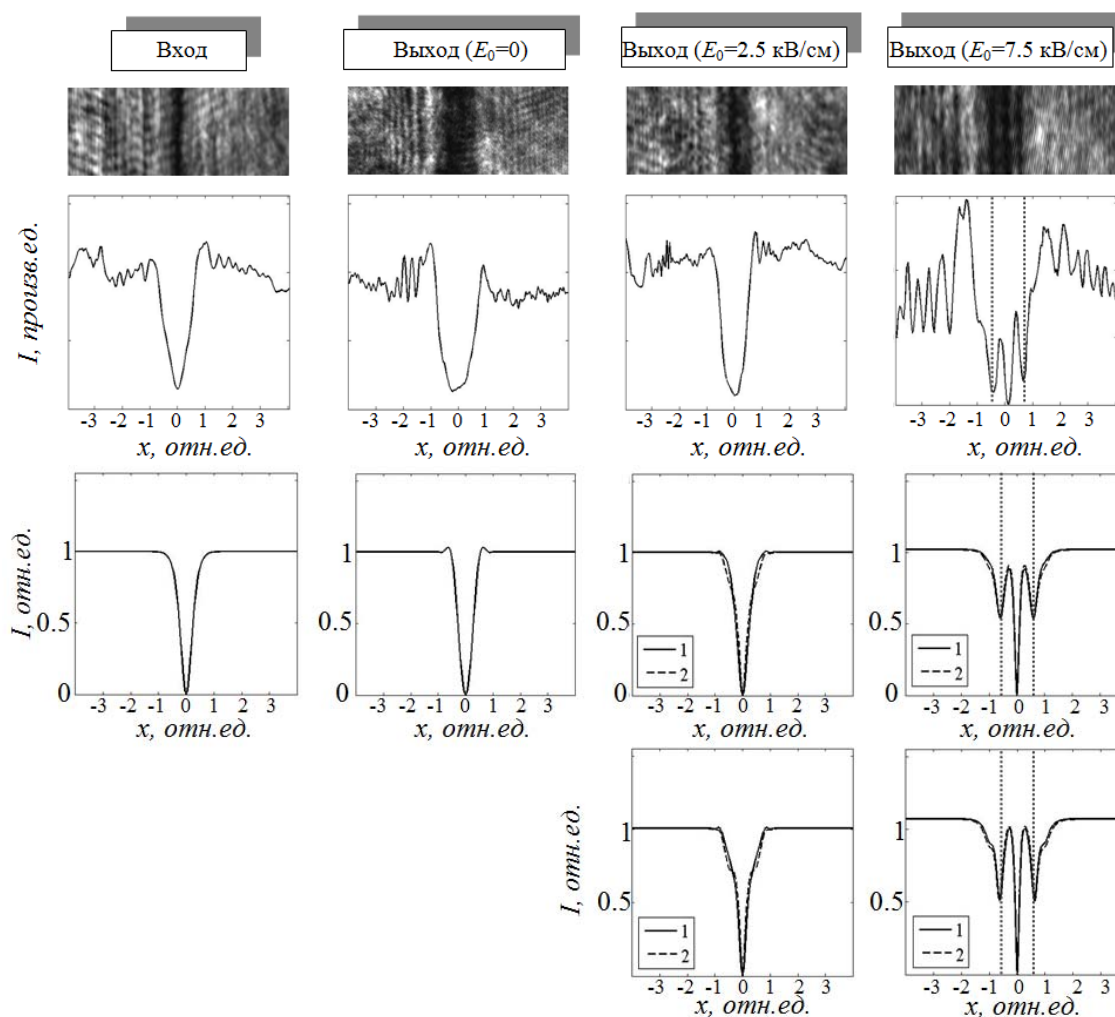


Рисунок 2.2 – Экспериментальные результаты: 1-й ряд – картины распределения интенсивности светового поля темного пучка на входе в кристалл (столбец 1) и на выходе из кристалла (столбцы 2–4, соответствующие различным значениям напряженности E_0 внешнего электрического поля); 2-ой ряд – поперечные усредненные профили интенсивности пучка на входе в кристалл (столбец 1) и на выходе из кристалла (столбцы 2–4). Результаты численного моделирования: 3-й и 4-ый ряд – поперечные профили относительной интенсивности светового поля темного пучка на входе в кристалл (столбец 1) и на выходе из кристалла (столбцы 2–4, соответствующие различным значениям напряженности E_0 внешнего электрического поля), рассчитанные без учета пьезоэлектрического эффекта (3-й ряд) и с его учетом (4-ый ряд). В 3-м и 4-ом рядах (столбцы 3 и 4) кривая 1 – $\rho = 22$ град/мм, кривая 2 – $\rho = 0$

При этом профили относительной интенсивности темного пучка, полученные с учетом пьезоэлектрического эффекта, ближе к профилям, полученным экспериментально. Действительно, при моделировании с учетом пьезоэлектрического эффекта (рисунок 2.2, 4-й ряд, столбец 4) можно видеть «рождение» темных полос пятого порядка, которые также наблюдаются экспериментально (рисунок 2.2, 2-ой ряд, столбец 4).

Отметим, что в результате проведения численных расчетов установлено, что без учета пьезоэлектрического эффекта можно также получить результаты распределения относительной интенсивности, близкие к экспериментальным результатам, представленным на рисунке 2.2 (2-ой ряд, столбец 4). Однако при этом необходимо увеличение внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, до значения $E_0 = 10$ кВ/см. Таким образом, учет пьезоэлектрического эффекта при численных расчетах приводит к уменьшению величины внешнего электрического поля, необходимого для формирования картины рождения множественных темных солитонов, адекватной картине, наблюдаемой экспериментально.

Некоторое отличие теоретических результатов от экспериментальных может быть связано с отличием формы модели светового пучка от формы реального пучка, а также с возможным отличием использованных в расчетах материальных констант кристалла BSO от реальных для данного образца. Кроме того, при моделировании не учитывался асимметричный характер входящего в кристалл светового пучка, возникающий за счет того, что стеклянная пластинка закрывала только половину фронтальной плоскости кристалла.

Из вышесказанного можно заключить, что при численном моделировании учет вклада пьезоэлектрического эффекта в возмущение оптических свойств кристалла полем пространственного заряда [23] существенно влияет на распределение относительной интенсивности темного пучка на выходе из кристалла, причем результаты численного анализа с учетом этого эффекта лучше коррелируют с экспериментальными результатами, чем теоретические результаты, полученные без учета пьезоэлектрического эффекта.

Рассмотрим влияние оптической активности на распространение темного пучка в кубическом фоторефрактивном кристалле, к которому приложено внешнее электрическое поле. В системе уравнений (1.3) пятое слагаемое отвечает за вклад в распространение пучка естественной оптической активности кубического фоторефрактивного кристалла. Известно, что в кубических оптически активных фоторефрактивных кристаллах плоскость поляризации распространяющегося в них пучка поворачивается. Так как фоторефрактивный нелинейный отклик зависит

от поляризации, то оптическая активность, периодически изменяя поляризацию светового пучка, при различных толщинах кристалла может приводить к улучшению или ухудшению условий формирования квазисолитонного режима распространения светового излучения [26] и тем самым оказывать влияние на форму светового пучка и распределение его относительной интенсивности по толщине кристалла [25].

При численном моделировании результаты влияния оптической активности на распределение относительной интенсивности темного пучка на выходе из фоторефрактивного кристалла представлены кривыми 1 ($\rho = 22$ град/мм) и 2 ($\rho = 0$) на рисунке 2.2 (3-й и 4-й ряды, 3-й и 4-й столбцы). Так при «включении» оптической активности темный пучок на выходе из кристалла при $E_0 = 2.5$ кВ/см в нижней части сужается, а в верхней части расширяется (рисунок 3, 3-й и 4-й ряд, столбец 3). В случае $E_0 = 7.5$ кВ/см влияние оптической активности становится менее заметным (рисунок 3, 3-й и 4-й ряд, столбец 4).

Заключение

Таким образом, экспериментально продемонстрирована возможность создания канальных волноводных структур в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле BSO на основе темного нечетного пучка. Показано влияние внешнего электрического поля на распространение одномерного темного пучка, сформированного с помощью фазового транспаранта, в кубическом оптически активном фоторефрактивном пьезокристалле BSO толщиной 10 мм. Установлено, что учет пьезоэлектрического эффекта при численном моделировании приводит к лучшему соответствию экспериментальных и теоретических результатов исследования особенностей распространения темного нечетного пучка в кристалле BSO.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Waveguides induced by photorefractive screening solitons* / M. Shih [et al.] // J. Opt. Soc. Am. B. – 1997. – Vol. 14, № 11. – P. 3091–3101.
2. *Surface dark screening solitons* / W.Q. Chen [et al.] // Opt. Lett. – 2011. – Vol. 36, № 19. – P. 3801–3803.
3. *Dynamics of dark solitons in a trapped superfluid fermi gas* / R.G. Scott [et al.] // J. Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106, № 18. – P. 185301–185305.
4. *Кившарь, Ю.С.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал ; пер. с англ. под ред. Н.Н. Розанова. – М. : Физматлит, 2005. – 648 с.
5. *Dynamics of incoherent bright and dark self-trapped beams and their coherence properties in photorefractive crystals* / T.N. Coskun [et al.] // Opt. Lett. – 1998. – Vol. 23, № 6. – P. 418–420.

6. *Self-trapping of dark incoherent light beams* / Z. Chen [et al.] // Science. – 1998. – Vol. 280. – P. 889–892.
 7. *(1+1)-Dimension dark spatial solitons in photorefractive Bi₁₂TiO₂₀ crystal* / M.D. Iturbe Castillo [et al.] // Opt. Commun. – 1995. – Vol. 118, № 5–6. – P. 515–519.
 8. *High order dark spatial solitons in photorefractive Bi₁₂TiO₂₀ crystal* / M.M. Mendez Otero [et al.] // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 193, № 2. – P. 277–282.
 9. *Адаптивная интерферометрия, использующая динамические отражательные голограммы в кубических фоторефрактивных кристаллах* / А.А. Колегов [и др.] // Квантовая электроника. – 2011. – Т. 41, № 9. – С. 847–852.
 10. *Fast photogalvanic response of a Bi₁₂SiO₂₀ crystal* / R.V. Romashko [et al.] // Opt. Express. – 2010. – Vol. 18, № 26. – P. 27142–27154.
 11. *Петров, М.П.* Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – СПб.: Наука, 1992. – 320 с.
 12. *Шепелевич, В.В.* О голографических решетках в гиротропных средах / В.В. Шепелевич // Письма в ЖТФ. – 1981. – Т. 7, № 23. – С. 1380–1384.
 13. *Dark incoherent soliton splitting in biased photorefractive-photovoltaic crystals* / K. Lu [et al.] // Opt. Commun. – 2009. – Vol. 282. – P. 3335–3338.
 14. *Распространение одномерного темного пучка в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле* / Ж.В. Колядко [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2013. – Т. 39, № 22. – С. 40–45.
 15. *Liu, S.* (2+1)-Dimensional fundamental spatial dark soliton / S. Liu, W. Wang, J. Xu // Appl. Phys. Lett. – 1995. – Vol. 66, № 6. – P. 665–666.
 16. *Sequential formation of multiple dark photorefractive spatial solitons: experiments and theory* / Z. Chen [et al.] // J. Opt. Soc. Am. B. – 1997. – Vol. 14, № 6. – P. 1407–1417.
 17. *Влияние пьезоэффекта на процессы записи и восстановления голограмм в фоторефрактивных кристаллах* / А.А. Изванов [и др.] // Автометрия. – 1986. – № 2. – С. 79–84.
 18. *Степанов, С.И.* Фотоупругий вклад в фоторефрактивный эффект в кубических кристаллах / С.И. Степанов, С.М. Шандаров, Н.Д. Хатьков // ФТТ. – 1987. – Т. 29, № 10. – С. 3054 – 3058.
 19. *Шандаров, С.М.* Измерение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных пьезоэлектрических кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С.М. Шандаров, В.В. Шепелевич, Н.Д. Хатьков // Оптика и спектроскопия. – 1991. – Т. 70, № 5. – С. 1068–1073.
 20. *Shepelevich, V.V.* Light diffraction by holographic gratings in optically active photorefractive piezocrystals / V.V. Shepelevich, S.M. Shandarov, A.E. Mandel // Ferroelectrics. – 1990. – Vol. 110. – P. 235–249.
 21. *Solitonlike propagation in photorefractive crystals with large optical activity and absorption* / E. Fazio [et al.] // Physical Review E. – 2002. – Vol. 66. – P. 016605-1–016605-11.
 22. *Самовоздействие световых пучков в кристаллах силенитов среза (112)* / О.А. Кашин [и др.] // Известия РАН. Серия физическая. – 2006. – Т. 70, № 12. – С. 1748–1751.
 23. *Влияние оптической активности на самоискривление светового пучка в кубических фоторефрактивных кристаллах во внешнем знакопеременном электрическом поле* / О.А. Кашин [и др.] // Известия Вузов. Физика. – 2004. – Т. 47, № 7. – С. 26–32.
 24. *Photorefractive two-beam coupling characterization of a barium-calcium titanate crystal* / S. Bernhardt [et al.] // Appl. Phys. B. – 2000. – Vol. 70. – P. 789–795.
 25. *Влияние оптической активности на самофокусировку световых пучков в фоторефрактивных кристаллах* / В.В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2003. – Т. 33, № 5. – С. 446–450.
 26. *Effect of natural optical activity on the propagation of photorefractive solitons* / W. Krolikowski [et al.] // Opt. Commun. – 1996. – Vol. 132. – P. 179–189.
- Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант на выполнение научно-исследовательской работы «Тёмные пространственные солитоны в фоторефрактивных кристаллах», грант Государственной комплексной программы научных исследований «Электроника и фотоника», задание «Фотоника 2.2.09»), а также БРФФИ, проект № Ф12Р-222 и РФФИ (проект № 12-02-90038-Бел_а).*

Поступила в редакцию 08.11.13

УДК 621.891

ВИРТУАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ЭВОЛЮЦИИ КВАНТОВЫХ ТРИБОСИСТЕМ

Д.Н. Любимов¹, К.Н. Долгополов¹, В.А. Гольдаде²

¹Инжиниринговый центр «ЛИК», Сургут, Россия

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

VIRTUAL STATES IN EVOLUTION OF QUANTUM TRIBOSYSTEMS

D.N. Lubimov¹, K.N. Dolgoplov¹, V.A. Goldade²

¹«Engineering center L&Co» Ltd, Surgut, Russia

²F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Аналитически исследована принципиальная возможность возникновения виртуальных состояний вещества, вовлеченного во frictionный процесс. Теоретически описаны квантовые механизмы развития виртуальных состояний.

Ключевые слова: волновая функция, декогеренция, квазичастица, виртуальность, трибоны.

The principal possibility of occurrence of virtual states of the substance involved in frictional process was analytically investigated. Quantum mechanisms of virtual states development were theoretically described.

Keywords: wave function, decoherence, quasi-particle, virtuality, tribones.

Введение

В работе [1] было высказано предположение о том, что в микропроцессах, протекающих при трении, возможны обратновременные переходы, замедление времени и другие процессы, определяющие фундаментальные механизмы эволюции трибосистем. В основу этого предположения был положен известный из термодинамических моделей трения факт отрицательного прироста энтропии на определенных этапах функционирования трибосистемы [2]. В фундаментальных физических концепциях энтропия рассматривается как вектор, характеризующий направление течения времени из прошлого в будущее [3], поэтому логично предположить, что область трибосистемы с отрицательным приростом энтропии имеет иное направление вектора времени. Подобное предположение относит нас к идеям нобелевских лауреатов П. Дирака и Р. Фейнмана, в работах которых по квантовой электродинамике физические системы с иным течением времени связаны с виртуальными состояниями материи и вполне реальны [4], [5].

Частицы, находящиеся в виртуальном состоянии, можно рассматривать как объекты, возникающие в промежуточных фазах процессов перехода и взаимодействия частиц. Виртуальные частицы обладают тем же набором квантовых чисел, что и «обычные» частицы, но в отличие от «обычных» у них отсутствует связь между энергией, импульсом и массой, задаваемая уравнением релятивистской динамики (уравнением массовой поверхности):

$$W^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4,$$

где W , p , m – соответственно энергия, импульс и масса частицы, c – скорость света. Иными словами в фазовом энергетическом пространстве виртуальные частицы оказываются вне массовой поверхности, что наделяет их отрицательными или даже мнимыми массами [6]. Из виртуальных частиц состоит физический вакуум – одна из форм существования материи, представляющая собой состояние квантового поля с наименьшей энергией. Теоретическая модель физического вакуума (теория дырок Дирака), предложенная П. Дираком в 1930 г. для устранения трудностей релятивистской квантовой теории электрона, привела к существованию античастиц, процессов рождения и аннигиляции пар [7].

Введение понятия о виртуальной области эволюции узла трения, приведенное в работе [1], позволило рассмотреть узел трения как консервативную систему открытого типа, для описания которой можно корректно применить уравнение энергетического баланса. Глубокого же исследования собственно виртуальных состояний трибосистемы проведено не было, несмотря на то, что этот вопрос важен для понимания квантово-механической природы трения [8]. В рамках общей концепции эволюции трибосистемы, исходя из квантовых представлений о нелокально-информационных первосостояниях, из которых в процессе декогеренции рождаются материальные формы привычных для нас физических тел, составляющих картину объективной реальности, проблема присутствия виртуальных состояний оказывается первостепенной [9]–[11]. (Декогеренция – процесс нарушения когерентности,

вызываемый взаимодействием квантово-механической системы с окружающей средой посредством необратимого, с точки зрения термодинамики, процесса. Во время протекания этого процесса у самой системы появляются классические черты, которые соответствуют информации, имеющейся в окружающей среде. То есть система смешивается или запутывается с окружающей средой. Теория декогеренции имеет важное следствие: для макросостояния предсказания квантовой теории практически совпадают с предсказаниями классической теории.) В соответствии с информационными моделями квантовых систем, физические объекты, возникающие в результате декогеренции, уже «содержатся» как отдельные подпространства многомерного пространства Гильберта в исходной квантово-нелокальной системе. Известный российский физик-теоретик С.И. Доронин сравнивал их с непроявленными изображениями на необработанной фотопленке [10]. Трибосистема, в ее привычном для наблюдателя виде, проявляется как результат декогеренции, обусловленной взаимодействием исходного информационного поля и измерительного прибора (в частности, трибометра).

Цель настоящей работы – теоретическое исследование виртуальных состояний трибосистемы, являющихся важной составляющей квантового процесса эволюции систем трения, который в конечном итоге определяет выходные (классические) параметры трибосопряжения.

1 Нелокальные формы виртуальных состояний

Для более детального теоретического исследования явлений декогеренции в квантовой трибосистеме рассмотрим коммутатор обобщенной координаты q и гамильтониана H , в котором устанавливается связь между важнейшими характеристиками физических систем: координатой, энергией и импульсом [12], [13]:

$$[qH] = qH - Hq = \frac{i\hbar}{m} p, \quad (1.1)$$

где p – оператор импульса, \hbar – постоянная Планка, m – масса системы, i – мнимая единица.

Из квантовой динамики известно уравнение [13]:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[pH]. \quad (1.2)$$

Так как величины, входящие в коммутатор (1.2), являются интегралами движения, то первообразная от производной импульса p может рассматриваться как линейная функция от времени t . Если величину этой первообразной отнести к единице времени t , объединяя при этом соотношения (1.1) и (1.2), то с точностью до постоянной можно записать:

$$[qH] = m^{-1}[pH], \quad (1.3)$$

что позволяет упростить вид получаемого выражения для физической сущности материи, представленной в соотношениях (1.1) и (1.3) величиной m , которая по классической привычке именуется массой. Используя матричный вид операторов H , p , q [13], можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} Hp &= \begin{pmatrix} 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ 3i/2 & 0 & -3i/2 & 0 \\ 0 & 5i/3 & 0 & -5i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 7\sqrt{3}i/2 & 0 \end{pmatrix}, \\ pH &= \begin{pmatrix} 0 & -3i/2 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & -5i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7i/2 \\ 0 & 0 & 5\sqrt{3}i/2 & 0 \end{pmatrix}, \\ Hq &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5/\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 7\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}, \\ qH &= \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 0 & 7\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 5\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Соответственно коммутаторы в матричной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} [pH] &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & -2i/5 & 0 \\ 0 & -5i/3 & 0 & -\sqrt{2}i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \\ [qH] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в уравнение (1.3) получим:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= m^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & -2i/5 & 0 \\ 0 & -5i/3 & 0 & -\sqrt{2}i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из соотношения (1.6) видно, что параметр m , который характеризует состояние трибосистемы в нелокальном состоянии, оказывается мнимой величиной, что свидетельствует о не вещественной природе материи, находящейся в

квантово-нелокальном состоянии физической системы до ее декогеренции. Рассматривая матричное уравнение (1.6), для упрощения математической формы его записи, не содержащей числовых коэффициентов, пренебрежем «некоторыми арифметическими шероховатостями» не влияющими на физический смысл полученных уравнений: будем считать, что величина m^{-1} равна минус мнимой единице ($-i$).

Полагая, что волновая функция ψ , описывающая трибосистему, имеет вид плоской волны [8], а соответствующая энергия такого квантового объекта равна $W = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ [13], найдем, что обратная масса равна:

$$m^{-1} = \frac{2W}{\hbar^2 \kappa^2}, \quad (1.7)$$

где κ – волновое число, $\kappa \sim \lambda^{-1}$.

В соответствии с известной формулой Планка – Эйнштейна $W = \hbar\omega = \frac{\hbar c}{\lambda}$, соотношение (1.7) преобразуется к виду:

$$m^{-1} = \frac{2c}{\hbar\kappa}. \quad (1.8)$$

Величину волновой функции ψ в плоско-волновом приближении можно записать в виде $\frac{\psi_0}{\psi} = e^{ix}$, из которого получается следующее выражение для волнового числа κ :

$$\kappa = \frac{1}{ix} \ln \frac{\psi_0}{\psi}, \quad (1.9)$$

где x – декартова координата квантовой частицы.

С учетом (1.9) соотношение (1.8) перепишем в виде:

$$m^{-1} = i \frac{2c}{\hbar} \left(\ln \frac{\psi_0}{\psi} \right)^{-1} x. \quad (1.10)$$

Если учесть принятое допущение о равенстве $m^{-1} = -i$, то из формулы (1.10) можно получить новый вид выражения для волновой функции ψ :

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{-2c}{\hbar} x}. \quad (1.11)$$

Рассмотрение формулы (1.11) показывает, что показатель степени экспоненты, характеризующий «затухание» колебаний функции ψ , состоит из фундаментальных физических постоянных и достигает огромных значений, порядка 10^{42} . Это говорит о планковских временах и расстояниях, на которых это затухание наблюдается [5]. Последнее свидетельствует, что нелокальные формы виртуальных состояний не могут существовать вне многомерного гильбертова пространства (его локализации) и полностью исчезают в результате декогеренции. В данном случае это относится и к исходному нелокальному шестнадцатимерному (исходя из вида матричного уравнения (1.6)) состоянию трибосистемы, которая с

планковской быстротой исчезает при декогеренции, превращаясь в вещественные формы, локализованные в четырехмерном пространственно-временном континууме Минковского [1], [5].

2 Трибоны

Квантовая модель трения на вещественном (постдекогерентном) уровне развития трибосистемы интерпретирует фрикционное взаимодействие как обмен поверхностями трения квазичастицами – «трибонами», т. е. квантами трения [8], [14], [15]. В этой модели фрикционное взаимодействие сводится к взаимному превращению квазичастиц и их влиянию друг на друга: трибонов, поверхностных плазмонов и фононов. Последние могут быть рассмотрены как низкоэнергетические трибоны. В соответствии с работами [9], [16] трибоны являются возбуждениями материалов поверхностей трения, проявляемых в форме отдельных квазичастиц, генерируемых парами в контакте шероховатостей поверхностей. Число трибонов, рожденных при трении, определяется по формуле [8], [15]:

$$N_\tau = 5 \frac{P_\phi l_\tau}{HB l_0}, \quad (2.1)$$

где P_ϕ – фактическое давление, HB – твердость материала трения, l_τ и l_0 – соответственно путь трения и линейный размер истираемого образца.

Энергия отдельных трибонов может быть оценена по известной формуле Планка-Эйнштейна, использованной в настоящей работе при получении формулы (1.8). Энергия, переносимая потоком трибонов равна:

$$W_\tau = 5\hbar\omega_\tau \frac{P_\phi l_\tau}{HB l_0}, \quad (2.2)$$

где ω_τ – частота трибона.

Представление процесса трения в форме взаимодействия и превращения квазичастиц существенно упрощает рассмотрение фрикционного взаимодействия, сводя его к схеме, изображаемой по аналогии с диаграммой Фейнмана [17] (рисунок 2.1).

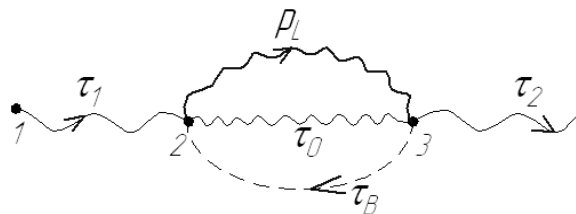


Рисунок 2.1 – Диаграмма изменения характера «сил» при эволюции трибосистемы

Соотношения (2.1) и (2.2) описывают генерирование трибонов в результате непосредственного механического контакта (процессы в вершинах 1 и 3 на рисунке 2.1), но они мало пригодны для анализа физической картины трибопроцессов в вершине 2, поскольку здесь существ-

вует виртуальная область эволюции трибосистемы – наиболее сложная в теоретическом плане область эволюционного фазового пространства трибосистемы в ее постдекогерентном развитии.

Для описания такой виртуальной области необходимо ввести сразу три группы квазичастиц (рисунок 2.1): обычные трибоны τ_0 , описываемые формулами (2.1) и (2.2), виртуальные трибоны τ_b , движущиеся во времени вспять и обозначенные поэтому в соответствии с общепринятыми требованиями пунктирной линией, а также плазмоны P , характеризующие возбужденные состояния вещества поверхностей трения. Энергия виртуального состояния трибосистемы определяется разностью энергий фрикционного взаимодействия в вершинах 1 и 3 на рисунке 2.1 [1], [8]:

$$W_b = N\mathcal{G}(f_1t_1 - f_3t_3) = \hbar\omega_\tau(N_1 - N_3). \quad (2.3)$$

где W_b – энергия виртуальной области трибосистемы, N – нагрузка, \mathcal{G} – скорость скольжения, f_1, f_3 – коэффициенты трения, t_1, t_3 – время, ω_τ – частота трибонов, N_1, N_3 – количество трибонов, индексы 1 и 3 характеризуют соответственно приработку и установившееся трение.

В свою очередь, величину W_b можно выразить через соответствующие энергии квазичастиц:

$$W_b = N_p\varepsilon_p + N_\tau\varepsilon_\tau - N_b\varepsilon_b. \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_p, \varepsilon_\tau, \varepsilon_b$ – соответственно энергии плазмона, трибона и виртуального трибона.

Так как трибоны τ_0 в виртуальной области обладают той же частотой ω_τ , что и трибоны в вершинах 1 и 3 (рисунок 2.1), то соотношение (2.4) можно преобразовать к виду:

$$\hbar\omega_\tau(N_1 - N_3 - N_\tau) = N_p\varepsilon_p - N_b\varepsilon_b,$$

или

$$\omega_\tau(N_1 - N_3 - N_\tau) = N_p\omega_p - N_b\omega_b. \quad (2.5)$$

Величина, стоящая в скобках левой части соотношений (2.5) определяет число трибонов, идущих на активацию виртуального пространства. Энергия этих трибонов затрачивается на возбуждение (активацию) вещества поверхностей трения до состояния трибоплазмы [18], [19]. При этом в соответствии с энергетическим соотношением, выведенным известным украинским трибологом Б.И. Костецким [20], считаем, что число трибонов такого сорта составляет около 1% от N_1 . Обозначим эту величину через N_a . Выведем соотношения между частотами трибонов ω_τ, ω_b и частотой плазмонов ω_p . В работах [8], [15], [19] значения частот ω_τ и ω_p по порядку величины были оценены соответственно в 10^{19} и 10^7 Гц.

Оценка частот виртуальных трибонов ω_b требует дополнительных сведений. На основании признанных представлений о виртуальных состояниях вещества, базирующихся на теории физического вакуума Дирака, виртуальные

частицы обладают отрицательной массой. Инерционные свойства квазичастиц задаются специальным параметром – эффективной массой, которая в зависимости от вариаций взаимодействия частиц, входящих в систему «квазичастица – внешняя среда», вполне может иметь отрицательные значения [21]. В твердых телах отрицательный знак эффективной массы связан с сингулярностью (особенностями) Ван Хова [22].

Особенность Ван Хова определяется плотностью состояний квазичастиц как функции их энергии $g(W)$, связанной со скоростью квазичастицы \mathcal{G} соотношением:

$$g(W) = \frac{1}{8\pi^2} \int_s \frac{ds}{\mathcal{G}}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{G} = \frac{\partial W}{\partial p}.$$

где W, p – энергия и импульс квазичастицы, а интегрирование ведется по изоэнергетическим поверхностям гамильтоновских фазовых пространств s .

Сингулярности Ван Хова характеризуют обращение скоростей \mathcal{G} в ноль в особых седловых точках фазового пространства. В районе сингулярностей Ван Хова (точки s_2 -типа) в соответствии с известным в кристаллографии уравнением Лауэ [21, с. 83] можно записать:

$$2\kappa G + G^2 = 0, \quad (2.7)$$

где κ – волновое число, G – вектор обратной решетки.

В формуле (2.7) для простоты анализа вместо G^2 можно использовать «минус» G^2 [21, с. 84], что не меняет сущности явления дифракции, но позволяет переписать уравнение (2.7) в более удобном виде:

$$2\kappa G = G^2,$$

или

$$\kappa \left(\frac{1}{2} G \right) = \left(\frac{1}{2} G \right)^2. \quad (2.8)$$

Тогда из формулы (2.8) можно найти значение волнового числа в области обратного кристаллического пространства, характеризующего отрицательной эффективной массой:

$$\kappa = \frac{1}{2} G. \quad (2.9)$$

Если учесть, что импульс квазичастицы определяется с точностью до величины вектора обратной решетки, то его значения лежат в интервале от 0 до $2\pi/d$, где d – постоянная решетки. Так как волновое число равняется λ^{-1} , то длина дебройлевской волны виртуального трибона составляет величину $\lambda = a/\pi$, а частота $\nu = c\pi/a$, где a – структурно-метрический параметр. Поскольку виртуальная область трибосистемы связана с переходом материалов поверхностей трения в сверхвозбужденную фазу – трибоплазму, то структурно-метрический параметр a целесообразно

связать не с постоянной решетки d , а с дебаевским радиусом R_d [19]. В подавляющем большинстве случаев $m_{эфф}$ квазичастиц близка к массе электрона [8], [23], следовательно расчет дебройлевской длины волны дает порядок 10^2 м, что соответствует $\omega_b = 10^7$ Гц. Таким образом оказалось, что частоты ω_b и ω_p имеют близкий порядок и могут быть приравнены. Тогда N_b в уравнение (2.5) можно записать в виде:

$$N_b = N_p - \alpha N_a, \quad (2.10)$$

где α – численный коэффициент, много больший единицы ($\alpha \approx 10^{12}$) [1], физический смысл которого определен как соотношение между энергией трибона и плазмона.

Анализ соотношения (2.10) приводит к достаточно неожиданному результату: так как αN_a всегда больше N_p , то число виртуальных трибонов N_b окажется отрицательным. Столь необычный результат согласуется с дираковской теорией физического вакуума, согласно которой возбужденный виртуальный трибон выступает как «дырка» пространства виртуальной подсистемы – физического вакуума. Образующаяся дырка уносит избыточную энергию в форме энтропии, являясь как бы антрибоном в полном соответствии с фейнмановской моделью взаимодействия квантовых частиц. Равенство частот виртуальных трибонов и плазмонов в соответствии с известными соотношениями Планка и Эйнштейна:

$m = \frac{\hbar\omega}{c^2}$, свидетельствует о равенстве масс виртуального трибона и плазмона, что позволяет судить об идентичности их природы. Таким образом, виртуальный трибон является ни чем иным, как низкоэнергетическим плазмоном, находящимся в виртуальном состоянии. Совокупность виртуальных плазмонов составляет физический вакуум трибосистемы.

По определению, данному физическому вакууму П. Дираком, эта субстанция являет собой «бездонное электронное море», но у физического вакуума трибосистемы емкость ограничена, что существенным образом отличает этот виртуальный мир от аналога, «нарисованного» Дираком.

Производя оценку вакуумной емкости «трибосистемы», во-первых, можно переписать уравнение (2.10) с учетом «числа Костецкого», о котором мы упомянули выше:

$$N_p - N_b = 10^{-2} \alpha N_1 = 10^{10} N_1. \quad (2.11)$$

Во-вторых, величины N_p и N_1 также можно связать с «числом Костецкого»: $N_p = 0,01 N_1$, тогда:

$$N_p - N_b = 10^{12} N_p,$$

или

$$-\frac{N_b}{N_p} = 10^{12}. \quad (2.12)$$

Число виртуальных трибонов, как было показано ранее, имеет отрицательный знак, тогда

соотношение (2.12) переписывается как: $N_b = 10^{12} N_p$. Это означает, что на один плазмон приходится 10^{12} виртуальных трибонов, а, следовательно, емкость физического вакуума трибосистемы хотя и велика, но конечна.

Вероятно, наличие виртуальных состояний трибосистем прослеживается и в решении коммутативных соотношений, содержащих гамильтонианы шестнадцатимерной изначальной трибосистемы, находящейся в нелокальном состоянии H_{ij} , и ее материализации в континууме Минковского h_{ij} , коммутаторы которых в соответствии с теоремами квантовой механики равны нулю [13]. Результатом перемножения гамильтонианов выступает матрица (2×4), вида:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Поскольку матричная запись гамильтонианов H_{ij} , и h_{ij} имеет вид [13]:

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

то с точностью до коэффициентов $\frac{1}{2} \hbar \omega$ матрица (2.13), с учетом выражения (2.14), примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

То есть матрицу (2.15), содержащую восемь членов, можно рассматривать как два четырехмерных пространства, одно из которых имеет ненулевую энергию, а, следовательно, положительную массу. «Подвал» этой матрицы, представленный равным нулю детерминантом, может рассматриваться как физический вакуум, который заполнен виртуальными частицами [5]. Подобный вариант структуры пространства трибосистемы можно изобразить посредством световых конусов (рисунок 2.2).

Пространство трибосистемы представляется в виде двух световых конусов, вершины которых расположены в нулевой точке, в которой произошла декогеренция. Вверх от этой точки отображается реальный мир с привычным для наблюдателя направлением времени и растущей энтропией. Под ним – мир виртуальный, для которого в соответствии с идеями Фейнмана наблюдается обратная темпоральность физических процессов, т. е. энтропийное развитие процессов

идет от хаоса к упорядочению, а стрела времени направлена из будущего в прошлое [26]. (*Темпоральность (от англ. temporal – временные особенности) – временная сущность явлений, порожденная динамикой их собственного движения, в отличие от тех временных характеристик, которые определяются отношением движения данного явления к историческим, астрономическим, биологическим, физическим и другим временным координатам [24]. В естественных науках этот термин несет дополнительную, математическую смысловую нагрузку: выражает специфические временные отношения изучаемого объекта [25].*) Возможное существование и взаимодействие этих двух пространств является фундаментальной квантово-механической основой особого поведения энтропии в узлах трения и экспериментально регистрируемого доплеровского сдвига лазерного излучения, проходящего сквозь область фрикционного контакта [27], указывая на определенное изменение в течении собственного времени трибосистемы.

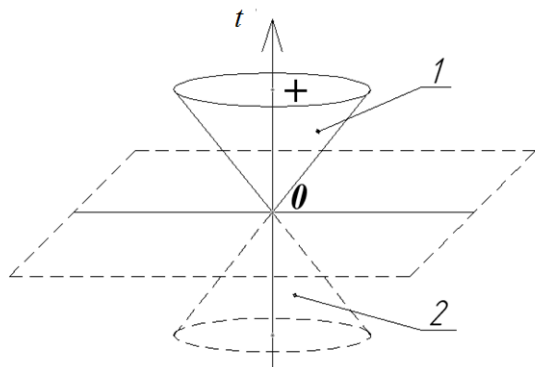


Рисунок 2.2 – Пространство трибосистемы после декогеренции: 1 – реальный мир, 2 – виртуальный мир

Заключение

Таким образом, начальная стадия эволюции трибосистемы может формулироваться языком квантовой теории нелокальных состояний как эффект декогеренции исходной квантово-нелокальной структуры в ее вещественные формы классической («привычной») трибосистемы. Становится очевидной важная роль промежуточных виртуальных состояний вещества, которые напоминают физический вакуум Дирака, но имеют свои специфические черты, в частности, ограниченную емкость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов, Д.Н. Фундаментальные основы эволюции трибосистем / Д.Н. Любимов, К.Н. Долгополов. – Шахты : ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2011. – 95 с.
2. Поляков, С.А. Самоорганизация структуры избирательного переноса / С.А. Поляков // Долговечность трущихся деталей машин : сб. – Вып. 3. – М. : Машиностроение, 1988. – С. 3–27.

3. Чернин, А.Д. Физика времени / А.Д. Чернин. – М. : Наука, 1987. – 226 с.
4. Ширков Д.В. Квантовая электродинамика. / Д.В. Ширков // Физическая энциклопедия ; ред. А.М. Прохоров. – М. : Советская энциклопедия, 1990. – Т. 2. – С. 317–319.
5. Баранников, А.А. Основные концепции в современной физике / А.А. Баранников, А.В. Фирсов. – М. : Высшая школа, 2009. – 349 с.
6. Ширков, Д.В. Виртуальные частицы / Д.В. Ширков // Физическая энциклопедия ; ред. А.М. Прохоров. – М. : Советская энциклопедия, 1988. – Т. 1. – С. 282–283.
7. Дирак, П.А.М. Принципы квантовой механики / П.А.М. Дирак. – М. : Мир, 1979. – 481 с.
8. Любимов, Д.Н. Квантовая трибофизика / Д.Н. Любимов, Л.С. Пинчук, К.Н. Долгополов. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2012. – 294 с.
9. Любимов, Д.Н. Квантовое «разрешение» основного парадокса теории трения / Д.Н. Любимов, Л.С. Пинчук // Вестник Гродненского государственного университета им. Янки Купалы. – 2013, № 3 (158). – С.43–47.
10. Доронин, С.И. Квантовая магия / Библиотека «Исследователь» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ligis.ru/librari/2698.htm>. – Дата доступа : 01.11.13.
11. Баргатин, И.В. Запутанные квантовые состояния атомных систем / И.В. Баргатин, Б.А. Гришанин, В.Н. Заднов // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, № 6. – С. 625–646.
12. Теоретическая физика : в 10 т. – М. : Наука, 1979. – Т.3. Квантовая механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1979. – 423 с.
13. Медведев, Б.В. Начала теоретической физики / Б.В. Медведев. – М. : Наука, 1977. – 496 с.
14. Бершадский Л.И. О самоорганизации и концепции износостойкости трибосистем / Л.И. Бершадский // Трение и износ. – 1992. – Т. 13, № 6. – С. 1076–1094.
15. Любимов, Д.Н. Квантово-корпускулярный механизм фрикционного взаимодействия поверхностей трения / Д.Н. Любимов, К.Н. Долгополов // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2012, №3. – С. 11–14.
16. Фейнман, Р. КЭД – странная теория света и вещества / Р. Фейнман. – М. : Астрель, 2012. – 191 с.
17. Ширков, Д.В. Фейнмана диаграммы / Д.В. Ширков // Физическая энциклопедия ; ред. А.М. Прохоров. – М. : Большая Российская энциклопедия, 1998. – Т. 5. – С. 277–279.
18. Хайнике, Г. Трибохимия / Г. Хайнике. – М. : Мир, 1987. – 635 с.
19. Любимов, Д.Н. Трибофизика / Д.Н. Любимов, Л.С. Пинчук, К.Н. Долгополов. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2011. – 296 с.

-
20. *Костецкий, Б.И.* Поверхностная прочность материалов при трении / Б.И. Костецкий. – Киев : Техника, 1976. – 283 с.
21. *Киттель, Ч.* Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М. : Наука, 1978. – 792 с.
22. *Каганов, М.И.* Ван Хова особенности / М.И. Каганов // Физическая энциклопедия ; ред. А.М. Прохоров. – М. : Советская энциклопедия, 1988. – Т. 1. – С. 241–242.
23. *Ашкрофт, Н.* Физика твердого тела : в 2 т. / Н. Ашкрофт, Н. Мермин. – М. : Мир, 1979. – Т. 1. – 393 с.
24. *Современная западная философия* : словарь ; составители : В.С. Малахов, В.П. Филатов. – М. : Политиздат, 1991. – 414 с.
25. *Пименов, Р.И.* Основы темпорального универсума / Р.И. Пименов. – Сыктывкар : Коми научный центр УрО АН СССР, 1991. – 193 с.
26. *Lyubimov, D.N.* Micromechanisms of Friction and Wear: Introduction to Relativistic Tribology / D.N. Lyubimov, K.N. Dolgoplov, L.S. Pinchuk. – Springer Series in Materials Science. – Berlin : Springer, 2013. – Vol. 176. – 219 p.
27. *Laser Emission Monochromatism Breaking Caused by Friction* / D.N. Lubimov [et al.] // International Journal of Mechanics and Applications. – 2013. – Vol. 3, № A. – P. 8–12.

Поступила в редакцию 12.11.13.

УДК 621.315.592:61

МОРФОЛОГИЯ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ ИЗ ТУГОПЛАВКИХ ОКСИДОВ

А.В. Рогачёв¹, Н.Н. Федосенко¹, Н.Г. Арико², Д.Л. Горбачев¹, А.С. Руденков¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Институт физико-органической химии НАН Беларуси, Минск

MORPHOLOGY AND OPTICAL PROPERTIES OF MULTILAYER REFRACTORY OXIDE COATINGS

A.V. Rogachev¹, N.N. Fedosenko¹, N.G. Ariko², D.L. Gorbachev¹, A.S. Rudenkov¹

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Institute of Physical Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Определены морфологические особенности формирования и оптические свойства многослойных покрытий на основе тугоплавких оксидов SiO₂, ZrO₂, TiO₂, формируемых электронно-лучевым испарением. Проведён анализ спектров поляризации сформированных покрытий и их зависимости от природы материала подложки. Показано, что отношение коэффициентов пропускания *p*-поляризованного и *s*-поляризованного излучения в видимой области максимально при нанесении покрытия на подложку из стекла К-8С (в сравнении с подложками из кварца и полиметилметакрилата). Морфология слоёв покрытий характеризуется низкими значениями шероховатости 1,6...4,1 нм, что определяет перспективность их применения в качестве поляризационных элементов.

Ключевые слова: морфология, поляризатор, покрытие, оптические свойства, коэффициент пропускания.

The morphological features of the formation and optical properties of multilayer coatings based on refractory oxides of SiO₂, ZrO₂, TiO₂, formed by electron beam evaporation, are established. The polarization spectra of the formed coatings and dependence of these spectra on the nature of the substrate material were analyzed. It is shown that the ratio of the transmittance coefficients of *p*-polarized and *s*-polarized radiation in the visible spectral region is maximal when the coating is deposited on the surface made of glass K-8C (in comparison with the substrates made of quartz and polymethylmethacrylate). The morphology of the coatings is characterized by low values of roughness of 1.6...4.1 nm, that determines the prospects of their application as polarization elements.

Keywords: morphology, polarizer, coating, optical properties, transmittance coefficient.

Введение

Многослойные системы из тугоплавких оксидов находят широкое применение в качестве интерференционных поляризационных элементов в лазерной технике, при производстве полупроводниковых светодиодов и специализированных ламп накаливания, а также в производстве бытовой, медицинской и профессиональной фотооптики [1]. В связи с этим актуальным является разработка новых технологических приёмов формирования таких систем и совершенствование их конструкций.

В общем случае поляризаторы служат для разделения падающего на них излучения на отраженный и прошедший пучки, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. В зависимости от конструкции поляризаторы подразделяются на призмные и пластинчатые. Призмные изготавливаются из двух склеенных призм, на гипотенузные грани которых предварительно нанесено интерференционное покрытие [1]–[3]. Катетные грани призм при этом обычно просветляют. Интерференционное поляризующее покрытие представляет собой двухкомпонентную

систему чередующихся слоёв с высоким и низким показателями преломления [2].

Принцип работы поляризатора основан на том, что излучение, отражённое под углом от границы раздела двух сред частично поляризуется. Степень поляризации в этом случае зависит от угла падения света и имеется угол, при котором степень поляризации достигает своего максимального значения – угол Брюстера [2].

Пластинчатый интерференционный поляризатор представляет собой прозрачную пластинку с нанесённым на нее интерференционным покрытием. Поляризационный эффект при этом достигается за счет разницы в ширине области высокого отражения различных поляризованных составляющих света при определенных углах отражения. При такой конструкции поляризатора можно также добиться высокой степени поляризации, но в более узком спектральном диапазоне по сравнению с призмными поляризаторами.

Цель данной работы – изучение морфологии многослойных покрытий из тугоплавких оксидов, формируемых электронно-лучевым испарением, определение их оптических свойств, зависимости от природы материала подложки.

1 Методика эксперимента

Формирование интерференционных многослойных покрытий осуществлялось с помощью установки вакуумного напыления ВУ-1А, оснащенной источником электронно-лучевого испарения УЭЛИ-1 и комплексом фотометрического контроля толщины СФКТ-751В. Источник электронно-лучевого испарения УЭЛИ-1 специально предназначен для испарения в вакууме тугоплавких окислов, полупроводниковых материалов и металлов с максимальным ускоряющим напряжением 12 кВ и максимальным током нагрузки 500 мА. Структурная схема установки электронно-лучевого испарения представлена на рисунке 1.1.

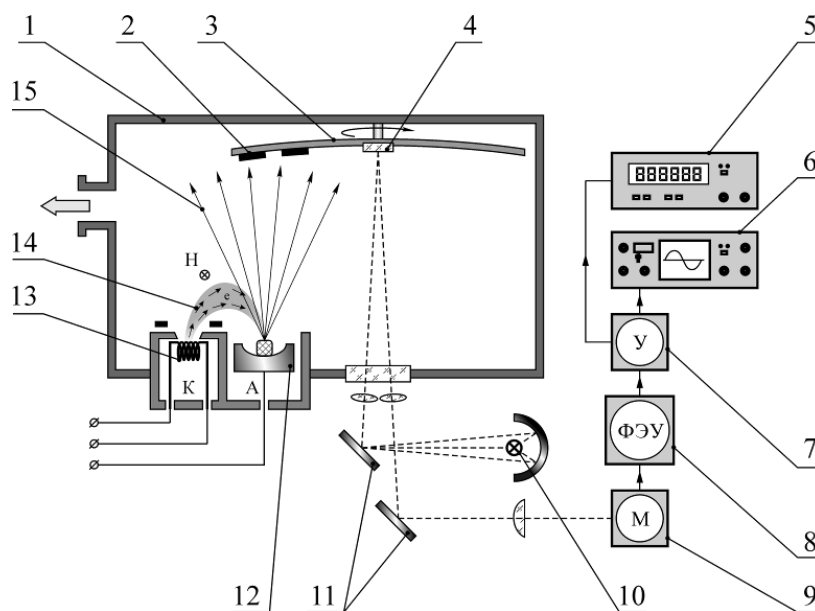
Нанесение покрытий на подложки 2, закреплённые на вращающемся предметном столе 3, осуществлялось испарением мишеней, помещённых в анод электронно-лучевого испарителя 12 в вакууме при остаточном давлении 7×10^{-3} Па. Распыление мишеней из различных материалов осуществлялось в едином технологическом цикле с помощью отклонения электронного луча 14, исходящего из катода 13 и фокусировки его на другую мишень с помощью магнитного поля. Распылённое вещество 15, испаряясь, попадает также на образец-свидетель 4, который используется для фотометрического контроля толщины наносимых слоёв.

Принцип измерения толщины основан на фотоэлектрическом методе регистрации лучистого потока, пропущенного через напыляемый

образец или отраженного от него. При этом об оптической толщине напыляемого материала можно судить по изменению коэффициента пропускания или отражения образца. В эксперименте использована схема измерения оптической толщины покрытий при отражении светового потока от образца-свидетеля. Световой поток от лампы накаливания 10 падает на плоское зеркало 11, направляющее его на плоскость образца-свидетеля 4, геометрически расположенного на том же расстоянии от распыляемой мишени, что и подложки 2. Излучение, отразившись от образца-свидетеля, попадает на поворотное зеркало 11 и далее, через фокусирующую линзу, на щель монохроматора 9. После выходной щели излучение попадает непосредственно на катод фотоэлектрического умножителя, где сигнал преобразуется в электрический и попадает далее, через усилитель 7, на осциллограф 6 и вольтметр с цифровой индикацией 5. В ходе напыления слоёв с помощью осциллографа и вольтметра регистрируются максимумы и минимумы отражённого от образца-свидетеля сигнала. Экстремальным значениям коэффициента отражения R соответствует оптическая толщина слоя nd (где d – геометрическая толщина пленки, кратная значениям:

$$nd = \frac{\lambda}{4} \cdot m, \quad m = 1, 2, \dots$$

$nd = m \cdot \lambda$; $m = 1, 2, 3, \dots$, где λ – длина волны излучения; m – число слоёв.



1 – вакуумная камера; 2 – подложки; 3 – вращающаяся оснастка; 4 – образец-свидетель;
5 – цифровой вольтметр; 6 – осциллограф; 7 – электронный усилитель; 8 – фотоэлектронный усилитель;
9 – монохроматор; 10 – лампа накаливания; 11 – плоские зеркала; 12 – анод; 13 – катод;
14 – электронный луч; 15 – поток распылённого вещества

Рисунок 1.1 – Схема установки ВУ-1А

В качестве испаряемых веществ использовались мишени ZrO_2 , SiO_2 и TiO_2 . Объектом исследования явились пластинчатые поляризаторы в виде многослойных покрытий из 35 слоев оксида титана (TiO_2 , $n = 2,35$), оксида циркония (ZrO_2 , $n = 2,0$) и оксида кремния (SiO_2 , $n = 1,45$), нанесенные на различные подложки (рисунок 1.2). В качестве материалов подложек использовались пластины монокристаллического кремния, кварца, полиметилметакрилата и оптического стекла К-8С.

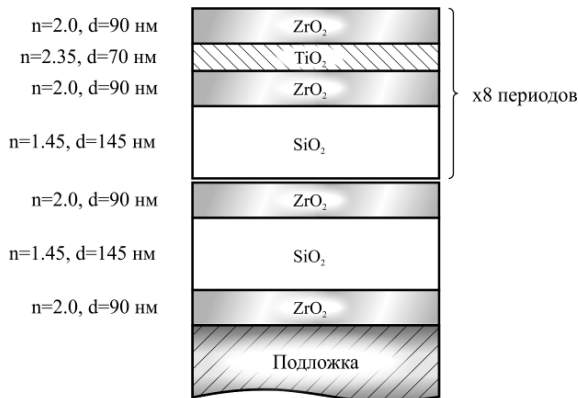


Рисунок 1.2 – Структура многослойного поляризационного покрытия

Конструкция покрытия рассчитывалась по методикам, приведённым в литературных источниках. Периодичность слоев: $(ZrO_2) (SiO_2) (ZrO_2) [(SiO_2) (ZrO_2) (TiO_2) (ZrO_2)]_8$. Толщина слоев: 70 нм (TiO_2), 145 нм (SiO_2), 90 нм (ZrO_2). В таблице 1.1 приведены технологические параметры электронно-лучевого испарения слоев.

Таблица 1.1 – Технологические параметры электронно-лучевого испарения

Состав покрытия	Ускоряющее напряжение, кВ	Ток накала катода, А	Ток эмиссии, мА
SiO_2	6	18,0	80
TiO_2	6	20,0	75
ZrO_2	6	21,0	90

Спектры поглощения многослойных покрытий в области 200 – 1100 нм регистрировали на спектрометре Maya Pro 2000, снабженным Wire-Grid polarizer UBB01A (Moxtek, США). Источником света служила дейтериевая лампа DT-MiNi-2-GS.

Методика измерения поляризации основана на эффекте поляризации света многослойным покрытием, пропуская p -поляризованный (вектор напряжённости электрического поля параллелен плоскости падения) и отражая s -поляризованный (вектор напряжённости электрического поля перпендикулярен плоскости падения) луч.

Помещая образец под требуемым углом к падающему на него свету разной поляризации, измеряли максимальное и минимальное пропускание и отражение соответственно p - и s -поляризованных лучей. Степень поляризации рассчитывали по формуле:

$$СП = (T_{max} - T_{min}) / (T_{max} + T_{min}) \cdot 100 \%$$

Спектры поглощения снимались при падении зондирующего излучения под углом 70° .

Изучение морфологии слоев проводилось методом атомно-силовой микроскопии с использованием сканирующего зондового микроскопа «Solver P47 PRO» в полуконтактном режиме. В качестве зондов использовались кремниевые кантилеверы серии NSG-11 с силовой константой 5,5 Н/м и резонансной частотой 220 кГц. Количественная обработка АСМ-изображения сформированных покрытий осуществлялась с помощью программ Nova и Gwyddion.

2 Результаты эксперимента

На рисунках 2.1–2.3 приведены зависимости коэффициента пропускания T_s -поляризованного и T_p -поляризованного излучения на различных подложках. Из спектров видно, что покрытие частично поляризует проходящее излучение. В коротковолновой части спектра интенсивность p -поляризованного излучения преобладает, а в диапазоне от 550 до 1100 нм степень поляризации значительно ослабевает и тип поляризации меняется несколько раз с p -поляризованного к s -поляризованному и обратно.

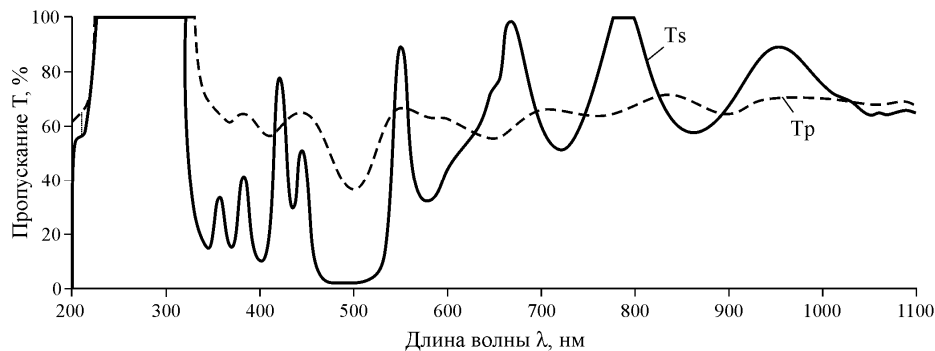


Рисунок 2.1 – Зависимость коэффициента пропускания s -поляризованного (T_s) и p -поляризованного излучения (T_p) образцов 35-слойного покрытия на подложке из кварца

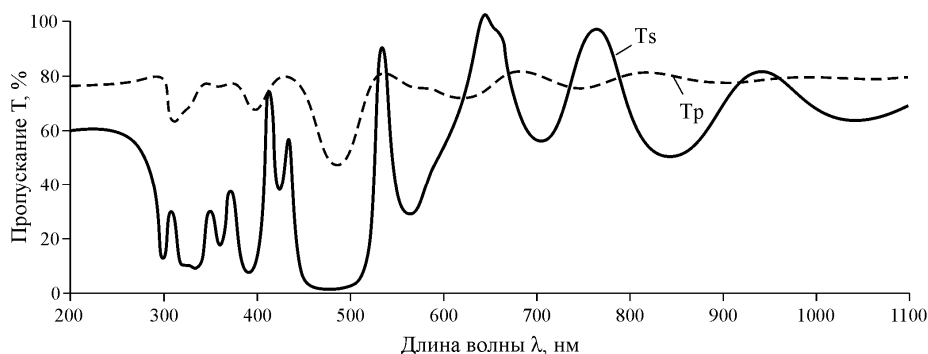


Рисунок 2.2 – Зависимость коэффициента пропускания s -поляризованного (T_s) и p -поляризованного излучения (T_p) образцов 35-слойного покрытия на подложке из полиметилметакрилата

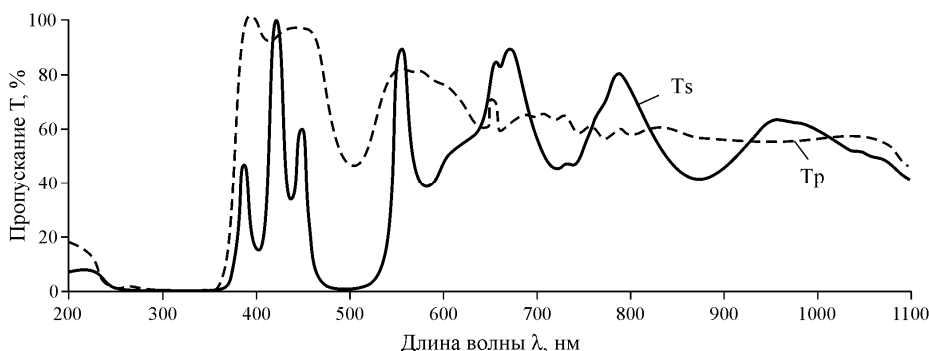


Рисунок 2.3 – Зависимость коэффициента пропускания s -поляризованного (T_s) и p -поляризованного излучения (T_p) образцов 35-слойного покрытия на подложке из стекла К-8С

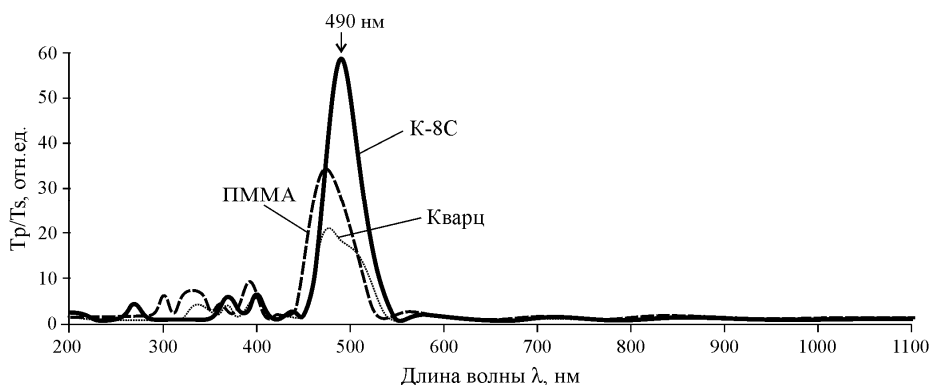


Рисунок 2.4 – Зависимость отношения коэффициента пропускания p -поляризованного (T_p) к коэффициенту пропускания s -поляризованного излучения (T_s) от длины волны

Проведен расчёт отношения коэффициентов пропускания T_p / T_s от длины волны падающего излучения (рисунок 2.4). Видно, что максимум значения T_p / T_s наблюдается у покрытия, нанесённого на подложку из оптического стекла К-8С и составляет 59 отн. ед. при длине волны 490 нм. Почти в два раза меньше данное значение у покрытия на подложке из полиметилметакрилата – 32 отн. ед. при длине волны 480 нм, и наименьшее значение имеет покрытие на подложке из кварца – 21 отн. ед. при длине волны 480 нм.

Отметим, что полученные экспериментальные данные не совпадают с расчётными: по расчёту максимум значения T_p / T_s должен наблюдаться при длине волны 625 нм и иметь значение,

равное 100 отн. ед. Данное несовпадение можно объяснить различием значений показателя преломления слоев, принятых в расчетной модели, и значений полученных слоев. Второй возможной причиной, влияющей, прежде всего на значение максимума коэффициента пропускания поляризованного излучения, является рассеяние света вследствие морфологической и структурной неоднородности покрытия.

С целью изучения влияния неровностей поверхности на оптические характеристики многослойных систем, изучена морфология синтезируемых покрытий. Численные результаты исследования топологии покрытий методом атомно-силовой микроскопии представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Топологические параметры поверхности покрытий

Тип покрытия	Среднее значение по высоте, Z нм	Шероховатость, Ra нм
SiO ₂	6,0	1,88
TiO ₂	6,7	1,6
ZrO ₂	13,3	4,1
35-слойное	8,4	1,92

Покрытие TiO₂ имеет наиболее гладкую поверхность, формируемую частицами со средним диаметром у основания около 63 нм (рисунок 2.5). Данное покрытие характеризуется наименьшим значением шероховатости.

Поверхность покрытия SiO₂ состоит из частиц со средним диаметром у основания частиц около 52 нм (рисунок 2.6). Для данного покрытия следует отметить упорядоченное линейное формирование частиц, обусловленных, видимо, образованием крупных зёрен на дефектах подложки.

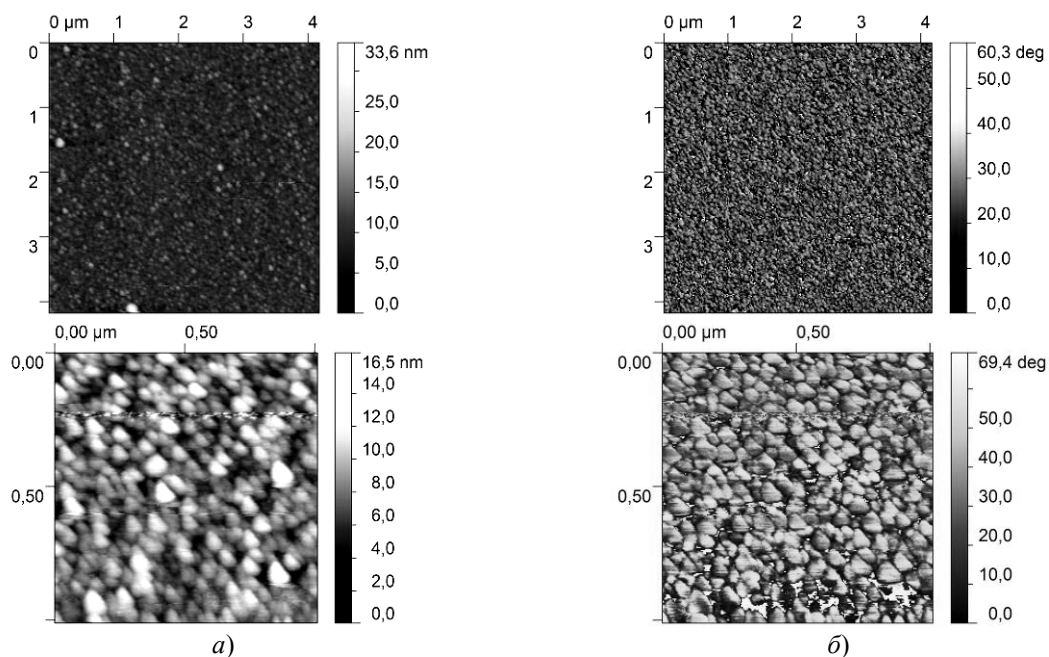


Рисунок 2.5 – Изображение поверхности покрытия TiO₂, полученное методом атомно-силовой микроскопии: а) – топография; б) – фазовый контраст

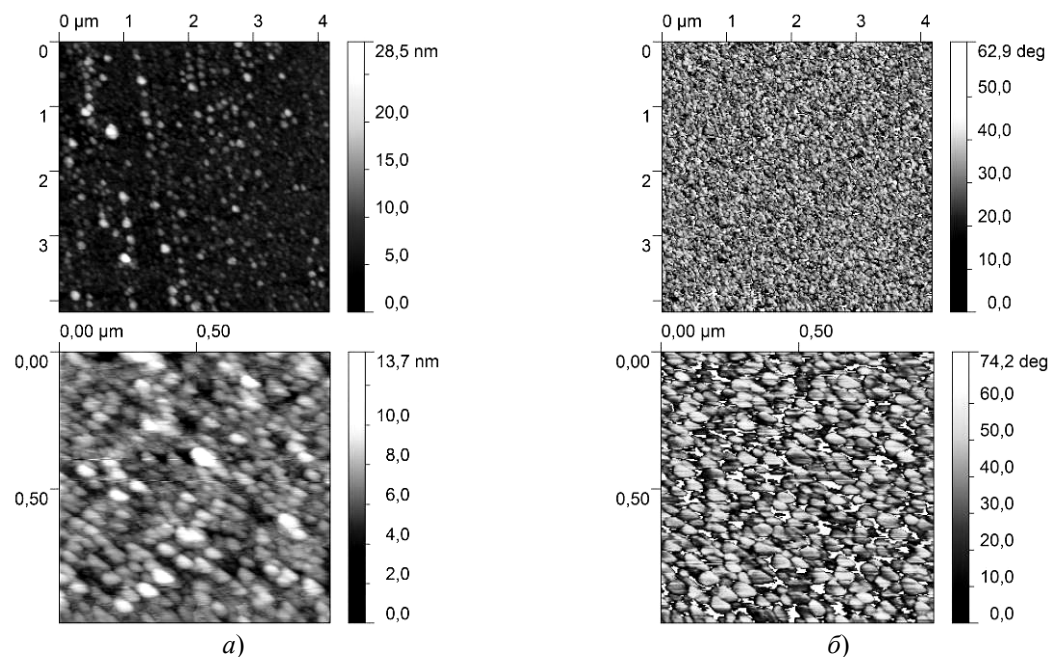


Рисунок 2.6 – Изображение поверхности покрытия SiO₂, полученное методом атомно-силовой микроскопии: а) – топография; б) – фазовый контраст

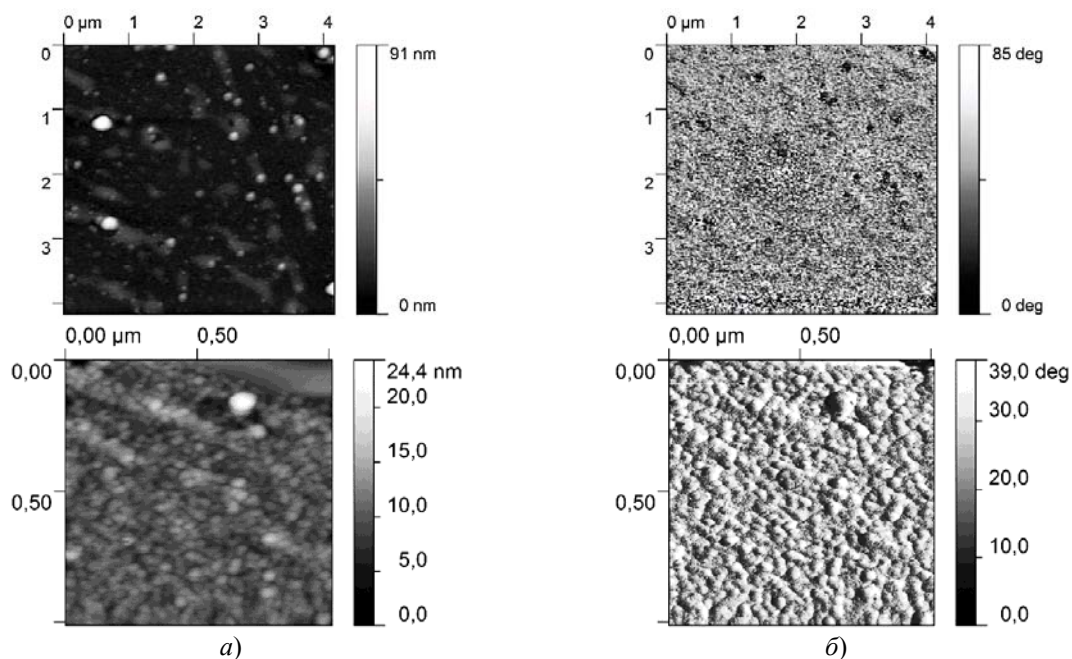


Рисунок 2.7 – Изображение поверхности покрытия ZrO_2 , полученное методом атомно-силовой микроскопии: а) – топография; б) – фазовый контраст

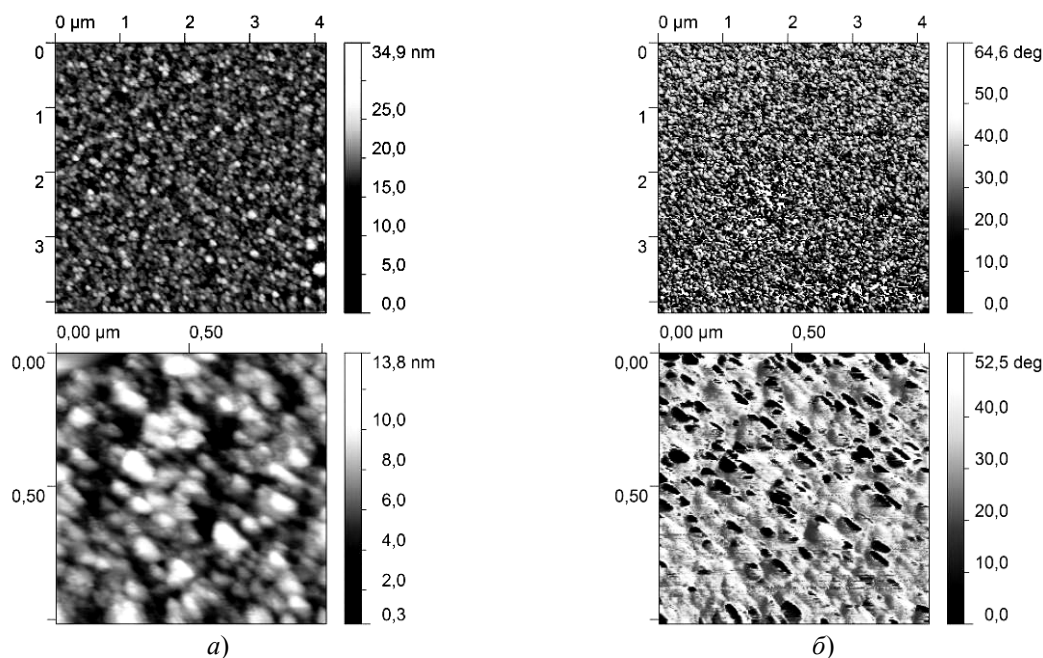


Рисунок 2.8 – Изображение поверхности покрытия SiO_2 полученное методом атомно-силовой микроскопии: а) – топография; б) – фазовый контраст

Покрытие ZrO_2 характеризуется наиболее высокими значениями среднего значения по высоте и шероховатости (таблица 2.1, рисунок 2.7).

Анализ основной структуры покрытия ZrO_2 при большем увеличении показывает, что оно состоит из наночастиц со средним размером 18 нм и плотностью 600 шт/мкм², однако на поверхности присутствуют также большие частицы со средним размером около 125 нм и плотностью около 3,1 шт/мкм².

Морфология поверхности сформированного 35-слойного интерференционного покрытия представлена на рисунке 2.8.

Заключительным верхним слоем данного покрытия является ZrO_2 , однако морфология поверхности несколько отличается от однослойного покрытия ZrO_2 , представленного на рисунке 2.7. Поверхность многослойного покрытия характеризуется меньшим средним значением по высоте и отсутствием больших частиц на поверхности.

Средний размер частиц на поверхности последнего слоя интерференционного покрытия составляет 65 нм, что свидетельствует о формировании хотя и относительно крупных, однако достаточно однородных по размеру частиц.

Приведённый анализ морфологии как отдельных слоёв, так и многослойной системы методом атомно-силовой микроскопии позволяет сделать выводы о формировании при выбранных режимах и условиях относительно гладкой поверхности наносимых покрытий и незначительном влиянии шероховатости на их оптические свойства при работе в видимом диапазоне длин волн.

Заключение

Проведённые исследования показывают эффективность использования многослойных тонкоплёночных покрытий на основе тугоплавких оксидов для формирования поляризационно-делительных элементов с заданными свойствами в выбранном спектральном диапазоне. При этом использование расчетных методов конструкции таких покрытий предполагает проведение специальных измерений показателя преломлений отдельных слоев и учет их зависимости от режима осаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов, А. В.* Многослойные оптические покрытия : учебно-методический материал / А.В. Ершов, А.И. Машин. – Нижний Новгород, 2006. – 99 с.
2. *Крылова, Т.Н.* Интерференционные покрытия / Т.Н. Крылова. – Л., «Машиностроение». – 1973. – 224 с.
3. *Тихонравов, А.В.* Новые методы автоматизированного проектирования многослойных покрытий. Компьютерная оптика / А.В. Тихонравов, Н.В. Гришина, С.А. Яншин // М. : МЦНТИ. – 1989. – Вып. 4. – С. 104–113.
4. *Москалев, В.А.* Теоретические основы оптико-физических исследований / В.А. Москалев. – Л. : Машиностроение, 1987. – 318 с.
5. *Яковлев, П.П.* Проектирование интерференционных покрытий / П.П. Яковлев, Б.Б. Мешков // Серия: Библиотека приборостроителя. – М. : Машиностроение, 1987. – 185 с.
6. *Комплекс фотометрического контроля толщин СФКТ-751В.* Техническое описание и инструкция по эксплуатации. – Л. : ЛОМО, 1988. – 34 с.

Поступила в редакцию 15.11.13.

УДК 538.911

ПОЛУЧЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОСТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ ОБЪЕМНЫХ СПЛАВОВ $Pb_xSn_{1-x}Te$

Сейди Хассан^{1,2}, В.Ф. Гременок², В.А. Иванов²

¹Исламский Азад Университет Такестана, Такестан, Иран

²Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь

PREPARATION AND INVESTIGATION OF MICROSTRUCTURAL PROPERTIES OF $Pb_xSn_{1-x}Te$ BULK ALLOYS

Seidi Hassan^{1,2}, V.F. Gremenok², V.A. Ivanov²

¹Islamic Azad University of Takestan, Takestan, Iran

²Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Цель работы – получение и характеристика поликристаллических объемных сплавов $Pb_xSn_{1-x}Te$, выращенных методом синтеза Pb, Sn и Te элементов в откаченных кварцевых ампулах. Элементный состав полученных образцов был определен методом энерго-дисперсионной рентгенографии (ЭДР). Структурная характеристика была исследована рентгеновской дифракцией (РД). Порошковая рентгеновская дифракция сплавов показала единственную фазу – кубическую. Параметр решетки a , рассчитан на основе рентгеновских данных. Зависимость постоянной решетки от состава X , показывает линейное поведение и может быть описана законом Vegard.

Ключевые слова: теллурид свинца-олова, рентгеновская дифракция, энерго-дисперсионная рентгенография, микро-структура, параметр решетки.

The aim of this work is the preparation and characterization of the polycrystalline $Pb_xSn_{1-x}Te$ bulk alloys, which is grown by synthesis via a reaction of Pb, Sn, Te elements in sealed quartz ampoules. The elemental composition of the obtained samples was determined from energy dispersive X-ray (EDX). The structural characterization was investigated by X-ray diffraction (XRD). The powder X-ray diffraction of the alloys showed a single phase only, which was found to be cubic. The lattice parameter a is calculated from the peak positions of X-ray diffraction data. The dependence of the lattice constant on composition X exhibits a linear behavior and may be described by the Vegard's law.

Keywords: lead tin telluride, X-ray diffraction, energy dispersive X-ray, microstructure, lattice parameter.

Introduction

The lead-tin telluride alloys ($Pb_xSn_{1-x}Te$) system has been investigated for many decades and applied mainly in the fabrication of infrared photodetectors and diode lasers [1]–[3]. The quality of single crystals is of great importance in the fabrication of detectors in the range of 8 to 14 μm region [4]–[7]. Melt growth of lead tin telluride presents a challenge because this process is thermodynamically unstable in gravitational fields [2]. The technological importance of $Pb_xSn_{1-x}Te$ is based on its band gap versus composition diagram which has a zero energy crossing at approximately 40% SnTe. A convenient way of determining the composition of an alloy from a complete solid solubility is by measuring its lattice parameter. The elemental compositions of $Pb_xSn_{1-x}Te$ can be accurately measured from the lattice parameter (a) calculated from the peak positions by using Vegard's law [3]. These bulk alloys are used for preparation of thin films, because of this, the investigation of structural properties is important. Early investigations showed varied results in structural parameters of this system depending on technology of preparation. This work represents our result on

preparation and investigation of $Pb_xSn_{1-x}Te$ bulk alloys.

1 Experimental

Polycrystalline $Pb_xSn_{1-x}Te$ ($0.0 < X < 1.0$) alloys were synthesized by the fusion method. In this method, the reaction between the sulfur vapors and molten metals were allowed to take place gradually in evacuated silica ampoules. High purity (99.999%) mixtures of constituent elements (Pb, Sn, and Te) in stoichiometric proportions (with an accuracy of $5 \times 10^{-4} g$) were sealed into evacuated silica tubes at the pressure of 10^{-3} Torr. The ampoules were then placed into an electric furnace and kept at $450^\circ C$ for 7 days and after that at $700^\circ C$ for 10 days. The ampoules were gradually cooled with a cooling rate of about $20^\circ C/h$ to room temperature in order to obtain polycrystalline $Pb_xSn_{1-x}Te$ bulk material.

The crystal structure of the $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys was observed by X-ray diffraction (XRD) using a Siemens D-5000 diffractometer with $CuK\alpha$ ($\lambda = 1.5418 \text{ \AA}$) radiation. The observed phases were determined by comparing the d -spacing with the Joint Committee on Powder Diffraction Standard

(JCPDS) data files. The elemental composition of the obtained materials was determined from energy dispersive X-ray (EDX) data, using Scanning electron microscope Stereoscan-360 with EDX spectrometer AN 10000 with an accuracy of about 2%.

2 Results and Discussion

Figure 2.1 shows the EDX spectra for the obtained $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys with different composition, illustrating the respective peaks of lead, tin and tellurium. For each element there are some peaks that can be distinguished, these are defined as K_α , K_β , and L -series (L_α , L_β и L_γ lines) alpha (α) and beta (β). These peaks originate from the relaxation of excited electrons [8]. In the spectra presented in figure 2.1, all elements show the K_α , K_β peaks which indicate both the final place of the electron and also the type of transition that has taken place. For example, K_α indicates that the electron has jumped to a K shell from the nearest outer L shell. Since the probability of transition from the nearest shell is greater the peak intensities for K_α transitions are larger than for K_β peaks. The energy dispersive analysis shows that the obtained alloys are homogeneous and the compositions are reproducible. This clearly shows that composition control can be easily achieved using the fusion method.

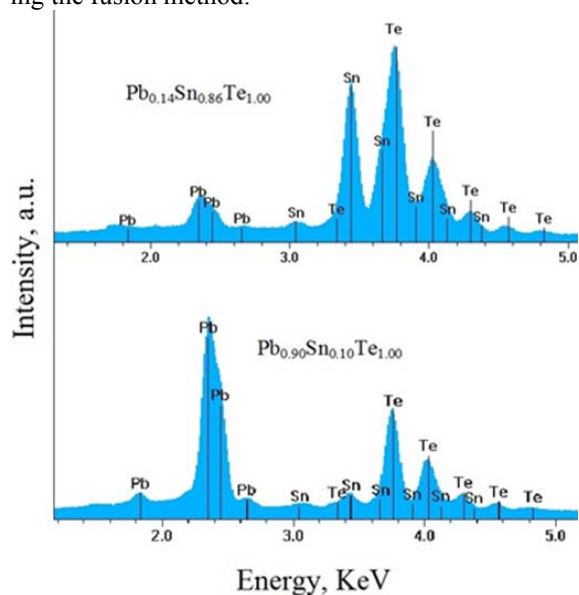


Figure 2.1 – Energy dispersive X-ray (EDX) patterns of $Pb_xSn_{1-x}Te$ bulk alloys

Table 2.1 shows the composition and lattice parameter of $Pb_xSn_{1-x}Te$ samples. Also the atomic percent of elements has been shown in the table. As shown in the table, by increasing the mole fraction of Pb in the composition, the linear increasing is observed in the lattice parameters of our samples.

X-ray diffraction measurements were performed to identify the crystal structure and phases in alloys. Figure 2.2 shows the XRD spectra patterns for $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys. Many methods are used for accurate determination of peak positions.

We used Gaussian method in software Origin. For achieving the lattice parameter to within 1.10^{-5} nm, we must calculate the peak positions to within 0.02° . Naturally there are different types of systematic errors associated with different x-ray instruments. We extrapolated peak positions to high 2θ using a function that minimizes the influence of systematic errors. There are different types of extrapolation functions for different types of systematic error in the lattice parameter [9]–[11]. We used the Nelson-Riley function to achieve accurate data. The Nelson-Riley Function (equation 2.1) is applied very well for Diffractometers, because the first term ($\cos^2\theta / \sin\theta$) corrects for sample displacement, typically the main error source. The second term ($\cos^2\theta / \theta$) may be correct for vertical divergence of the incident beam. Decreasing the window of the detector slit reduces the error due to vertical divergence [12]:

$$\frac{\Delta d}{d} = k \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\theta} \right), \quad (2.1)$$

where k is a constant.

The XRD spectra showed that bulk materials have polycrystalline nature with the cubic NaCl crystal structure and indicates the absence of other phases [6], [13]. All XRD peaks are shifted to lower angles with the increase of Pb content in the $Pb_xSn_{1-x}Te$ compounds. The JCPDS data files for SnTe and PbTe are card number of # 46-1210 and # 78-1905, respectively. The $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys exhibited a (200) peak representing the preferable orientation. The spectrum also showed other peaks in addition to the (200) peak. The most intensive additional peaks corresponds to (220), (222), (400), (420), (422) and (440) orientations.

Table 2.1 – Composition and lattice parameter of $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys system

X, mol. fraction	Composition	Atomic %			Lattice parameter, Å
		Pb	Sn	Te	
0.1	$Pb_{0.10}Sn_{0.90}Te_{1.00}$	4.92	44.93	50.15	6.327
0.14	$Pb_{0.14}Sn_{0.86}Te_{1.00}$	6.80	42.78	50.42	6.331
0.35	$Pb_{0.35}Sn_{0.65}Te_{1.00}$	17.62	32.45	49.93	6.342
0.53	$Pb_{0.53}Sn_{0.47}Te_{1.00}$	26.83	23.57	50.60	6.383
0.85	$Pb_{0.85}Sn_{0.15}Te_{1.00}$	42.65	7.20	50.15	6.419
0.90	$Pb_{0.90}Sn_{0.10}Te_{1.00}$	44.86	4.97	50.17	6.436

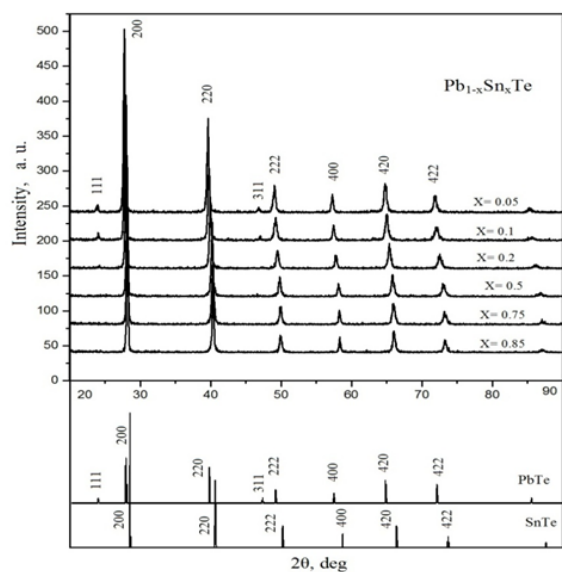


Figure 2.2 – X-ray diffraction patterns of $Pb_xSn_{1-x}Te$ bulk alloys and the JCPDS data for PbTe and SnTe

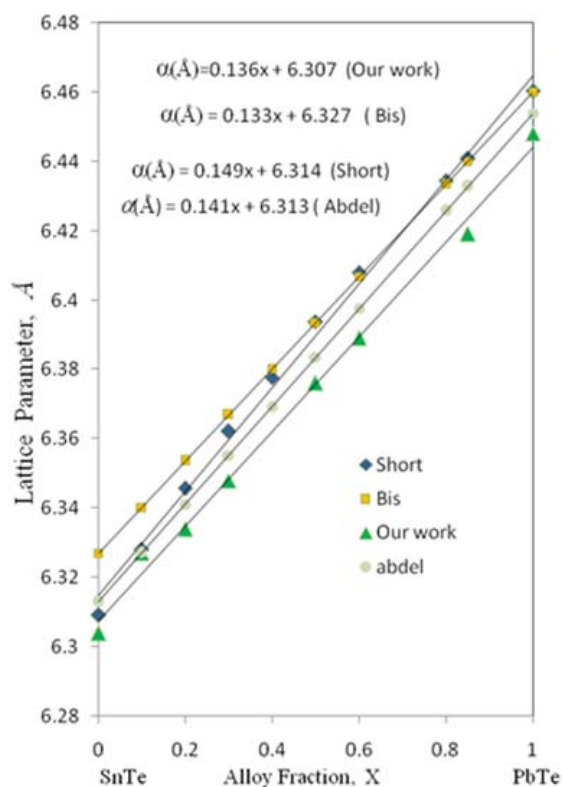


Figure 2.3 – Lattice parameter of $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys system

Just Short stated that the lattice parameter of $Pb_xSn_{1-x}Te$ system has a positive deviation from Vegard's law [14]. Bis et al. have showed that in small deviations from stoichiometry, Vegard's law is satisfied for PbSnTe alloys [15]. Also Abdel Rafea et al. showed the linearity of the lattice parameter of this system [13].

The cell parameters were evaluated using the standard equation for a cubic crystal structure. The evaluated interplanar spacing (d -values) and the lattice parameter of $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys are in agreement with the standard JCPDS data. It was found that the variation of lattice parameter versus composition (X) is virtually linear and followed to the Vegard's law behavior. This relationship was calculated mathematically by least-squares analysis. The general expression for these relations is

$$a(\text{alloy}) = 0.136X + a(\text{SnTe}), \quad (2.2)$$

Where $a(\text{alloy})$ is the lattice constant of the alloy in Å; X , is the alloy fraction; and $a(\text{SnTe})$, is the lattice constant of SnTe.

Our investigations showed that the lattice parameter of the $Pb_{1-x}Sn_xTe$ bulk alloys prepared by the fusion method obeys Vegard's law.

Conclusions

We have successfully synthesized polycrystalline $Pb_xSn_{1-x}Te$ ($0.0 < X < 1.0$) alloys by the fusion method. The energy dispersive analysis showed that the obtained alloys are homogeneous and the compositions are reproducible. The XRD spectra showed the polycrystalline nature with the cubic NaCl crystal structure and indicated the absence of other phases. It was established that by increasing the content of Pb in the near stoichiometry $Pb_xSn_{1-x}Te$ compositions, the lattice parameter, in accordance to Vegard's law, is significantly linearly increased.

REFERENCES

1. *Experimental observation of band inversion in the PbSnTe system* / S.O. Ferreira [et al.] // J. Appl. Phys. – 1999. – Vol. 86, № 12. – P. 7198 – 7200.
2. *High resolution X-ray diffraction imaging of lead tin telluride* / B. Steiner [et al.] // J. Crystal Growth. – 1991. – Vol. 114, № 4. – P. 707–714.
3. *Bicknell, R.W.* The interpretation of X-Ray diffraction data from thin epitaxial Lead-Tin Telluride crystals / R.W. Bicknell // Infrared Physics – 1977. – Vol. 17, № 1. – P. 57–62.
4. *Kimura, H.* Single crystal growth of lead-tin telluride / H. Kimura // J. of Electronic Materials – 1972. – Vol. 1, № 1. – P. 165–180.
5. *IV–VI Compound heterostructures grown by molecular beam epitaxy* / A.Y. Ueta [et al.] // Microelectronics Journal. – 2002. – Vol. 33, № 4. – P. 331–335.
6. *Thermoelectric properties of undoped PbSe and PbTe tin alloyed epitaxial MBE films on BaF₂ substrates* / J. König [et al.] // European Conference on Thermoelectrics (ECT) 2005. Proceedings: 1–2 September 2005. – Nancy, France. – P. 39–42.
7. *Growth and crystal properties of Tl-doped PbTe crystals grown by Bridgman method under Pb and Te vapor pressure* / Nugraha [et al.] // Journal of Crystal Growth. – 2001. – Vol. 222, № 1–2. – P. 38–43.

8. *Feldman, L.C.* Fundamentals of Surface and Thin Film Analysis / L.C. Feldman, J.W. Mayer // North-Holland – New York – Amsterdam – London, 1986. – 344 p.
 9. *Nelson, J.B.* An experimental investigation of extrapolation methods in the derivation of accurate unit-cell dimensions of crystals / J.B. Nelson, D.P. Riley // Proc. Phys. Soc. (London). – 1945. – Vol. 57, № 3. – P. 160–177.
 10. *Suryanarayana, C.* X-ray Diffraction a Practical Approach / C. Suryanarayana, M.G. Norton // Plenum Press, New York, 1998. – P. 153–166.
 11. *Cullity, B.D.* Elements of X-ray Diffraction / B.D. Cullity, S.R. Stock // 3rd Edition. – Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001. – Ch. 13. – P. 363–383.
 12. *Uncertainty estimation of lattice parameters measured by X-Ray diffraction* / M.F. De Campos [et al.] // XVIII IMEKO World Congress: Metrology for a Sustainable Development, 17–22 September 2006. – Rio de Janeiro, Brazil.
 13. *Effect of substrate temperature on the galvanomagnetic, photoelectrical and optical properties of $Pb_{0.8}Sn_{0.2}Te$ thin films* / M. Abdel Rafea [et al.] // Chalcogenide Letters. 2009. – Vol. 6, № 3. – P. 115–123.
 14. *Short, N.R.* A redetermination of the lattice parameters of $Pb_xSn_{1-x}Te$ alloys / N.R. Short // Brit. J. Appl. Phys. – 1968. – Vol. 1, № 2. – P. 129–130.
 15. *Bis, R.F.* Applicability of Vegard's Law to the $Pb_xSn_{1-x}Te$ Alloy System / R.F. Bis, J.R. Dixon // J. Appl. Phys. – 1969. – Vol. 40, № 4. – P. 1918–1921.
- This work has been supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research.*

Поступила в редакцию 09.09.13.

УДК 535.42

РАЗДЕЛЕНИЕ ТН- И ТЕ- ПОЛЯРИЗОВАННЫХ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ АКУСТООПТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

П.А. Хило

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

SEPARATION OF TH- AND TE- POLARIZED BESSEL LIGHT BEAMS AT ACOUSTO-OPTIC DIFFRACTION IN ANISOTROPIC CRYSTALS

P.A. Khilo

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Решена задача акустооптического взаимодействия бesselевых световых пучков (БСП) в анизотропном кристалле с плоской ультразвуковой волной. Рассчитана схема изотропного рассеяния БСП без изменения состояния поляризации. Исследованная схема акустооптического взаимодействия является методом получения ТН- и ТЕ- поляризованных бesselевых световых пучков с возможностью изменения состояния их поляризации с течением времени.

Ключевые слова: ТЕ- и ТН- поляризованный бesselев световой пучок, анизотропный кристалл, акустооптическое взаимодействие.

The task of acousto-optic interaction of Bessel light beams (BLB) in uniaxial crystal with plane acoustic wave has been solved. The process of isotropic scattering of BLBs without changes of the polarization state has been calculated. The investigated scheme of the acousto-optical interaction is a method for producing polarized Bessel light beams with the ability to change their state of polarization over time.

Keywords: TH- and TE- polarized Bessel beams, anisotropic crystal, acousto-optical interaction.

Введение

Одним из важнейших направлений исследований в оптике векторных БСП является разработка методов управления их параметрами и, в частности, формирования ТН- и ТЕ- поляризованных бesselевых пучков. Использование ТН- и ТЕ- поляризованных пучков позволяет получать при острой фокусировке более высокую концентрацию светового поля в приосевой области по сравнению с линейно- или циркулярно- поляризованными бesselевыми пучками [1].

К настоящему времени предложен ряд методов получения ТН- и ТЕ- поляризованных бesselевых световых полей. В частности, используется поляризующее свойство конической поверхности при падении света под углом Брюстера [2], преобразование поляризации при формировании суперпозиции двух ортогонально поляризованных Эрмит–Гауссовых мод [3], ряд внутрирезонаторных методов генерации [4]–[6], метод трансформации циркулярно-поляризованных БСП в суперпозицию радиально- и азимутально-поляризованных БСП с помощью одномерной слоистой периодической среды [7]. Тем не менее, задача получения ТН- и ТЕ- поляризованных пучков остается актуальной. В частности, перспективен поиск динамических методов формирования ТН- и ТЕ- поляризованных пучков, позволяющих оперативно управлять состоянием поляризации.

В работе предложен метод разделения ТН- и ТЕ- поляризованных векторных БСП на основе акустооптической (АО) дифракции в анизотропных кристаллах. Отметим, что одноосные кристаллы полностью согласованы по симметрии со световым полем в случае распространения БСП вдоль оптической оси, и если акустическая волна (плоская, в простейшем случае) также распространяется вдоль оптической оси, то такая геометрия оптимальна для преобразования бesselевых пучков без искажения их пространственной структуры. Аналогичный подход был использован ранее для преобразования порядка БСП при их распространении в линейных кристаллах [8], а также при генерации ТН- и ТЕ- поляризованных векторных БСП без изменения поляризации в условиях $o \rightarrow o$ (АО) дифракции в анизотропных кристаллах [9].

1 Акустооптическое взаимодействие БСП в анизотропных кристаллах

При распространении вдоль оптической оси БСП соответствующей поляризации является собственной модой кристалла, т.е. не изменяет свой профиль из-за влияния анизотропии. Как видно из рисунка 1.1, падающий БСП может в общем случае возбудить в одноосном кристалле две собственные волны, которые применительно к плоским волнам называются обыкновенной (o)

и необыкновенной (e). Векторы электрического поля данных волн могут быть записаны в виде

$$\vec{E}^{(o)} = A_o (\vec{c}_+ J_{m-1}(qr) + \vec{c}_- J_{m+1}(qr)) \times \exp(im\phi + ik_{o,z}z), \quad (1.1)$$

$$\vec{E}^{(e)} = A_e \left[\vec{c}_+ J_{m-1}(qr) - \vec{c}_- J_{m+1}(qr) - \frac{2iq\varepsilon_o}{k_{ez}\varepsilon_e} J_m(qr)\vec{e}_z \right] \exp(im\phi + ik_{e,z}z), \quad (1.2)$$

где $\vec{c}_\pm = (\vec{e}_r \pm i\vec{e}_\phi)$ – векторы циркулярной поляризации в цилиндрических координатах,

$$k_{o,z} = \sqrt{k_o^2 \varepsilon_o - q^2}, \quad k_{e,z} = \frac{n_o}{n_e} \sqrt{k_o^2 \varepsilon_e - q^2}. \quad (1.3)$$

Далее формулы (1.1) и (1.2) представим в сокращенном виде

$$\vec{E}_m^{(o)}(r, t) = A_o \vec{e}_m^{(o)}(\rho, \phi) \exp(ik_{o,z}z - i\omega t), \quad (1.4)$$

$$\vec{E}_m^{(e)}(r, t) = A_e \vec{e}_m^{(e)}(\rho, \phi) \exp(ik_{e,z}z - i\omega t), \quad (1.5)$$

где введены обозначения для векторных модовых функций

$$\vec{e}_m^{(o)}(\rho, \phi) = (\vec{c}_+ J_{m-1}(qr) + \vec{c}_- J_{m+1}(qr)) \exp(im\phi), \quad (1.6)$$

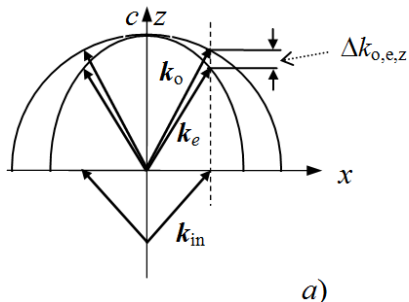
$$\vec{e}_m^{(e)}(\rho, \phi) = \left(\vec{c}_+ J_{m-1}(qr) - \vec{c}_- J_{m+1}(qr) - \frac{2iq\varepsilon_o}{k_{ez}\varepsilon_e} J_m(qr)\vec{e}_z \right) \exp(im\phi). \quad (1.7)$$

Векторные функции $\vec{e}_m^{(o)}(\rho, \phi)$ и $\vec{e}_m^{(e)}(\rho, \phi)$ взаимно ортогональны, т. е. скалярные произведения $\vec{e}_m^{(o)}(\rho, \phi) \vec{e}_m^{(e)}(\rho, \phi) = 0$ в любой пространственной точке и при любых m . Кроме того, справедливы интегральные соотношения ортогональности вида

$$q \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \vec{e}_m^\alpha(q_1, r, \phi) \vec{e}_n^\beta(q, r, \phi)^* r dr d\phi = 2\pi \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \delta(q_1 - q),$$

$$r \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \vec{e}_m^\alpha(q, r_1, \phi) \vec{e}_n^\beta(q, r, \phi)^* q dq d\phi = 2\pi \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \delta(r_1 - r),$$

где индексы α и β принимают значения o и e .



Как видим, в отличие от плоских волн, два бesselевых пучка, распространяющиеся вдоль оптической оси одноосного кристалла состоят из суперпозиций лево- и право- циркулярно-поляризованных компонент. При этом амплитуды данных компонент неодинаково зависят от радиальной координаты: для БСП m -го порядка эта зависимость, как следует из (1.7), описывается бesselевыми функциями соответственно $m-1$ и $m+1$ порядков. Кроме того, e -пучок содержит, как и в случае плоских волн, продольную компоненту, пропорциональную бesselевой функции m -го порядка. Отметим, что векторные поля (1.4)–(1.7) являются точными решениями уравнений Максвелла, или же уравнения Гельмгольца.

Рассмотрим вариант АО взаимодействия, когда циркулярно поляризованный БСП падает из изотропной среды с показателем преломления n_1 на одноосный кристалл в направлении оптической оси c (рисунок 1.1). Из граничных условий следует, что в кристалле будут возбуждаться два БСП, конусы волновых векторов которых являются круговыми. Волновые векторы k_o и k_e , принадлежащие указанным конусам и лежащие в плоскости (x, z) , показаны на рисунке 1.1 а) и соответствуют хорошо известным обыкновенной и необыкновенной плоским волнам. Проекция данных векторов на границу раздела являются поперечными волновыми числами БСП, которые в данном случае одинаковы для всех трех пучков.

Как видно из (1.1), (1.2), из-за анизотропии кристалла, продольные волновые числа $k_{o,z}$, $k_{e,z}$ и, следовательно, фазовые скорости пучков различны. При этом волновая расстройка $\Delta k_{o,e,z}$ не зависит от азимутального угла, что важно для реализации синхронного акустооптического взаимодействия типа $e \rightarrow o$ или $o \rightarrow e$. Схема обратного рассеяния с изменением поляризации типа $e \rightarrow o$ и процессы обратного рассеяния без изменения поляризации типа $e \rightarrow e$ и $o \rightarrow o$ могут быть реализованы отдельно из-за различия для них условий фазового согласования. В то же время, взаимодействий $e \rightarrow o$ и $o \rightarrow e$ являются вырожденными по параметру волновой расстройки.

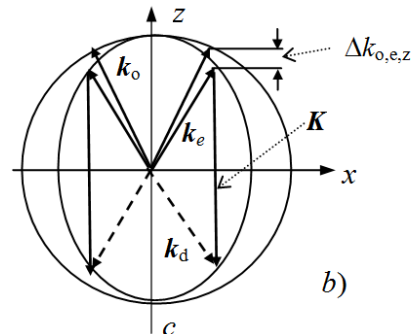


Рисунок 1.1 – Взаимная ориентация волновых векторов, относящихся к падающему бesselеву пучку (in), а также o - и e - БСП в кристалле а); б) – схема обратного рассеяния бesselева светового пучка без изменения поляризации ($e \rightarrow e$ дифракция)

Будем считать, что в кристалле вдоль оптической оси распространяется чисто продольная акустическая волна $\vec{u} = \vec{e}_3 u_0 \exp(iKz - i\Omega t)$, где u_0 , K , Ω – скалярная амплитуда, волновое число и частота. Процесс АО взаимодействия бesselевых пучков описывается волновым уравнением

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon + \Delta \varepsilon) \mathbf{E} = 0, \quad (1.8)$$

где $\Delta \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ik}^0 \varepsilon_{je}^0 p_{kenn} u_{mn}$ – изменение тензора диэлектрической проницаемости кристалла, индуцированное акустической волной, ε_{ik}^0 – диэлектрическая проницаемость кристалла в отсутствии ультразвука, p_{kenn} – компоненты тензора фотоупругих постоянных, u_{mn} – компоненты тензора упругих деформаций.

В рассматриваемом здесь случае распространения полей вдоль оптической оси кристалла симметрия задачи является аксиально симметричной. Поэтому решение задачи АО преобразования удобно полностью провести в цилиндрической системе координат. Важным вопросом здесь является вид тензора диэлектрической проницаемости кристалла с учетом его изменения, индуцированного акустической волной. Исходный тензор диэлектрической проницаемости для одноосных кристаллов в декартовых координатах имеет известный диагональный вид с компонентами $\varepsilon_{x,x} = \varepsilon_{y,y} = \varepsilon_o$ и $\varepsilon_{z,z} = \varepsilon_e$. В цилиндрических координатах с осью z параллельной оптической оси этот тензор также диагональный с компонентами $\varepsilon_{\rho,\rho} = \varepsilon_{\phi,\phi} = \varepsilon_o$ и $\varepsilon_{z,z} = \varepsilon_e$. Вид тензора $\Delta \varepsilon_{ij}$ зависит от состояния поляризации акустической волны, и если акустическая волна продольно поляризована, то в этом случае отличны от нуля три компоненты тензора $\Delta \varepsilon_{ij}$, а именно:

$$\Delta \varepsilon_{\rho\rho} = \Delta \varepsilon_{\phi\phi} = -i\varepsilon_o^2 p_{13} u_0 K, \quad (1.9)$$

$$\Delta \varepsilon_{zz} = -i\varepsilon_e^2 p_{33} u_0 K, \quad (1.10)$$

где p_{13} и p_{33} – компоненты тензора фотоупругих постоянных. Из полученных формул (1.9), (1.10) следует, что фотоупругость, вызванная плоской акустической волной, может значительно изменять эффективный тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$. Отметим, что добавки к тензору $\hat{\varepsilon}$ мнимые. При этом компоненты исходного тензора здесь считаются действительными. Далее, для случая продольной поляризации акустической волны тензор $\hat{\varepsilon}$ остается диагональным

с комплексными компонентами. При этом тензор $\Delta \varepsilon$ также является одноосным.

Будем предполагать, что АО взаимодействие бesselевых пучков, так же как и плоских волн, приводит в первую очередь к z -модуляции скалярных амплитуд $A_{o,e}$ в формулах (1.4), (1.5). В то же время, векторные модовые функции $\vec{e}_m^{(o),(e)}(\rho, \phi)$ будем считать неизменными. Такой режим АО преобразования означает отсутствие трансформации пространственной структуры бesselевых пучков в процессе обмена энергией и вполне объясним физически. Во-первых, вследствие линейности процесса, его эффективность не зависит от локальной интенсивности пучков, а в отсутствие локально-неоднородных возмущений бesselевы пучки сохраняют свой поперечный профиль из-за известного свойства бездифракционности. Во-вторых, все плоскотоволновые компоненты БСП преобразуются в одинаковых условиях продольного и поперечного синхронизмов вследствие цилиндрической симметрии задачи, обусловленной распространением пучков вдоль оптической оси кристалла. Для получения уравнений, описывающих указанный выше режим АО взаимодействия, подставляем в уравнение Гельмгольца (1.8) решения в виде (1.4), (1.5) с зависящими от z амплитудами $A_{o,e}$. Общий вид этих уравнений в приближении медленно изменяющихся амплитуд следует из (1.8)

$$\frac{dA_d^e}{dz} = \chi^{ee} A_t^e \exp(i\Delta k_{ez} z), \quad (1.11)$$

$$\frac{dA_t^e}{dz} = \chi^{ee} A_d^e \exp(-i\Delta k_{ez} z).$$

В (1.11) обозначено $\chi^{ee} = \frac{k_o^2}{2k_{ez}} g^{ee}$, величины g^{ee}

являются эффективными параметрами АО преобразования. Верхние индексы указывают тип взаимодействия ($e \rightarrow e$ в рассматриваемом случае), индексы d и t соответствуют дифрагированной и проходящей волнам. Параметры g^{ee} имеют вид интегралов свертки

$$g^{ee} = \frac{\iint \vec{e}_d^e(\rho, \phi)^* \Delta \varepsilon^0 \vec{e}_t^e(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi}{\iint |\vec{e}_d^e(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi},$$

где $\Delta \varepsilon_{\rho\rho}^0 = \Delta \varepsilon_{\phi\phi}^0 = -\varepsilon_o^2 p_{13} u_0 K$,

$$\Delta \varepsilon_{zz}^0 = -\varepsilon_e^2 p_{33} u_0 K.$$

Явные выражения для эффективных АО параметров представим в виде

$$\chi^{ee} = \frac{2\alpha_2 \Delta \varepsilon_{\rho\rho}^0 \int (J_{m-1}(q\rho) J_{m-1}(q_0\rho) + J_{m+1}(q\rho) J_{m+1}(q_0\rho) + \Delta \varepsilon_{zz}^0 c_z^2 J_m(q\rho) J_m(q_0\rho)) \rho d\rho}{\int [(J_{m-1}(q\rho) - J_{m+1}(q\rho))^2 + (J_{m+1}(q\rho) + J_{m-1}(q\rho))^2 + c_z^2 J_m^2(q\rho)] \rho d\rho},$$

$$\text{где } \alpha_2 = \frac{k_o^2}{k_z^e}, \quad c_z = \frac{2q\varepsilon_o}{k_{ez}\varepsilon_e}.$$

Решение системы уравнений (1.11) для амплитуды дифрагированного бesselева пучка $A_d^e(z)$ имеет вид

$$A_d^e(z) = \frac{\chi^{ee} sh[p(L-z)]}{pch(pL) + (i\Delta k_{ez}/2)sh(pL)} A_m^e(0) \times \exp(-i\Delta k_{ez}z/2), \quad (1.12)$$

где $p = \sqrt{\chi^{ee2} - \Delta k_{ez}^2/4}$, L – длина АО взаимодействия.

Полученное решение описывает процесс перекачки энергии между падающим и дифрагированным пучком бesselевых пучком е-поляризации. Уравнение (1.12) показывает, что эффективность перекачки энергии в заданный канал определяется соответствующим интегралом перекрытия и позволяет найти, в частности, z-компоненту плотности потока энергии и энергетический коэффициент отражения $R = \bar{S}_{sz}/\bar{S}_{in}$ бesselева пучка ТН поляризации. Тогда для эффективности рассеяния получим

$$R = \frac{b(g)^2 th^2 \left(\sqrt{b(g)^2 - \frac{\Delta k_{ez}^2}{4}} L \right)}{\left(b(g)^2 - \frac{\Delta k_{ez}^2}{4} \right) + \left(\frac{\Delta k_{ez}}{2} \right)^2 th^2 \left(\sqrt{b(g)^2 - \frac{\Delta k_{ez}^2}{4}} L \right)}, \quad (1.13)$$

где обозначено $b(g) = \chi^{ee}$.

Из (1.13) следует, что при $\Delta k_{ez} = 0$, т. е. в условиях продольного фазового согласования коэффициент отражения максимален и равен

$$R_0 = th^2[b(g)L].$$

Особенностью уравнений (1.11), в сравнении со случаем плоских волн является зависимость эффективности дифракции от поперечного волнового числа q .

2 Численный анализ акустооптического взаимодействия векторных БСП

На рисунке 2.1, а) представлен график зависимости интеграла перекрытия от непрерывного параметра q . Как видно, при выбранных реальных значениях радиуса пучка и угла конуса, максимум интеграла перекрытия при $q/q_0 = 1$ является достаточно узким. Его полуширина по половинному уровню равна $0.011q_0$. Это означает, что такой же приблизительно будет и полуширина пространственного спектра дифрагированного пучка. В то же время, при уменьшении радиуса падающего БСП интеграл перекрытия расширяется (рисунок 2.1, b).

Видно, что в рассмотренных условиях реализуется высокоэффективный процесс дифракции, который характеризуется монотонным стремлением R к максимальному значению, равному единице при возрастании аргумента гиперболического тангенса. При этом случай $g = g_{max}$ соответствует поперечному синхронизму – аналогично, как в нелинейной оптике бesselевых пучков. На рисунке 2.2 показаны зависимости эффективности рассеяния R от поперечного волнового числа q при различных значениях радиуса R_b . Видим, что в области малых значений R_b эффективность достигает максимального значения единицы не только при поперечном синхронизме ($q = q_{in}$), но и в его окрестности, что проявляется как горизонтальное плато на графиках. Ширина плато уменьшается с увеличением R_b до нуля, после чего максимальное значение R становится меньше единицы (рисунок 2.2, b). Характерная зависимость эффективности дифракции от радиуса R_b показана на рис. 2.3 при двух значениях акустической мощности. Наблюдается горизонтальное плато и затем монотонное падение эффективности. Точка перехода от одного режима ко второму сдвигается вправо при возрастании акустической мощности.

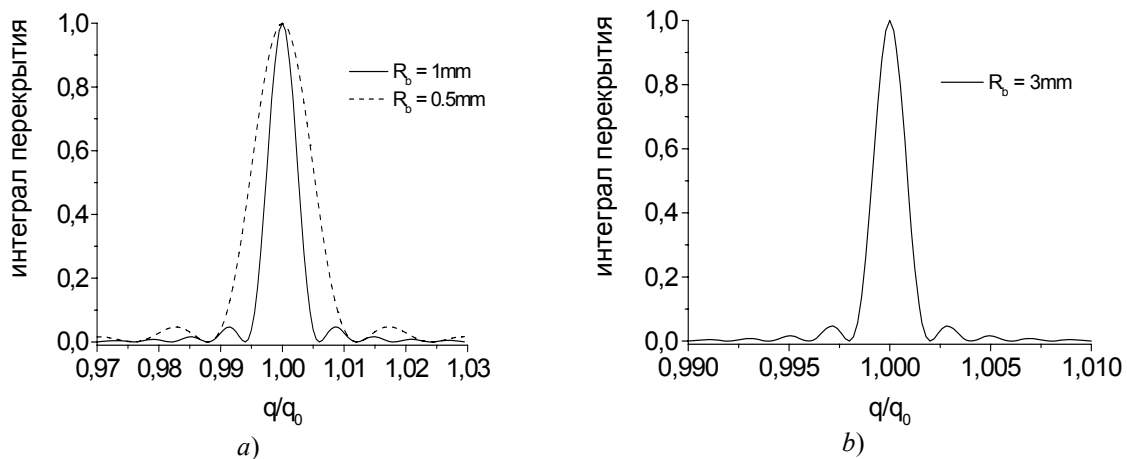


Рисунок 2.1 – Зависимость интеграла перекрытия от поперечного волнового числа q . Радиус бesselева пучка $R_b = 0.5$ mm и 1 mm (a); 3mm (b); угол конуса $\gamma = 3$ град.

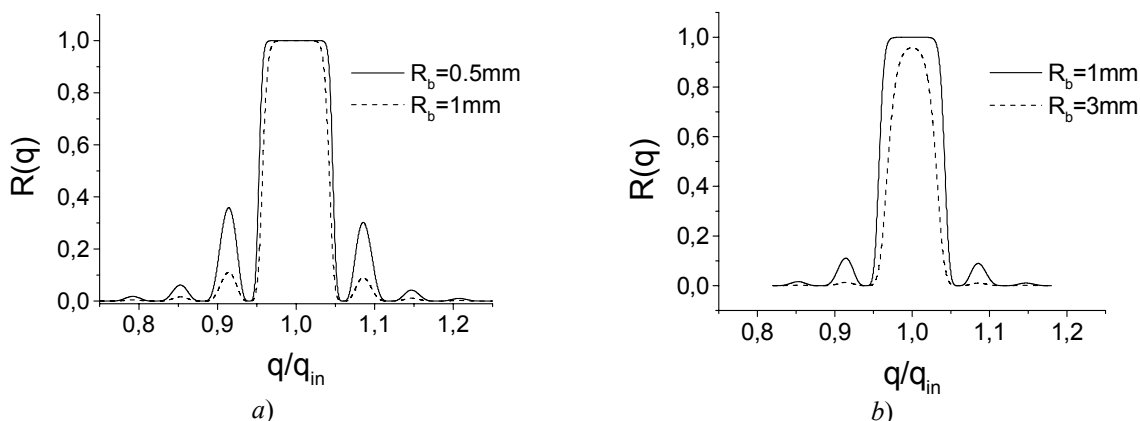


Рисунок 2.2 – Зависимость коэффициента отражения R от поперечного волнового числа q при различных значениях радиуса R_b

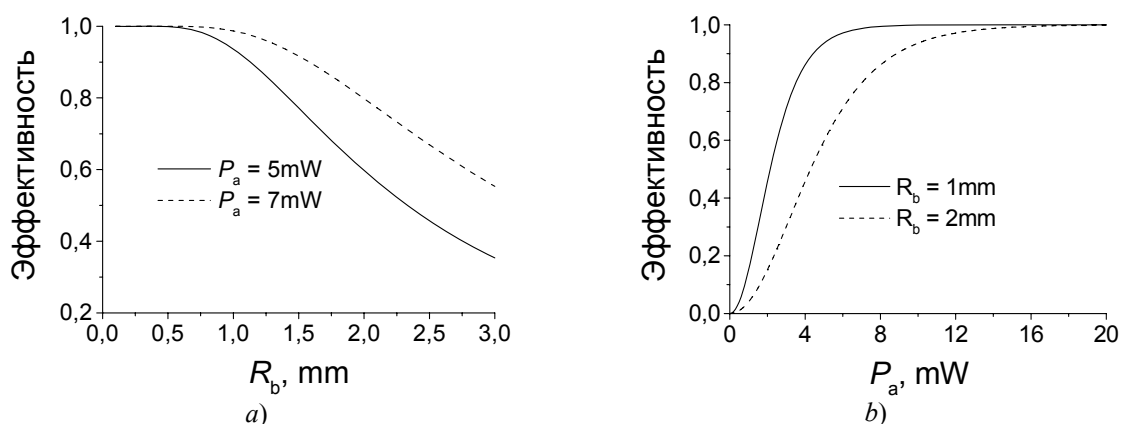


Рисунок 2.3 – Зависимость эффективности дифракции от радиуса падающего бesselового пучка (а) и от акустической мощности (б). Угол конуса $\gamma = 5$ град

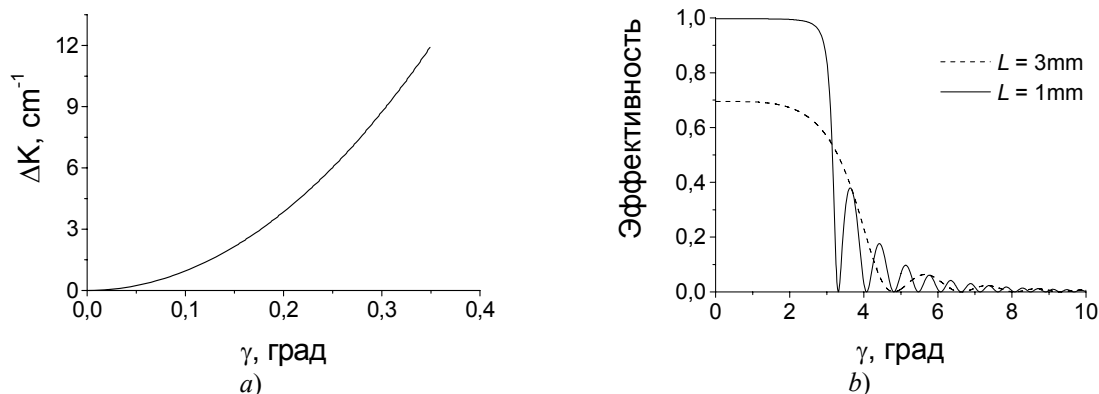


Рисунок 2.4 – Зависимость волновой расстройки (а) и эффективности АО рассеяния (б) в ТН-ТЕ- канале от угла конуса бesselового пучка

Физической причиной такого поведения эффективности является уменьшение интенсивности акустического поля заданной мощности с возрастанием площади пучка.

Таким образом, в процессе обратного АО рассеяния, в принципе, возможна практически полная перекачка энергии одного из двух проходящих бesselовых пучков (здесь ТН- пучка) в пучок обратного направления. Необходимо выяснить вопрос о возможном влиянии на эту перекачку рассеяния

в канал ТН-ТЕ. Данный процесс в рассматриваемом контексте является источником шума. Расчет волновой расстройки в канале ТН-ТЕ дает

$$\Delta k(\gamma) = \frac{k_0 n_o \cos \gamma - k_0 n_e n_e \cos \gamma_1}{\sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \gamma_1}},$$

$$\text{где } \cos^2 \gamma_1 = \frac{n_o^2 \sin^2 \gamma - n_e^2}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \gamma - n_e^2 - n_e^2 \sin^2 \gamma}}.$$

На рисунке 2.4 показана зависимость волновой расстройки и эффективности АО дифракции в канале TH-TE от угла конуса и при условии синхронного преобразования в канале TH-TH. Расчет проведен для кристалла LiNbO₃ при угле конуса падающего пучка 5 град. Как видно, угловая расстройка возрастает с увеличением угла конуса, а соответствующая когерентная длина $\sim \Delta k^{-1}$ – уменьшается. Из-за этого эффективность рассеяния в параллельный канал TH-TE будет падать с ростом угла конуса. Рисунок 2.4, b) иллюстрирует данную закономерность. Из графика видно, что рассеяние в канал TH-TE незначительно при угле конуса более 3 град. При этом важен также корректный выбор угла конуса с целью избежать попадания на вторичные максимумы эффективности (рисунок 2.4, b). В итоге, АО дифракция в обратном направлении может учитываться только в одном канале.

Заключение

Рассмотренная схема АО взаимодействия, позволяет получить TH-поляризованные бесселевы световые пучки в обратном направлении и TE- поляризованные пучки – в прямом. При изменении частоты акустической волны возможно переключение типа рассеяния, т. е. получение TH- пучка в прямом направлении, и TE – в обратном. Таким образом, исследованный процесс АО дифракции является динамическим аналогом известных оптических методов формирования радиально и азимутально поляризованных световых пучков и может найти применение в управляемых устройствах фокусировки света, лазерных технологиях, для удержания и управления микрочастицами и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Focusing light to a tighter spot* / S. Quabis [et al.] // Opt. Commun. – 2000. – Vol. 179. – P. 1–7.
2. *Kozawa, Y.* Generation of a radially polarized laser beam by use of a conical Brewster prism / Y. Kozawa, S. Sato // Opt.Lett. – 2005. – Vol. 30. – P. 3063–3065.
3. *Generating radially polarized beams interferometrically* / S.C. Tidwell [et al.] // Appl. Opt. – 1990. – Vol. 29. – P. 2234–2239.
4. *Wynne, J.J.* Generation of the rotationally symmetric TE 01 and TM 1 modes from a wavelength-tunable laser / J.J Wynne // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1974. – Vol. QE-10. – P. 125–127.
5. *Maric, M.E.* Low-Order TE Operation of a CO₂ Laser for Transmission Through Circular Metallic Waveguides / M.E. Marhic, E. Garmire // Appl. Phys. Lett. – 1981. – Vol. 38. – P. 743–745.
6. *Armstrong, D.J.* Generation of Radially Polarized Beams with an Image-Rotating Resonator/ Darrell J. Armstrong, Mark C. Phillips, Arlee V. Smith // Appl. Opt. – 2003. – Vol. 42. – P. 3550–3554.
7. *Generation of TE- and TH-polarized Bessel beams using one-dimensional photonic crystal* / V.N. Belyi [et al.] // Opt. Commun. – 2009. – Vol. 282. – P. 1998–2008.
8. *Хило, Н.А.* Преобразование порядка бесселевых световых пучков в одноосных кристаллах / Н.А. Хило, Е.С. Петрова, А.А. Рыжевич // Квантовая электроника. – 2001. – Т. 31, № 1. – С. 85–89.
9. *Formation of TE-and TH polarized Bessel beams at acousto-optic diffraction in anisotropic crystals* / P.A. Khilo [et al.] // Proc. of SPIE. – 2011. – Vol. 8073. – P. 807327-1–807327-9.

Поступила в редакцию 29.09.13.

УДК 669.14.018.8: 621.45.038.72

РАЗМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В БИСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЯХ ТИТАН-УГЛЕРОД. 1. ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ ПОДСЛОЯ ТИТАНА НА СТРУКТУРУ И СВОЙСТВА УГЛЕРОДНОГО СЛОЯ

Чжоу Бин¹, А.В. Рогачёв², Цзян Сяохун¹, Д.Г. Пилипцов²,
Н.Н. Федосенко², А.С. Руденков²

¹Нанкинский университет науки и технологии, Нанкин, Китай

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

SIZE EFFECT IN THE BILAYER COATINGS OF TITANIUM-CARBON. 1. THE INFLUENCE OF THICKNESS OF TITANIUM INTERLAYER ON THE STRUCTURE AND PROPERTIES OF CARBON LAYER

Zhou Bing¹, A.V. Rogachev², Jiang Xiaohong¹, D.G. Pilipstov²,
N.N. Fedosenko², A.S. Rudenkov²

¹Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, China

²F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Определены закономерности влияния толщины подслоя титана в двухслойных покрытиях титан-углерод на их фазовый состав, механические свойства. Наиболее сильное каталитическое влияние титанового подслоя проявляется при его толщине до 30...45 нм; при такой толщине установлены наиболее высокие концентрации атомов углерода с sp^3 -гибридизацией, микротвердость покрытия, его прозрачность в оптическом диапазоне и ширина запрещенной зоны. При увеличении толщины подслоя внутренние напряжения монотонно снижаются и при толщине большей 40 нм не изменяются.

Ключевые слова: алмазоподобный углерод, бислойное покрытие, структура, морфология, твердость, внутренние напряжения, оптические свойства.

The influence regularities of the thickness of titanium interlayer on the phase composition and mechanical properties of titanium-carbon bilayer coatings have been determined. The strongest catalytic effect of titanium interlayer is presented in its thickness up to 30-45 nm. At the thickness range the bilayer coatings possess the highest concentration of sp^3 -hybridization carbon, microhardness, transparency and optical bandgap. As the thickness of the interlayer increases the internal stress monotonically decreases and, it is not changed when the thickness exceeds 40 nm.

Keywords: diamond-like carbon, bilayer coating, structure, morphology, hardness, internal stress, optical properties.

Введение

Алмазоподобные углеродные покрытия (АПП) привлекают особое внимание и имеют широкое практическое применение благодаря их таким свойствам, как высокие твердость и теплопроводность, триботехнические и электрофизические свойства, оптическая прозрачность, химическая инертность, прекрасная биосовместимость [1]–[3]. АПП, как правило, является гетерогенной метастабильной формой углерода преимущественно со смесью графитоподобных sp^2 и алмазоподобных sp^3 связей [1]. При этом свойства покрытий определяются не только относительной долей этих связей, но и размером и степенью упорядоченности Csp^2 и Csp^3 кластеров, их распределением в слое и т.д. В случае формирования нанокпозиционных, легированных АПП, определяющее влияние на их свойства оказывают структура и химический состав межфазных слоев, природа возникающих химических связей. Так как введение в состав

покрытия, например, металла, азота осуществляется, как правило, одновременно с осаждением на поверхности атомов углерода, то легирующие элементы проявляют каталитическое либо ингибирующее воздействие на синтез углеродных кластеров, их размер и соотношение фаз с sp^2 и sp^3 конфигурацией углерода [4]. При многокомпонентном легировании АПП характер влияния становится значительно более сложным, особенно если в слое протекают процессы химического взаимодействия между легирующими элементами и углеродом. Отметим, что в общем случае каталитическая активность, влияние твердой поверхности на кинетику и характер структурных, химических процессов значительно возрастают при введении в реакцию среду наноразмерных частиц [5]. В связи с этим научный и практический интерес представляет изучение размерных эффектов при формировании двухслойных тонкопленочных систем металл-углерод.

Основной целью настоящей работы является установление закономерностей влияния толщины тонких подслоев титана в бислойных углеродосодержащих покрытиях (Ti/C), их термообработки на фазовое, структурное состояние и свойства углеродного слоя.

1 Методика эксперимента

Для получения бислойных покрытий титан-углерод использовалась установка вакуумного напыления УВНИПА-1-001, содержащая газовый ионный источник, с помощью которого производится очистка и нагрев подложек, источник плазмы стационарного катодно-дугового разряда с металлическим (титановым) катодом, источник плазмы импульсного катодно-дугового разряда с катодом из графита, используемым для нанесения углеродных покрытий. Углеродные покрытия наносились при напряжении разряда 250–300 В и частоте импульсов от 1 до 35 Гц. Данные режимы выбирались согласно полученным ранее рекомендациям [6]. Для очистки и нагрева подложек, в качестве которых использовались пластины монокристаллического кремния, применялась обработка их поверхности ионами металла с энергией 1,5–2,5 КэВ или ионами азота (аргона) с энергией ≤ 4 КэВ и плотностью ионного тока ≈ 25 А/м². Нанесение покрытия производилось при давлении в камере $\sim 4 \cdot 10^{-3}$ Па. Отрицательный потенциал смещения, подаваемый на образец, ≈ 110 В.

Термообработка покрытий осуществлялась в вакууме в течение 30 минут при температуре 500 °С.

В качестве основных характеристик, определяющих механические свойства покрытий, были выбраны значения микротвердости, внутренних механических напряжений. Измерения микротвердости проводились при постоянной

нагрузке на индентор с помощью микротвердомера Leica VMHT MOT (Knoop). Для оценки напряжений в покрытии использовался рентгеновский дифракционный анализ [7].

Толщина покрытия контролировалась с помощью устройства Ambios Technology XP-2 и не превышала 200 нм. Сравнительному анализу подвергались покрытия с одинаковым значением эффективной толщины.

Химический состав и структура связей углеродных слоев оценивали методами РФЭС (PHI Quantera) и КР спектроскопии (длина волны возбуждающего излучения 514,6 нм и мощность 20 мВт) (Renishaw).

Спектроскопические исследования в оптическом диапазоне и определение ширины запрещенной зоны покрытий проводили с помощью УФ-Вид-Ближнего ИК спектрофотометра (Varian, Cary-50).

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены КР спектры бислоя Ti/C с различной толщиной слоя Ti до и после отжига. Как видно, с увеличением толщины слоя Ti форма широкого пика, расположенного в области 1100–1800 см⁻¹, практически сохраняется. Однако его интенсивность, определяемая количеством C–C-связей [8], немонотонно изменяется с ростом толщины. С увеличением толщины слоя титана до 45 нм интенсивность пика возрастает и затем резко снижается при осаждении углерода на более толстые слои Ti. Это может быть объяснено более интенсивной диффузией атомов металла в углеродный слой толщиной более 45 нм и их химическим взаимодействием с атомами углерода. Термообработка бислойного покрытия практически не изменила характер размерной зависимости интенсивности интегрального пика.

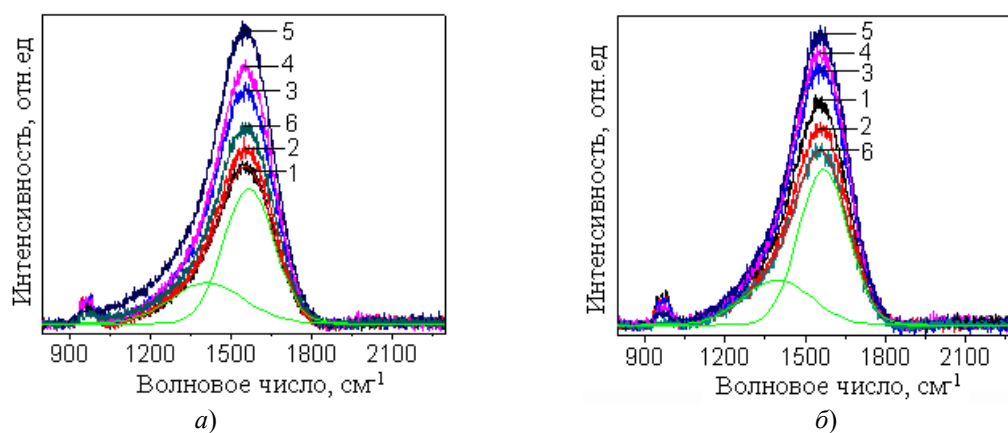


Рисунок 2.1 – КР спектры покрытий Ti/C с разной толщиной подслоя Ti (1 – 7 нм; 2 – 12 нм; 3 – 15 нм; 4 – 20 нм; 5 – 45 нм; 6 – 60 нм; а) – без отжига; б) – отжиг при 500°С в вакууме). Толщина слоя АПП – 80 нм

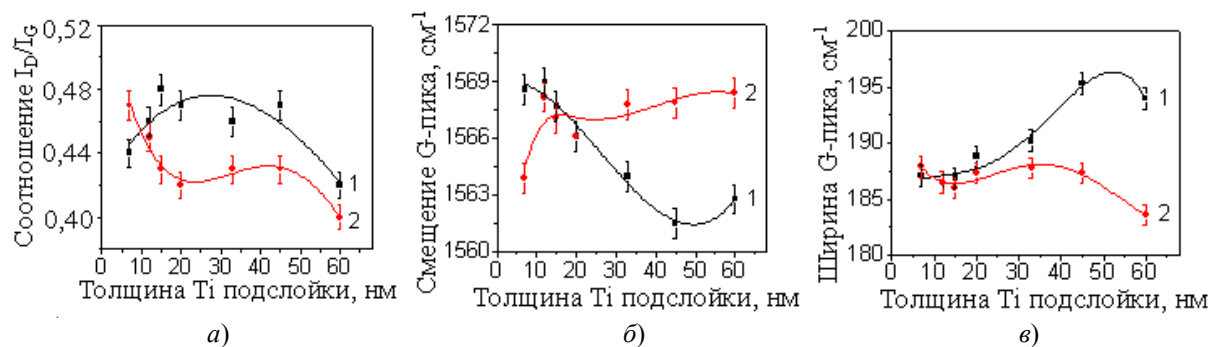


Рисунок 2.2 – Зависимость отношения I_D/I_G (а), смещения положения G-пика (б) и его ширины (в) покрытий Ti/C от толщины слоя Ti до и после отжига (1 – без отжига; 2 – отжиг при 500°C в вакууме)

Отметим только, что при использовании толстого слоя титана количество C–C-связей более резко снижается (интенсивность пика для покрытия титана толщиной 60 нм минимальная в сравнении с интенсивностью других пиков (рисунок 2.1, б)), что согласуется с предположением о значительном влиянии диффузионных процессов на состояние углеродного слоя. Результаты обработки полученных КР спектров с целью определения параметров G- и D- пиков приведены на рисунке 2.2.

Установлено, что отношение I_D/I_G имеет достаточно высокие значения при толщине подслоя Ti до 45 нм. В соответствии с [9], более высокие значения I_D/I_G при малой толщине подслоя титана указывают на уменьшение размеров и количества Csp^2 -кластеров, что можно связывать со снижением концентрации углерод-углеродных связей, а также формированием TiC фаз во время осаждения покрытия [1], [4].

Изменения координаты и ширины G-пика также свидетельствуют о влиянии химического воздействия между атомами Ti и C на фазовый состав. При увеличении толщины Ti-подслоя от 20 нм до 45 нм положение G-пика смещается в направлении меньших волновых чисел, а его ширина возрастает, что является признаком увеличения содержания Csp^3 связей и степени разупорядоченности Csp^2 -кластеров [1]. Установлено, что при увеличении толщины Ti-подслоя с 45 нм до 60 нм отношение I_D/I_G , ширина G-пика уменьшаются, а его координата смещается в направлении больших волновых чисел. Эти результаты свидетельствуют об увеличении размеров и степени упорядочения Csp^2 -кластеров в таких покрытиях.

Характер влияния толщины титанового подслоя несколько меняется при проведении отжига покрытия. Видно, что после отжига отношение I_D/I_G заметно снижается, G-пик практически монотонно смещается в направлении больших волновых чисел, а его ширина уменьшается. Эти результаты обусловлены интенсивной межслойной диффузией при отжиге, протеканием процессов химического взаимодействия титана и

углеродом, имеющим преимущественно sp^2 конфигурацию, что сопровождается уменьшением размеров Csp^2 -кластеров и увеличением степени их разупорядочения.

Изучено влияние толщины подслоя титана на твердость и внутренние напряжения бислойных покрытий Ti/C (рисунок 2.3).

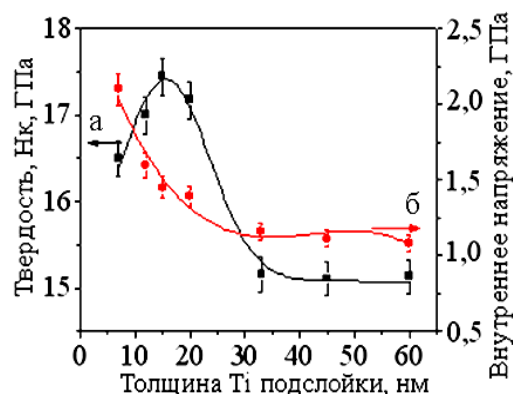


Рисунок 2.3 – Зависимость механических свойств покрытий Ti/C от толщины подслоя титана (а – микротвердость; б – внутренние напряжения)

Видно, что твердость бислоев возрастает при увеличении толщины Ti-подслоя до 15 нм, что, по-видимому, обусловлено образованием твердой фазы карбида в результате химического взаимодействия атомов углерода с атомами титана. Отметим, что в соответствии с [5] при такой толщине подслоя наблюдается его полное диспергирование вследствие диффузии. При дальнейшем увеличении толщины Ti-подслоя твердость снижается за счет влияния мягкой титановой компоненты двухслойного покрытия, а затем, при толщине подслоя большей 30 нм, практически не изменяется.

Если снижение твердости происходит на 12...14% при увеличении толщины Ti-подслоя до 40 нм, то сжимающие напряжения монотонно снижаются почти в 2 раза (рисунок 2.3). Наличие достаточно толстого пластичного титанового

подслоя в таких покрытиях, по-видимому, способствует релаксации механических напряжений.

Установлено, что толщина титанового подслоя оказывает значительное влияние и на оптические свойства бислойных покрытий Ti/C (рисунки 2.4, 2.5).

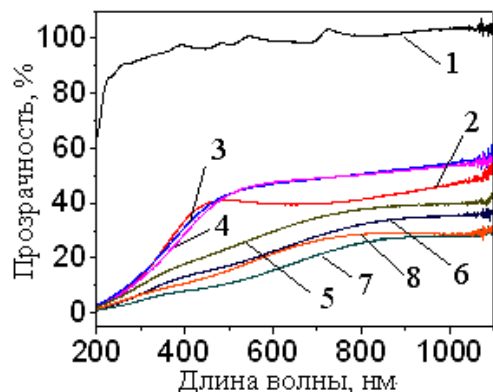


Рисунок 2.4 – Спектры пропускания бислойных покрытий Ti/C с разной толщиной подслоя Ti (1 – кварцевое стекло; 2 – 8 нм; 3 – 12 нм; 4 – 15 нм; 5 – 20 нм; 6 – 33 нм; 7 – 45 нм; 8 – 60 нм)

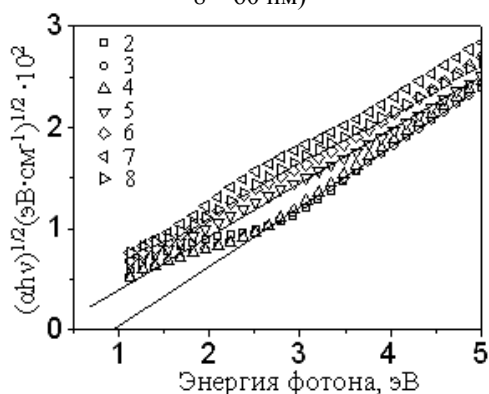


Рисунок 2.5 – Зависимость $(\alpha hv)^{1/2}$ от энергии фотонов покрытий Ti/C с разной толщиной подслоя Ti (1 – кварцевое стекло; 2 – 8 нм; 3 – 12 нм; 4 – 15 нм; 5 – 20 нм; 6 – 33 нм; 7 – 45 нм; 8 – 60 нм)

Прозрачность бислойных покрытий в оптическом диапазоне увеличивается при возрастании толщины Ti-подслоя до 15 нм, оставаясь близкой к прозрачности чистого углеродного монослоя. При дальнейшем увеличении толщины Ti-подслоя она снижается на 30%. Отметим, что регистрируемые на рисунке 2.4 различия в форме зависимостей прозрачности покрытий от толщины подслоя Ti являются следствием размерного структурного эффекта в покрытиях Ti/C, результатом изменения его состояния вследствие диффузии титана в слой углерода. На основании представленных данных можно сделать вывод, что критическая толщина Ti-подслоя, при которой достигается диффузионное нарушение

целостности слоя титана составляет 15...20 нм. Этот вывод согласуется с результатами непосредственного определения толщины диффузионных слоев, результаты которого приведены в [5].

Оптическая ширина запрещенной зоны (E_g) бислойных покрытий Ti/АПП, определяемая экстраполяцией линейной части кривой зависимости $(\alpha hv)^{1/2}$ (α – коэффициент поглощения материала; $h\nu$ – энергия фотона) от энергии фотона [10] (рисунок 2.5), при толщине Ti-подслоя менее 20 нм незначительно уменьшается и составляет 0,98...0,96 эВ. Если же толщина Ti-подслоя превышает 20 нм, то ширина запрещенной зоны E_g бислойных покрытий снижается с увеличением толщины Ti-подслоя в связи с формированием сплошного металлического Ti-подслоя.

Выводы

Определены фазовый состав, механические и оптические свойства бислойных покрытий титан-углерод, содержащих подслои титана различной толщины. Показано, что с увеличением толщины Ti-подслоя до 45 нм возрастает концентрация атомов углерода с sp^3 -гибридизацией, а при толщине от 45 нм до 60 нм – размер и степень упорядочения Csp^2 -кластеров. При отжиге доля Csp^3 -кластеров в углеродном слое возрастает, что объясняется взаимной диффузией Ti и C и протеканием химического взаимодействия титана с углеродом преимущественно с sp^2 конфигурацией. При толщине подслоя титана до 30...45 нм покрытие имеет более высокие микротвердость, прозрачность в оптическом диапазоне и ширину запрещенной зоны. Внутренние напряжения при увеличении толщины подслоя монотонно снижаются и при толщине большей 40 нм не изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robertson, J. Diamond-like amorphous carbon / J. Robertson // *Materials Science and Engineering R.* – Vol. 37 (4–6). – P. 129–281.
2. Evaluation of microstructures and mechanical properties of diamond-like carbon films deposited by filtered cathodic arc plasma / P.C. Tsai [et al.] // *Thin Solid Films.* – 2008. – Vol. 516. – P. 5440–5444.
3. Studies of nanostructured copper/hydrogenated amorphous carbon multilayer films / N. Dwivedi [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds.* – 2011. – Vol. 509. – P. 1285–1293.
4. A perspective on the optimisation of hard carbon and related coatings for engineering applications / S. Neuville [et al.] // *Thin Solid Films.* – 2007. – Vol. 515. – P. 6619–6653.
5. Growth and characteristics of diamond-like carbon films with titanium and titanium nitride functional layers by cathode arc plasma / Bing Zhou [et al.] // *Surface and Coatings Technology.* – 2013. – Vol. 223 – P. 17–23.

6. Влияние природы и концентрации легирующих элементов на морфологию зоны трения углеродных покрытий / А.В. Рогачёв [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 100–103.

7. *Micromechanical properties of amorphous carbon coatings deposited by different deposition techniques* / В.К. Gupta [et al.] // *Thin Solid Films*. – 1995. – Vol. 270 – P. 391–398.

8. *Stress, microstructure and mechanical properties of graded multilayer tetrahedral amorphous carbon films* / X. Han [et al.] // *Applied Physics A*. – 2008. – Vol. 91. – P. 529–533.

9. *Raman spectrum of graphite* / F. Tuinstra [et al.] // *Journal of Physics Chemistry*. – 1970. – Vol. 53. – P. 1126–1130.

10. *Optical properties and electronic structure of amorphous germanium* / J. Tauc [et al.] // *Phys. Status Solidi*. – 1966. – Vol. 15. – P. 627–637.

Поступила в редакцию 19.09.13.

УДК 512.579

СВОБОДНЫЕ n -ДИНИЛЬПОТЕНТНЫЕ ДИМОНОИДЫ

А.В. Жучок

Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, Луганск, Украина

FREE n -DINILPOTENT DIMONOIDS

Anatolii V. Zhuchok

Luhansk Taras Shevchenko National Univesity, Luhansk, Ukraine

Построен свободный n -динильпотентный димонOID и охарактеризована наименьшая n -динильпотентная конгруэнция на свободном димонOиде.

Ключевые слова: n -динильпотентный димонOID, свободный n -динильпотентный димонOID, димонOID, полугруппа, конгруэнция.

We construct a free n -dinilpotent dimonoid and characterize the least n -dinilpotent congruence on a free dimonoid.

Keywords: n -dinilpotent dimonoid, free n -dinilpotent dimonoid, dimonoid, semigroup, congruence.

Introduction and preliminaries

In the author's preceding papers [1]–[4] the problem of the construction of some relatively free dimonoids was solved. The structure of the corresponding algebras was described and some least congruences on a free dimonoid were characterized.

The present paper continues this trend of research by considering the so-called n -dinilpotent dimonoids, that is dimonoids with two n -nilpotent semigroups. It turns out that the class of such dimonoids is a subvariety of the variety of all dimonoids. For the indicated variety a free object is constructed and the least n -dinilpotent congruence on a free dimonoid is characterized.

Let us recall that a nonempty set D equipped with two binary operations \dashv and \vdash satisfying the following axioms:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \quad (D1)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (D2)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (D3)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (D4)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \quad (D5)$$

for all $x, y, z \in D$, is called a dimonoid.

An element 0 of a dimonoid (D, \dashv, \vdash) will be called zero, if

$$x * 0 = 0 = 0 * x$$

for all $x \in D$ and $*$ \in $\{\dashv, \vdash\}$.

As usual, \mathbb{N} denotes the set of all positive integers.

We call a semigroup S nilpotent, if $S^{n+1} = 0$ for some $n \in \mathbb{N}$. The least such n we shall call the nilpotency index of S . For $k \in \mathbb{N}$ a nilpotent semigroup of nilpotency index $\leq k$ is said to be k -nilpotent.

A dimonoid (D, \dashv, \vdash) with zero will be called dinilpotent, if (D, \dashv) and (D, \vdash) are nilpotent semigroups.

A dinilpotent dimonoid (D, \dashv, \vdash) will be called n -dinilpotent, if (D, \dashv) and (D, \vdash) are n -nilpotent semigroups. If ρ is a congruence on a dimonoid (D, \dashv, \vdash) such that $(D, \dashv, \vdash) / \rho$ is an n -dinilpotent dimonoid, then we say that ρ is an n -dinilpotent congruence.

Note that operations of any 1-dinilpotent dimonoid coincide and it is a zero semigroup.

Lemma 0.1. *The class of all n -dinilpotent dimonoids is a subvariety of the variety of all dimonoids.*

Proof. Indeed, the class of all n -dinilpotent dimonoids is a subclass of the variety of all dimonoids which is closed under taking of homomorphic images, subdimonoids and Cartesian products, and consequently, it is a variety. \square

A dimonoid which is free in the variety of n -dinilpotent dimonoids will be called a free n -dinilpotent dimonoid.

The necessary information about varieties of dimonoids can be found in [1].

J.-L. Loday described a free dimonoid [5]. We constructed the dimonoid isomorphic to the free dimonoid in [6]. Recall this construction.

Let $F[X]$ be the free semigroup in the alphabet X . We denote the length of a word $w \in F[X]$ by l_w . Define operations \dashv and \vdash on

$$F = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid l_w \geq m\}$$

by

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1),$$

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)$$

for all $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in F$. Denote the algebra (F, \dashv, \vdash) by $\check{F}[X]$. By Lemma 3 from [6] $\check{F}[X]$ is the free dimonoid over X .

If $f : D_1 \rightarrow D_2$ is a homomorphism of dimonoids, then the corresponding congruence on D_1 will be denoted by Δ_f .

1 Free objects

In this section we construct a free n -dinilpotent dimonoid of an arbitrary rank and consider separately free n -dinilpotent dimonoids of rank 1.

Fix $n \in \mathbb{N}$ and define operations \dashv and \vdash on

$$FD_n = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid$$

$$m \leq l_w, m \leq n, l_w - m + 1 \leq n\} \cup \{0\}$$

by

$$\begin{aligned} (w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) &= \\ &= \begin{cases} (w_1 w_2, m_1), & \text{if } l_{w_1 w_2} - m_1 + 1 \leq n, \\ 0, & \text{if } l_{w_1 w_2} - m_1 + 1 > n, \end{cases} \\ (w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) &= \\ &= \begin{cases} (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2), & \text{if } l_{w_1} + m_2 \leq n, \\ 0, & \text{if } l_{w_1} + m_2 > n, \end{cases} \end{aligned}$$

$$(w_1, m_1) * 0 = 0 * (w_1, m_1) = 0 * 0 = 0$$

for all $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in FD_n \setminus \{0\}$ and $* \in \{\dashv, \vdash\}$.

The algebra (FD_n, \dashv, \vdash) will be denoted by $FD_n(X)$.

Theorem 1.1. $FD_n(X)$ is the free n -dinilpotent dimonoid.

Proof. First prove that $FD_n(X)$ is a dimonoid.

Let $(w_1, m_1), (w_2, m_2), (w_3, m_3) \in FD_n \setminus \{0\}$ and let

$$l_{w_1} + l_{w_2} + l_{w_3} - m_1 + 1 \leq n. \quad (1.1)$$

From (1.1) it follows

$$l_{w_1} + l_{w_2} - m_1 + 1 < n, \quad (1.2)$$

$$l_{w_2} + l_{w_3} - m_2 + 1 < n, \quad (1.3)$$

$$l_{w_2} + m_3 < n. \quad (1.4)$$

Using (1.1)–(1.4), we get

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2)) \dashv (w_3, m_3) &= \\ = (w_1 w_2, m_1) \dashv (w_3, m_3) &= (w_1 w_2 w_3, m_1) = \\ = (w_1, m_1) \dashv (w_2 w_3, m_2) &= \\ = (w_1, m_1) \dashv ((w_2, m_2) \dashv (w_3, m_3)), & \\ (w_1, m_1) \dashv ((w_2, m_2) \vdash (w_3, m_3)) &= \\ = (w_1, m_1) \dashv (w_2 w_3, l_{w_2} + m_3) &= (w_1 w_2 w_3, m_1) \end{aligned}$$

and so, the axioms (D1) and (D2) of a dimonoid hold. If

$$l_{w_1} + l_{w_2} + l_{w_3} - m_1 + 1 > n,$$

then, obviously, the axioms (D1) and (D2) hold too.

Let

$$l_{w_1} + m_2 \leq n, \quad (1.5)$$

$$l_{w_2} + l_{w_3} - m_2 + 1 \leq n. \quad (1.6)$$

Using (1.5), (1.6), we obtain

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2)) \dashv (w_3, m_3) &= \\ = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2) \dashv (w_3, m_3) &= \\ = (w_1 w_2 w_3, l_{w_1} + m_2) &= \\ = (w_1, m_1) \vdash (w_2 w_3, m_2) &= \\ = (w_1, m_1) \vdash ((w_2, m_2) \dashv (w_3, m_3)). \end{aligned}$$

If

$$l_{w_2} + m_2 > n \quad \text{or}$$

$$l_{w_2} + l_{w_3} - m_2 + 1 > n,$$

then, obviously,

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2)) \dashv (w_3, m_3) &= 0 = \\ = (w_1, m_1) \vdash ((w_2, m_2) \dashv (w_3, m_3)). \end{aligned}$$

Thus, the axiom (D3) holds.

Let

$$l_{w_1} + l_{w_2} + m_3 \leq n. \quad (1.7)$$

From (1.7) it follows

$$l_{w_1} + m_2 < n, \quad (1.8)$$

$$l_{w_2} + m_3 < n, \quad (1.9)$$

$$l_{w_1} + l_{w_2} - m_1 + 1 < n. \quad (1.10)$$

According to (1.7)–(1.10), we have

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2)) \vdash (w_3, m_3) &= \\ = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2) \vdash (w_3, m_3) &= \\ = (w_1 w_2 w_3, l_{w_1 w_2} + m_3) &= \\ = (w_1 w_2 w_3, l_{w_1} + l_{w_2} + m_3) &= \\ = (w_1, m_1) \vdash (w_2 w_3, l_{w_2} + m_3) &= \\ = (w_1, m_1) \vdash ((w_2, m_2) \vdash (w_3, m_3)), & \\ ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2)) \vdash (w_3, m_3) &= \\ = (w_1 w_2, m_1) \vdash (w_3, m_3) &= \\ = (w_1 w_2 w_3, l_{w_1 w_2} + m_3) \end{aligned}$$

and so, the axioms (D5) and (D4) of a dimonoid hold.

If $l_{w_1} + l_{w_2} + m_3 > n$, then, obviously, the axioms (D4) and (D5) hold too.

The proofs of the remaining cases are obvious.

Consequently, $FD_n(X)$ is a dimonoid.

Take arbitrary elements $(w_i, m_i) \in FD_n \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq n+1$. It is clear that $l_{w_1 w_2 \dots w_{n+1}} - m_1 + 1 > n$.

From here

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) \dashv \dots \dashv (w_{n+1}, m_{n+1}) = 0.$$

Besides, $(x_1, 1) \dashv (x_2, 1) \dashv \dots \dashv (x_n, 1) \neq 0$ for any $(x_i, 1) \in FD_n \setminus \{0\}$, where $x_i \in X$, $1 \leq i \leq n$. From the last arguments we conclude that (FD_n, \dashv) is a nilpotent semigroup of nilpotency index n .

Further note that $l_{w_1 w_2 \dots w_n} + m_{n+1} > n$. From the above it follows that

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) \vdash \dots \vdash (w_{n+1}, m_{n+1}) = 0.$$

Moreover,

$$(x_1, 1) \vdash (x_2, 1) \vdash \dots \vdash (x_n, 1) \neq 0$$

for any $(x_i, 1) \in FD_n \setminus \{0\}$, where $x_i \in X$, $1 \leq i \leq n$. According to the above remarks we deduce that (FD_n, \vdash) is a nilpotent semigroup of nilpotency index n .

Thus, by the definition, $FD_n(X)$ is an n -dinilpotent dimonoid.

Let us show that $FD_n(X)$ is free.

Let (T, \dashv, \vdash') be an arbitrary n -dinilpotent dimonoid and $\gamma : X \rightarrow T$ be an arbitrary map. Define a map

$$\lambda : FD_n(X) \rightarrow (T, \dashv, \vdash') : u \mapsto u\lambda,$$

assuming

$$u\lambda = \begin{cases} x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_i \gamma \dashv' \dots \dashv' x_s \gamma, & \text{if } u = (x_1 \dots x_s, l), \\ & x_i \in X, 1 \leq i \leq s, \\ 0, & \text{if } u = 0. \end{cases}$$

Show that λ is a homomorphism. We will use the axioms of a dimonoid.

For arbitrary elements

$$(x_1 \dots x_i \dots x_s, l), (y_1 \dots y_j \dots y_r, t) \in FD_n \setminus \{0\},$$

where $x_i, y_j \in X$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r$, we obtain

$$\begin{aligned} & ((x_1 \dots x_i \dots x_s, l) \dashv (y_1 \dots y_j \dots y_r, t)) \lambda = \\ & = \begin{cases} (x_1 \dots x_s y_1 \dots y_r, l) \lambda, & \text{if } s+r-l+1 \leq n, \\ 0\lambda, & \text{if } s+r-l+1 > n, \end{cases} \\ & ((x_1 \dots x_i \dots x_s, l) \vdash (y_1 \dots y_j \dots y_r, t)) \lambda = \\ & = \begin{cases} (x_1 \dots x_s y_1 \dots y_r, s+t) \lambda, & \text{if } s+t \leq n, \\ 0\lambda, & \text{if } s+t > n. \end{cases} \end{aligned}$$

If $s+r-l+1 \leq n$, then we have

$$\begin{aligned} & (x_1 \dots x_s y_1 \dots y_r, l) \lambda = \\ & = x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_i \gamma \dashv' \dots \dashv' x_s \gamma \dashv' y_1 \gamma \dashv' \dots \dashv' y_r \gamma = \\ & = (x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_i \gamma \dashv' \dots \dashv' x_s \gamma) \dashv' \\ & \quad \dashv' (y_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' y_i \gamma \dashv' \dots \dashv' y_r \gamma) = \\ & = (x_1 \dots x_i \dots x_s, l) \lambda \dashv' (y_1 \dots y_j \dots y_r, t) \lambda. \end{aligned}$$

If $s+r-l+1 > n$, then

$$\begin{aligned} & 0\lambda = 0 = \\ & = x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_i \gamma \dashv' \dots \dashv' x_s \gamma \dashv' y_1 \gamma \dashv' \dots \dashv' y_r \gamma = \\ & = (x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_i \gamma \dashv' \dots \dashv' x_s \gamma) \dashv' \\ & \quad \dashv' (y_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' y_i \gamma \dashv' \dots \dashv' y_r \gamma) = \\ & = (x_1 \dots x_i \dots x_s, l) \lambda \dashv' (y_1 \dots y_j \dots y_r, t) \lambda. \end{aligned}$$

In the case $s+t \leq n$,

$$\begin{aligned} & (x_1 \dots x_s y_1 \dots y_r, s+t) \lambda = \\ & = x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_s \gamma \vdash' y_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' y_r \gamma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = (x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_i \gamma \dashv' \dots \dashv' x_s \gamma) \vdash' \\ & \quad \vdash' (y_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' y_i \gamma \dashv' \dots \dashv' y_r \gamma) = \\ & = (x_1 \dots x_i \dots x_s, l) \lambda \vdash' (y_1 \dots y_j \dots y_r, t) \lambda. \end{aligned}$$

If $s+t > n$, then

$$\begin{aligned} & 0\lambda = 0 = \\ & = x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_s \gamma \vdash' y_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' y_r \gamma = \\ & = (x_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' x_i \gamma \dashv' \dots \dashv' x_s \gamma) \vdash' \\ & \quad \vdash' (y_1 \gamma \vdash' \dots \vdash' y_i \gamma \dashv' \dots \dashv' y_r \gamma) = \\ & = (x_1 \dots x_i \dots x_s, l) \lambda \vdash' (y_1 \dots y_j \dots y_r, t) \lambda. \end{aligned}$$

The proofs of the remaining cases are obvious. Thus, λ is a homomorphism. This completes the proof of Theorem 1.1. \square

Now we construct a dimonoid which is isomorphic to the free n -dinilpotent dimonoid of rank 1.

Fix $n \in \mathbb{N}$ and define operations \dashv and \vdash on

$$\bar{\mathbb{N}}_n = \{(m, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid$$

$$t \leq m, t \leq n, m-t+1 \leq n\} \cup \{0\}$$

by

$$\begin{aligned} & (m_1, t_1) \dashv (m_2, t_2) = \\ & = \begin{cases} (m_1 + m_2, t_1), & \text{if } m_1 + m_2 - t_1 + 1 \leq n, \\ 0, & \text{if } m_1 + m_2 - t_1 + 1 > n, \end{cases} \\ & (m_1, t_1) \vdash (m_2, t_2) = \\ & = \begin{cases} (m_1 + m_2, m_1 + t_2), & \text{if } m_1 + t_2 \leq n, \\ 0, & \text{if } m_1 + t_2 > n, \end{cases} \\ & (m_1, t_1) * 0 = 0 * (m_1, t_1) = 0 * 0 = 0 \end{aligned}$$

for all $(m_1, t_1), (m_2, t_2) \in \bar{\mathbb{N}}_n \setminus \{0\}$ and $*$ in $\{\dashv, \vdash\}$. An immediate verification shows that axioms of a dimonoid hold concerning operations \dashv and \vdash . So, $(\bar{\mathbb{N}}_n, \dashv, \vdash)$ is a dimonoid. Denote it by $\mathbb{N}_{(n)}$.

Lemma 1.1. *If $|X|=1$, then $FD_n(X) \cong \mathbb{N}_{(n)}$.*

Proof. Assume $X = \{a\}$ and define a map

$$\eta : FD_n(X) \rightarrow \mathbb{N}_{(n)}$$

by the rule

$$u\eta = \begin{cases} (k, l), & u = (a^k, l), \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

An easy verification shows that η is an isomorphism. \square

2 The least n -dinilpotent congruence on a free dimonoid

In this section we present the least n -dinilpotent congruence on a free dimonoid.

Let $\tilde{F}[X]$ be the free dimonoid over X (see introduction and preliminaries). Fix $n \in \mathbb{N}$ and let

$$I_{(n)} = \{(w, m) \in \tilde{F}[X] \mid m > n \text{ or } l_w - m + 1 > n\}.$$

Define a relation $\xi_{(n)}$ on $\tilde{F}[X]$ by

$$\begin{aligned} (w_1, m_1) \xi_{(n)} (w_2, m_2) \text{ if and only if} \\ (w_1, m_1) = (w_2, m_2) \text{ or} \\ (w_1, m_1), (w_2, m_2) \in I_{(n)}. \end{aligned}$$

Theorem 2.1. *The relation $\xi_{(n)}$ on the free dimonoid $\tilde{F}[X]$ is the least n -dinilpotent congruence.*

Proof. Let $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \tilde{F}[X]$. It is not difficult to see that

$$l_{w_1} + l_{w_2} - m_1 + 1 \leq n \quad (2.1)$$

implies

$$m_2 < n, \quad (2.2)$$

$$l_{w_1} - m_1 + 1 < n, \quad (2.3)$$

$$l_{w_2} - m_2 + 1 < n \quad (2.4)$$

and

$$l_{w_1} + m_2 \leq n \quad (2.5)$$

implies (2.2), (2.3) and

$$m_1 < n. \quad (2.6)$$

Define a map $\varphi: \tilde{F}[X] \rightarrow FD_n(X)$ by

$$\begin{aligned} (w, m)\varphi = \\ = \begin{cases} (w, m), & \text{if } m \leq n, \quad l_w - m + 1 \leq n, \\ 0, & \text{if } m > n \quad \text{or} \quad l_w - m + 1 > n \end{cases} \end{aligned}$$

$((w, m) \in \tilde{F}[X])$. Show that φ is a homomorphism.

Let $m_1 > n$. Then

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = (w_1 w_2, m_1)\varphi = 0 = \\ = 0 \dashv (w_2, m_2)\varphi = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi. \end{aligned}$$

In the case $m_1 \leq n$ we consider the following two cases. If (2.1) holds, then, using (2.2)–(2.4), we have

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = (w_1 w_2, m_1)\varphi = \\ = (w_1 w_2, m_1) = (w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = \\ = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi. \end{aligned}$$

If

$$l_{w_1} + l_{w_2} - m_1 + 1 > n,$$

then

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = (w_1 w_2, m_1)\varphi = \\ = 0 = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = \\ = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi \end{aligned}$$

for all $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \tilde{F}[X]$.

Let $l_{w_2} - m_2 + 1 > n$. Then

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)\varphi = \\ = 0 = (w_1, m_1)\varphi \dashv 0 = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi. \end{aligned}$$

In the case $l_{w_2} - m_2 + 1 \leq n$ we consider the following two cases. If (2.5) holds, then, using (2.2), (2.3), (2.6), we have

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)\varphi = \\ = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2) = (w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = \\ = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi. \end{aligned}$$

If $l_{w_1} + m_2 > n$, then

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)\varphi = \\ = 0 = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} ((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\varphi = \\ = (w_1, m_1)\varphi \dashv (w_2, m_2)\varphi \end{aligned}$$

for all $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \tilde{F}[X]$. Consequently, φ is a surjective homomorphism.

By Theorem 1.1 $FD_n(X)$ is the free n -dinilpotent dimonoid. Then Δ_φ is the least n -dinilpotent congruence on $\tilde{F}[X]$. From the definition of φ it follows that $\Delta_\varphi = \xi_{(n)}$. \square

REFERENCES

1. Zhuchok, A.V. Free commutative dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2010. – Vol. 9, № 1. – P. 109–119.
2. Zhuchok, A.V. Free rectangular dibands and free dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2011. – Vol. 11, № 2. – P. 92–111.
3. Zhuchok, A.V. Free normal dibands / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2011. – Vol. 12, № 2. – P. 112–127.
4. Zhuchok, A.V. Free $(\ell r, rr)$ -dibands / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2013. – Vol. 15, № 2. – P. 295–304.
5. Loday, J.-L. Dialgebras, In: Dialgebras and related operads, Lect. Notes Math. / J.-L. Loday // Springer-Verlag, Berlin, 2001. – Vol. 1763. – P. 7–66.
6. Zhuchok, A.V. Free dimonoids / A.V. Zhuchok // Ukr. Math. J. – 2011. – Vol. 63, № 2. – P. 196–208.

Поступила в редакцию 18.09.13.

УДК 512.542

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ И S -ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ

Сяолан И¹, А.Н. Скиба²¹Чжэцзянский Научно-Технический университет, Ханчжоу, Китай²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON SOME GENERALIZATIONS OF PERMUTABILITY AND S -PERMUTABILITY

Xiaolan Yi¹, A.N. Skiba²¹Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, China²F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Пусть H и X – подгруппы конечной группы G . Тогда мы говорим, что: H X -квазиперестановочна (соответственно, X_S -квазиперестановочна) в G , если G содержит такую подгруппу B , что $G = N_G(H)B$ и H X -перестановочна с B и со всеми подгруппами (соответственно, со всеми силовскими подгруппами) V из B такими, что $(|H|, |V|) = 1$; H X -проперестановочна (соответственно, X_S -проперестановочна) в G , если G содержит такую подгруппу B , что $G = N_G(H)B$ и H X -перестановочна с B и со всеми подгруппами (соответственно, со всеми силовскими подгруппами) из B .

В данной работе мы анализируем влияние X -квазиперестановочных, X_S -квазиперестановочных, X -проперестановочных и X_S -проперестановочных подгрупп на строение группы G .

Ключевые слова: конечная группа, X -квазиперестановочная подгруппа, X_S -квазиперестановочная подгруппа, X -проперестановочная подгруппа, X_S -проперестановочная подгруппа, силовская подгруппа, холлова подгруппа, p -разрешимая группа, p -сверхразрешимая группа, максимальная подгруппа, насыщенная формация, PST -группа, PT -группа.

Let H and X be subgroups of a finite group G . Then we say that H is: X -quasipermutable (respectively, X_S -quasipermutable) in G provided G has a subgroup B such that $G = N_G(H)B$ and H X -permutes with B and with all subgroups (respectively, with all Sylow subgroups) V of B such that $(|H|, |V|) = 1$; X -propermutable (respectively, X_S -propermutable) in G provided G has a subgroup B such that $G = N_G(H)B$ and H X -permutes with B and with all subgroups (respectively, with all Sylow subgroups) of B .

In this paper we analyze the influence of X -quasipermutable, X_S -quasipermutable, X -propermutable and X_S -propermutable subgroups on the structure of G .

Keywords: finite group, X -quasipermutable subgroup, X_S -quasipermutable subgroup, X -propermutable subgroup, X_S -propermutable subgroup, Sylow subgroup, Hall subgroup, p -soluble group, p -supersoluble group, maximal subgroup, saturated formation, PST -group, PT -group.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover p is always supposed to be a prime and π is a subset of the set \mathbb{P} of all primes; $\pi(G)$ denotes the set of all primes dividing $|G|$. The symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing the number n ; $\pi(G) = \pi(|G|)$. We say that $x \in G$ is a π -element of G provided $\pi(\langle x \rangle) \subseteq \pi$. The symbol G^π denotes the nilpotent residual of G , that is, the smallest normal subgroup of G with nilpotent quotient.

Let A , B and X be subgroups of G . If $AB = BA$, then A is said to permute with B ; if $AB^x = B^x A$, for some $x \in X$, then A is said to X -permute [1] with B ; if $G = AB$, then B is called a supplement of A to G .

A subgroup H is said to be quasinormal [2] or permutable [3] in G if H permutes with all subgroups of G ; H is said to be S -permutable, S -quasinormal, or π -quasinormal [4] in G if H permutes with all Sylow subgroups of G . In this paper we study the following generalizations of these concepts.

Definition 0.1. Let H and X be subgroups of G . Then we say that H is X -quasipermutable (respectively, X_S -quasipermutable) in G provided G has a subgroup B such that $G = N_G(H)B$ and H X -permutes with B and with all subgroups (respectively, with all Sylow subgroups) V of B such that $(|H|, |V|) = 1$.

If $X = 1$ and H is X -quasipermutable (respectively, X_S -quasipermutable) in G , then we say that H is quasipermutable (respectively, S -quasipermutable) [5] in G .

Definition 0.2. Let H and X be subgroups of G . Then we say that H is X -propermutable (respectively, X_S -propermutable) in G provided G has a subgroup B such that $G = N_G(H)B$ and H X -permutes with B and with all subgroups (respectively, with all Sylow subgroups) of B .

If $X = 1$ and H is X -propermutable (respectively, X_S -propermutable) in G , then we say that H is propermutable [5] (respectively, S -propermutable [6]) in G .

It is clear that every X -propermutable (respectively, X_S -propermutable) subgroup is X -quasipermutable (respectively, X_S -quasipermutable) and the inverse is not true in general. Note, for example, that the subgroup S_3 is quasipermutable, S -propermutable and not propermutable in S_4 . If H is the subgroup of order 3 in S_3 , then H is S -quasipermutable and not quasipermutable in S_4 .

In fact, we meet X -quasipermutable, X_S -quasipermutable, X -propermutable and X_S -propermutable subgroups quite often.

Examples. (1) A subgroup H of G is called X -semipermutable [1] in G provided H X -permutes with all subgroups of some supplement of H to G . Every X -semipermutable subgroup is X -propermutable. In order to prove that the inverse is not true in general, consider the following example. Let $p > q > r$ be primes such that qr divides $p - 1$. Let P be a group of order p and $QR \leq \text{Aut}(P)$, where Q and R are groups of order q and r , respectively. Let $G = P \rtimes (QR)$. Then R is 1-propermutable but not 1-semipermutable in G .

(2) A subgroup H of G is called SS -quasinormal [7] in G if H permutes with all Sylow subgroups of some supplement of H in G . Every SS -quasinormal subgroup is S -propermutable. The example in (1) shows that the inverse is not true in general.

(3) A subgroup H of G is called semipermutable (respectively, S -semipermutable) [8] in G if H permutes with all subgroups (respectively, with all Sylow subgroups) V of G such that

$(|H|, |V|) = 1$. Every semipermutable (respectively, S -semipermutable) subgroup is quasipermutable (respectively, S -quasipermutable). The example in (1) shows that the inverse is not true in general.

(4) If $|H| = p^a$ and $H \leq Z_\infty(G)$, then $H \leq P$, where P is the Sylow p -subgroup of $Z_\infty(G)$. Therefore, since $G/C_G(P)$ is a p -group by [9], we have $G = N_G(H)G_p$ and $H \leq P \leq G_p$, where G_p is a Sylow p -subgroup of G . Hence H is S -propermutable in G .

(5) If G is metanilpotent, that is $G/F(G)$ is nilpotent, then for every Hall subgroup H of G we have $G = N_G(H)F(G)$. Therefore, in this case, every characteristic subgroup of every Hall subgroup of G is S -propermutable in G . In particular, every Hall subgroup of a supersoluble group is S -propermutable.

(6) If M is a maximal subgroup of a supersoluble group, then M is propermutable in G .

(7) A subgroup H of G is called semi-normal [10] in G provided H X -permutes with all subgroups of some supplement of H to G .

In last years, many researches (see, for example [1], [7], [11]–[30]) deal with some interesting subclasses of the classes of all X -quasipermutable, X_S -quasipermutable, X -propermutable, or X_S -propermutable subgroups. In fact, many results of these researches may be developed on the base of the concepts in Definitions 0.1 and 0.2. The results of this paper are partial illustration of this.

1 Base lemma

The first lemma is evident.

Lemma 1.1. Let A, B be subgroups of G and N, X be normal subgroups of G . Suppose that A X -permutes with B .

(i) AN/N (XN/N)-permutes with BN/N . Hence AX/X permutes with BX/X .

(ii) If $X \leq N_G(A)$, then A permutes with B .

Lemma 1.2. Let $H \leq G$ and N, X be normal subgroups of G .

(1) If H is X -quasipermutable (X_S -quasipermutable, respectively) in G and either H is a Hall subgroup of G or for every prime p dividing $|H|$ and for every Sylow p -subgroup H_p of H we have $H_p \not\leq N$, then HN/N is (XN/N) -quasipermutable ($(XN/N)_S$ -quasipermutable, respectively) in G/N .

(2) If H is X -propermutable (X_S -propermutable, respectively) in G , then HN/N is (XN/N) -propermutable ($(XN/N)_S$ -propermutable, respectively) in G/N .

(3) If H is S -quasipermutable in G , $\pi = \pi(H)$ and G is π -soluble, then H permutes with some Hall π' -subgroup of G .

(4) If H is S -quasipermutable in G , then H permutes with some Sylow p -subgroup of G for every prime p such that $(p, |H|) = 1$.

(5) If H is S -propermutable in G , then H permutes with some Sylow p -subgroup of G for every prime p dividing $|G|$.

(6) If H is S -propermutable in G and G is π -soluble, then H permutes with some Hall π -subgroup of G .

(7) If H is S -quasipermutable in G , then $|G : N_G(H \cap N)|$ is a π -number, where

$$\pi = \pi(N) \cup \pi(H).$$

(8) Suppose that G is π -soluble. If H is a Hall π -subgroup of G and H is quasipermutable (S -quasipermutable, respectively) in G , then H is propermutable (S -propermutable, respectively) in G .

Proof. By hypothesis, there is a subgroup B such that $G = N_G(H)B$ and H X -permutes with B and with all subgroups (with all Sylow subgroups, respectively) L of B such that

$$(|H|, |L|) = 1.$$

(1) It is clear that

$$G/N = N_{G/N}(HN/N)(BN/N).$$

Let K/N be any subgroup (any Sylow subgroup, respectively) of BN/N such that

$$(|HN/N|, |K/N|) = 1.$$

Then $K = (K \cap B)N$. Let B_0 be a minimal supplement of $K \cap B \cap N$ to $K \cap B$. Then

$$\begin{aligned} K/N &= (K \cap B)N/N = \\ &= B_0(K \cap B \cap N)N/N = B_0N/N \end{aligned}$$

and $K \cap B \cap N \cap B_0 = N \cap B_0 \leq \Phi(B_0)$. Therefore

$$\pi(K/N) = \pi(K \cap B / K \cap B \cap N) = \pi(B_0),$$

so $(|HN/N|, |B_0|) = 1$. Suppose that some prime $p \in \pi(B_0)$ divides $|H|$, and let H_p be a Sylow p -subgroup of H . We shall show that $H_p \not\leq N$. In fact, we may suppose that H is a Hall subgroup of G . But in this case, H_p is a Sylow p -subgroup of G . Therefore, since $p \in \pi(B_0) \subseteq \pi(G/N)$, $H_p \not\leq N$. Hence p divides $|HN/N|$, a contradiction. Thus $(|H|, |B_0|) = 1$, so in the case when H is X -quasipermutable in G , H X -permutes with B_0 and hence HN/N (XN/N)-permutes with $K/N = B_0N/N$ by Lemma 1.1. Thus HN/N is (XN/N)-quasipermutable in G/N .

Finally, suppose that H is X_S -quasipermutable in G . In this case, B_0 is a p -subgroup of B ,

so for some Sylow p -subgroup B_p of B we have $B_0 \leq B_p$ and $(|H|, p) = 1$. Hence

$$K/N = B_0N/N \leq B_pN/N,$$

which implies that $K/N = B_pN/N$. But H X -permutes with B_p by hypothesis, so HN/N (XN/N)-permutes with K/N by Lemma 1.1. Therefore HN/N is (XN/N)-quasipermutable in G/N .

(2) See the proof of (1).

(3) By [31, VI, 4.6], there are Hall π' -subgroups E_1 , E_2 and E of $N_G(H)$, B and G , respectively, such that $E = E_1E_2$. Then H permutes with all Sylow subgroups of E_2 by hypothesis, so

$$\begin{aligned} HE &= H(E_1E_2) = (HE_1)E_2 = (E_1H)E_2 = \\ &= E_1(HE_2) = E_1(E_2H) = (E_1E_2)H = EH \end{aligned}$$

by [32, A, 1.6].

(4), (5), (6) See the proof of (3).

(7) Let p be a prime such that $p \notin \pi$. Then by (3), there is a Sylow p -subgroup P of G such that $HP = PH$ is a subgroup of G . Hence $HP \cap N = H \cap N$ is a normal subgroup of HP . Thus p does not divide $|G : N_G(H \cap N)|$.

(8) Since G is π -soluble, B is π -soluble. Hence by [31, VI, 1.7], $B = B_\pi B_{\pi'}$, where B_π is a Hall π -subgroup of B and $B_{\pi'}$ is a Hall π' -subgroup of B . By [31, VI, 4.6], there are Hall π -subgroups N_π , B_π and G_π of $N_G(H)$, B and G , respectively, such that $G_\pi = N_\pi B_\pi$. But since $H \leq N_\pi$, N_π is a Hall π -subgroup of G . Therefore $G_\pi = N_\pi B_\pi = N_\pi$, so $B_\pi \leq N_\pi$. Hence $G = N_G(H)B = N_G(H)B_\pi B_{\pi'} = N_G(H)B_{\pi'}$, so H is propermutable (S -propermutable, respectively) in G .

2 Some new characterizations of PST-groups and PT-groups

A group G is called a PT -group if permutability is a transitive relation on G , that is, every permutable subgroup of a permutable subgroup of G is permutable in G . A group G is called a PST -group if S -permutability is a transitive relation on G .

As well as T -groups, PT -groups and PST -groups possess many interesting properties (see Chapter 2 in [33]). The general description of PT -groups and PST -groups was first obtained by Zacher [34] and Agrawal [35], for the soluble case, and by Robinson in [36], for the general case. Nevertheless, in the further publications, authors (see for example the recent papers [15]–[27]) have found out and described many other interesting characterizations of soluble PT and PST -groups. In this section we give new characterizations of such groups.

Theorem 2.1 (See Theorem A in [5]). Let $D = G^{\pi}$ and $\pi = \pi(D)$. Then the following statements are equivalent:

- (i) D is a Hall subgroup of G and every Hall subgroup of G is quasipermutable in G .
- (ii) G is a soluble PST-group.
- (iii) Every subgroup of G is quasipermutable in G .
- (iv) Every π -subgroup of G and some minimal supplement of D in G are quasipermutable in G .

Theorem 2.2 (See Theorem B in [37]). G is a soluble PST-group if and only if all Hall subgroups of G and all their maximal subgroups are propermutable.

We say that a subgroup H is completely propermutable in G provided H is propermutable in any subgroup of G containing H .

Let us note, in passing, that in the group $G = C_3 \times S_3$, where C_3 is a group of order 3 and S_3 is the symmetric group of degree 3, every Hall subgroup is propermutable but G is not a PST-group since G^{π} is not a Hall subgroup of G . It is also clear that every semipermutable subgroup is completely propermutable. A Sylow 2-subgroup of the group G is not semipermutable.

Theorem 2.3 (See Theorem C in [37]). A soluble G of odd order is a PT-group if and only if all Hall subgroups and all subnormal subgroups of G are completely propermutable.

Recall that G is called an Iwasawa group provided all subgroups of G are permutable. We will say that G is a generalized Iwasawa group if every subgroup of G is completely propermutable in G .

In fact, in view of [33, 2.1.12], Theorem 2.3 is a corollary of the following

Theorem 2.4. All Hall subgroups and all subnormal subgroups of G are completely propermutable in G if and only if G is a soluble PST-group whose Sylow 2-subgroups are generalized Iwasawa groups and every Sylow p -subgroup of G , where p is odd, is Iwasawa.

3 Groups with Hall propermutable or quasipermutable subgroups

The proofs of results in Section 2 are based on many quasipermutability and propermutability properties on nilpotent subgroups. Some of them we discuss in the given and in the next sections.

A subgroup S of G is called a Gaschütz subgroup of G (L.A. Shemetkov [38, IV, 15.3]) if S is supersoluble and for any subgroups $K \leq H$ of G , where $S \leq K$, the number $|H : K|$ is not prime.

Every Hall subgroup of every supersoluble group is S -propermutable (see Example (5)). This observation makes natural the following questions:

Question 3.1. What is the structure of G under the hypothesis that every Hall subgroup of G is propermutable or, at least, quasipermutable in G ?

Question 3.2. What is the structure of G under the hypothesis that some Hall subgroup of G is propermutable or, at least, quasipermutable in G ?

We have proved the following results in this line researches.

Theorem 3.3 (See Theorem B in [5]). The following statements are equivalent:

(I) G is soluble, and if S is a Gaschütz subgroup of G , then every Hall subgroup H of G satisfying $\pi(H) \subseteq \pi(S)$ is quasipermutable in G .

(II) G is supersoluble and the following hold:

(a) $G = DC$, where $D = G^{\pi}$ is an abelian complemented subgroup of G and C is a Carter subgroup of G ;

(b) $D \cap C$ is normal in G and $(p, |D / D \cap C|) = 1$

for all prime divisors p of $|G|$ satisfying

$$(p-1, |G|) = 1.$$

(c) For any non-empty set π of primes, every π -element of any Carter subgroup of G induces a power automorphism on the Hall π' -subgroup of D .

(III) Every Hall subgroup of G is quasipermutable in G .

Theorem 3.4 (See Theorem A in [37]). Every Hall subgroup of G is propermutable in G if and only if G is a supersoluble group such that $D = G^{\pi}$ is an abelian complemented subgroup of G , for any non-empty set π of primes, every π -element of G induces a power automorphism on the Hall π' -subgroup of D and D is a p' -group for all primes p satisfying $(p-1, |G|) = 1$.

A group G is said to be π -separable if every chief factor of G is either a π -group or a π' -group. Every π -separable group G has a series

$$1 = P_0(G) \leq M_0(G) < P_1(G) < M_1(G) < \dots < P_t(G) \leq M_t(G) = G$$

such that

$$M_i(G) / P_i(G) = O_{\pi}(G / P_i(G))$$

($i = 0, 1, \dots, t$) and

$$P_{i+1}(G) / M_i(G) = O_{\pi}(G / M_i(G))$$

($i = 1, \dots, t$).

The number t is called the π -length of G and denoted by $l_{\pi}(G)$ (see [39, p. 249]).

Theorem 3.5 (See Theorem 3.1 in [5]). Let H be a Hall subgroup of G and $\pi = \pi(H)$. Suppose that H is quasipermutable in G .

(I) If $p > q$ for all primes p and q such that $p \in \pi$ and q divides $|G : N_G(H)|$, then H is normal in G .

(II) If H is supersoluble, then G is π -soluble.
 (III) If G is π -separable, then the following holds:

(i) $H' \leq O_\pi(G)$. If, in addition, $N_G(H)$ is nilpotent, then $G' \cap H \leq O_\pi(G)$.

(ii) $l_\pi(G) \leq 2$ and $l_{\pi'}(G) \leq 2$.

(iii) If for some prime $p \in \pi'$ a Hall π' -subgroup E of G is p -supersoluble, then G is p -supersoluble.

Corollary 3.6 (See [13, Theorem]). Let P be a Sylow p -subgroup of G . If P is semi-normal in G , then the following statements hold:

(i) G is p -soluble and $P' \leq O_p(G)$.

(ii) $l_p(G) \leq 2$.

(iii) If for some prime $q \in p'$ a Hall p' -subgroup of G is q -supersoluble, then G is q -supersoluble.

Corollary 3.7 (See [40, Theorem]). If a Sylow p -subgroup P of G , where p is the largest prime dividing $|G|$, is semi-normal in G , then P is normal in G .

Theorem 3.8 (See Theorem E in [37]). If every Sylow subgroup P of G is propermutable in its normal closure P^G , then G is supersoluble.

Corollary 3.9 (See [40, Theorem 5]). If every Sylow subgroup of G is semi-normal in G , then G is supersoluble.

Theorem 3.10 (See Theorem F in [37]). Let $X = F(G)$ be the Fitting subgroup of G and H a Hall X -propermutable subgroup of G . If $p > q$ for all primes p and q such that p divides $|H|$ and q divides $|G:H|$, then H is normal in G .

Theorem 5.4 in [1] is equivalent to the following special case of Theorem 3.10.

Corollary 3.11. Let $X = F(G)$ be the Fitting subgroup of G and H a Hall X -semipermutable subgroup of G . If $p > q$ for all primes p and q such that p divides $|H|$ and q divides $|G:H|$, then H is normal in G .

4 Groups with S -quasipermutable maximal subgroups of Sylow subgroups

Let \mathfrak{F} be a class of groups. If $1 \in \mathfrak{F}$, then we write $G^\mathfrak{F}$ to denote the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{F}$. The class \mathfrak{F} is said to be a formation if either $\mathfrak{F} = \emptyset$ or $1 \in \mathfrak{F}$ and every homomorphic image of $G/G^\mathfrak{F}$ belongs to \mathfrak{F} for any group G . The formation \mathfrak{F} is said to be saturated if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. A subgroup H of G is said to be an \mathfrak{F} -covering subgroup of G provided $H \in \mathfrak{F}$ and $E = E^\mathfrak{F}H$ for any

subgroup E of G containing H . By the Gaschütz theorem [31, VI, 9.5.4 and 9.5.6], for any saturated formation \mathfrak{F} , every soluble group G has an \mathfrak{F} -covering subgroup and any two \mathfrak{F} -covering subgroups of G are conjugate.

Theorem 4.1 (See Theorem C in [5]). Let \mathfrak{F} be a saturated formation containing all nilpotent groups. Suppose that G is soluble and let $\pi = \pi(C) \cap \pi(G^\mathfrak{F})$, where C is an \mathfrak{F} -covering subgroup of G . If every maximal subgroup of every Sylow p -subgroup of G is S -quasipermutable in G for all $p \in \pi$, then $G^\mathfrak{F}$ is a Hall subgroup of G .

Theorem 4.2 (See Theorem D in [5]). Let \mathfrak{F} be a saturated formation containing all supersoluble groups and $\pi = \pi(F^*(G^\mathfrak{F}))$. If $G^\mathfrak{F} \neq 1$, then for some $p \in \pi$ some maximal subgroup of a Sylow p -subgroup of G is not S -quasipermutable in G .

In this theorem $F^*(G^\mathfrak{F})$ denotes the generalized Fitting subgroup of $G^\mathfrak{F}$, that is, the product of all normal quasinilpotent subgroups of $G^\mathfrak{F}$.

The proofs of Theorems 4.1 and 4.2 consists of many steps and the following result is one of the main stages of it.

Theorem 4.3 (See Proposition in [5]). Let E be a normal subgroup of G and P a Sylow p -subgroup of E such that $|P| > p$.

(i) If every member V of some fixed $\mathcal{M}_p(P)$ is S -quasipermutable in G , then E is p -supersoluble.

(ii) If every maximal subgroup of P is S -quasipermutable in G , then every chief factor of G between E and $O_{p'}(E)$ is cyclic.

(iii) If every maximal subgroup of every Sylow subgroup of E is S -quasipermutable in G , then every chief factor of G below E is cyclic.

In this theorem we write $\mathcal{M}_p(G)$, by analogy with [7], to denote a set of maximal subgroups of G such that $\Phi(G)$ coincides with the intersection of all subgroups in $\mathcal{M}_p(G)$.

Finally, consider some applications of Theorem 4.3.

Lemma 4.4 (See Lemma 5.4 in [5]). Let E be a normal subgroup of G and P a Sylow p -subgroup of E such that $(p-1, |G|) = 1$. If either P is cyclic or G is p -supersoluble, then E is p -nilpotent and $E/O_{p'}(E) \leq Z_\infty(G/O_{p'}(E))$.

The following lemma is well-known (see for example Lemma 2.1.6 in [33]).

Lemma 4.5. If G is p -supersoluble and $O_{p'}(G) = 1$, then p is the largest prime dividing

$|G|$, G is supersoluble and $F(G) = O_p(G)$ is a Sylow p -subgroup of G .

From Theorem 4.3 and Lemma 4.4 we get

Corollary 4.6 (See Theorem 1.1 in [7]). *Let P be a Sylow p -subgroup of G , where p is the smallest prime dividing $|G|$. If every number V of some fixed $\mathcal{M}_\varphi(P)$ is SS-quasinormal in G , then G is p -nilpotent.*

Corollary 4.7. *Let P be a Sylow p -subgroup of G . If $N_G(P)$ is p -nilpotent and every number V of some fixed $\mathcal{M}_\varphi(P)$ is S -quasipermutable in G , then G is p -nilpotent.*

Proof. If $|P| = p$, then G is p -nilpotent by Burnside's theorem [31, IV, 2.6]. Otherwise, G is p -supersoluble by Theorem 4.3. The hypothesis holds for $G/O_{p'}(G)$ by Lemma 1.2, so in the case, where $O_{p'}(G) \neq 1$, $G/O_{p'}(G)$ is p -nilpotent by induction. Hence G is p -nilpotent. Therefore we may assume that $O_{p'}(G) = 1$. But then, by Lemma 4.5, P is normal in G . Hence G is p -nilpotent by hypothesis.

From Corollary 4.7 we get

Corollary 4.8 (See Theorem 1.2 in [7]). *Let P be a Sylow p -subgroup of G . If $N_G(P)$ is p -nilpotent and every number V of some fixed $\mathcal{M}_\varphi(P)$ is SS-quasinormal in G , then G is p -nilpotent.*

Corollary 4.9. *Let P be a Sylow p -subgroup of G . If G is p -soluble and every number V of some fixed $\mathcal{M}_\varphi(P)$ is S -quasipermutable in G , then G is p -supersoluble.*

Proof. In the case, when $|P| = p$, this directly follows from the p -solubility of G . If $|P| > p$, this corollary follows from Theorem 4.3.

The next fact follows from Corollary 4.9.

Corollary 4.10 (See Theorem 1.3 in [7]). *Let P be a Sylow p -subgroup of G . If G is p -soluble and every number V of some fixed $\mathcal{M}_\varphi(P)$ is SS-quasinormal in G , then G is p -supersoluble.*

Corollary 4.11. *If, for every prime p dividing $|G|$ and $P \in \text{Syl}_p(G)$, every number V of some fixed $\mathcal{M}_\varphi(P)$ is S -quasipermutable in G , then G is supersoluble.*

Proof. Let p be the smallest prime dividing $|G|$. Then G is p -nilpotent by Corollary 4.6, so G is soluble by Feit-Thompson's theorem. Hence G is supersoluble by Corollary 4.9.

From Corollary 4.11 we get

Corollary 4.12 (See Theorem 1.4 in [7]). *If, for every prime p dividing $|G|$ and $P \in \text{Syl}_p(G)$,*

every number V of some fixed $\mathcal{M}_\varphi(P)$ is SS-quasinormal in G , then G is supersoluble.

A chief factor H/K of G is called \mathfrak{F} -central in G provided $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. The symbol $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ denotes the product of all normal subgroups E of G such that every chief factor of G below E is \mathfrak{F} -central.

Lemma 4.13 (See Theorem B in [41]). *Let \mathfrak{F} be any formation and E a normal subgroup of G . If $F^*(E) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, then $E \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Corollary 4.14 *Let \mathfrak{F} be a saturated formation containing all supersoluble groups and $X \leq E$ normal subgroups of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that every maximal subgroup of any non-cyclic Sylow subgroup of X is S -quasipermutable in G . If either $X = E$ or $X = F^*(E)$, then $G \in \mathfrak{F}$.*

The following results are special cases of Corollary 4.14.

Corollary 4.15 (See Theorem 1.5 in [7]). *Let \mathfrak{F} be a saturated formation containing all supersoluble groups and E a normal subgroup of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that every maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of E is SS-quasinormal in G . Then $G \in \mathfrak{F}$.*

Corollary 4.16 (See Theorem 3.2 in [11]). *Let E be a normal subgroup of G such that G/E is supersoluble. Suppose that every maximal subgroup of every Sylow subgroup of $F^*(E)$ is SS-quasinormal in G . Then G is supersoluble.*

Corollary 4.17 (See Theorem 3.3 in [11]). *Let \mathfrak{F} be a saturated formation containing all supersoluble groups and E a normal subgroup of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that every maximal subgroup of every Sylow subgroup of $F^*(E)$ is SS-quasinormal in G . Then $G \in \mathfrak{F}$.*

Corollary 4.18 (See Theorem 3.2 in [42]). *Let \mathfrak{F} be a saturated formation containing all supersoluble groups and E a normal subgroup of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. If all maximal subgroups of $F^*(E)$ are S -permutable in G , then $G \in \mathfrak{F}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 215. – P. 31–41.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
3. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – Vol. 125. – P. 1–16.
4. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

5. Yi, X. Some new characterizations of PST -groups / X. Yi, A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2014. – <http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.10.01>.
6. Yi, X. On S -propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A.N. Skiba // *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* – (to appear).
7. Li, S. The influence of SS -quasinormality of some subgroups on the structure of finite group / S. Li, Z. Shen, J. Liu, X. Liu // *J. Algebra*. – 2008. – Vol. 319. – P. 4275–4287.
8. Chen, Ch. Generalization of theorem Srinivasan / Ch. Chen // *J. Southwest China Normal Univ.* – 1987. – Vol. I. – P. 1–4.
9. Gorenstein, D. *Finite Groups* / D. Gorenstein. – New York, Evanston, London: Harper & Row Publishers, 1968.
10. Su, H. Semi-normal subgroups of finite groups / H. Su // *Math. Mag.* – 1988. – Vol. 8. – P. 7–9.
11. Li, S. SS -quasinormal subgroups of finite group / S. Li, Z. Shen, J. Liu, X. Liu // *Comm. Algebra*. – 2008. – Vol. 36. – P. 4436–4447
12. Monakhov, V.S. Finite groups with semi-normal Hall subgroup / V.S. Monakhov // *Matem. Zametki*. – 2006. – Vol. 80, №4. – P. 573–581.
13. Guo, W. Finite groups with semi-normal Sylow subgroups / W. Guo // *Acta Math. Sinica. English Series*. – 2008. – Vol. 24, №10. – P. 1751–1758.
14. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // *Science in China. Series A, Mathematics*. – 2008. – Vol. 51. – P. 827–841.
15. Brice, R.A. The Wielandt subgroup of a finite soluble groups / R.A. Brice, J. Cossey // *J. London Math. Soc.* – 1989. – Vol. 40. – P. 244–256.
16. Beidleman, J.C. Criteria for permutability to be transitive in finite groups / J.C. Beidleman, B. Brewster, D.J.S. Robinson // *J. Algebra*. – 1999. – Vol. 222. – P. 400–412.
17. Ballester-Bolinches, A. Sylow permutable subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero // *J. Algebra*. – 2002. – Vol. 251. – P. 727–738.
18. Ballester-Bolinches, A. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, H. Heineken // *Illinois J. Math.* – 2003. – Vol. 47. – P. 63–69.
19. Ballester-Bolinches, A. A local approach to certain classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, H. Heineken // *Comm. Algebra*. – 2003. – Vol. 31. – P. 5931–5942.
20. Asaad, M. Finite groups in which normality or quasinormality is transitive / M. Asaad // *Arch. Math.* – 2004. – Vol. 83, №4. – P. 289–296.
21. Ballester-Bolinches, A. Totally permutable products of finite groups satisfying SC or PST / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // *Monatsh. Math.* – 2005. – Vol. 145. – P. 89–93.
22. Lukyanenko, V.O. Finite groups in which τ -quasinormality is a transitive relation / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // *Rend. Semin. Univ. Padova*. – 2010. – Vol. 124. – P. 231–246.
23. Beidleman, J.C. Subnormal, permutable, and embedded subgroups in finite groups / J.C. Beidleman, M.F. Ragland // *Central Eur. J. Math.* – 2011. – Vol. 9, №4. – P. 915–921.
24. *Finite solvable groups in which semi-normality is a transitive relation* / A. Ballester-Bolinches [et al.] // *Beitr. Algebra Geom.* – DOI 10.1007/s13366-012-0099-1.
25. Ballester-Bolinches, A. Some new characterizations of solvable PST -groups / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, A.D. Feldman // *Ricerche mat.* – DOI 10.1007/s11587-012-0130-8.
26. Li, Y. Finite groups in which (S) -semipermutability permutability is a transitive relation / Y. Li, L. Wang, Y. Wang // *Internat. J. Algebra*. – 2008. – Vol. 2, №3. – P. 143–152.
27. *Some Characterizations of Finite Groups in which Semipermutability is a Transitive Relation* / K. Al-Sharo [et al.] // *Forum Math.* – 2010. – Vol. 22. – P. 855–862.
28. Guo, W. Criteria of Existence of Hall Subgroups in Non-soluble Finite Groups / W. Guo, A.N. Skiba // *Acta Math. Sinica*. – 2010. – Vol. 26, №2. – P. 295–304.
29. Guo, W. New criteria of existence and conjugacy of Hall subgroups of finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2011. – Vol. 139. – P. 2327–2336.
30. Wei, X.B. On SS -quasinormal subgroups and the structure of finite groups / X.B. Wei, X.Y. Guo // *Science China Mathematics*. – 2011. – Vol. 54, №3. – P. 449–456.
31. Huppert, B. *Endliche Gruppen I* / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.
32. Doerk, K. *Finite Soluble Groups* / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
33. Ballester-Bolinches, A. *Products of Finite Groups* / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010.
34. Zacher, G. I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali / G. Zacher // *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* – 1964. – Vol. 8, №37. – P. 150–154.
35. Agrawal, R.K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R.K. Agrawal // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1975. – Vol. 47. – P. 77–83.
36. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // *J. Austral. Math. Soc.* – 2001. – Vol. 70. – P. 143–159.

-
37. Yi, X. Propermutable characterizations of soluble PT -groups and PST -groups / X. Yi, A.N. Skiba // Science China. Mathematics. – (submitted).
38. Shemetkov, L.A. Formations of Finite Groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, 1978.
39. Robinson, D.J.S. A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 1982.
40. Podgornaya, V.V. Seminormal subgroups and supersolubility of finite groups / V.V. Podgornaya // Vesti NAN Belarus. Ser. Phys.-Math. Sciences. – 2000. – Vol. 4. – P. 22–26.
41. Skiba, A.N. On the \mathfrak{F} -hypercentre and the intersection of all \mathfrak{F} -maximal subgroups of a finite group / A.N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2012. – Vol. 216, №4. – P. 789–799.
42. Li, Y. The influence of π -quasinormality of some subgroups of a finite group / Y. Li, Y. Wang // Arch. Math. – 2003. – Vol. 81. – P. 245–252.

The research of the first author is supported by a NNSF grant of China (Grant # 11101369) and the Science Foundation of Zhejiang Sci-Tech University under grant 1013843-Y. The research of the second author is supported by the State Program of Fundamental Researches of the Republic Belarus (Grant 20112850).

Поступила в редакцию 20.05.13.

УДК 512.542

РАЗРЕШИМЫЕ ГИПЕРРАДИКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

SOLUBLE HYPERRADICAL FORMATIONS

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel

В работе устанавливается, что каждая разрешимая гиперрадикальная формация является наследственной и предлагается описание всех разрешимых гиперрадикальных формаций.

Ключевые слова: формация, гиперрадикальная формация, разрешимая конечная группа.

It is established that every soluble hyperradical formation is hereditary. The description of all soluble hyperradical formation is given.

Keywords: formation, hyperradical formation, soluble finite group.

Введение

В [1] описаны все разрешимые гиперрадикальные формации, т. е. разрешимые формации \mathfrak{F} , замкнутые относительно взятия нормальных подгрупп и порождений \mathfrak{F} -субнормальными подгруппами. В основе доказательства, предложенного в [1], лежит анализ минимальных не \mathfrak{F} -групп для разрешимой гиперрадикальной формации \mathfrak{F} и редукция рассматриваемого случая к формациям Шеметкова – формациям \mathfrak{F} , для которых любая минимальная не \mathfrak{F} -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

В данной работе для описания разрешимых гиперрадикальных формаций предлагается подход, основанный на теореме Брайса и Косси из [2] о насыщенности разрешимой наследственной формации Фиттинга и редукции к работе [3], где описаны все решеточные наследственные насыщенные формации.

Отметим, что гиперрадикальные формации играют важную роль в различных задачах теории конечных групп (см., например, [4], [5]). В частности, они используются при решении проблемы перечисления всех решеточных формаций, т. е. формаций \mathfrak{F} , для которых в каждой конечной группе множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп образует подрешетку в решетке всех подгрупп.

1 Основные определения и предварительные результаты

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [6] и [7].

Напомним, что формация – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Если \mathfrak{F} – непустая формация, то через G^δ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа G^δ называется *\mathfrak{F} -корадикалом* группы G).

Подгруппа H группы G называется *\mathfrak{F} -субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Мы используем запись $s\mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F}$) для обозначения класса всех групп G , для которых $G \subseteq H \in \mathfrak{F}$ (класса всех групп G таких, что $G \triangleleft H \in \mathfrak{F}$). Если $s\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$), то класс \mathfrak{F} называется *наследственным* (*нормально наследственным*).

Нам понадобится следующая информация о свойствах \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп. Множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп группы G будем обозначать через $sn_{\mathfrak{F}}(G)$.

Лемма 1.1 ([4], лемма 3.1.3). Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Если H – подгруппа группы G и $G^\delta \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$.

Формация \mathfrak{F} называется *гиперрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) \mathfrak{F} – нормально наследственная формация;
- 2) любая группа $G = \langle A, B \rangle$, где A и B –

\mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы из G , принадлежит \mathfrak{F} .

Класс \mathfrak{F} называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) \mathfrak{F} – нормально наследственный класс;
- 2) из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга – это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Следующая лемма устанавливает связь между гиперрадикальными формациями и формациями Фиттинга.

Лемма 1.2. *Любая наследственная гиперрадикальная формация является формацией Фиттинга.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – гиперрадикальная формация. Тогда из определения следует, что она является нормально наследственным классом.

Пусть теперь $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Так как

$$G/A = AB/A \cong A/A \cap B$$

и $A \in \mathfrak{F}$, то $G^\delta \subseteq A$. На основании леммы 1.1 справедливо включение $A \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Аналогично показывается, что $B \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Теперь из определения гиперрадикальной формации следует, что группа $G = \langle A, B \rangle$ принадлежит \mathfrak{F} . Лемма доказана.

Пусть \mathfrak{S} – формация всех разрешимых групп и \mathfrak{S}_π – формация всех разрешимых π -групп (π – некоторое множество простых чисел). В дальнейшем под разрешимой формацией будет пониматься любая подформация формации \mathfrak{S} .

Следующий результат известен как теорема Брайса – Косси.

Лемма 1.3 [2]. *Любая разрешимая наследственная формация Фиттинга является насыщенной.*

Лемма 1.4. *Любая разрешимая наследственная гиперрадикальная формация является насыщенной.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – наследственная гиперрадикальная формация. Ввиду леммы 1.2 формация \mathfrak{F} является формацией Фиттинга. Значит, на основании леммы 1.3 она является насыщенной. Лемма доказана.

Если M – подгруппа группы G , то через $Core_G(M)$ обозначается *ядро* подгруппы M в группе G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в подгруппе M .

Лемма 1.5 [6, теорема А.16.6]. *Пусть H и M – несопряженные максимальные подгруппы разрешимой группы G . Если $Core_G(M)$ не содержится в $Core_G(H)$, то подгруппа $H \cap M$ максимальна в подгруппе H .*

В доказательстве следующей леммы мы опираемся на известный результат Брайанта,

Брайса и Косси из [8], который сформулируем в виде леммы.

Лемма 1.6 [8]. *Пусть S – такая подгруппа группы G , что $SF(G) = G$. Если группа G принадлежит формации \mathfrak{F} , то подгруппа S также принадлежит формации \mathfrak{F} .*

Теорема 1.1. *Любая разрешимая гиперрадикальная формация является наследственной.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая гиперрадикальная формация. Предположим, что она не является наследственной. Тогда в формации \mathfrak{F} найдутся группы, обладающие подгруппами, не принадлежащими \mathfrak{F} . Из всех таких групп выберем группу G наименьшего порядка. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ и в группе G имеется некоторая подгруппа M , которая не принадлежит формации \mathfrak{F} . Ввиду выбора группы G можем полагать, что M – максимальная подгруппа группы G .

Если M не содержит $F(G)$, то ввиду леммы 1.6 подгруппа M принадлежит формации \mathfrak{F} . Противоречие. Значит, $F(G) \subseteq M$.

Пусть H – максимальная подгруппа группы G , не содержащая $F(G)$. Очевидно, подгруппы M и H не являются сопряженными. Рассмотрим подгруппу $H \cap M$. Так как $F(G)$ не содержится в H и $F(G) \leq Core_G(M)$, то $Core_G(M)$ не содержится в $Core_G(H)$. Ввиду леммы 1.5 подгруппа $H \cap M$ максимальна в H . Так как $H \in \mathfrak{F}$ и $|H| < |G|$, то $H \cap M \in \mathfrak{F}$. Кроме того, из $M \in \mathfrak{F}$ следует также, что $H^\delta \subseteq H \cap M$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то подгруппа G^δ содержится в H . Следовательно, $H \cap M$ – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G .

Так как формация \mathfrak{F} является гиперрадикальной, то по определению она является нормально наследственной. Поэтому из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $F(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $|G/F(G)| < |G|$, то ввиду выбора группы G все подгруппы группы $G/F(G)$ принадлежат формации \mathfrak{F} . Пусть

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = F(G)$$

– произвольная максимальная цепь подгрупп, соединяющая подгруппу $F(G)$ с группой G . Так как $H_{i-1}/F(G) \in \mathfrak{F}$, то $(H_{i-1})^\delta \subseteq F(G) \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, подгруппа $F(G)$ является \mathfrak{F} -субнормальной в группе G .

Итак, подгруппы $H \cap M$ и $F(G)$ \mathfrak{F} -субнормальны в G и принадлежат формации \mathfrak{F} . Кроме того,

$$\langle H \cap M, F(G) \rangle = (H \cap M)F(G) =$$

$$= HF(G) \cap M = M.$$

Так как формация \mathfrak{F} является гиперрадикальной, то $M \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Таким образом, все максимальные подгруппы группы G принадлежат формации \mathfrak{F} , а значит, формация \mathfrak{F} является наследственной. Теорема доказана.

Замечание 1.1. Следуя [9], будем называть формацию \mathfrak{F} квазинаследственной, если из условий $G \in \mathfrak{F}$ и $G = SF^*(G)$ всегда следует, что подгруппа S принадлежит формации \mathfrak{F} (здесь через $F^*(G)$ обозначается квазинильпотентный радикал группы G – наибольшая нормальная квазинильпотентная подгруппа группы G ; обзор ключевых свойств подгруппы $F^*(G)$ можно найти в [10]; из леммы 1.6 следует, что каждая разрешимая формация является квазинаследственной). По аналогии с теоремой 1.1 можно показать, что любая квазинаследственная (а не только разрешимая) гиперрадикальная формация является наследственной.

Лемма 1.7. Любая разрешимая гиперрадикальная формация является насыщенной.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая гиперрадикальная формация. Тогда ввиду теоремы 1.1 она является наследственной. Отсюда на основании леммы 1.4 формация \mathfrak{F} является насыщенной. Лемма доказана.

2 Структура разрешимой гиперрадикальной формации

Основная цель работы – доказательство теоремы, описывающей все разрешимые гиперрадикальные формации. Доказательству теоремы предположим необходимую информацию о строении решеточных формаций.

Напомним, что формация \mathfrak{F} называется решеточной, если множество $sn_{\mathfrak{F}}(G)$ всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе G .

Следующий результат из [3] в случае наследственных насыщенных формаций устанавливает связь между гиперрадикальными и решеточными формациями.

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) формация \mathfrak{F} является решеточной;
- 2) формация \mathfrak{F} является гиперрадикальной.

Нам понадобится следующее описание разрешимых наследственных насыщенных решеточных формаций из [3] (см. также [12]). Напомним, что если \mathfrak{X} – некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в

виде прямого произведения $H_1 \times \dots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$.

Лемма 2.2. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда формация \mathfrak{F} является решеточной, когда существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая формация. Тогда и только тогда формация \mathfrak{F} является гиперрадикальной, когда существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая формация. Если формация \mathfrak{F} является гиперрадикальной, то ввиду теоремы 1.1 она является наследственной. Кроме того, на основании леммы 1.7 формация \mathfrak{F} является насыщенной. Значит, ввиду леммы 2.1 она является решеточной. Поэтому на основании леммы 2.2 существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.

Пусть теперь для формации \mathfrak{F} существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$. Очевидно, формация \mathfrak{F} разрешима. Кроме того, на основании леммы 3.1.13 из [4] она является наследственной и насыщенной. Поэтому ввиду леммы 2.2 она является решеточной. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что формация \mathfrak{F} является гиперрадикальной. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев, А.Ф. Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6. – С. 62–70.
2. Bryce, R.A. Fitting formations of finite soluble groups / R.A. Bryce, R. Cossey // Math. Z. – 1972. – Vol. 127, № 3. – P. 217–223.
3. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев : Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.
4. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 256 с.

-
5. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.
6. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
7. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
8. *Bryant, R.* The formation generated by a finite group / R. Bryant, R.A. Bryce, B. Hartley // Bull. Austral. Math. Soc. – 1970. – Vol. 2, № 3. – P. 347–357.
9. *Васильев, А.Ф.* Одна задача теории формаций конечных групп / А.Ф. Васильев // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62, № 1. – С. 52–58.
10. *Каморников, С.Ф.* О некоторых свойствах формации квазинильпотентных групп / С.Ф. Каморников // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, № 2. – С. 71–77.
11. *Каморников, С.Ф.* Об одном классе решеточных подгрупповых функторов / С.Ф. Каморников // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89, № 3. – С. 355–364.
12. *Ballester-Bolinches, A.* On the lattice of \mathfrak{F} -subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148. – P. 42–52.

Поступила в редакцию 24.07.13.

УДК 512.567.5

***n*-АРНЫЙ АНАЛОГ АФФИННОЙ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА**

Д.И. Кирилюк

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

***n*-ARY ANALOG OF AFFINE DEZARG THEOREM**

D.I. Kirilyuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получен *n*-арный аналог аффинной теоремы Дезарга, разработан новый метод установления справедливости векторных равенств на *n*-арной группе, который основывается на определении нейтральной последовательности.

Ключевые слова: полуабелева *n*-арная группа, вектор *n*-арной группы.

n-Ary analog of affine Dezag theorem is determined. New method of relaxation to vector equations on *n*-ary group is received.

Keywords: semiabelian *n*-ary group, vector of *n*-ary group.

Введение

Известно, что понятие *n*-арной группы было введено в 1928 году в работе Дернте [1], и многие известные математики посвятили свои труды разработке теории *n*-арных групп [2]–[6], в то же время эта теория в настоящее время уступает в своем развитии теории групп. Это связано, в том числе, с кажущейся сложностью и громоздкостью выкладок при доказательстве различных утверждений и теорем. Преодолению этих трудностей способствует применение геометрических методов, поскольку в этом случае аналитические формулы приобретают наглядность, тем самым их восприятие значительно упрощается. Поэтому разработка новых методов исследования *n*-арных групп через построение и описание объектов аффинной геометрии является достаточно актуальной задачей.

В представляемой работе на основании исследований С.А. Русакова и Ю.И. Кулаженко, заключающихся в разработке способов построения элементов аффинной геометрии на *n*-арной группе (см., например, [7]–[11]), получен *n*-арный аналог аффинной теоремы Дезарга. Отметим, что при доказательстве этого результата был разработан и использован новый метод установления справедливости векторных равенств на *n*-арной группе, который основывается на определении нейтральной последовательности.

1 Определения и понятия, используемые в работе

Напомним следующие определения, которые можно найти в [3], [7].

Определение 1.1. Универсальную алгебру $\langle G, () \rangle$ с одной *n*-арной операцией $() : G^n \rightarrow G$ ($n \geq 2$) называют *n*-арной группой, если выполняются следующие условия:

1) операция $()$ ассоциативна на G , т. е.

$$\begin{aligned} ((a_1 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{2n-1}) &= \\ &= (a_1 \dots a_i (a_{i+1} \dots a_{i+n}) a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}); \end{aligned}$$

2) каждое из уравнений

$$(a_1 \dots a_{i-1} x_i a_{i+1} \dots a_n) = b$$

однозначно разрешимо в G относительно x_i для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in G$.

Символ \overline{x} означает последовательность $\overline{\overbrace{xx \dots x}^{2n-4}}$. Элемент $a^{[-2]}$ является решением уравнения $a = (\overline{x} a)^{2n-2}$.

Определение 1.2. *n*-Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности x_i^n из G справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Определение 1.3. Последовательность $e_1 \dots e_{k(n-1)}$ ($k \geq 1$) элементов *n*-арной группы G называется нейтральной, если

$$(e_1 \dots e_{k(n-1)} a) = (a e_1 \dots e_{k(n-1)}) = a$$

для любого $a \in G$.

С.А. Русаковым в [3] было доказано, что $\overline{xx^{[-2]}}$ – нейтральная последовательность для любого $x \in G$.

Определение 1.4. Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком *n*-арной группы G и обозначают \overline{ab} .

Определение 1.5. Говорят, что направленные отрезки \overline{ab} и \overline{cd} *n*-арной группы G равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если $\langle a, c, d, b \rangle$ – параллелограмм, т. е. $a = (b d^{[-2]} d c)^{2n-4}$.

Пусть \overline{V} – множество всех направленных отрезков n -арной группы G . Из предложения 1 [7] следует, что бинарное отношение $=$ на множестве \overline{V} является отношением эквивалентности и разбивает множество \overline{V} на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком \overline{ab} , имеет вид

$$K(\overline{ab}) = \{ \overline{uv} \mid \overline{ab} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab} \}.$$

Под вектором \overline{ab} n -арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т. е. $\overline{ab} = K(\overline{ab})$.

Определение 1.6. Пусть $\overline{p} = \overline{ab}$ и $\overline{q} = \overline{bc}$ вектора n -арной группы G . Суммой векторов \overline{p} и \overline{q} называют вектор, обозначаемый $\overline{p+q}$ и определяемый так $\overline{p+q} = \overline{ac}$ или $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$.

Другие определения и понятия, используемые в работе, смотри в [3], [7].

В представленном ниже результате используется теорема из [8] о сложении векторов n -арной группы, доказанная Ю.И. Кулаженко. Приведем ее формулировку.

Теорема 1.1. Пусть $G = \langle X, ()^{[-2]} \rangle$ – произвольная n -арная группа. Для любых точек $a, b, c, d \in G$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \overline{ab} + \overline{cd} &= \overline{a(bc^{[-2]} c^{\overline{2n-4}} d)}, \\ \overline{ab} + \overline{cd} &= \overline{(cb^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a)d)}. \end{aligned}$$

2 n -Арный аналог аффинной теоремы Де-зарга

Теорема 2.1. Пусть $\langle a, b, c \rangle, \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ – произвольные треугольники полуабелевой n -арной rs -группы G , $t_1, t_2, t_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in Q^{(r)}$ и не равны 0. Если существует точка $a_0 \in G$ такая, что

$$\begin{cases} \overline{a_0 a} = t_1 \overline{a_0 a_1} \\ \overline{a_0 b} = t_2 \overline{a_0 b_1} \\ \overline{a_0 c} = t_3 \overline{a_0 c_1} \end{cases}, \quad (2.1)$$

и выполняются

$$\begin{cases} \overline{ab} = \lambda_1 \overline{a_1 b_1} \\ \overline{ac} = \lambda_2 \overline{a_1 c_1} \end{cases}, \quad (2.2)$$

то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\overline{bc} = \lambda \overline{b_1 c_1}$.

Доказательство. Пусть треугольник $\langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ такой, что его вершины удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} \overline{a_0 a_2} = \lambda_1 \overline{a_0 a_1} \\ \overline{a_0 b_2} = \lambda_1 \overline{a_0 b_1} \\ \overline{a_0 c_2} = \lambda_1 \overline{a_0 c_1} \end{cases}. \quad (2.3)$$

Умножим первое равенство полученной системы (2.3) на (-1) и прибавим ко второму равенству.

При умножении вектора на (-1) учитываем равенство $-\overline{xu} = \overline{ux}$, которое справедливо для любых $x, y \in G$,

$$\overline{a_2 a_0} + \overline{a_0 b_2} = \lambda_1 \overline{a_1 a_0} + \lambda_1 \overline{a_0 b_1}.$$

Вынесем λ_1 за скобки

$$\overline{a_2 a_0} + \overline{a_0 b_2} = \lambda_1 (\overline{a_1 a_0} + \overline{a_0 b_1}).$$

По определению 1.7 имеем

$$\overline{a_2 b_2} = \lambda_1 \overline{a_1 b_1}. \quad (2.4)$$

Учитывая второе равенство системы (2.2) из условия теоремы и равенство (2.4), имеем

$$\overline{a_2 b_2} = \overline{ab}.$$

Перенесем все слагаемые в левую часть

$$\overline{a_2 b_2} - \overline{ab} = \overline{0},$$

что равносильно $\overline{a_2 b_2} + \overline{ba} = \overline{0}$.

Далее к левой части полученного равенства применяем теорему 1.1

$$a_2 (b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a) = \overline{0}. \quad (2.5)$$

Из (2.5) по определению 1.5 получаем

$$a_2 = (b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a). \quad (2.6)$$

Умножим (2.6) слева на $a_2 a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}}$

$$(a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} a_2) = (a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a).$$

Так как $a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} a_2$ – нейтральная (см. определение 1.3), то

$$a = (a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a).$$

Из полученного равенства по определению следует, что последовательности

$$a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a \text{ и } a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a$$

– нейтральные. Поскольку G полуабелева, имеем

$$a = ((a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} b_2) b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a),$$

$$a = ((b_2 a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} a) b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a),$$

$$a = (a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} (b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a)),$$

$$a = (a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} (a b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} b_2)).$$

Следовательно, последовательности

$$b_2 a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} a b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a, \quad a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} a b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} b_2$$

также нейтральные. А нейтральность последовательностей

$$a a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a, \quad a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} b_2 b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} a,$$

$$b_2 a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} a b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} b, \quad a_2^{[-2]} a_2^{\overline{2n-4}} a b^{[-2]} b^{\overline{2n-4}} b_2$$

возможна в двух случаях:

$$1) a = a_2 \text{ и } b = b_2;$$

$$2) a_2 = b_2 \text{ и } a = b.$$

Покажем, что из второго случая (а именно только из $a = b$) следует требуемое равенство.

Первое равенство системы (2.2) условия теоремы превращается в $\vec{0} = \lambda_1 \overline{a_1 b_1}$. Откуда следует, что $a_1 = b_1$. Тогда второе равенство системы (2.2) примет вид $\overline{bc} = \lambda_2 \overline{b_1 c_1}$.

Далее будем рассматривать первый случай. Подставляя $a_2 = a$ и $b_2 = b$ в систему (2.3), имеем

$$\begin{cases} \overline{a_0 a} = \lambda_1 \overline{a_0 a_1} \\ \overline{a_0 b} = \lambda_1 \overline{a_0 b_1} \end{cases}$$

Учитывая условия теоремы (2.1), получаем, что

$$t_1 = t_2 = \lambda_1. \quad (2.7)$$

Пусть треугольник $\langle a_3, b_3, c_3 \rangle$ такой, что его вершины удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} \overline{a_0 a_3} = \lambda_2 \overline{a_0 a_1} \\ \overline{a_0 b_3} = \lambda_2 \overline{a_0 b_1} \\ \overline{a_0 c_3} = \lambda_2 \overline{a_0 c_1} \end{cases} \quad (2.8)$$

Первое равенство системы (2.8) умножим на (-1) и прибавим к третьему, имеем

$$\overline{a_3 a_0} + \overline{a_0 c_3} = \lambda_2 \overline{a_1 a_0} + \lambda_2 \overline{a_0 c_1}. \quad (2.9)$$

Выносим в правой части равенства (2.9) λ_2 за скобки, а в левой используем определение 1.6, тогда получаем

$$\overline{a_3 c_3} = \lambda_2 (\overline{a_1 a_0} + \overline{a_0 c_1}),$$

и, следовательно

$$\overline{a_3 c_3} = \lambda_2 \overline{a_1 c_1}. \quad (2.10)$$

Так как по условию теоремы $\overline{ac} = \lambda_2 \overline{a_1 c_1}$, то (2.10) примет вид

$$\overline{a_3 c_3} = \overline{ac}.$$

Переносим все слагаемые в левую часть

$$\overline{a_3 c_3} - \overline{ac} = \vec{0},$$

и с учетом равенства $-\overline{ac} = \overline{ca}$, имеем

$$\overline{a_3 c_3} + \overline{ca} = \vec{0}. \quad (2.11)$$

По теореме 1.1 из (2.11) следует

$$a_3 (c_3 c^{[-2]} c a) = \vec{0},$$

что в силу определения 1.5 равносильно

$$a_3 = (c_3 c^{[-2]} c a). \quad (2.12)$$

Умножаем полученное равенство (2.12) слева на $a_3^{[-2]} a_3^{2n-4}$

$$(aa_3^{[-2]} a_3 a_3) = (aa_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a). \quad (2.13)$$

В равенстве (2.13) учитываем нейтральность последовательности $a_3^{[-2]} a_3 a_3$ (см. определение 1.3)

$$a = (aa_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a). \quad (2.14)$$

Из (2.14) по определению вытекает, что последовательности

$$aa_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c \quad \text{и} \quad a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a$$

– нейтральные. Поскольку G полуабелева, имеем

$$a = ((aa_3^{[-2]} a_3 a) c^{[-2]} c a),$$

$$a = ((c_3 a_3^{[-2]} a_3 a) c^{[-2]} c a),$$

$$a = (aa_3^{[-2]} a_3 (c_3 c^{[-2]} c a)),$$

$$a = (aa_3^{[-2]} a_3 (ac^{[-2]} c c_3)).$$

Следовательно, последовательности

$$c_3 a_3^{[-2]} a_3 ac^{[-2]} c,$$

$$a_3^{[-2]} a_3 ac^{[-2]} c c_3$$

также нейтральные. А нейтральность последовательностей

$$aa_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c,$$

$$a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a,$$

$$c_3 a_3^{[-2]} a_3 ac^{[-2]} c,$$

$$a_3^{[-2]} a_3 ac^{[-2]} c c_3$$

возможна в случаях:

$$1) a = a_3 \text{ и } c = c_3;$$

$$2) a_3 = c_3 \text{ и } a = c.$$

Из второго случая сразу следует требуемое равенство. Второе равенство системы (2.2) условия теоремы превращается в $\vec{0} = \lambda_2 \overline{a_1 c_1}$. Откуда следует, что $a_1 = c_1$. Тогда первое равенство системы (2.2) примет вид $\overline{cb} = \lambda_1 \overline{c_1 b_1}$, что при умножении на (-1) равносильно $\overline{bc} = \lambda_1 \overline{b_1 c_1}$.

Теперь подставим $a_3 = a$ и $c_3 = c$ в систему (2.8), получим, что $t_1 = t_3 = \lambda_2$. Из полученного равенства и (2.7) следует, что

$$t_1 = t_2 = t_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Тогда равенства (2.2) условия теоремы примут вид

$$\begin{cases} \overline{ab} = \lambda \overline{a_1 b_1} \\ \overline{ac} = \lambda \overline{a_1 c_1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \overline{ba} = \lambda \overline{b_1 a_1} \\ \overline{ac} = \lambda \overline{a_1 c_1} \end{cases}$$

Сложив оба равенства (определение 1.6), имеем

$$\overline{ba} + \overline{ac} = \lambda \overline{b_1 a_1} + \lambda \overline{a_1 c_1}.$$

Откуда

$$\overline{bc} = \lambda (\overline{b_1 a_1} + \overline{a_1 c_1}). \quad (2.15)$$

Снова, используя определение 1.6, перепишем правую часть равенства (2.15), получим

$$\overline{bc} = \lambda \overline{b_1 c_1}.$$

Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dornste, W.* Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dornste // *Math. Z.* – 1928. – Bd.29. – S. 1–19.
2. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. *Русаков, С.А.* Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1992. – 264 с.
4. *Курош, А.Г.* Общая алгебра : лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1974. – 160с.
5. *Гальмак, А.М.* n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф.Скорины, 2003. – 196 с.
6. *Гальмак, А.М.* n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. Центр БГУ, 2007. – 323 с.
7. *Русаков, С.А.* Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 182 с.
8. *Кулаженко, Ю.И.* Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // *Вопросы алгебры и прикладной математики* : сб. научн. тр. ; под редакцией С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 47–64.
9. *Кулаженко, Ю.И.* Построение фигур аффинной геометрии на n -арной группе / Ю.И. Кулаженко // *Вопросы алгебры и прикладной математики* : сб. научн. тр. ; под редакцией С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 65–82.
10. *Kulazhenko, Yu.I.* Geometry of semiabelian n -ary groups / Yu. I. Kulazhenko // *Quasigroups and Related Systems.* – 2011. – Vol. 19. – P. 265–278.
11. *Кулаженко, Ю.И.* Векторы и критерии полуабелевости n -арных групп / Ю.И. Кулаженко // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2011. – №1 (6). – С. 65–68.

Поступила в редакцию 02.09.13.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Я.Т. Мегралиев

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

ON SOLVABILITY OF AN INVERSE VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER

Y.T. Mechrallyev

Baku State University, Baku, Azerbaijan

В работе исследована одна обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной (в определенном смысле) задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, гиперболическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

In this work an inverse problem for the hyperbolic equation of second order with periodical boundary conditions is investigated. For this reason, first of all the initial problem reduces to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness is proved. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

Keywords: inverse boundary problem, hyperbolic equation, method Fourier, classic solution.

Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, хотя известно среднее значение искомого величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2], [3], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

В данной работе, следуя [5], [6], доказаны существование и единственность решения обратной краевой задачи для гиперболического

уравнения второго порядка с интегральным условием.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (1.1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (1.2)$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.5)$$

где $x_0 \in (0,1)$ – фиксированное число, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Определение 1.1. Классическим решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.5) назовем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1.1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;

3) уравнение (1.1), условия (1.2)–(1.5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1.1. Пусть $f(x,t) \in C(D_T)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$,

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0,$$

$$\int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$\varphi(x_0) = h(0), \psi(x_0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1.1)–(1.5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1 и 2 определения классического решения задачи (1.1)–(1.5), из (1.1)–(1.3) и

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.6)$$

$$h(t)a(t) + f(x_0,t) = h''(t) - u_{xx}(x_0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.7)$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.5). Интегрируя уравнение (1.1) по x от 0 до 1, при любом $0 \leq t \leq T$ имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t)dx - (u_x(1,t) - u_x(0,t)) = \\ & = a(t) \int_0^1 u(x,t)dx + \int_0^1 f(x,t)dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$, и учитывая (1.4), легко приходим к выполнению (1.6).

Далее, считая $h(t) \in C^2[0,T]$ и дифференцируя два раза (1.5), получаем:

$$u_{tt}(x_0,t) = h''(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.9)$$

Далее, из (1.1) имеем:

$$u_{tt}(x_0,t) - u_{xx}(x_0,t) = a(t)u(x_0,t) + f(x_0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.10)$$

Отсюда, с учетом (1.5) и (1.9), приходим к выполнению (1.7).

Теперь предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7). Тогда из (1.8), с учётом (1.6), находим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t)dx - a(t) \int_0^1 u(x,t)dx = 0 \\ & \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В силу (1.2) и $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$, $\int_0^1 \psi(x)dx = 0$ очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(x,0)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \\ & \int_0^1 u_t(x,0)dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Так как задача (1.11), (1.12) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$,

т. е. выполняется условие (1.4).

Далее, из (1.7) и (1.10) получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} (u(x_0,t) - h(t)) = a(t)(u(x_0,t) - h(t)) \\ & \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.13)$$

В силу (1.2) и $\varphi(x_0) = h(0)$, $\psi(x_0) = h'(0)$ имеем:

$$\begin{aligned} & u(x_0,t) - h(0) = \varphi(x_0) - h(0) = 0, \\ & u_t(x_0,t) - h'(0) = \psi(x_0) - h'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.13) и (1.14) заключаем, что выполняется условие (1.5). Лемма доказана.

2 Доказательство существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [7], что система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \quad (2.1)$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi \quad (k = 1, 2, \dots)$.

Так как система (2.1) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого классического решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) его первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \\ & (\lambda_k = 2\pi k), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx,$$

$$u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье для определения искомым коэффициентов $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) функции $u(x,t)$, из (1.1) и (1.2) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & u''_{1k}(t) + \lambda_k^2 u_{1k}(t) = F_{1k}(t; u, a) \\ & \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$u_{1k}(0) = \varphi_{1k}, \quad u'_{1k}(0) = \psi_{1k} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & u''_{2k}(t) + \lambda_k^2 u_{2k}(t) = F_{2k}(t; u, a) \\ & \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \quad u'_{2k}(0) = \psi_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.7)$$

где

$$F_{1k}(t; u, a) = a(t)u_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx,$$

$$f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \psi_{10} = \int_0^1 \psi(x) dx, \\ \varphi_{1k} &= 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \\ \psi_{1k} &= 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots), \\ F_{2k}(t; u, a) &= a(t) u_{2k}(t) + f_{2k}(t), \\ f_{2k}(t) &= 2 \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_k x dx, \\ \varphi_{2k} &= 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \\ \psi_{2k} &= 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Далее, из (2.3)–(2.7) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t-\tau) F_{10}(\tau; u, a) d\tau \quad (2.8)$$

$$(0 \leq t \leq T),$$

$$\begin{aligned} u_{ik}(t) &= \varphi_{ik} \cos \lambda_k t + \psi_{ik} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \\ &+ \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \quad (2.9) \\ (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T). \end{aligned}$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) в (2.2) для определения компоненты $u(x, t)$ классического решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t-\tau) F_{10}(\tau; u, a) d\tau + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{1k} \cos \lambda_k t + \psi_{1k} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{2k} \cos \lambda_k t + \psi_{2k} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Теперь из (1.7), с учетом (2.2), имеем:

$$\begin{aligned} a(t) &= h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(x_0, t) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_{1k}(t) \cos \lambda_k x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_{2k}(t) \sin \lambda_k x_0 \right\}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), подставим выражение (2.9) в (2.11):

$$\begin{aligned} a(t) &= h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(x_0, t) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ \varphi_{1k} \cos \lambda_k t + \psi_{1k} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left. \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ \varphi_{2k} \cos \lambda_k t + \psi_{2k} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \right\} \sin \lambda_k x_0 \left. \right\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) сведено к решению системы (2.10), (2.12) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) важную роль играет следующая

Лемма 2.1. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ – любое классическое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), то функции

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x, t) dx,$$

$$u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют системе (2.7), (2.8).

Замечание. Из леммы 2.1 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) достаточно доказать единственность решения системы (2.10), (2.12). Теперь рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^3$ [8] совокупность всех функций вида

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \\ &(\lambda_k = 2\pi k), \end{aligned}$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и

$$\begin{aligned} J_T(u) &\equiv \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J_T(u).$$

2. Через E_T^3 обозначим пространство

$B_{2,T}^3 \times C[0, T]$ вектор-функций $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}$$

Очевидно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами. Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, a) &= \tilde{u}(x, t) \equiv \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \\ \Phi_2(u, a) &= \tilde{a}(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ ($i=1, 2; k=1, 2, \dots$) и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (2.8), (2.9) и (2.12). Тогда с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0, T]} &\leq |\varphi_{10}| + T|\psi_{10}| + T\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ T^2 \|a(t)\|_{C[0, T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0, T]}, \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2T \|a(t)\|_{C[0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, 2), \quad (2.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0, T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0, T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0, T]} + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{12} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{\sqrt{6T}}{12} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left. \frac{\sqrt{6}}{12} T \|a(t)\|_{C[0, T]} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in W_2^3(0, 1)$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$.
2. $\psi(x) \in W_2^2(0, 1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$.
3. $f(x, t) \in C_{x,t}^{1,0}(D_T)$, $f_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$, $f_x(0, t) = f_x(1, t)$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Тогда из (2.13)–(2.15) получаем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0, T]} &\leq \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ T\sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ T^2 \|a(t)\|_{C[0, T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0, T]} \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\|\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} &+ 2\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2T\sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ 2T \|a(t)\|_{C[0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, 2), \quad (2.17) \\ \|\tilde{a}(t)\|_{C[0, T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0, T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0, T]} + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{6} \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6}}{6} \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \frac{\sqrt{6T}}{6} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ \left. \frac{\sqrt{6}}{12} T \|a(t)\|_{C[0, T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \right\}. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Далее, из (2.16) и (2.17) находим:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} &\leq A_1(T) + \\ &+ A_2(T) \|a(t)\|_{C[0, T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ T\sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ 4\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 4\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ 4\sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\ A_2(T) &= (T+2)T. \end{aligned}$$

Теперь из (2.18) имеем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0, T]} &\leq B_1(T) + \\ &+ B_2(T) \|a(t)\|_{C[0, T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.20) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1(T) &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0, T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0, T]} + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{6} \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \left. \frac{\sqrt{6}}{6} \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6T}}{6} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right\}, \end{aligned}$$

$$B_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0, T]} \frac{\sqrt{6}}{12} T.$$

Из неравенств (2.19) и (2.20) заключаем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0, T]} &\leq \\ &\leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0, T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.21) \end{aligned}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + B_1(T), \quad B(T) = A_2(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 1–4 и $B(T)(A(T) + 2)^2 \leq 1$. (2.22)

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет в шаре $K = K_R$ ($\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2$) из E_T^3 единственное классическое решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (2.23)$$

где $z = \{u, a\}$, а компоненты $\Phi_i (i=1,2)$ оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями (2.10), (2.12) соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3 . Аналогично (2.21) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.24)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq \quad (2.25)$$

$$\leq B(T)R \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \right).$$

Из (2.24) и (2.25), с учетом (2.22), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением (2.23), т. е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (2.9), (2.11).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ в D_T .

Теперь из (2.4) и (2.6) имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u''_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{2} \left\| f_x(x, t) + a(t)u_x(x, t) \right\|_{C[0,T]L_2(0,1)} \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u_{ii}(x, t)$ непрерывна в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7), удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x, t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6) и (1.7) и в силу леммы 2.1 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

Теорема 2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 и

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \\ & \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\ & \varphi(x_0) = h(0), \quad \psi(x_0) = h'(0). \end{aligned}$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет в шаре $K = K_R \left(\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2 \right)$ из E_T^3 единственное классическое решение.

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с периодическими краевыми условиями. С помощью этих фактов доказано существование и единственность классического решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
2. Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. Vol. 5, № 21. – P. 155–160.
3. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.
4. Нахушев, А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1982. Т. 18, №1. – С. 72–81.
5. Мегралиев, Я.Т. Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Т. 32 (249), № 5. – С. 51–56.
6. Мегралиев, Я.Т. Об одной обратной краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Вестник Брянского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 22–28.
7. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак. – М. : Наука, 1972. – 668 с.
8. Худавердиев, К.И. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И. Худавердиев. – Баку : Чашыюглы, 2010. – 168 с.

Поступила в редакцию 22.04.13.

УДК 512.542

О СИЛОВСКОЙ БАШНЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С СУБНОРМАЛЬНЫМИ НЕЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.С. Монахов¹, А.А. Трофимук²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

ON SYLOW TOWER OF FINITE GROUP WITH SUBNORMAL NON-CYCLIC PRIMARY SUBGROUPS

V.S. Monakhov¹, A.A. Trofimuk²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²A.S. Pushkin Brest State University, Brest

Пусть в конечной группе G субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы. Предположим, что силовская 2-подгруппа группы G циклическая или самонормализуема. При этих предположениях доказывается, что группа G обладает силовской башней.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, максимальная подгруппа, циклическая подгруппа, субнормальная подгруппа, нормализатор.

Let G be a finite group such that every non-cyclic maximal subgroups in its Sylow subgroups are subnormal in G . Suppose that a Sylow 2-subgroup of G is either cyclic or self-normalizing. Under these assumptions, we prove that G has a Sylow tower.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, maximal subgroup, cyclic subgroup, subnormal subgroup, normalizer.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В отношении обозначений и терминологии будем придерживаться [1], [2].

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G,$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех $i = 0, 1, \dots, m$. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда.

Говорят, что группа G имеет силовскую башню, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Если

$$\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, p_1 > p_2 > \dots > p_n,$$

и для каждого i фактор G_i/G_{i-1} изоморфен силовской p_i -подгруппе группы G , то говорят, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Сверхразрешимой называют группу, у которой существует нормальный ряд с циклическими факторами. Каждая сверхразрешимая группа обладает силовской башней сверхразрешимого типа [1, 4.51], [2, VI.9.1]. Знакопеременная группа A_4 степени 4 имеет силовскую башню несверхразрешимого типа.

Согласно теореме Цассенхауза [2, IV.2.11] группа с циклическими силовскими подгруппами содержит нормальную циклическую холлову

подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая, а значит группа сверхразрешима и обладает силовской башней сверхразрешимого типа. Ли, Ши и Занг [3] установили сверхразрешимость группы, у которой каждая собственная подгруппа либо циклическая, либо самонормализуема. Обобщая этот результат Занг [4, теорема 1.2] получил разрешимость группы, в которой каждая разрешимая подгруппа либо циклическая, либо нормальна, либо самонормализуема.

Развивая данную тематику мы доказываем следующую теорему.

Теорема 0.1. Пусть в группе G субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы. Если силовская 2-подгруппа группы G циклическая или самонормализуема, то G имеет силовскую башню.

Пример. Условие циклическости или самонормализуемости силовской 2-подгруппы в теореме опустить нельзя. Примером служит знакопеременная группа степени 5, у которой все максимальные подгруппы в силовских подгруппах циклические.

Следствие 0.1. Пусть в группе G каждая примарная подгруппа либо циклическая, либо нормальна, либо самонормализуема. Тогда G обладает силовской башней и ее главный ранг ≤ 2 . В частности, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Результат Занга [4] существенно улучшает-ся этим следствием.

Приведем еще два следствия, которые непосредственно вытекают из доказанной теоремы.

Следствие 0.2. Если в группе G нечетного порядка субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из силовских подгрупп, то G обладает силовской башней.

Следствие 0.3. Если в группе G каждая примарная подгруппа либо циклическая, либо субнормальна, либо самонормализуема, то G обладает силовской башней.

1 Вспомогательные леммы

Символом $\pi(G)$ обозначается множество простых чисел, делящих порядок группы G . Центр, коммутант и подгруппа Фраттини группы G обозначаются через $Z(G)$, G' и $\Phi(G)$ соответственно, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G , а $O(G)$ – наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка группы G . Если P – p -группа, то

$$\Omega_1(P) = \langle x \in P \mid x^p = 1 \rangle.$$

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A .

Лемма 1.1. Если в нециклической p -группе G все собственные подгруппы циклические, то либо G – элементарная абелева группа порядка p^2 , либо группа кватернионов порядка 8.

Доказательство. Пусть $x \in Z(G)$, $|x| = p$.

Если существует подгруппа $\langle y \rangle$ порядка p , отличная от $\langle x \rangle$, то $\langle x \rangle \langle y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ – нециклическая подгруппа порядка p^2 и $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ элементарная абелева. Если в группе G подгруппа порядка p единственна, то согласно [2, III.8.2] группа G является группой кватернионов порядка 2^n , $n \geq 3$. С другой стороны, в группе G все подгруппы нормальны. Теперь по [2, III.7.12] группа G имеет порядок 8.

Лемма 1.2 [5, теорема 1.2]. Пусть G неабелева p -группа порядка p^{n+1} с циклической подгруппой $A = \langle a \rangle$ индекса p . Тогда G изоморфна одной из следующих групп:

$$1) M_{p^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{p^n} = b^p = 1, a^b = a^{1+p^{n-1}} \rangle,$$

где $n \geq 3$ при $p = 2$. В этом случае, $|G'| = p$, $Z(G) = \Phi(G)$, $|\Omega_1(G)| = p^2$.

2) $p = 2$, $D_{2^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ – диэдральная группа. Все элементы разности $G \setminus \langle a \rangle$ являются инволюциями.

3) $p = 2$,

$$Q_{2^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, a^b = a^{-1} \rangle$$

– обобщенная группа кватернионов. Группа G содержит только одну инволюцию, все элементы разности $G \setminus \langle a \rangle$ имеют порядок 4, $G/Z(G)$ – диэдральная группа при $n > 2$.

4) $p = 2$,

$$SD_{2^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, bab = a^{-1+2^{n-1}} \rangle,$$

$n > 2$ – полудиэдральная группа. В этом случае максимальные подгруппы $\Omega_1(G) = \langle a^2, b \rangle \cong D_{2^n}$ и $\langle a^2, ab \rangle \cong Q_{2^n}$ характеристичны в G , $G/Z(G)$ – диэдральная группа.

В случае (2)–(4) верно $|G : G'| = 4$, $|Z(G)| = 2$.

В дальнейшем мы сохраним обозначения за группами $M_{p^{n+1}}$, $D_{2^{n+1}}$, $Q_{2^{n+1}}$ и $SD_{2^{n+1}}$ из леммы 1.2. Через E_{p^n} будем обозначать элементарную абелеву группу порядка p^n .

Лемма 1.3. Если в группе G силовская 2-подгруппа является группой кватернионов порядка 8 и совпадает со своим нормализатором, то группа G 2-нильпотентна.

Доказательство. Если $O(G) \neq 1$, то по индукции $G/O(G)$ 2-нильпотентна, поэтому и группа G 2-нильпотентна. Пусть $O(G) = 1$. По [6, теорема 2] центр группы имеет четный порядок. Пусть i инволюция из $Z(G)$ и $N = \langle i \rangle$. В фактор-группе G/N силовская 2-подгруппа абелева порядка 4 и совпадает со своим нормализатором. По [2, IV.2.6] фактор-группа G/N 2-нильпотентна, т.е. существует нормальная подгруппа H/N такая, что $|G : H| = 4$, а $|H : N|$ – нечетное число. По теореме Шура – Цассенхауза $H = H_1[N]$, а так как $|H : H_1| = 2$, то H_1 нормальна в H . Теперь H_1 нормальна в G и $|G : H_1| = 8$. Лемма доказана.

Через $r(G)$ обозначается главный ранг разрешимой группы G [2, глава VI.8]. Определения и свойства p -длины, нильпотентной и производной длин разрешимой группы G приведены в [1, глава 4], [2, глава VI].

Лемма 1.4. ([7]) Пусть G – разрешимая группа и $r(G) \leq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина группы G не превышает 4.

2. Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

3. $l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$, а $l_2(G) \leq 2$ и $l_3(G) \leq 2$.

2 Доказательство теоремы 0.1

Проверим, что условия теоремы распространяются на все подгруппы группы G . Пусть H – подгруппа группы G и R_1 – силовская подгруппа из H , а R – силовская подгруппа из G , содержащая R_1 . Если $R = R_1$, то в H субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из R_1 . Пусть $R \neq R_1$ и A – максимальная подгруппа из R , содержащая R_1 . По условию подгруппа A либо циклическая, либо субнормальна в группе G . Если A циклическая, то R_1 циклическая. Если A субнормальна в группе G , то R_1 субнормальна в группе G , поэтому R_1 субнормальна в H . Пусть P_1 – силовская 2-подгруппа из H , а P – силовская 2-подгруппа из G , содержащая P_1 . По условию подгруппа P циклическая или самонормализуема. Если $P = P_1$, то в H силовская 2-подгруппа самонормализуема. Если P циклическая, то и P_1 циклическая. Итак, условия теоремы распространяются на все подгруппы группы G .

Проверим, что условия теоремы наследуют все фактор-группы. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и M/N – произвольная максимальная подгруппа из силовской p -подгруппы PN/N группы G/N . Тогда

$$|PN/N : M/N| = |PN : M| = p.$$

Если M_p – силовская p -подгруппа из M , то $|P : M_p| = p$, а, значит, M_p – максимальная подгруппа в P . По условию M_p либо циклическая, либо субнормальна в G . Если M_p циклическая, то $M/N = M_p N/N \cong M_p/M_p \cap N$ также циклическая. Если M_p субнормальна в G , то $M/N = M_p N/N$ субнормальна в G/N . Пусть G_2 – силовская 2-подгруппа из G и $\overline{G_2} = G_2 N/N$ – силовская 2-подгруппа группы G/N . Если G_2 – циклическая, то $\overline{G_2}$ – циклическая. Если G_2 субнормальна в G , то и $\overline{G_2}$ – субнормальна в G/N .

Итак, каждая подгруппа и каждая фактор-группа группы G удовлетворяют условию теоремы.

Пусть R – силовская r -подгруппа группы G . Если R нормальна в G , то по индукции фактор-группа G/R обладает силовской башней, поэтому группа G также обладает силовской башней. Если в G существует нормальная подгруппа H такая, что $G = R[H]$, то по индукции H обладает силовской башней, значит и G обладает силовской башней. Поэтому можно утверждать, что

(1) для каждого $r \in \pi(G)$ группа G не является r -замкнутой и не является r -нильпотентной.

Пусть P – силовская p -подгруппа группы G , $p \in \pi(G)$, p – наименьшее. Ввиду (1) и [2, IV.2.8] можно утверждать, что подгруппа P нециклическая.

Если в подгруппе P все собственные подгруппы циклические, то по лемме 1.1 подгруппа P либо элементарная абелева порядка p^2 , либо группа кватернионов порядка 8. Предположим, что $p > 2$. В этом случае порядок группы G нечетен и взаимно прост с $p^2 - 1$. Действительно, если q делит $|G|$ и q делит $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, то $q > p$ и q делит $p+1$. Но это возможно лишь в случае, когда $p = 2$ и $q = 3$, противоречие. Итак, силовская p -подгруппа для наименьшего $p \in \pi(G)$ при $p > 2$ элементарная абелева порядка p^2 и порядок группы G взаимно прост с $p^2 - 1$. По [2, IV.5.10] группа G p -нильпотентна, что противоречит (1). При $p = 2$ подгруппа P по условию теоремы либо циклическая, либо самонормализуема. Так как P нециклическая, то P самонормализуема, и либо элементарная абелева порядка 4, либо группа кватернионов порядка 8. Теперь группа G 2-нильпотентна либо [2, IV.2.6], либо по лемме 1.3. Опять получили противоречие с (1). Случай, когда в подгруппе P все собственные подгруппы циклические, рассмотрен.

Предположим, что в подгруппе P имеются две нециклические максимальные подгруппы P_1 и P_2 . По условию теоремы они субнормальны в G . Поэтому подгруппа $P = P_1 P_2$ нормальна в G . А это противоречит (1).

Остался случай, когда в подгруппе P имеется точно одна нециклическая максимальная подгруппа. Пусть $|P| = p^{n+1}$ и H – нециклическая максимальная подгруппа порядка p^n . Тогда $n \geq 2$ и по [2, III.8.3] в группе P имеется другая максимальная подгруппа A , которая по условию должна быть циклической. Пусть $A = \langle a \rangle$ и $b \in P \setminus A$. Тогда $P = \langle a \rangle \langle b \rangle$ и $|P/\Phi(P)| = p^2$ по [2, III.3.15]. Поэтому в группе P число максимальных подгрупп равно $1 + p$.

Если P абелева, то $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ для некоторого $b \in P \setminus A$ и $|a| > p$ поскольку $n \geq 2$. Теперь группа G p -нильпотентна по [2, IV.2.7]. А это противоречит (1).

Пусть P неабелева и $p > 2$. По лемме 1.2 группа P изоморфна группе $M_{p^{n+1}}$ и группа G

p -нильпотентна по [2, IV.3.7]. Опять имеем противоречие с (1).

Пусть P неабелева и $p = 2$. По лемме 1.2 существуют четыре неабелевых 2-группы с циклической максимальной подгруппой: $M_{2^{n+1}}$, $D_{2^{n+1}}$, $Q_{2^{n+1}}$ и $SD_{2^{n+1}}$.

Если $P = M_{2^{n+1}}$, то группа 2-нильпотентна по [2, IV.3.7].

В диэдральной группе $D_{2^{n+1}}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы $[\langle a^2 \rangle] \langle b \rangle$ и $[\langle a^2 \rangle] \langle ab \rangle$, поэтому группа $D_{2^{n+1}}$ не удовлетворяет условию рассматриваемого случая.

При $n \geq 3$ в обобщенной группе кватернионов $Q_{2^{n+1}}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы $\langle a^2 \rangle \langle b \rangle$ и $\langle a^2 \rangle \langle ab \rangle$. Поэтому группа $Q_{2^{n+1}}$ при $n \geq 3$ не удовлетворяет условию. В группе кватернионов Q_8 порядка 8 все три максимальные подгруппы циклические. Но в этом случае по условию теоремы подгруппа Q_8 самонормализуема и группа G 2-нильпотентна по лемме 1.3.

В полудиэдральной группе $SD_{2^{n+1}}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы D_{2^n} и Q_{2^n} и одна циклическая. Поэтому SD_{2^n} тоже исключается. Теорема доказана.

Доказательство следствия 0.1. По теореме группа G обладает силовской башней, а, значит, разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа. Тогда $|N| = p^n$ для некоторого простого p и некоторого натурального n . Предположим, что $n \geq 3$ и пусть N_1 – максимальная подгруппа из N . Тогда N_1 – p -подгруппа порядка $p^{n-1} \geq p^2$. Значит, N_1 нециклическая. Так

как $N \leq N_G(N_1)$, то N_1 не самонормализуема. По условию подгруппа N_1 должна быть нормальной в G , противоречие. Значит, $n \leq 2$.

Несложно проверить, что условия доказываемого следствия наследует фактор-группа G/N . По индукции $r(G/N) \leq 2$, значит, $r(G) \leq 2$. Остальные оценки вытекают из леммы 1.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B.Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
3. Li, S. Study on abelian subgroups and the structure of groups / S. Li, J. Shi, C. Zhang // Mathematics in Practice and Theory. – 2008. – № 19. – P. 125–131.
4. Zhang, S. On Finite Groups in which Every Solvable Non-cyclic Proper Subgroup is either Self-normalizing or Normal / S. Zhang // International Journal of Algebra. – 2012. – Vol. 6, № 23. – P. 1111–1115.
5. Berkovich, Y. Groups of Prime Power Order / Y. Berkovich. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2008.
6. Brauer, R. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a generalized quaternion group / R. Brauer, M. Suzuki // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1960. – № 45. – P. 1757–1759.
7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – № 5. – С. 1123–1137.

Поступила в редакцию 15.08.13.

УДК 004.353.2

ПРОГРАММНЫЕ ПРИЁМЫ РЕАЛИЗАЦИИ АДАПТИВНОЙ ЯРКОСТИ В УСТРОЙСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЯ

О.М. Демиденко, П.Л. Чечет

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF ADAPTIVE BRIGHTNESS FOR DISPLAY DEVICES

O.M. Demidenko, P.L. Chechat

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В статье рассмотрен способ совмещения динамической индикации с регулировкой яркости отображения в широком диапазоне без существенного снижения общей частоты обновления всего индикатора устройства на основе сокращенных временных интервалов. Широкий диапазон регулировки яркости нужен для устройств, эксплуатирующихся в условиях с различным уровнем внешней освещенности.

Ключевые слова: алгоритм адаптивной яркости, встроенные устройства, микроконтроллер, динамическая индикация.

In the article the authors consider the algorithm for dynamic display with variable time intervals to obtain a wide range display brightness. The article describes in detail the idea of the method and timing diagrams of the algorithm. The scheme of the algorithm with description of its work is described.

Keywords: adaptive brightness, MCU, dynamic indication, embedded devices.

Введение

Важность регулировки уровня яркости отображения индикаторов (дисплеев) различных устройств и приборов подробно рассмотрена в [1]. Предложенный в [1] способ замера уровня текущей освещенности и преобразование его через специальную таблицу в величину яркости индикатора (дисплея) устройства позволяет повысить для пользователя комфорт работы с устройством, улучшить распознаваемость отображаемой информации и снизить потребление электроэнергии.

В статье [1] для регулировки уровня яркости светодиодных индикаторов или светодиодов подсветки предлагается использовать хорошо зарекомендовавшую в таких приложениях широтно-импульсную модуляцию (ШИМ).

Применение ШИМ для регулировки яркости подсветки дисплея обычно не вызывает сложностей и легко позволяет получить требуемый диапазон регулировки яркости. Ситуация значительно сложнее при применении ШИМ для регулировки яркости в сочетании с программно реализуемой динамической индикацией. В этом случае сложно получить значительный диапазон регулировки яркости при сохранении достаточной частоты обновления индикатора. В данной статье рассмотрены некоторые программные приёмы, позволяющие реализовать достаточный диапазон регулировки яркости светодиодного индикатора при сохранении высокой частоты обновления для динамической индикации.

1 Проблема снижения частоты обновления индикации при уменьшении яркости

При динамической индикации информация последовательно выводится на отдельные индикаторы и/или сегменты, составляющие общий индикатор устройства. При этом для обеспечения постоянной яркости всего индикатора используется последовательное переключение отображаемого индикатора или сегмента через некоторые постоянные моменты времени. Обычно для получения таких временных интервалов используются прерывание по переполнению или совпадению аппаратного таймера микроконтроллера устройства. Очевидно, что при исходной частоте переполнения или совпадения таймера $f_{исх}$ и числе разрядов индикатора n общая частота обновления всего индикатора устройства $f_{общ}$ составит

$$f_{общ} = \frac{f_{исх}}{n}. \quad (1.1)$$

Период времени τ между возникновением прерываний можно вычислить по следующему выражению:

$$\tau = \frac{1}{f_{исх}}. \quad (1.2)$$

При этом временное представление вывода информации представлено на рисунке 1.1, где τ вычисляется через (1.2).

Как видно из рисунка 1.1, полное обновление всего индикатора занимает $n\tau$ единиц времени. При этом частота обновления всего

индикатора, вычисляемая по формуле (1.1), остаётся достаточно высокой.

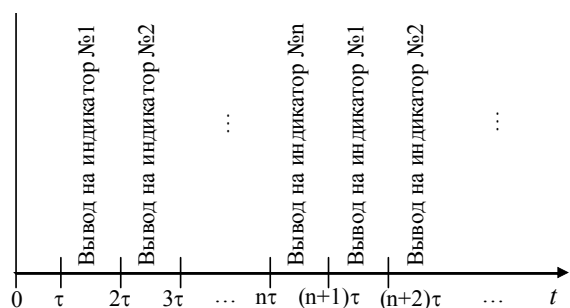


Рисунок 1.1 – Динамическая индикация во времени

Для примера расчётов возьмём основную частоту тактового генератора и частоту таймера 4MHz. Если использовать восьмиразрядный таймер, то частота его переполнения составит

$$f_{\text{исх}} = \frac{4\text{MHz}}{2^8} = 15,6\text{KHz}. \quad (1.3)$$

При этом при обновлении восьмиразрядного ($n=8$), сегментного индикатора общая частота, вычисляемая по формуле (1.1), составит

$$f_{\text{общ}} = \frac{15,6\text{KHz}}{8} \approx 2\text{KHz}. \quad (1.4)$$

Видно, что значение выражения (1.4) достаточно большое и больше чем на два порядка превышает частоту, при которой человеческому глазу заметны мерцания, связанные с обновлением всего индикатора устройства.

Ситуация меняется, когда требуется снизить яркость индикатора. В этом случае для снижения эффекта мерцания и равномерного снижения яркости между соседними периодами вывода информации на индикаторы (разряды) вставляются пустые интервалы, в течение которых индикация выключается. Например, при вставке одного пустого цикла динамическая индикация будет выглядеть так, как показано на рисунке 1.2.

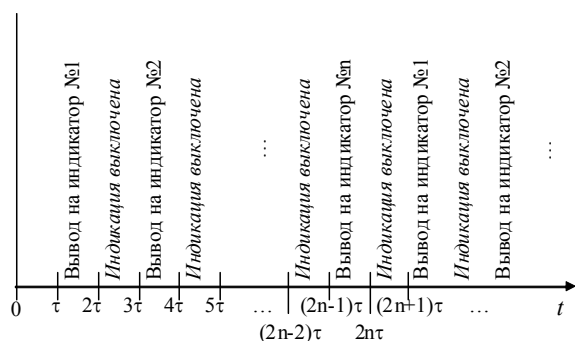


Рисунок 1.2 – Динамическая индикация со снижением яркости

Сравнивая рисунки 1 и 2 нетрудно заметить, что время одного полного цикла вывода информации с использованием динамической индикации в первом случае составляет $n\tau$, а во втором

$2n\tau$ соответственно. Увеличение времени пропорционально снижает частоту, с которой происходит обновление индикатора устройства. Вставка одного пустого периода снижает средний ток через светодиоды индикатора в два раза, но воспринимаемая яркость не снижается в два раза, что связано с нелинейной чувствительностью глаза человека. Практические исследования на реальных устройствах [1] показали, что для получения приемлемого диапазона изменения яркости индикации нужно снижение среднего тока в 30 раз и даже более (для комфортной работы при низких уровнях освещённости). В этом случае после каждого периода отображения требуется вставлять 30 и более периодов, когда индикация отключена. В общем виде время, затрачиваемое на один полный цикл динамической индикации с k периодами отключения индикатора, потребует T времени

$$T = n(1+k)\tau, \text{ где } k \geq 0. \quad (1.5)$$

В этом случае частота обновления индикатора устройства составит

$$f_{\text{общ}} = \frac{1}{T}. \quad (1.6)$$

Подставив выражение (1.2) в (1.5), а затем полученное выражение (1.5) в (1.6) получим

$$f_{\text{общ}} = \frac{f_{\text{исх}}}{n(1+k)}. \quad (1.7)$$

В рассмотренном выше практическом примере частота обновления $f_{\text{исх}}$ составляет почти шестнадцать килогерц (1.3). При значениях $n = 8$ и $k = 30$, подставленных в (1.7), общая частота обновления индикатора устройства составит всего лишь

$$f_{\text{общ}} = \frac{4\text{MHz}}{2^8 \cdot 8 \cdot (1+30)} = 63\text{Hz}. \quad (1.8)$$

Несмотря на то, что эта частота ещё достаточно для целостного восприятия информации, при взгляде на индикатор устройства, обновляемый с такой низкой частотой, периферийным зрением человек уже отчётливо воспринимает неприятное мерцание. Особенно это критично в промышленном или транспортном применении, где находящийся в поле периферийного зрения индикатор устройства может являться неприятным раздражителем для оператора. Как было отмечено выше, для достаточного диапазона регулировки яркости снижения среднего тока в 30 раз может оказаться недостаточно, но при росте k в этом случае частота обновления индикатора $f_{\text{исх}}$ снизится ещё ниже (1.7).

Выходом из данной ситуации может являться увеличение частоты $f_{\text{исх}}$, либо путём увеличения общей тактовой частоты, либо переходом к прерыванию не по переполнению таймера, а по его совпадению с некоторым заданным значением, меньшим 2^8 (для восьмиразрядного таймера). Несмотря на результативность, такое решение

приводит к увеличению частоты вывода информации и при высоких уровнях яркости, что увеличивает затраты процессорного времени на программную обработку вывода в процессе динамической индикации.

2 Использование периодов переменной длины для регулировки яркости

Авторами был практически опробован приём программного уменьшения среднего тока через индикаторы устройства более чем в 200 раз без снижения общей частоты обновления индикатора. При полной яркости информация выводится так, как показано на рисунке 1.1. При снижении среднего тока через индикаторы в два раза вывод информации осуществляется так, как показано на рисунке 1.2. И в первом и во втором случае для частоты обновления всего индикатора устройства остаётся справедливой формула (1.7) для случаев $k = 0$ и $k = 1$ соответственно. При дальнейшем снижении яркости вывод информации осуществляется согласно рисунка 2.1. Причём, как будет показано ниже, общая частота обновления всего индикатора устройства получается не ниже определяемой выражением (1.7) для случая $k = 1$ и даже увеличивается при снижении уровня яркости индикатора устройства.

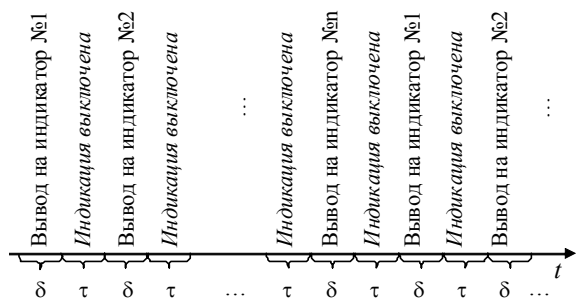


Рисунок 2.1 – Динамическая индикация с уменьшением интервалов отображения где параметр δ ограничен значениями $0 < \delta < \tau$. (2.1)

Для получения значений δ , ограниченных выражением (2.1), в начале цикла таймера в его счётчик загружается некоторое ненулевое значение, что приводит к сокращению временного интервала до следующего переполнения таймера. Графически пример процесса получения различных временных интервалов длины короче τ , представлен на рисунке 2.2.

Для таймера разрядности m связь между сокращённой длительностью δ , максимальной длительностью τ и загружаемым значением s в таймер описывается выражением

$$\delta = \frac{2^m - s}{2^m} \tau, \text{ где } 0 \leq s < 2^m. \quad (2.2)$$

Если предположить, что значение s , загружаемое в таймер, не меняется в течение полного цикла обновления всего индикатора устройства, то средний ток I через сегменты индикатора устройства относительно среднего тока I_0 при случае отсутствия периодов отключения индикации (максимальная яркость) составит

$$I = I_0 \frac{n\delta}{n\delta + n\tau} = I_0 \frac{\delta}{\delta + \tau} = I_0 \left(1 - \frac{\tau}{\delta + \tau} \right). \quad (2.3)$$

Обозначим коэффициент в выражении (2.3) через K

$$K = 1 - \frac{\tau}{\delta + \tau}. \quad (2.4)$$

Подставим выражение (2.2) в (2.4), упростим и получим

$$K = \frac{2^m - s}{2^{m+1} - s}, \text{ где } 0 \leq s < 2^m. \quad (2.5)$$

Значение коэффициента K (2.5) максимальное равно 0,5 при $s = 0$ и уменьшается с ростом s , достигая минимального значения $K = 1/(2^m + 1)$ при $s = 2^m - 1$.

Для рассмотренного в качестве примера выше восьмиразрядного таймера ($m=8$) зависимость коэффициента K от значения параметра s приведена на рисунке 2.3.

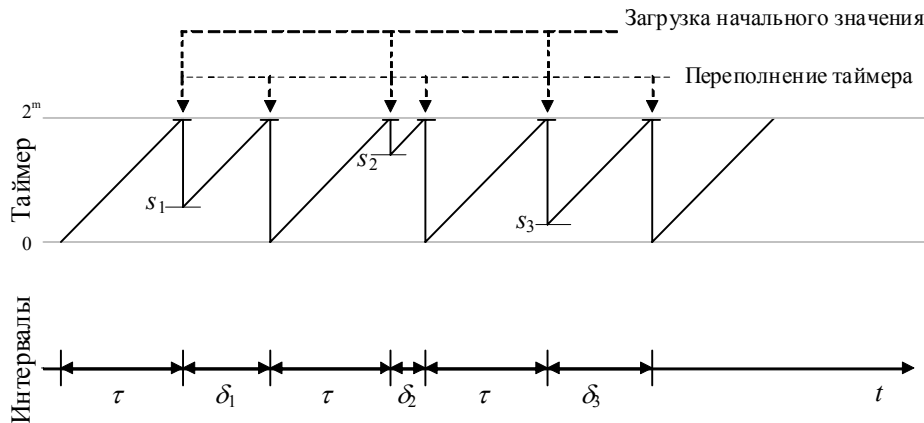


Рисунок 2.2 – Получение сокращённых временных интервалов (m – разрядность таймера; s_i – начальные значения; δ_i – сокращённые интервалы)

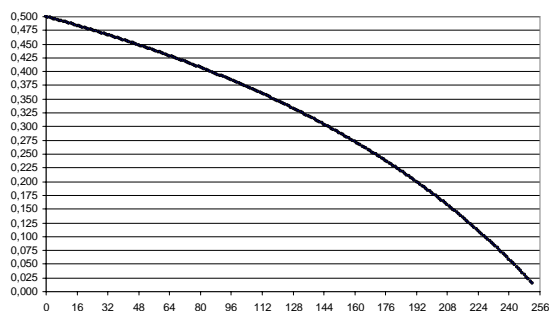


Рисунок 2.3 – График зависимости коэффициента при $m = 8$

При $s = 254$ ослабление среднего тока через индикатор устройства составит $2^8+1=257$ раз, чего достаточно для большинства применений. На практике значения, близкие к 2^m , не всегда могут быть использованы, так как в этом случае переполнение таймера может наступить раньше, чем закончится программная обработка текущего переполнения. Этот факт нужно обязательно учитывать при разработке программы микроконтроллера.

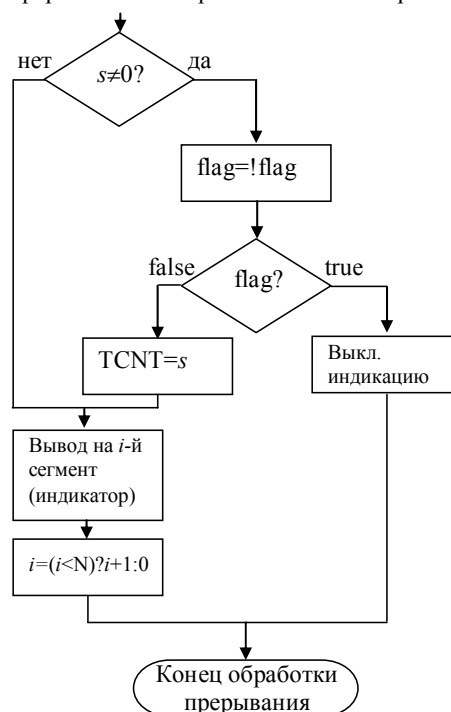
3 Программная реализация регулировки яркости с использованием сокращенных временных интервалов

Ниже будет рассмотрена практическая программная реализация регулировки яркости индикации с использованием сокращенных временных интервалов. В качестве источника временных интервалов используется восьмиразрядный таймер микроконтроллера. Это определяет возможный диапазон значений s (2.5) от 0 до 254. Как было рассмотрено выше, алгоритм вывода информации на индикатор разнится при $s = 0$ и при $s > 0$. Индикатор устройства состоит из N отдельных индикаторов, на которые последовательно выводится отображаемая информация способом динамической индикации. Параметр s задаёт яркость отображения. 0 – максимальная яркость, 254 – минимальная яркость. Схема алгоритма вывода приведена на рисунке 3.1.

Из схемы алгоритма видно, что при $s=0$, последовательно перебираются отдельные индикаторы (счётчик i), на которые выводится нужная информация. Это обычная динамическая индикация. Функционирование её во времени полностью соответствует рисунку 1.1. При $s \neq 0$ к динамической индикации дополнительно добавляются ранее не используемые (при $s=0$) участки алгоритма. Выбор интервала отображения или интервала выключенной индикации осуществляется с использованием логического флага $flag$, который последовательно принимает противоположные значения при очередном переполнении таймера. Как видно из схемы алгоритма, увеличение счётчика i происходит один раз за два

переполнения таймера (при $flag=false$), что позволяет получить работу алгоритма такую, как показано на рисунке 2.1. При $flag=true$ индикаторы устройства выключены в течение фиксированного времени, определяемого частотой переполнения таймера. Это период фиксированной длины τ на рисунке 2.1. При $flag=false$ кроме вывода информации на очередной индикатор (сегмент), в счётчик таймера TCNT загружается ненулевое значение s , что приводит к тому, что следующее переполнение таймера происходит через время, меньшее τ . Это период времени δ на рисунке 2.1. Алгоритм регулировки яркости с использованием сокращенных временных интервалов работает полностью в соответствии с указанным выше описанием.

Прерывание по переполнению таймера



s – установленный уровень яркости
 TCNT – счётчик аппаратного таймера
 i – счётчик перебора сегментов (индикаторов)
 N – общее количество сегментов (индикаторов)

Рисунок 3.1 – Алгоритм измерения уровня освещённости

Заключение

Развитие аппаратных возможностей современной микроэлектроники постоянно повышает требования к современным устройствам. Важной характеристикой устройства является удобство считывания пользователем отображаемой информации. Удобное и эргономичное отображение повышает скорость считывания информации человеком, снижает вероятность ошибок и утомляемость пользователя. Для устройств, предназначенных для работы в условиях с различным

уровнем внешней освещённости, важным является изменение яркости индикатора (дисплея) в зависимости от уровня внешней освещённости для сохранения комфортного восприятия информации в различных условиях. В статье предложен алгоритм динамической индикации для составных и/или сегментных индикаторов с регулировкой яркости с использованием сокращённых временных интервалов. Данный алгоритм позволяет снижать яркость индикатора в больших

пределах при сохранении высокой частоты обновления всего индикатора устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чечет, П.Л. Аппаратно-программная реализация адаптивной яркости в устройствах отображения / П.Л. Чечет // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 128–133.

Поступила в редакцию 16.10.13.

УДК 514.112.4+539.2

ПРИНЦИП ОБЪЕКТИВНО ПРЕДОПРЕДЕЛЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА ВНУТРИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕХНИКЕ

А.С. Неверов¹, Л.С. Пинчук², А.Н. Старовойтов¹, Д.Н. Шевченко¹

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

²Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

THE PRINCIPLE OF THE OBJECTIVE PREDESTINED LOCALIZATIONS OF SPACE IN POLYGONAL FIGURE OF THE FREE FORM AND ITS APPLICATION IN TECHNOLOGY

A.S. Neverov¹, L.S. Pinchuk², A.N. Starovoitov¹, D.N. Shevchenko¹

¹Belarusian State University of Transport, Gomel

²V.A. Belyi Metal Polymer Research Institute of National Academy of Sciences of Belarus, Gomel

Предложена система геометрических построений, позволяющая выделить внутри плоского многоугольника участок, форма и местоположение которого закономерно определяются только формой многоугольника, а размеры – величиной шага h построений. При $h \rightarrow 0$ участок превращается в точку, которая не является центром инерции многоугольника. Показано, что частицы дисперсных систем, перемещающиеся под действием внешних сил по предложенной схеме, концентрируются в локальной области, координаты которой заданы расположением источников внешних сил. Приведены примеры использования этого принципа в технологиях формирования и обработки материалов.

Ключевые слова: локализация пространства, дисперсные системы.

We present a system of geometric constructions, which allows us to select an area inside a flat polygon. The form and the location of the area in the polygon are normally defined only by the form of the polygon, and the sizes are defined by the value of the h -constructions' step. When $h \rightarrow 0$ the area degenerates into a point, which is not the centre of inertia of the polygon. It is shown that the particles of dispersional systems moving under the influence of external powers on the given scheme are concentrated in a local area and coordinates are given by the location of the external power sources. The examples of usage of this principle are given in technology of shaping and processing materials.

Keywords: localization of space, dispersion systems.

Введение

В практике экспериментальных исследований, на производстве и даже в быту нередко встречаются ситуации, когда возникает необходимость без использования сложных математических построений и специального оборудования локализовать некоторую область пространства, переместить в эту область какие-либо предметы или вещества или, наоборот, извлечь их из этой области.

Цель работы состоит в том, чтобы определить систему геометрических построений, позволяющих выделить внутри многоугольника произвольной формы геометрическое место точек, координаты которого предопределяются формой исходного многоугольника, и показать возможность использования установленных закономерностей для оптимизации технологических процессов формирования и обработки технических материалов.

1 Методика и основные закономерности построений

Вблизи исходного треугольника ABC произвольной формы (рисунок 1.1) выберем любую

точку S . Направим из точки S луч на вершину A и отложим на нем отрезок SD , длина которого равна выбранному шагу h . Из точки D направим луч на следующую по часовой стрелке вершину B и отложим отрезок DE длиной h . Затем проведем луч EC и получим отрезок EF . Повторение этих операций (итерация) приводит к тому, что отрезки располагаются все ближе друг к другу, постепенно приближаясь к какому-то определенному положению. При бесконечном увеличении числа итераций образуется вторичный равнобедренный треугольник XYZ с длиной стороны h .

Выполнение этой процедуры в разных вариантах позволило обнаружить следующие закономерности:

1) каждая из сторон вторичного треугольника направлена на одну из вершин исходного треугольника ABC ;

2) форма и местоположение вторичного треугольника XYZ не зависит от координат начальной точки S , но зависит от очередности перемещений к вершинам исходного треугольника (по часовой стрелке: $A-B-C$, или против часовой стрелки $A-C-B$) и длины шага h ;

3) если аналогичную процедуру выполнить, двигаясь от одной вершины к другой против часовой стрелки, то в результате образуется треугольник UVW , который имеет те же свойства, что и треугольник XYZ , но другие координаты вершин. Пример такого построения показан на рисунке 1.2.

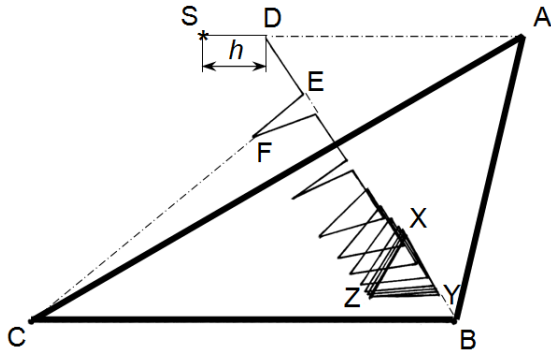


Рисунок 1.1 – Схема построений: вторичный треугольник XYZ получен перемещениями, совершаемыми по часовой стрелке относительно вершин A, B, C из начальной точки S

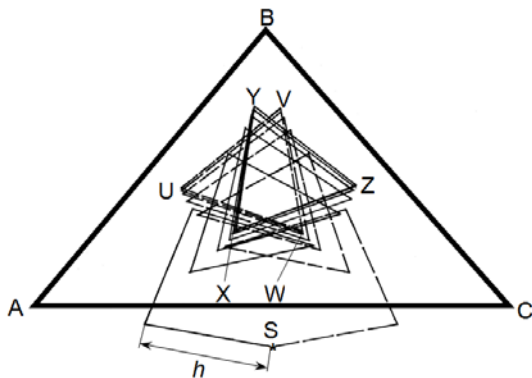


Рисунок 1.2 – Итог построений, выполненных при движении относительно вершин A, B, C по (ΔXYZ) и против (ΔUVW) часовой стрелки; S – точка начала построений

Аналогичные закономерности характерны для исходных фигур в виде 4-, 5- и 6-угольников (рисунок 1.3): вторичные фигуры представляют собой равносторонние (длина стороны равна шагу h) 4-, 5- и 6-угольники, свойства которых подобны свойствам вторичных треугольников.

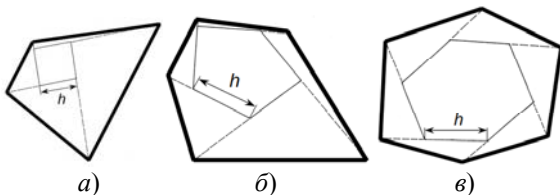


Рисунок 1.3 – Вторичные фигуры, полученные путем итераций с шагом h в 4-угольнике (а), 5-угольнике (б) и 6-угольнике (в)

2 Аналитическое решение

Вычислим аналитически координаты вершин вторичного треугольника на основании того, что его вершины X, Y, Z лежат на отрезках AZ, BX, CY соответственно (рисунок 2.1).

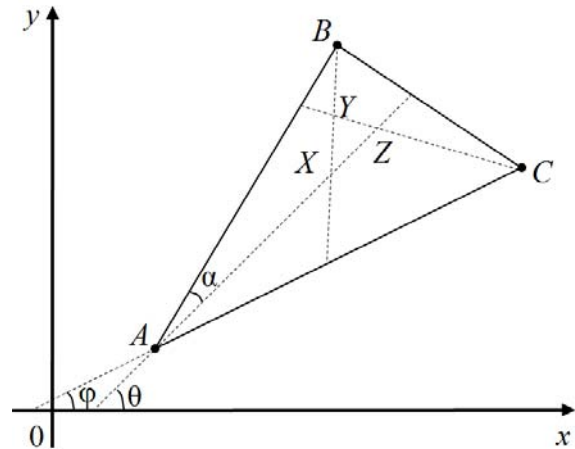


Рисунок 2.1 – Взаимное расположение первичного и вторичного треугольников

Из треугольников AXB и BYC найдем:

$$BX = \frac{AB \sin \alpha}{\sin(2\pi/3)},$$

$$BY = \frac{BC \sin(2\pi/3 - \angle B - \alpha)}{\sin(2\pi/3)}.$$

Приведенные выражения имеют смысл лишь в том случае, когда $\angle B < 2\pi/3$. А поскольку эти рассуждения справедливы для любого угла треугольника ABC , то любой из углов должен быть меньше $2\pi/3$.

Тогда

$$BX - BY = \frac{AB \sin \alpha}{\sin(2\pi/3)} - \frac{BC \sin(2\pi/3 - \angle B - \alpha)}{\sin(2\pi/3)} = h.$$

Откуда

$$AB \sin \alpha - BC \sin(2\pi/3 - \angle B - \alpha) = h \sin(2\pi/3),$$

$$0 < \alpha < \angle A.$$

Решая (2.1), найдем угол α и получим ограничение на длину шага h , при котором указанное решение существует:

$$h^2 < 4/3(AB^2 + 2AB \cdot BC \cos(2\pi/3 - \angle B) + BC^2). \quad (2.2)$$

Неравенство (2.2) выполняется, например, когда

$$h^2 < 4/3(AB^2 - 2AB \cdot BC + BC^2) = 4/3(AB - BC)^2.$$

Или

$$h < 2/\sqrt{3} |AB - BC|. \quad (2.3)$$

Подчеркнем, что неравенство (2.3) является довольно грубым, поскольку в уравнении (2.2) нами принято допущение, что $\cos(2\pi/3 - \angle B) > -1$.

Неравенство (2.3) должно выполняться для любых сторон треугольника ABC , следовательно, $h < 2/\sqrt{3} \min\{|AB - BC|, |BC - CA|, |CA - AB|\}$.

Используя формулы аналитической геометрии, по углу α и координатам вершин треугольника $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_3, b_3)$ найдем углы φ и θ :

$$\varphi = \arctg \frac{b_1 - a_1}{b_3 - a_3}, \quad \theta = \varphi + \angle A - \alpha.$$

Тогда координаты точек $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$ и $Z(x_3, y_3)$:

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} AB \sin(\pi/3 - \alpha) \cos \theta + a_1,$$

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} AB \sin(\pi/3 - \alpha) \sin \theta + b_1;$$

$$x_3 = (2/\sqrt{3} AB \sin(\pi/3 - \alpha) + h) \cos \theta + a_1,$$

$$y_3 = (2/\sqrt{3} AB \sin(\pi/3 - \alpha) + h) \sin \theta + b_1;$$

$$x_2 = \frac{a_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y_2 = \frac{b_2 + \lambda y_1}{1 + \lambda},$$

где $\lambda = \frac{2BC \sin(2\pi/3 - \angle B - \alpha)}{h\sqrt{3}}$.

Подобный аналитический подход применим для произвольных выпуклых многоугольников.

Представленные результаты справедливы, если каждый из углов исходного треугольника меньше 120° и выполнено условие (2.2). В противном случае вторичная фигура имеет вид, представленный на рисунке 2.2.

На рисунке 2.3 показано изменение вторичной фигуры при последовательном увеличении одного из углов треугольника от значения меньше 120° (крайняя левая фигура) до значений больших 120° , но меньших (три следующих фигуры) или равных 180° (крайняя правая фигура).

Вторичная фигура замкнутой формы может образовываться даже в том случае, если величина шага периодически изменяется в определенной последовательности. Например, на рисунках 2.4 и 2.5 приведены вторичные фигуры для исходного треугольника с координатами вершин $a_1 = 15, b_1 = 20; a_2 = 10, b_2 = 10; a_3 = 20, b_3 = 10$ при изменении шага в последовательности 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 ... (рисунок 2.4) и 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2 ... (рисунок 2.5).

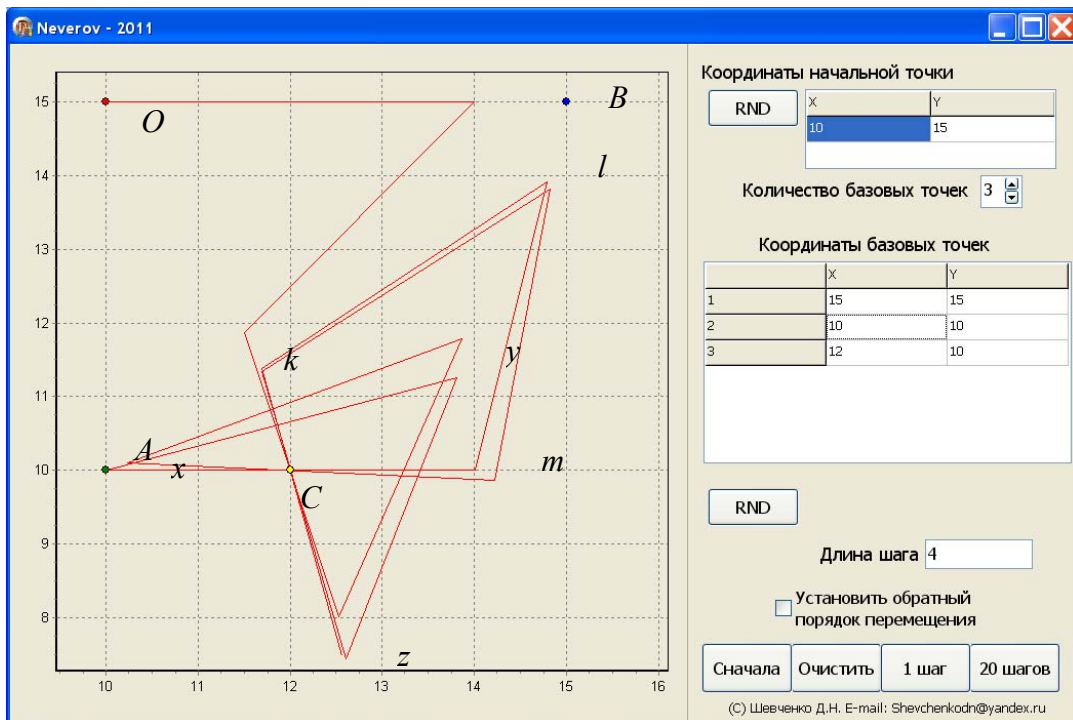


Рисунок 2.2 – Компьютерное построение вторичной фигуры $xuzklm$ для исходного треугольника ABC , один из углов которого больше 120° ; точка O – начало построения



Рисунок 2.3 – Изменение вторичной фигуры при последовательном увеличении одного из углов треугольника от $\alpha < 120^\circ$ до $\alpha = 180^\circ$

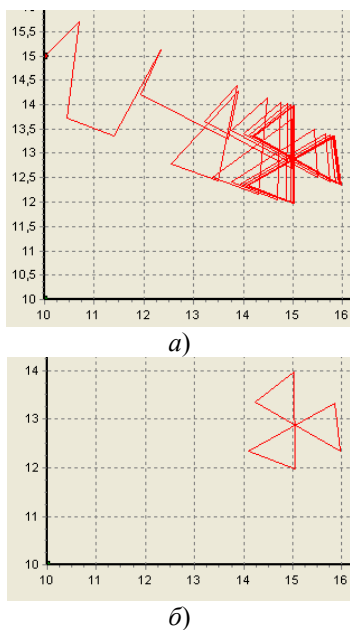


Рисунок 2.4 – Построение вторичной фигуры (а) и конечный результат построения (б) при изменении шага в последовательности 1, 2, 1, 2, 1, 2, и т. д.

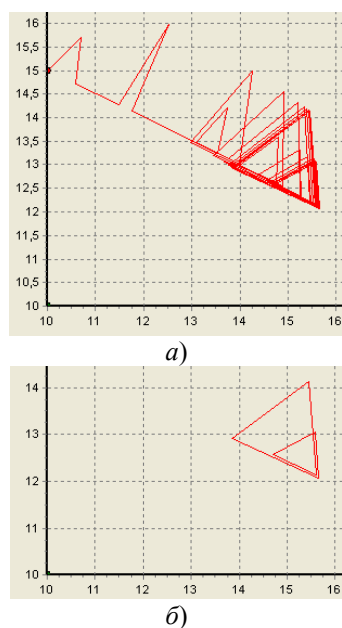


Рисунок 2.5 – Построение вторичной фигуры (а) и конечный результат построения (б) при изменении шага итераций в последовательности 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2 и т. д.

3 Зависимость результатов построения от длины шага

Первое предположение для объяснения закономерностей расположения вторичных фигур внутри произвольно выбранного многоугольника состоит в том, что эта фигура «содержит» центр инерции (масс, тяжести) многоугольника. Однако построения, выполненные для многоугольников различной формы, показали, что центры

инерции первичной и вторичной фигур обычно не совпадают, гораздо чаще центр инерции первичного неправильного многоугольника находится вне вторичной фигуры. Совпадение имеет место только в правильных первичных фигурах, что будет показано позже.

Идентичные итерации на неправильном треугольнике, выполненные с разными шагами h , обнаружили следующее (рисунок 3.1): каждая вторичная фигура, построенная с шагом h_1 , располагается внутри такой же фигуры, шаг которой $h_2 > h_1$; стороны вторичных треугольников не параллельны, а их вершины находятся на дугах окружностей с центрами O_1, O_2 и O_3 .

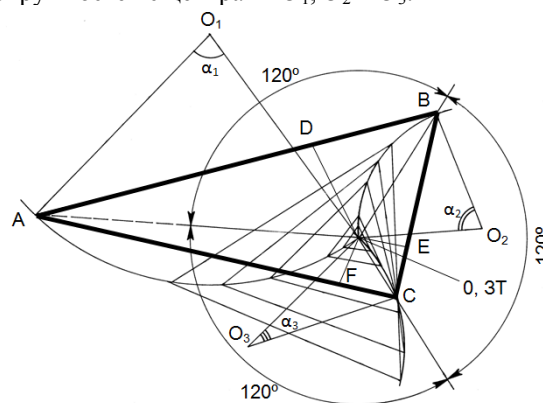


Рисунок 3.1 – Расположение вершин вторичных треугольников, построенных с разными шагами

Очевидно, что при $h \rightarrow 0$ вторичная фигура превратится в точку, которую назовем «золотая точка» (ЗТ). Смысл этого названия будет пояснен позже. Видно, что ЗТ находится на пересечении дуг окружностей, являющихся геометрическим местом вершин вторичных треугольников, построенных с разными h . Сумма углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ секторов этих окружностей, ограниченных вершиной исходного треугольника и ЗТ, равна сумме углов треугольника – 180° . Лучи, исходящие из ЗТ и направленные на вершины треугольника ABC , расположены под равными углами 120° друг к другу. Не совпадающие друг с другом вторичные треугольники, которые образуются при итерациях, выполненных с одинаковым шагом h по и против часовой стрелки, при уменьшении h сближаются и практически совпадают. При $h \rightarrow 0$ они превращаются в ЗТ, которая у каждого исходного треугольника только одна.

В правильном треугольнике ЗТ и центры инерции первичной и всех вторичных фигур, построенных с разными шагами, совпадают (рисунок 3.2).

К сожалению, замечательные свойства треугольников, обусловленные наличием у них ЗТ, не являются общим свойством всех плоских фигур. Однако существует совокупность многоугольников, вершины которых находятся на лучах, исходящих из одной – «золотой» – точки и расположенных под равными углами друг к другу.

Для них справедливы закономерности, установленные для треугольников, о чем свидетельствует рисунок 3.3.

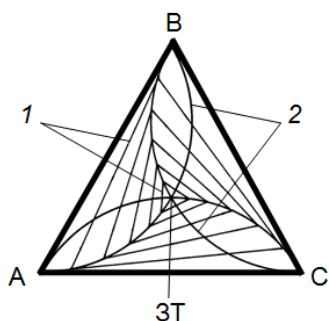


Рисунок 3.2 – Совпадение центров инерции и ЗТ всех фигур в правильном треугольнике ABC : 1 – вторичные фигуры; 2 – дуги окружностей, проходящих через вершины и центр инерции ΔABC

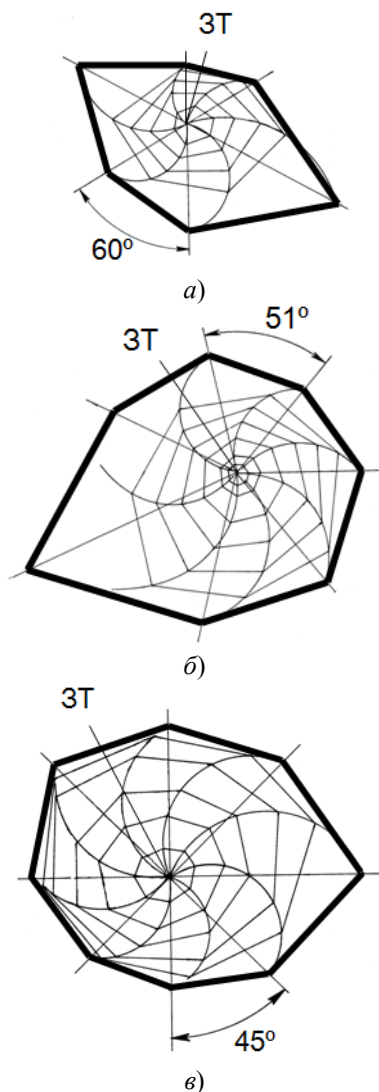


Рисунок 3.3 – Расположение вторичных фигур в многоугольниках, имеющих ЗТ: а) – 6-угольники, б) – 7-угольники, в) – 8-угольники

Итак, ЗТ привносит признаки симметрии в неправильные многоугольники, упорядочивая ограниченное ими пространство. Для этих фигур ЗТ является второй после центра инерции универсальной геометрической характеристикой.

Критерием гармонии линейных размеров на протяжении веков служит «золотое сечение» – деление отрезка на две части таким образом, что отношение их длин соответствует замечательной непрерывной дроби, значения которой – $1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21$ и т.д., где 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и т.д. – так называемый ряд Фибоначчи (1202, L. Fibonacsi, он же Леонардо Пизанский – итальянский математик). В этом ряду каждое число равно сумме двух предыдущих чисел. Интерес к «золотому сечению» (термин ввел Леонардо да Винчи) ученые и художники проявляют со времен Эвклида. Это обусловило универсальное применение его в математике, архитектуре и изобразительном искусстве. В средние века «золотое сечение» считали идеальной пропорцией, характерной для всех совершенных творений природы и произведений искусства [1]. Было бы логичным в пропорциях, задаваемых ЗТ, найти признаки «золотого сечения».

Анализ показал, что на рисунке 3.1 пропорционально числам Фибоначчи делятся отрезки прямых, проведенных из вершин треугольника через ЗТ до пересечения с противоположной стороной треугольника: $AO/OE = 13/2, BO/OF = 3/1, CO/OD = 2/3$. Стороны треугольника делятся этими точками пересечения аналогичным образом: $AD/DB = 8/3, CE/BE = 1/2, AF/FC = 5/1$.

Остался невыясненным математический смысл точек, в которые при уменьшении h сходятся вторичные фигуры многоугольников, не имеющих ЗТ. Такими же многоугольниками являются, кстати, треугольники, у которых один из углов больше 120° . Этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

4 Технические приложения

Представим себе дисперсную систему, находящуюся внутри многоугольника, в вершинах которого установлены источники энергии, приводящие частицы в движение. Если передвигать частицы по предложенной выше схеме, они будут концентрироваться в определенной площади, заданной формой многоугольника и шагом передвижения частиц. На этом основана большая группа технологических методов формирования и переработки дисперсных материалов.

Модифицирование коллоидных растворов – один из ключевых процессов нанотехнологий [2]. Их успех в большой мере зависит от регулирования числа частиц дисперсной фазы в единице объема раствора. Это является инструментом для «запуска» поверхностных явлений – адсорбции, образования двойного электрического слоя

и обусловленных ими электрокинетических явлений, контактных взаимодействий частиц [3].

Коллоидный раствор в виде магнитной жидкости (МЖ) находится (рисунок 4.1) в цилиндрической емкости диаметром d , выполненной из диамагнетика, по периметру которой установлены электромагниты (ЭМ). Они включаются и выключаются по программе, задаваемой ЭВМ так, чтобы магнитная частица двигалась к одному из ЭМ на величину шага $h_1 < d$, затем к следующему (по или против часовой стрелки) ЭМ на эту же величину и т. д. Спустя некоторое время магнитные частицы сконцентрируются на определенном участке в центральной зоне емкости. Это дает возможность создать в коллоидном растворе градиент концентрации частиц, отобрать концентрированную фазу частиц, через канал в центре емкости привести их в контакт со второй коллоидной системой, чтобы инициировать их химическую реакцию, и т. д.

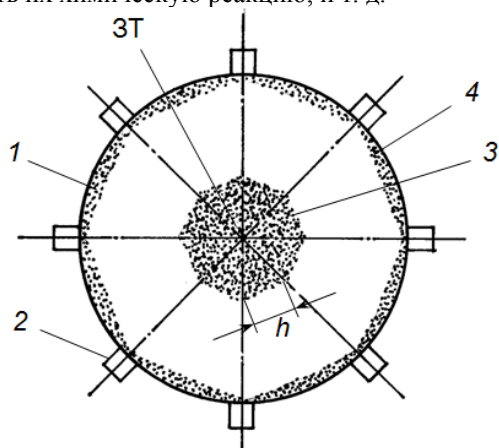


Рисунок 4.1 – Схема регулирования концентрации частиц в МЖ: 1 – емкость; 2 – электромагнит; 3 и 4 – зоны концентрации магнитных частиц вблизи ЗТ и у стенки емкости

Если изменить программу, задав $h_2 > d$, частицы сконцентрируются возле стенки емкости. При периодическом переключении программ области повышенной концентрации частиц будут перемещаться от периферии к центру емкости и обратно к периферии, обуславливая интенсивное перемешивание дисперсной фазы. Чтобы избежать послойного перемешивания, несколько комплектов ЭМ, показанных на рисунке 4.1, следует разместить в плоскостях, находящихся на разных уровнях по высоте емкости. Тогда перемещение частиц в слое, соответствующем плоскости ЭМ, дополнится массообменом между слоями, обуславливая идеальное перемешивание.

Кристаллизацией пирозолей – расплавов, содержащих коллоидно-дисперсную фазу зародышей кристаллообразования, – можно управлять, перемещая зародыши в расплаве по заданной программе. Таким методом целесообразно формировать отливки с заданным градиентом

кристаллической структуры. Это отвечает современной тенденции технологии литейного производства [4].

Плазменная обработка поверхностного слоя деталей является одной из базовых технологий инженерии поверхности. Во многих случаях ее целесообразно проводить потоком униполярных ионов плазмы [5]. В потоке плазмы, истекающем по цилиндрическому каналу, разнополярные ионы случайным образом распределены по площади сечения канала. С помощью быстродействующей системы ЭМ, показанной на рисунке 4.1, можно сконцентрировать униполярные ионы в центральной части потока вокруг его оси. Это расширит возможности плазменной технологии.

Подвижные уплотнения вращающихся валов, работающие при перепадах давления от вакуумного до избыточного, обычно содержат герметизатор в виде слоя МЖ, положение которого в уплотняемом зазоре стабилизирует стандартная схема кольцевых электромагнитов [6]. На рисунке 4.2 представлена схема герметизации трубопровода, нижняя часть которого неподвижна, а верхняя вращается. Зазор между вращающимися и неподвижными фланцами трубопровода заполнен МЖ. На периферии нижнего фланца, выполненного из диамагнетика, установлена совокупность ЭМ. Генерируемые ими поля, во-первых, удерживают слой МЖ в зазоре уплотнения, уравновешивая перепад давления $p_1 - p_2$, и, во-вторых, создают (путем переключения ЭМ по команде ЭВМ) градиент плотности магнитных частиц в герметизирующем слое в соответствии с принципами, изложенными выше. Желательно, чтобы наибольшая концентрация магнитных частиц образовалась со стороны слоя МЖ, испытывающей максимальное давление. Когда внешнее избыточное давление $p_2 > p_1$, уплотненный кольцевой слой МЖ создают на периферии фланца, как показано на рисунке 4.1. Когда снаружи трубопровода вакуум и $p_2 < p_1$, уплотненный слой МЖ целесообразно сформировать возле канала трубопровода.

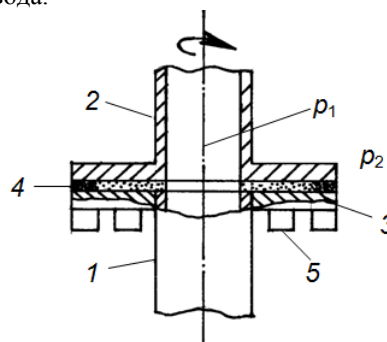


Рисунок 4.2 – Схема уплотнения трубопровода с вращающимся патрубком: 1 – неподвижная часть; 2 – вращающийся патрубок; 3 – диамагнитный фланец; 4 – слой МЖ; 5 – ЭМ; p_1 и p_2 – давления сред в трубопроводе и снаружи

Таким образом, предложенная методика направленного перемещения и локализации дисперсных частиц создает принципиально новые возможности управления магнитожидкостными уплотнениями.

Концентрирование наэлектризованных полимерных частиц в газовом потоке – необходимая операция технологических процессов напыления полимерных покрытий [7] и формирования волокнистых материалов методом melt-blowing [8]. Ее проведение всегда связано со значительными энергетическими и технологическими потерями. На рисунке 4.3 приведена схема устройства, позволяющего оптимизировать эту операцию. Газо-полимерный поток проходит через диэлектрический патрубок, в стенках которого установлены три кольцевых ряда точечных электродов. Они соединены с источником электрического напряжения через систему управления, осуществляемого ЭВМ. Скорость изменения управляющего сигнала соответствует скорости электронов. Она значительно выше скорости движения частиц в газовом потоке. Это дает возможность сконцентрировать частицы в соответствии с изложенными выше принципами в узком цилиндрическом потоке вблизи оси патрубка.

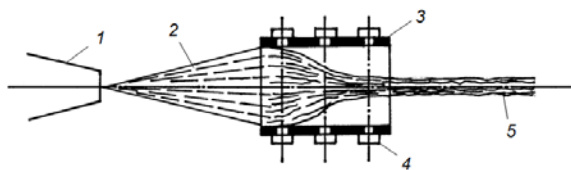


Рисунок 4.3 – Схема концентрирования заряженных полимерных частиц в газовом потоке: 1 – распылительная головка; 2 – исходный газополлимерный поток; 3 – направляющий патрубок; 4 – электрод; 5 – концентрированный газополлимерный поток

Предложенная методика локализации пространства внутри плоских фигур имеет много применений в других областях деятельности человека.

Метод физиотерапии с помощью «бегущего» магнитного поля предполагает комплексное воздействие на тело человека полей от нескольких плоских магнитных катушек, размещенных вблизи патологического очага [9]. Переключение импульсов тока с одной катушки на другую обуславливает «обегание» магнитным полем поврежденной области тела. Режимы этой процедуры выбирают методом проб и ошибок, что характерно для физиотерапии в целом. Приведенные представления позволят планировать магнитотерапевтическое воздействие и реализовать его с помощью ЭВМ по заданной программе. Магнитное поле, «обегая» патологический очаг, перемещает биологические жидкости в поврежденной ткани к центру повреждения или от него в зависимости от диагноза и выбранного метода лечения.

Зашифрованное слово или комбинацию цифр можно найти в заранее согласованном шифровальщиком и адресатом тексте, если заданы реперные буквы текста и шаг построения. Рисунок 4.4 иллюстрирует такую возможность: путем итераций, начатых из произвольно выбранной точки, находим зашифрованное слово «код».

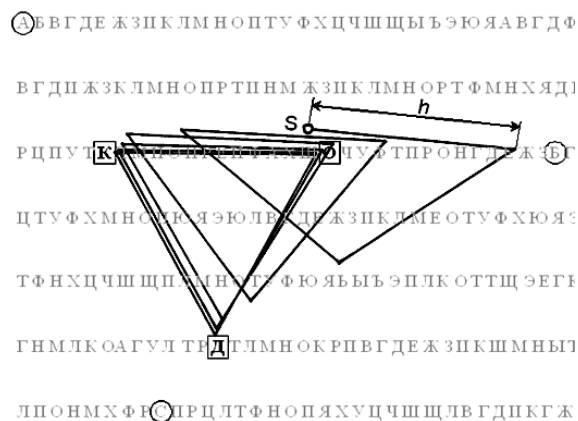


Рисунок 4.4 – Схема поиска в тексте зашифрованного слова: A, B и C – реперные буквы; S – исходная точка; h – шаг построения

Аналогичным образом можно отыскивать место захоронения какого-либо артефакта, зная реперные точки (мало подверженные изменениям ориентиры на местности – возвышенности, отдельно стоящие деревья, скалы и т. п.) и направление их обхода (например, по часовой стрелке).

Можно ожидать, что еще более интересные закономерности и неожиданные эффекты будут найдены при перенесении изложенных принципов геометрических построений в трехмерное пространство. Это позволит разработать оригинальные методы ориентации в космосе, уточнить критерии систематизации кристаллов, усовершенствовать медицинские технологии целевой доставки лекарств в пораженные болезнью органы и т. д.

Заключение

Предложена система геометрических построений, позволяющая выделить внутри любого плоского многоугольника участок, форма и местоположение которого закономерно определяются только формой многоугольника, а размеры – величиной шага h построений. Показано, что при $h \rightarrow 0$ локализованный участок превращается в точку, которая является второй после центра инерции универсальной геометрической характеристикой определенной совокупности плоских многоугольников. В нее входят фигуры, вершины которых находятся на лучах, исходящих из одной точки и расположенных под равными углами друг к другу. В треугольнике прямые, проведенные из его вершин через эту точку, делят

противоположные стороны в пропорциях, соответствующих отношению чисел Фибоначчи.

Очевидно, что частицы дисперсных систем, перемещающиеся под действием внешних сил по предложенной схеме, спустя некоторое время неизбежно сконцентрируются в локальной области, координаты которой заданы расположением источников и временем действия внешних сил. Приведены примеры использования этого принципа в технологических процессах и в других областях человеческой деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Золотое сечение* // БСЭ, 2-е изд., Т. 5. – М. : ГНИИ «БСЭ», 1952. – С. 157–158.
2. *Наноматериалы и нанотехнологии* / под ред. В.Е. Борисенко, Н.К. Толочко. – Мн. : БГУ, 2008. – 375 с.
3. *Рибиндер, П.А.* Поверхностные явления в дисперсных системах. Коллоидная химия / П.А. Рибиндер. – М. : Наука, 1978. – 368 с.
4. *Марукович, Е.И.* Теплофизические основы формирования отливок при непрерывном литье в

роторные кристаллизаторы // В кн. «Перспективные материалы и технологии» / Е.И. Марукович ; под ред. В.В. Клубовича. – Витебск : Изд-во УО «ВГПУ», 2008. – С. 143–170.

5. *Процессы плазменного нанесения покрытий: теория и практика* / под ред. А.П. Достанко. – Мн. : Армита – маркетинг, менеджмент, 1999. – 544 с.

6. *Берковский, Б.М.* Магнитные жидкости / Б.М. Берковский, В.Ф. Медведев, М.С. Краков. – М. : Химия, 1989. – 240 с.

7. *Довгяло, В.А.* Композиционные материалы и покрытия на основе дисперсных полимеров. Технологические процессы / В.А. Довгяло, О.Р. Юркевич. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 256 с.

8. *Melt blowing. Equipment, technology and polymer fibrous materials* / L.S. Pinchuk [et al.]. – Berlin : Springer. – 212 p.

9. *Боголюбов, В.М.* Общая физиотерапия : учебник / В.М. Боголюбов, Г.Н. Пономаренко. – 3-е изд. – М. : Медицина, 1999. – 432 с.

Поступила в редакцию 18.06.13.

УДК 519.25

ПРИМЕР «ВЫРАЩИВАНИЯ» РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНОГО ЯВЛЕНИЯ НА БАЗЕ КРИТЕРИЯ ПРАВДОПОДОБНОСТИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Н.Б. Осипенко, А.Н. Осипенко, К.А. Осипенко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

EXAMPLE OF THE «CULTIVATION» OF THE SOCIAL PHENOMENON'S REGRESSION MODEL ON THE BASIS OF CRITERION OF PLAUSIBLE INTERPRETATION

N.B. Osipenko, A.N. Osipenko, K.A. Osipenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В статье описывается способ поэтапной корректировки регрессионной модели в задаче объяснения продолжительности жизни человека с помощью факторов его генетического потенциала. Для раскодирования этих факторов используется популярный среди практикующих психологов метод квадрата Пифагора. «Выращивание» модели ведется по двум направлениям. Отмечаются основные причины некорректных регрессионных построений при работе с качественными признаками. Интерпретация результирующих моделей позволяет по-новому взглянуть на реальные приоритеты в общественном устройстве и выработать рекомендации по их изменению с целью увеличения продолжительности жизни населения Беларуси.

Ключевые слова: регрессионная модель, социальное явление, продолжительность жизни, алгоритм Пифагора, критерий правдоподобности интерпретации, этапы «выращивания» модели.

In the article the way of step-by-step correction of regression model in the problem of explanation of a person's life expectancy with the help of factors of his genetic potential is described. For decoding these factors the popular among practicing psychologists method of a square of Pythagoras is used. «Cultivation» of the model is conducted in two directions. The main reasons for incorrect regression constructions are noted during the work with qualitative signs. Interpretation of resultant models allows to look at real priorities of a social system in a new way and develop recommendations about their change for the purpose of increase of life expectancy of the population of Belarus.

Keywords: regression model, social phenomenon, life expectancy, algorithm of Pythagoras, criterion of interpretation plausibility, stages of model «cultivation».

Введение

Статистическое исследование социального явления существенно отличается от анализа данных о работе технической системы. В частности, нередки случаи некорректного использования в уравнениях регрессии качественных признаков. В особенности это относится к номинальным или порядковым характеристикам объектов в виде цифровых значений. В предлагаемой работе описывается методологическая схема корректной обработки порядковых признаков на примере выявления обуславливающих продолжительность жизни человека факторов по дате рождения, преобразованной в последовательность из десяти порядковых признаков по алгоритму Пифагора [1]. Существуют гипотезы, что дата рождения каким-то образом отражает генетический потенциал человека. Многие практикующие психологи с успехом используют этот алгоритм для диагностики характера человека и его склонностей.

1 Исходный статистический материал

В качестве материала для исследования послужила выборка из 1376 жителей города Гомеля,

умерших с ноября 2006 г. по октябрь 2007 г. По каждому человеку брались данные в виде строки: имя, день, месяц, год рождения, день, месяц и год смерти. Для обработки данных использовался пакет «Statistica», в частности, его средства подготовки новых переменных путём того или иного преобразования исходных признаков, а также программы анализа вариантов, построения гистограмм, матриц корреляций признаков и уравнений множественной линейной регрессии.

Как известно, Пифагор, его ученики и последователи сократили все числа до цифр от 1 до 9 включительно, поскольку они являются исходными числами, из которых могут быть получены все другие. Алгоритм построения квадрата Пифагора опишем на примере. Пусть человек родился 11.07.1953. 1. Складываем все цифры даты рождения (получаем 27 – первое рабочее число). 2. Складываем цифры этого числа ($2 + 7 = 9$ – второе рабочее число). 3. Из первого числа отнимаем удвоенную первую цифру даты рождения ($27 - 2 = 25$ – третье рабочее число). 4. Сложим цифры третьего числа ($2 + 5 = 7$ – четвертое рабочее число). 5. Первый ряд цифр для квадрата

Пифагора формируется из цифр даты рождения (11, 7, 1953), второй – образуется из полученных выше четырех рабочих чисел (27, 9, 25, 7). 6. Строим таблицу в виде квадрата из трех столбцов и трех строк, в ячейках которых зарезервированы места для количеств одинаковых цифр 1, 2, ..., 9. 7. Подсчитываем во множестве цифр первого и второго ряда пункта 5 количество одинаковых цифр 1, 2, ..., 9 и заполняем соответствующие ячейки квадрата $KP1, KP2, \dots, KP9$. 8. Дополнительно определяется признак $KP0$ – встречаемость цифры 0 в рядах цифр из пункта 5.

Цифры в квадрате Пифагора характеризуют способности: 1 – волевой потенциал, желание управлять ситуацией; 2 – энергетический потенциал, заряженность на самореализацию; 3 – нацеленность на порядок и аккуратность, рациональность, склонность к научному объяснению событий; 4 – потенциал здоровья; 5 – наличие интуиции, способность предвидеть последствия решений; 6 – заземленность, тяга к физическому труду, 7 – талант, тяга к творчеству и новизне; 8 – желание быть полезным, готовность слышать других и помогать им, обязательность и ответственность; 9 – способность к запоминанию информации и к сложным умственным операциям.

2 Описание процесса «выращивания» регрессионной модели путем поэтапного выявления причин неправдоподобности ее интерпретации

Методологическая схема такого параллельного «выращивания» результата исследования вместе с инструментом исследования в рамках функционально-эволюционного подхода описана в [2].

Непосредственное использование множественной линейной регрессии признаков $KP0, KP1, KP2, \dots, KP9$ на целевой показатель продолжительности жизни дает следующее уравнение (объем выборки $N = 1376$, коэффициент множественной корреляции $R = 0,48$):

$$\text{ПродЖ} = 129,6 - 2,3 \cdot KP1 - 1,9 \cdot KP2 - 4,9 \cdot KP3 - 7,6 \cdot KP4 - 8,9 \cdot KP5 - 0,4 \cdot KP6 - 6,6 \cdot KP7 - 6,8 \cdot KP8 - 5,6 \cdot KP9 - 6,0 \cdot KP0.$$

Как видим, это уравнение не поддается разумной интерпретации.

Первая причина некорректности любых корреляционно-регрессионных моделей – это неоднородность исходной выборки. Для разрешения этой проблемы исходная выборка первоначально была разбита на 4 подвыборки: 1) мужчины с $KP0 = 0$; 2) мужчины с $KP0 > 0$; 3) женщины с $KP0 = 0$; 4) женщины с $KP0 > 0$.

При этом использовалась гипотеза, что наличие нулей в рядах цифр алгоритма Пифагора связано с раскрытием дополнительного генетического потенциала.

В результате, после отбраковки малозначимых признаков, были получены следующие уравнения:

1) мужчины с $KP0 = 0$ ($N = 380, R = 0,31$):

$$\text{ПродЖ} = 67 + 1,9 \cdot KP2 - 0,5 \cdot KP3 - 2,8 \cdot KP5 - 3,0 \cdot KP6 - 1,8 \cdot KP7;$$

2) мужчины с $KP0 > 0$ ($N = 470, R = 0,36$):

$$\text{ПродЖ} = 67,2 + 0,8 \cdot KP1 + 1,5 \cdot KP2 - 3,7 \cdot KP5 - 3,4 \cdot KP6 - 2,9 \cdot KP7 - 3,9 \cdot KP8;$$

3) женщины с $KP0 = 0$ ($N = 241, R = 0,48$):

$$\text{ПродЖ} = 82,8 + 0,4 \cdot KP1 + 1,3 \cdot KP2 - 4,6 \cdot KP3 - 1,7 \cdot KP4 - 3,7 \cdot KP5 - 4,0 \cdot KP6;$$

4) женщины с $KP0 > 0$ ($N = 284, R = 0,48$):

$$\text{ПродЖ} = 76,2 + 2 \cdot KP1 + 2,4 \cdot KP2 - 3,7 \cdot KP4 - 4,8 \cdot KP5 - 5,2 \cdot KP6 - 2,4 \cdot KP8 - 3,0 \cdot KP9.$$

Интерпретация этих уравнений в том смысле, что почти весь генетический потенциал способностей (за исключением волевого и энергетического) способствует снижению продолжительности жизни, также вызывает подозрения в некорректности построенных моделей.

Второй причиной некорректности анализа данных явилась необеспеченность монотонности изменения целевого количественного показателя (продолжительности жизни) при увеличении значений объясняющих порядковых признаков.

Для проверки этого факта было осуществлено:

1. Градация каждого признака $KP0, KP1, KP2, \dots, KP9$ согласно порядковым смыслам их психологической интерпретации. Так, для $KP1$ было выделено четыре градации: 1) $KP1 = 1$ или $KP1(1)$; 2) $KP1 = 2$ или $KP1(2)$; 3) $KP1 = 3$ или $KP1(3)$; 4) $KP1 \geq 4$ или $KP1(\geq 4)$.

2. Построение для каждого признака $KP0, KP1, KP2, \dots, KP9$ групп подпризнаков, соответствующих выделенным выше градациям. Добавление этих подпризнаков в матрицу обработки.

В итоге выяснилось, что для ряда признаков их подпризнаки в последовательности от наименьшего до наибольшего могут несколько раз поменять знак коэффициента корреляции с целевым показателем.

Третьей причиной некорректности предыдущих регрессионных моделей оказался тот факт, что в разные периоды жизни (до 50–55 лет и после 65–70 лет) работают разные механизмы «участия» факторов генетического потенциала человека в формировании события его смерти.

Наконец, четвертой причиной некорректности модели регрессионного прогноза является то, что признаки даты рождения человека не исчерпывают весь набор факторов, определяющих продолжительность его жизни (около 20–30% вклада). В связи с этим применительно к корреляционно-регрессионным построениям речь можно вести не столько о задаче прогноза

продолжительности жизни, сколько о характере влияния того или иного генетического потенциала человека на формирование события его смерти в определенном социальном окружении. Так, например, в таких странах, как Япония, Беларусь и Сомали, средние продолжительности жизни отличаются друг от друга на десятки лет. Естественно ожидать, что для них также будут отличаться и анализируемые нами статистические связи. Если в стране созданы условия для реализации, в частности, интуитивного и творческого потенциала, то соответствующие признаки $KП5$ и $KП7$ будут иметь положительную корреляцию с продолжительностью жизни. И, наоборот, без таких условий, попытки раскрытия этого потенциала будут встречать сопротивление со стороны социума, что, в свою очередь, будет сказываться на формировании события смерти.

Особенность статистических моделей, построенных по данным социальной природы, состоит в том, что они с большой долей условности удовлетворяют классическим требованиям однородности и представительности используемых выборок. Однородность выборки предполагает сохранение единого механизма генерации случайных событий. В нашем примере косвенным показателем стабильности этого механизма может служить относительная устойчивость знаков и величин коэффициентов корреляции объясняющих подпризнаков и целевого показателя при ограниченном (в 1,5–2 раза) сужении выборки. Как видим, сам процесс статистического исследования социальных объектов носит итеративный характер и обязывает специалиста на каждом этапе обнаружения очередной некорректности и неинтерпретируемости моделей выдвигать новые гипотезы о возможном различии механизмов генерации событий.

Итогом моделирования в настоящей работе стали следующие уравнения:

1) женщины с $ПродЖ \leq 55$, $N = 81$, $R = 0,63$ (анализ факторов уменьшения $ПродЖ$):

$$ПродЖ = 52,8 - 2,0 \cdot KП1(\geq 3) - 2,7 \cdot KП2(1) - 4,2 \cdot KП3(2) - 12,0 \cdot KП5(0) - 5,0 \cdot KП6(\geq 2) - 2,0 \cdot KП7(\geq 1) - 2,1 \cdot KП8(\geq 1) - 2,0 \cdot KП9(1);$$

2) женщины с $ПродЖ \geq 70$, $N = 328$, $R = 0,43$ (анализ факторов увеличения $ПродЖ$):

$$ПродЖ = 76,1 + 2,4 \cdot KП1(= 4) + 0,5 \cdot KП2(2) + 0,6 \cdot KП2(= 4) + 5,9 \cdot KП3(0) + 2,0 \cdot KП6(0) + 0,6 \cdot KП7(0) + 1,5 \cdot KП8(2) + 1,6 \cdot KП9(2) + 1,2 \cdot KП0(0) + 0,9 \cdot KП0(\geq 2);$$

3) мужчины с $ПродЖ \leq 50$, $N = 170$, $R = 0,41$ (анализ факторов уменьшения $ПродЖ$):

$$ПродЖ = 52 - 3,3 \cdot KП1(2-3) - 1,5 \cdot KП2(0-1) - 1,3 \cdot KП3(1) - 4,4 \cdot KП5(0) -$$

$$-4,5 \cdot KП6(0-1) - 2,4 \cdot KП7(\geq 2) -$$

$$-5,2 \cdot KП8(\geq 1) - 2,8 \cdot KП9(\geq 1);$$

4) мужчины с $ПродЖ \geq 65$, $KП0=0$, $N=203$, $R=0,43$ (анализ факторов увеличения $ПродЖ$):

$$ПродЖ = 70 + 4,5 \cdot KП1(\geq 4) + 3,2 \cdot KП2(\geq 3) + 2,3 \cdot KП3(0-1) + 1,6 \cdot KП4(0) + 0,8 \cdot KП5(1) + 1,8 \cdot KП6(\geq 2) + 1,1 \cdot KП7(\geq 2) + 3,7 \cdot KП8(2) + 1,0 \cdot KП9(1);$$

5) мужчины с $ПродЖ \geq 65$, $KП0>0$, $N=244$, $R=0,39$ (анализ факторов увеличения $ПродЖ$):

$$ПродЖ = 66,6 + 1,1 \cdot KП1(3) + 2,2 \cdot KП2(2) + 4,7 \cdot KП2(\geq 4) + 1,6 \cdot KП3(0) + 4,0 \cdot KП4(0) + 1,8 \cdot KП6(0-1) + 1,0 \cdot KП7(\geq 1) + 1,4 \cdot KП8(0) + 0,8 \cdot KП9(1) + 1,5 \cdot KП0(1).$$

Заметим, что коэффициенты этих уравнений отражают условный вклад подпризнаков (в годах) в изменение продолжительности жизни.

3 Интерпретация итоговых уравнений регрессионной модели

С целью обеспечения полноты обзора общей картины статистических связей на рисунке 3.1 показаны: направление связи (прямая и обратная) и сила (слабая, умеренная, сильная) вклада признаков $KП0, KП1, KП2, \dots, KП9$ в целевой показатель продолжительности жизни для пяти выделенных случаев.

Анализируя две модели для женщин с ранними смертями (1) и со смертями в зрелом возрасте (2), видим, что одни и те же подпризнаки $\{KП1(\geq 3)$ – высокий волевой потенциал, $KП5(0)$ – отсутствие потребности в инструкции и предвидении, $KП8(\geq 1)$ – внушаемость и зависимость от других людей} в первом случае вносят весомый вклад в раннюю смерть, во втором же случае – положительно сказываются на увеличении продолжительности жизни. Ранним смертям женщин способствуют также: слабый энергетический потенциал $KП2(1)$, рациональность и педантичность $KП3(2)$, существенная тяга к физическому труду $KП6(\geq 2)$, творческие задатки $KП7(\geq 1)$ и плохая память $KП9(1)$.

На увеличение продолжительности жизни женщин в зрелом возрасте влияют также: умеренные и очень высокие волевые показатели $KП2(2)$ и $KП2(\geq 4)$, отсутствие потребности в рационализации и прагматизации всех явлений жизни $KП3(0)$, низкая значимость физического труда $KП6(0)$ и творчества $KП7(0)$. Кроме того, благоприятными оказываются: отсутствие нулей $KП0(0)$ или значительное их присутствие $KП0(\geq 2)$.

Признаки:	КП1 Воля	КП2 Энергия	КП3 Рацио- нальность	КП4 Здо- ровье	КП5 Инту- иция	КП6 Физ. труд	КП7 Твор- чество	КП8 Помощь другим	КП9 Память	КП10 Доп. потен- циал
Модели:										
женщины ПродЖ ≤ 55	(≥ 3) ↓	(1) ↓	(2) ↓		(0) ↓	(≥ 2) ↓	(≥ 1) ↓	(≥ 1) ↓	(1) ↓	
женщины ПродЖ ≥ 70	(4) ↑	(2) (4) ↑ ↑	(0) ↑			(0) ↑	(0) ↑	(2) ↑	(2) ↑	(0) (≥ 2) ↑ ↑
мужчины ПродЖ ≤ 50	(2–3) ↓	(0–1) ↓	(1) ↓		(0) ↓	(0–1) ↓	(≥ 2) ↓	(≥ 1) ↓	(≥ 1) ↓	
мужчины ПродЖ ≥ 65, КП0=0	(≥ 4) ↑	(≥ 3) ↑	(0–1) ↑	(0) ↑	(1) ↑	(≥ 2) ↑	(≥ 2) ↑	(2) ↑	(1) ↑	
мужчины ПродЖ ≥ 65, КП0>0	(3) ↑	(2) (≥ 4) ↑ ↑	(0) ↑	(0) ↑		(0–1) ↑	(≥ 1) ↑	(0) ↑	(1) ↑	(1) ↑

Обозначения связей в ячейках таблицы рисунка

прямая обратная

↑ ↓
↑ ↓
↑ ↓

Слабая
Умеренная (значимая)
Сильная (уверенная)

Рисунок 3.1 – Направление и сила вклада признаков в изменение продолжительности жизни для пяти выделенных случаев, приведенных в вертикальной шапке рисунка таблицы

У мужчин с ранними смертями картина факторов уменьшения продолжительности жизни (3) аналогична соответствующей модели у женщин (1).

В свою очередь, модели роста продолжительности жизни в зрелом возрасте у мужчин ((4) и (5)) имеют некоторые отличия от соответствующей модели у женщин (2). Так, в них: появляется фактор КП4(0) – отсутствие потенциала физического здоровья (возможно, это способствует формированию интереса к своему здоровью из-за болезней ещё с детства); предполагается наличие некоторых творческих потребностей КП7(≥1); необязательно отсутствие интуиции и предвидения КП5(1) в модели (4). Во всех моделях роста продолжительности жизни (2), (4) и (5) наблюдаются высокие показатели волевого КП1 и энергетического КП2 потенциала, а также низкая рациональность КП3. Модели (4) и (5) у мужчин отличаются разной тягой к физическому труду КП6 и степенью зависимости от других людей КП8. В модели (4) наличие этих факторов увеличивает сроки жизни. А в модели (5) наоборот, их отсутствие КП8(0) или слабая выраженность КП6(0–1) повышают продолжительность жизни. Возможно, наличие нулей в рядах Пифагора открывает дополнительный потенциал самостоятельности и ответственности человека за свою жизнь.

Заключение

Обращаясь к практическим выводам не только для человека, но и для государства, отметим, что в нашей республике имеются огромные

возможности для увеличения средней продолжительности жизни. Прежде всего, это касается создания лучших условий для самореализации людей с творческими художественными или интеллектуальными способностями (модели (1), (3), (4) и (5)). Без такой самореализации люди (особенно со средним и высоким волевым потенциалом, плохим предвидением, прагматичные и с высокой внушаемостью со стороны) склонны отходить от своих основных жизненных задач, попадать в «опасные» компании и в итоге «формировать» событие смерти.

Резюмируя всё выше изложенное, отметим, что корректное статистическое исследование социальной системы предполагает не только хорошее владение инструментом анализа данных, но и одновременно глубокое знание природы этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осипенко, К.А. Метод регрессионного моделирования продолжительности жизни по дате рождения / К.А. Осипенко, Н.Б. Осипенко // Творчество молодых 2012 : сборник научных работ студентов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины» : в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; отв. ред. О.М. Демиденко. – Гомель, 2012. – Ч. 1. – С. 194–197.

2. Осипенко, А.Н. Метод и средства автоматизации моделирования активных систем: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / А.Н. Осипенко ; ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 1997. – 16 с.

Поступила в редакцию 16.10.13.

УДК 577.353; 612.741.1; 616.71

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМИОГРАММ ОТ ПАРАМЕТРОВ РЕГИСТРАЦИИ

А.Н. Осипов, В.М. Бондарик, Д.Ф. Кузнецов, Е.П. Остроух, Х. Масудян

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

THE DEPENDENCE OF ENERGY CHARACTERISTICS OF ELECTROMYOGRAMS ON THE PARAMETERS OF REGISTRATION

A.N. Osipov, V.M. Bondarik, D.F. Kuznecov, E.P. Ostroukh, X. Masudian

Byelorussian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Предложены критерии, позволяющие учесть энергетические параметры нестационарного биоэлектрического сигнала и эффективно проанализировать ЭМГ-сигнал. Представлены экспериментальные данные зависимостей средней амплитуды и энергии ЭМГ-сигналов от времени. Установлено, что изменение межэлектродного расстояния оказывает влияние на зарегистрированный ЭМГ-сигнал. При этом не выявлена зависимость параметров суммарной электромиограммы мышцы *m. gastrocnemius medialis* от площади электродов.

Ключевые слова: электромиография, поверхностные электроды, амплитуда электромиограммы, энергия электромиограммы.

In the paper the authors propose criteria that take into account the energy parameters of a nonstationary bioelectric signal, and thereby quickly and efficiently analyze the EMG signal. Experimental data of the dependence of the average EMG amplitude and the energy signals on time are presented. It is established that changing of the inter-electrode distance affects the Registered EMG signal. The dependence of the parameters of the total muscle electromyogram of *m. gastrocnemius medialis* of the area of the electrodes is not revealed.

Keywords: *electromyography, surface electrodes, EMG amplitude, EMG energy.*

Введение

Суммарная электромиография, основанная на регистрации анализа суммарной биоэлектрической активности совокупности двигательных единиц с помощью накожных электродов широко используется для исследования нервно-мышечной системы [1], [2].

Традиционные методы анализа суммарной электромиограммы (ЭМГ) базируются на расчете статистических параметров (средняя арифметическая амплитуда и частота импульсов) и визуальной оценке по общему виду ЭМГ в соответствии с классификацией Ю.С. Юсевич. Внедрение информационных технологий в медицину послужило основанием для появления новых методов обработки и анализа электромиограммы, и как результат – расширения возможностей электромиографии в клинической электрофизиологии. В настоящее время в функциональной диагностике все более широко применяются различные методы обработки ЭМГ сигналов: линейного и нелинейного анализа, метода частотно-временного преобразования, спектральных методов и др. [3]–[6]. Однако следует отметить, что в литературе отсутствуют сравнительные результаты исследований поверхностных электромиограмм (ЭМГ) сигналов, полученных при различных параметрах регистрации. Поэтому

целью данной работы стало изучение влияния параметров электродов (диаметра, расстояния между электродами) на энергетические характеристики ЭМГ сигнала.

1 Материал и методика исследований

Для регистрации биоэлектрической активности использовался аппаратно-программный комплекс, который позволяет выполнить расчет ее основных энергетических характеристик (рисунк 1.1).

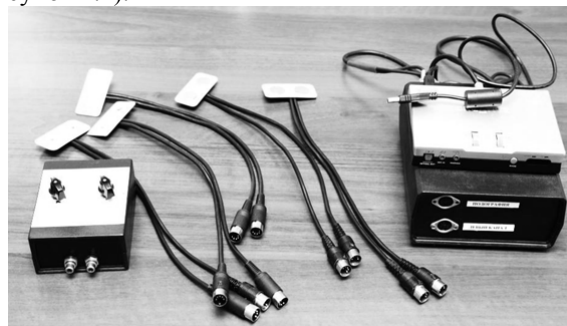


Рисунок 1.1 – Аппаратно-программный комплекс анализа поверхностных электромиограмм

Комплекс включал в себя блок электродов, блок усилителя, модуль ввода-вывода аналоговых сигналов, компьютер со специальным программным обеспечением. Используемое программное

обеспечение, позволяло обрабатывать ЭМГ в режиме реального времени, рассчитывать параметры и значения средних амплитуд и мощности сигнала [7].

В исследовании приняли участие в качестве испытуемых 11 мужчин (в возрасте от 19 до 21 года). Исследования проводились в области задней поверхности голени (проекция икроножной мышцы *m. gastrocnemius medialis*) по приведенной ниже методике. Для проведения исследования зависимости параметров ЭМГ-сигнала от межэлектродного расстояния использовались электроды, соответствующие принятым нормативно-техническим документам [8]–[10]. В используемой системе электродов межэлектродное расстояние варьировалось от 5 до 30 мм (рисунок 1.2, а).

При исследовании зависимости параметров ЭМГ-сигнала от площади электродов на голень испытуемого на расстоянии 30 мм друг от друга накладывались два электрода, диаметр которых варьировался от 3 до 19 мм (рисунок 1.2, б). Электроды располагались вертикально вдоль двигательных единиц исследуемой мышцы и фиксировались жгутами.

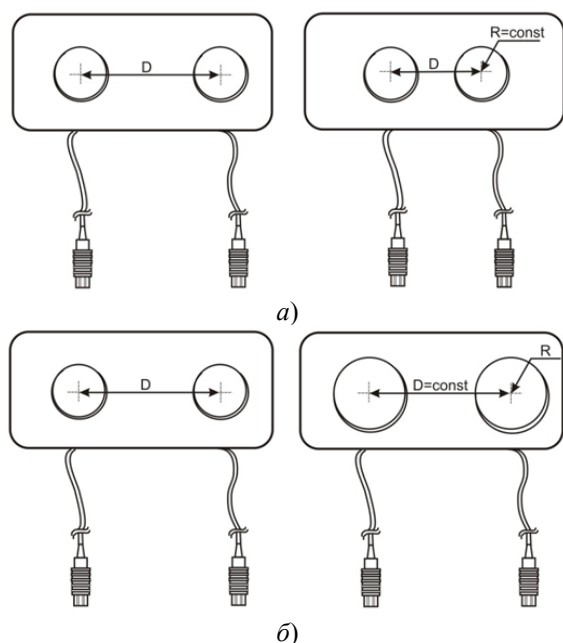


Рисунок 1.2 – Электроды, примененные в исследованиях влияния межэлектродного расстояния (а), площади электродов (б)

Биоэлектрическая активность мышцы *m. gastrocnemius medialis* регистрировалась при ее максимальном произвольном concentрическом напряжении. Тестовое движение выполнялось по следующему алгоритму:

- 1) сокращение мышцы за $1,5 \pm 0,5$ с;
- 2) удержание мышцы в состоянии максимального сокращения в течение $4,0 \pm 0,5$ с;
- 3) расслабление мышцы за $1,5 \pm 0,5$ с.

Экспериментальные данные сохранялись в электронной базе данных. Далее производился анализ результатов, поиск закономерностей между энергетическими характеристиками сигналов и параметрами электродов.

С целью проведения корректного анализа данных регистрация электромиограмм у участников исследования проводилась в виде серий измерений. Кратность повторения измерений рассчитывалась по формуле:

$$n = \left(u_k \cdot \frac{\sigma_{\Delta}}{\varepsilon} \right)^2, \quad (1.1)$$

где u_k – квантиль нормированного нормального распределения (определяется по таблице), σ_{Δ} – оценка стандартного отклонения, ε – абсолютная точность интервальной оценки. Для определения оценки дисперсии σ^2 проводилась отдельная пробная серия экспериментов и оценивалась предельная погрешность измерения по критерию «трех сигма»: $\Delta_{\max} \approx 3\sigma$.

Тогда при значении квантиля распределения $u_k = 3$, формула (1.1) принимает вид

$$n = \left(\frac{\Delta_{\max}}{\varepsilon} \right)^2, \quad (1.2)$$

с доверительной вероятностью $\gamma = 0,999$.

Рассчитанное количество измерений округлялось в большую сторону до ближайшего целого числа. Для заданных условий экспериментов рассчитанное количество измерений равнялось пяти.

Для обработки полученных ЭМГ-сигналов использовался метод частотно-временного преобразования.

По зарегистрированным ЭМГ определялась средняя амплитуда спектральных отсчетов при максимуме сокращения мышцы (A_{cp}) и мощность сигнала (E).

$$A_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^N |A_i|}{N}, \quad (1.3)$$

где A_i – амплитуда i -го отсчета зарегистрированного сигнала, N – число отсчетов сигнала.

Вышеуказанные параметры позволили оценить изменение ЭМГ-сигнала в зависимости от условий регистрации.

Определение энергетических параметров производилось на основе анализа полученных амплитуд ЭМГ-сигнала.

Рассчитывалась мощность для каждого значения ЭМГ-сигнала:

$$E_i = A_i^2. \quad (1.4)$$

Далее проводился расчет средних значений мощности для зарегистрированных сигналов [7]:

$$E_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^N |E_i|}{N}. \quad (1.5)$$

Поскольку амплитуда и мощность полученных электромиограмм у испытуемых имели вариативный характер, обусловленный индивидуальными физическими данными, для повышения наглядности результатов анализа экспериментальных данных была выполнена их нормализация. Максимальное значение амплитуды (A_{\max}) и мощности (E_{\max}) в полученных электромиограммах наблюдались при межэлектродном расстоянии 30 мм. Относительно данных значений рассчитывались оставшиеся значения параметров. Нормализация данных выполнялась по формулам:

$$A_{\text{норм}} = \frac{A_{\text{ср}}}{A_{\text{max}}}, \quad (1.6)$$

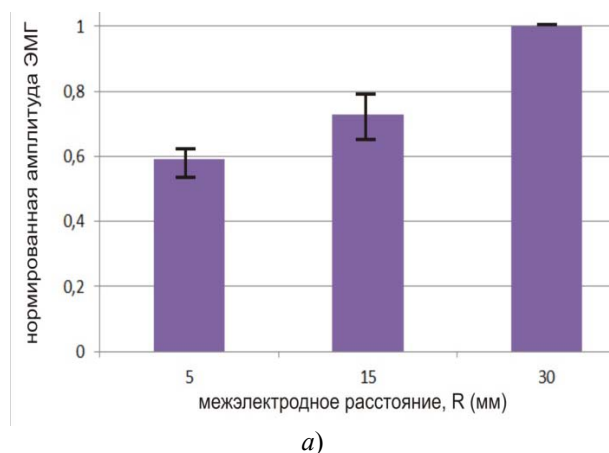
$$E_{\text{норм}} = \frac{E_{\text{ср}}}{E_{\text{max}}}. \quad (1.7)$$

Результатом расчетов являлись одномерные массивы зависимостей средней амплитуды и средней мощности ЭМГ-сигналов от времени.

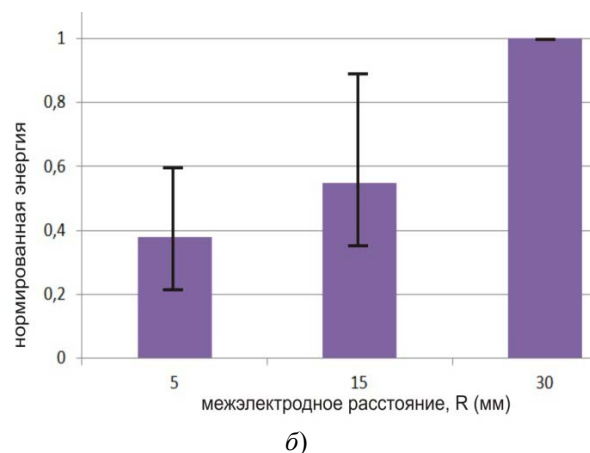
2 Результаты и обсуждение

Результаты количественной оценки ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* (средние значения и среднеквадратические отклонения в виде $M \pm m$) при различном расстоянии R между электродами для средней амплитуды, выраженной в микровольтах, приведены в таблице 2.1; для средней мощности, выраженной в микроваттах – в таблице 2.2.

На рисунке 2.1 приведены диаграммы, отражающие изменение нормированных значений средней амплитуды (a) и средней энергии (b) ЭМГ-сигнала мышцы *m. gastrocnemius medialis* при изменении межэлектродного расстояния от 5 мм до 30 мм. Столбцы диаграмм соответствуют усредненной нормированной амплитуде (рисунок 2.1, a) и нормированной энергии (рисунок 2.1, b) ЭМГ-сигналов, линии черного цвета отражают диапазон изменения исследуемых параметров каждого из 11 участника испытания.



a)



b)

Рисунок 2.1 – Изменение средней амплитуды, выраженной в нормированных единицах $A_{\text{норм}}$ (a), и средней энергии, выраженной в нормированных единицах $E_{\text{норм}}$ (b), в зависимости от межэлектродного расстояния для ЭМГ-сигнала мышцы *m. gastrocnemius medialis*

Таблица 2.1 – Средние значения амплитуды ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* при различных параметрах регистрации

№ испытуемого	$A_{\text{ср}}$, мкВ		
	$R=5$ мм	$R=15$ мм	$R=30$ мм
1	165,4 ± 17,05	219,5 ± 10,08	348,3 ± 71,23
2	122,5 ± 14,97	237,9 ± 24,19	273,6 ± 48,64
3	257 ± 33,35	318,3 ± 19,99	327,4 ± 21,35
4	138 ± 18,88	198,4 ± 12,79	229,8 ± 37,09
5	140,1 ± 17,39	205,3 ± 29,05	238,2 ± 36,92
6	105,5 ± 30,89	98,5 ± 4,02	165,3 ± 1,77
7	88,3 ± 13,43	133,6 ± 11,95	158,0 ± 22,77
8	141,6 ± 4,99	179,6 ± 6,09	313,4 ± 16,14
9	158,6 ± 17,04	189,3 ± 0,99	252,7 ± 0,07
10	114,0 ± 4,74	149,8 ± 19,52	206,0 ± 10,10
11	119,8 ± 30,41	154,8 ± 1,97	224,2 ± 70,42

Таблица 2.2 – Средние значения мощности ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* при различных параметрах регистрации

№ испытуемого	$E_{\text{ср}}$, мкВт		
	$R=5$ мм	$R=15$ мм	$R=30$ мм
1	38,9 ± 8,51	78,6 ± 9,89	106,3 ± 37,30
2	36,1 ± 6,80	78,3 ± 21,02	109,1 ± 33,01
3	47,4 ± 8,84	84,2 ± 7,76	251,6 ± 17,98
4	28,6 ± 7,23	76,8 ± 24,65	137,6 ± 47,02
5	118,7 ± 31,53	178,4 ± 20,24	194,8 ± 29,25
6	20,7 ± 12,31	17,2 ± 1,29	48,9 ± 0,99
7	13,3 ± 4,14	30,8 ± 6,01	44,5 ± 13,61
8	36,1 ± 2,29	56,7 ± 4,94	169,5 ± 19,28
9	44,4 ± 9,35	62,8 ± 2,16	113,8 ± 2,74
10	37,8 ± 18,68	39,7 ± 9,54	74,7 ± 1,02
11	27,5 ± 12,93	48,4 ± 0,34	102,1 ± 57,99

Количественное исследование средней амплитуды ЭМГ-сигнала мышцы *m. Gastrocnemius medialis* показало, что увеличение межэлектродного расстояния с 5 мм до 30 мм приводит к практически линейному росту амплитуды ЭМГ-сигнала примерно в 1,6 раза (см. рисунок 2.1, а). При увеличении расстояния между электродами в исследуемом диапазоне средняя мощность ЭМГ-сигнала растет, как и следовало ожидать, квадратично, (см. рисунок 2.1, б) и возрастает примерно в 2,6 раза. Данное обстоятельство хорошо согласуется с представлениями о характере электрических процессов в мышце. Действительно, возбуждаемые электрическими сигналами токи распространяются вдоль мышечных волокон. Причем проводимость мышечных тканей обусловлена не только их физическими свойствами, но и сложнейшими биохимическими и биофизическими процессами. Она имеет в основном ионную природу и сложным образом зависит от работы натрий-калиевых насосов клеток мышечной ткани. Линейность полученной зависимости означает, что в рассмотренном интервале мышечное волокно при разработке новых методик регистрации электромиограмм и технических средств для их реализации в первом приближении можно считать однородным проводником.

Определенный вопрос представляет экстраполяция зависимостей к нулевому расстоянию между электродами. Исходя из соображений о характере электрических процессов, следовало ожидать, что при нулевом расстоянии между электродами потенциал электрического импульса также окажется нулевым. Однако линейная экстраполяция приводит к значению порядка 0,4 от максимального, что не может быть отнесено на погрешность экспериментальных исследований и требует разработки методики и проведения исследований при малых межэлектродных расстояниях. В частности, одной из возможных причин данной особенности может выступать конечность контактной площади электродов.

Аналогичные исследования проведены для изучения влияния площади электродов на основные параметры электромиограмм: средней амплитуды, выраженной в микровольтах (таблица 2.3), средней мощности, выраженной в микроваттах (таблица 2.4). Проводилась регистрация электромиографического сигнала поверхностными электродами, диаметр D которых составлял 3 мм, 6 мм, 9 мм и 19 мм.

Количественный анализ ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* не позволил выявить каких-либо определенных закономерностей в изменении средних амплитуд и энергий для электродов различных диаметров. Поскольку проводящий электрод представляет собой эквипотенциальную поверхность, то фактически он производит усреднение принимаемых сигналов, заменяя усреднение по времени регистрации на усреднение по ансамблю, что дает аналогичный результат в силу эргодичности процесса. При линейной координатной зависимости измеряемой величины ее среднее значение совпадает со значением в середине интервала усреднения, что, собственно, и отмечается в эксперименте. Максимальные значения исследуемых энергетических параметров у испытуемых регистрировались при различных значениях диаметра электродов (таблицы 2.3–2.4).

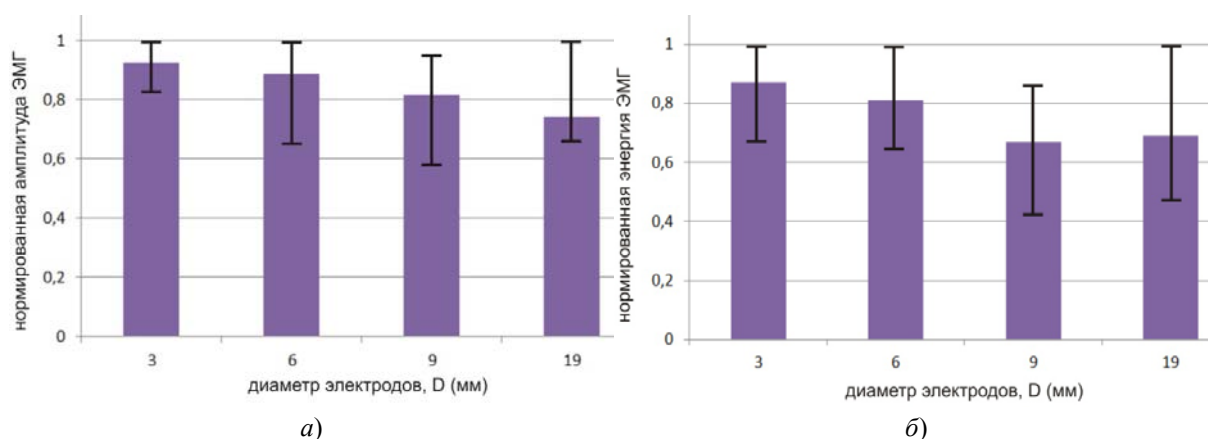
На рисунке 2.2 приведены графики, отражающие изменение нормированных значений средней амплитуды (а) и средней мощности (б) ЭМГ-сигнала мышцы *m. gastrocnemius medialis* при изменении диаметра электродов от 3 мм до 19 мм. На приведенных графиках по оси абсцисс указывается расстояние между центрами электродов в миллиметрах, по оси ординат – значение амплитуды и энергии в относительных единицах. Столбцы диаграмм соответствуют усредненной нормированной амплитуде (рисунок 2.2, а) и нормированной энергии (рисунок 2.2, б) ЭМГ-сигналов, линии черного цвета отражают диапазон изменения исследуемых параметров каждого из 11 участников эксперимента.

Таблица 2.3 – Средние значения амплитуды ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* при различных значениях диаметра регистрирующих электродов

№ испытуемого	A_{cp} мкВ			
	$D=3$ мм	$D=6$ мм	$D=9$ мм	$D=19$ мм
1	266,9 ± 12,35	231,5 ± 9,86	332,7 ± 32,26	355,4 ± 17,12
2	269,2 ± 15,48	248,2 ± 6,64	192,5 ± 27,51	181,9 ± 24,34
3	218,7 ± 14,89	215,2 ± 21,19	181,1 ± 16,05	161,9 ± 16,05
4	235,5 ± 18,23	285,2 ± 16,45	246,9 ± 20,01	283,4 ± 9,77
5	162,9 ± 19,56	183,5 ± 16,48	182,7 ± 22,42	187,0 ± 11,83
6	532,1 ± 26,11	371,8 ± 9,35	306,3 ± 12,84	334,3 ± 25,36
7	183,8 ± 18,63	142,2 ± 13,55	159,1 ± 30,25	152,4 ± 7,02
8	286,7 ± 12,77	227,4 ± 9,47	208,7 ± 17,14	199,0 ± 5,49
9	259,7 ± 17,82	309,1 ± 8,13	247,4 ± 8,06	289,6 ± 16,28
10	324,8 ± 14,36	373,3 ± 17,51	334,4 ± 17,58	328,5 ± 24,23
11	149,5 ± 29,41	138,57 ± 3,75	119,3 ± 18,98	114,7 ± 6,84

Таблица 2.4 – Средние значения мощности ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* при различных параметрах регистрации

№ испытуемого	E_{cp} , мкВт			
	$D=3\text{мм}$	$D=6\text{мм}$	$D=9\text{мм}$	$D=19\text{мм}$
1	158,2 ± 9,36	102,8 ± 18,10	205,3 ± 11,06	223,2 ± 11,29
2	132,3 ± 17,36	111,9 ± 8,48	64,9 ± 7,92	59,5 ± 7,18
3	108,9 ± 5,17	102,5 ± 17,68	77,4 ± 8,31	57,39 ± 6,05
4	98,4 ± 12,54	148 ± 9,57	110,8 ± 9,81	144,9 ± 13,42
5	49,6 ± 6,34	66,6 ± 5,37	60,5 ± 5,32	63,7 ± 4,01
6	488,1 ± 21,53	292,8 ± 16,25	200,3 ± 13,73	219,8 ± 16,39
7	68,4 ± 13,78	39,2 ± 9,36	46 ± 4,09	45,6 ± 7,05
8	187,3 ± 4,36	117,3 ± 11,99	94,2 ± 3,09	83,9 ± 4,76
9	145,1 ± 9,39	193,8 ± 8,30	123,3 ± 7,34	162,9 ± 21,09
10	210 ± 14,18	291 ± 6,39	228,5 ± 11,24	203 ± 11,80
11	40,4 ± 9,49	36,3 ± 2,07	25,8 ± 1,09	23,8 ± 3,07

Рисунок 2.2 – Изменение средней амплитуды, выраженной в нормированных единицах $A_{норм}$ (а), и средней энергии, выраженной в нормированных единицах $E_{норм}$ (б), в зависимости от диаметра электродов для ЭМГ-сигнала мышцы *m. gastrocnemius medialis*

Качественное исследование средней амплитуды ЭМГ-сигнала мышцы *m. gastrocnemius medialis* показало, что при увеличении диаметра электродов с 3 мм до 19 мм наблюдается тенденция незначительного снижения усредненных значений данного параметра, при этом велика вариативность зарегистрированных значений (см. рисунок 2.2, а). Аналогичное незначительное влияние увеличения диаметра электродов зафиксировано при исследовании ряда средних значений мощности ЭМГ-сигнала исследуемой мышцы.

Заключение

Проведены исследования суммарной электромиограммы мышцы *m. gastrocnemius medialis* у 11 человек. Для количественной оценки суммарной электромиограммы исследуемой мышцы использовались нормированные значения средней амплитуды и средней мощности ЭМГ-сигнала, которые позволили учесть энергетические параметры нестационарного биоэлектрического сигнала и эффективно проанализировать ЭМГ-сигнал.

Установлено, что увеличение межэлектродного расстояния в диапазоне от 5 мм до 30 мм приводит к росту средней амплитуды и средней мощности зарегистрированного ЭМГ-сигнала мышцы *m. gastrocnemius medialis* на $55 \pm 8\%$. При этом не выявлена зависимость параметров суммарной электромиограммы мышцы *m. gastrocnemius medialis* от площади электродов для диаметров электродов от 3 до 19 мм.

Выявленные закономерности позволили сделать вывод о том, что для повышения точности и объективности диагностических исследований методами поверхностной электромиографии необходимо контролировать межэлектродное расстояние.

Результаты исследований могут быть использованы при разработке новых методик регистрации электромиограмм и технических средств для их реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гехт, Б.М. Теоретическая и клиническая электромиография / Б.М. Гехт. – Л. : Наука, 1990. – 229 с.

2. Зайченко, К.В. Съём и обработка биоэлектрических сигналов / К.В. Зайченко, О.О. Жаринов, А.Н. Кулин. – СПб, 2001.
3. Зенков, Л.Р. Функциональная диагностика нервных болезней / Л.Р. Зенков, М.А. Ронкин. – М. : Медицина, 1991 – 623 с.
4. Райгайян, Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход / Р.М. Райгайян. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007.
5. Осипов, А.Н. Оценка эвакуаторной функции желудочно-кишечного тракта на основе частотно-временного анализа электромиограмм нервно-мышечных тканей / А.Н. Осипов [и др.] // Инженерный вестник. – 2009. – № 1 (27). – С. 92–97.
6. Сидоренко, А.В. Нелинейный анализ электромиограмм на основе вейвлет-преобразования / А.В. Сидоренко, А.П. Селицкий // Доклады БГУИР. – 2008. – № 2 (32). – С. 12–18.
7. Осипов, А.Н. Спектральный анализ сигналов электростимуляции нервно-мышечной ткани / А.Н. Осипов, М.В. Давыдов. – Доклады БГУИР, Мн. – 2005. – № 3 (11). – С. 53–58.
8. *An introduction to electromyography* / København. – Gyldendals, 1957. – 43 p.
9. ГОСТ 24878-81. Электроды для съема биоэлектрических биопотенциалов : Термины и определения. – М. : Изд-во стандартов, 1982.
10. ГОСТ 25995-83. Электроды для съема биоэлектрических потенциалов: Общие технические требования и методы испытаний. – М. : Изд-во стандартов, 1984.
11. Меженная, М.М. Современные методы анализа суммарной электромиограммы нервно-мышечного аппарата человека в норме и при патологии / М.М. Меженная // Новости медико-биологических наук, Минск. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 49–58.

Поступила в редакцию 22.02.13.

УДК 531.3; 796.01

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ БИОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.Е. Покатилов

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

MATHEMATICAL MODELLING OF LOCOMOTION OF BIOMECHANICAL SYSTEM

A.E. Pokatilov

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В данной статье для целенаправленного движения биомеханической системы определяются и изучаются математические модели синтеза движения на кинематическом и динамическом уровнях. Модели разбиваются на две части: непосредственно управляемую мышечной системой и на часть, отражающую движение спортивного снаряда, выступающего в качестве упругой опоры. Показано взаимодействие этих частей и предложена методика расчета полных моделей в вычислительном эксперименте на ЭВМ.

Ключевые слова: синтез, управление, движение, математическая модель, кинематический уровень, биомеханическая система.

In the given paper the mathematical models of synthesis of locomotion at kinematic and dynamic levels are defined and investigated for the purposeful movement of biomechanical system. Models are divided into two parts: directly operated muscular system and a part reflecting locomotion of an apparatus, representing itself as an elastic support. Interaction of these parts is shown and the design of the procedure of full models in computing experiment on the COMPUTER is proposed.

Keywords: synthesis, control, locomotion, mathematical model, kinematic level, biomechanical system.

Введение

Наличие объективной информации о технике спортивных упражнений является одним из факторов, способствующим повышению эффективности учебно-тренировочного процесса. Особую значимость это положение приобретает в спортивной и художественной гимнастике, акробатике, прыжках на батуте и в воду и в ряде других видах спорта, в которых техническая подготовка доминирует над остальными сторонами спортивной подготовки [1], [2].

В настоящее время можно выделить два основных направления, по которым осуществляется исследование техники спортивных упражнений. К первому относится достаточно широко распространенный метод анализа кинематической и динамической структуры двигательных действий, ко второму – синтез движений человека в имитационном моделировании на ЭВМ [2].

Синтез целенаправленного движения позволяет программировать движение спортсмена, выстраивая все характеристики с учетом геометрии масс конкретного исполнителя и его тренированности. Другими словами, это направление позволяет создавать новые виды движений, т. е. спортивных упражнений, а также разрабатывать индивидуальную технику выполнения любых упражнений для конкретного спортсмена. Данное направление в области биомеханики имеет небольшую историю развития, пока рассматривает

лишь ограниченный круг задач и строит свои выводы на достаточно упрощенных схемах. Причинами являются как существенные трудности, связанные с использованием инструментальных методов исследования, так и отсутствием математических моделей синтеза целенаправленного движения биомеханических систем, учитывающих ряд факторов, существенным образом оказывающих влияние на движение спортсмена в целом. Кроме того, необходима методика использования подобных расчетных моделей в вычислительном эксперименте на ЭВМ [3], [4].

Важнейшим из факторов, до недавнего времени не принимавшимся в расчет, является спортивный снаряд, выступающий в роли упругой опоры. Расчет по моделям анализа показывает существенное влияние снаряда на величину как кинематических, так и динамических характеристик целенаправленного движения, в отдельные фазы спортивного упражнения усиливая или ослабляя ту или иную характеристику в разы или даже на порядок [5].

1 Математическая модель движения биомеханической системы

Расчетная схема биомеханической системы для случая моделирования опоры двумя пружинами приведена на рисунке 1.1. К звеньям приложены следующие силовые факторы: силы тяжести звеньев \bar{G}_i ; силы инерции $\bar{\Phi}_i$, приведен-

ные к центрам масс C_i соответствующих звеньев; дополнительные моменты M_u (пары инерционных сил), а также моменты управляющих сил мышечной системы $M_{i,i-1}$. Последние действуют относительно всех шарниров, кроме первого, т.е. опорного шарнира. А им является шарнир, моделирующий контакт рук со спортивным снарядом. В этом контакте во время движения появляется трение скольжения. Сама кинематическая пара обозначена как O_{01} . Возникающий при этом момент трения $M_{mp_{10}}$ равен по величине сумме моментов всех силовых факторов, участвующих в кинестатическом анализе и записанных относительно опорного шарнира.

Предложенная схема по рисунку 1.1 моделирует упражнение в спортивной гимнастике, выполняемое на перекладине. Таким упражнением может быть большой оборот вперед или назад. Здесь принято следующее допущение: выполняемое движение является плоским, а сама биомеханическая система представлена в виде трехзвенной системы: звено 1 – руки; звено 2 – голова и туловище; звено 3 – ноги.

Общий вид уравнения для момента управляющих мышечных сил относительно каждого шарнира $O_{i-1,i}$ N -звенной системы выглядит следующим образом [6]

$$M_{i,i-1} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j +$$

$$+ \ddot{L}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (1.1)$$

Здесь коэффициенты, учитывающие массу звеньев и их размеры, равны:

$$C_{ij} = \begin{cases} m_j S_j + L_j \sum_{s=j+1}^N m_s, & \text{если } i \leq j, \\ L_j \sum_{s=i}^N m_s, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

$i=1, 2, \dots, N; j=0, 1, \dots, N; s \leq N$.

Аналитическое выражение коэффициентов для вычисления момента инерции массы N -звенной биомеханической системы в условиях упругой опоры построим, введя символ Кронекера. Последний равен

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Здесь j, k – буквенные индексы, соответствующие цифровым индексам коэффициентов A_{jk}

$$A_{jk} = \delta_{jk} (I_i + m_i S_i^2) + m_j L_i S_j (1 - \delta_{jk}) + \sum_{k=j+1}^N m_k L_i L_j,$$

где $j=1, 2, \dots, N; k=1, 2, \dots, N$.

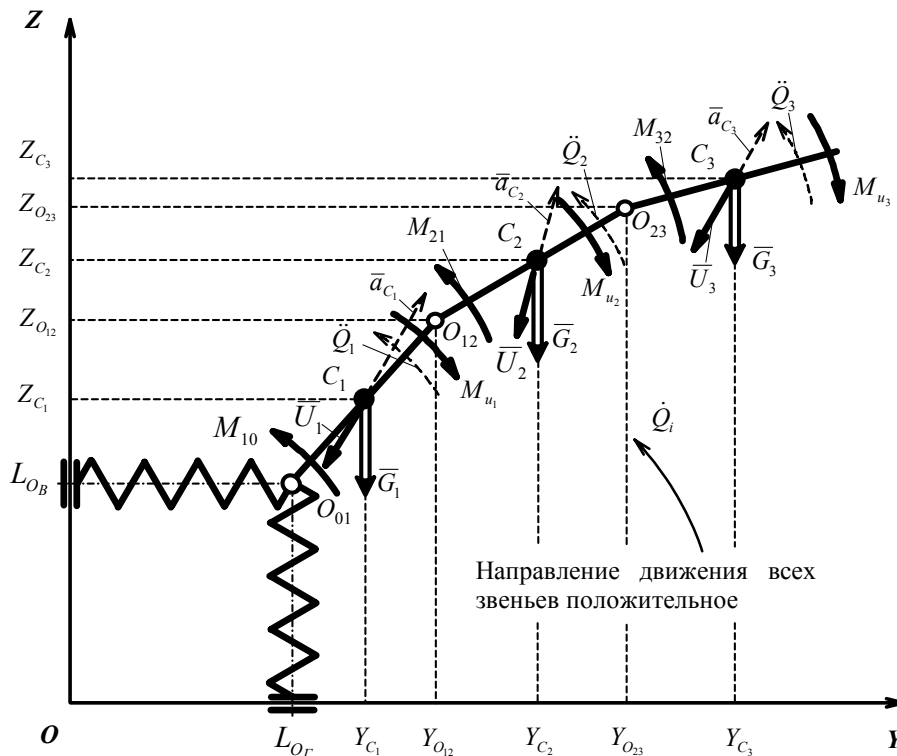


Рисунок 1.1 – Расчетная схема биомеханической системы

Коэффициенты, характеризующие опору, являются переменными $A_{0j} = var$, в отличие от коэффициентов для биосистемы $A_{jk} = const$, где $j > 0, k > 0$.

В уравнении (1.1) выделенная биомеханическая система, непосредственно отражающая движение спортсмена, имеет вид

$$M_{i,i-1}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (1.2)$$

Другая часть выражения показывает в явном виде связь движения опоры с моментами управляющих сил:

$$M_{i,i-1}^{OP} = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j. \quad (1.3)$$

Перепишем управляющий момент мышечных сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$ через сумму моментов выделенных опоры и биомеханической системы:

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{OP} + M_{i,i-1}^{BMC}. \quad (1.4)$$

В задачах синтеза движения с учетом взаимодействия спортсмена с опорой необходимо представить модель (1.1) не только через спортивный снаряд и биомеханическую систему (1.3) и (1.2), но и через пассивную и активную части с точки зрения управления мышечной системой. Перепишем выражение (1.4) в общем виде как

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{ПАС} + M_{i,i-1}^{АКТ} = M_{i,i-1}^{OP_ПАС} + M_{i,i-1}^{ПАС_BMC} + M_{i,i-1}^{АКТ_BMC}.$$

К пассивной части относится часть, отражающая движение опоры и действие силы тяжести. Подробно, исходя из выражения (1.1), ее можно записать в виде

$$M_{i,i-1}^{ПАС} = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j.$$

Активная часть – это управление на уровне моментов, задаваемое мышечной системой человека. Она принимает вид

$$M_{i,i-1}^{АКТ} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j).$$

Таким образом, пассивные части находятся в выделенной опоре и выделенной биомеханической системе.

2 Моделирование на кинематическом уровне

Определим построенную в форме системы дифференциальных уравнений (1.1) математическую модель движений человека в качестве базовой математической модели движения биомеханической системы. Анализ структуры уравнений базовой математической модели показывает, что разрешить исходную систему уравнений можно относительно как ее левой, так и правой частей. Это позволяет ставить и решать два класса задач биомеханики движений спортсмена: задачу анализа и задачу синтеза движений биомеханических систем.

Отметим, что спортивный снаряд, с точки зрения управления движением спортсмена, является системой пассивной, так как управление осуществляется за счет мышечной системы, а опора уже корректирует предложенную программу движения. Поэтому рассмотрим, в первую очередь, выделенную биомеханическую систему по выражению (1.2).

Так как программное управление задано в форме изменения суставных углов по времени, то его можно представить в виде функциональной зависимости от разности обобщенных координат по времени. Так как в уравнениях (1.1) и (1.2) программное управление задано в форме изменения суставных углов по времени, то его можно представить в виде функциональной зависимости от разницы обобщенных координат Q_j по времени. Формализуя программное управление для непрерывной модели, запишем общую структуру управляющих воздействий в виде [2]

$$u_z = Q_{z+1} - Q_z, \quad z = 1, 2, \dots, N-1.$$

Данная запись означает изменение разницы обобщенных координат $Q_{z+1} - Q_z$ по времени. Первая и вторая производные от управляющих воздействий по времени имеют вид:

$$\dot{u}_z = \dot{Q}_{z+1} - \dot{Q}_z,$$

$$\ddot{u}_z = \ddot{Q}_{z+1} - \ddot{Q}_z, \quad z = 1, 2, \dots, N-1.$$

Кинематическую связь, наложенную на обобщенные координаты биомеханической системы, через программное управление запишем как:

$$Q_{z+1} = Q_z + u_z, \quad z = 1, 2, \dots, N-1.$$

Кинематическую связь в общем виде представим в форме

$$Q_p = Q_i + \sum_{z=1}^{p-1} u_z,$$

$$\dot{Q}_p = \dot{Q}_i + \sum_{z=1}^{p-1} \dot{u}_z,$$

$$\ddot{Q}_p = \ddot{Q}_i + \sum_{z=1}^{p-1} \ddot{u}_z, \quad p = 2, 3, \dots, N.$$

Тогда уравнение (1.1) запишем через управляющие функции как

$$M_{i,i-1} = \left[\ddot{L}_{0_b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0_r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j \right] + \left[g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j \right] + \left[\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\ddot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \ddot{u}_s) \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\dot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \dot{u}_s)^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \quad (2.1)$$

Отметим, что управление осуществляется за счет управления движением биомеханической системы, т. е. звеньев с 1 по N . Спортивный снаряд при этом оказывается пассивным элементом. Выделенная из выражения (2.1) биомеханическая система имеет вид

$$M_{i,i-1}^{BMC} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\ddot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \ddot{u}_s) \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\dot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \dot{u}_s)^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (2.2)$$

Система уравнений (2.2) разрешима относительно \ddot{Q}_1 любым из способов, известных в теории матричных операций и линейных уравнений. Остальные обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные ускорения определяются через управляющие функции на каждом шаге интегрирования математической модели синтеза движений человека.

Сведем все возможные способы построения программного управления на кинематическом уровне в таблицу 2.1.

В таблице 2.1 отражены функциональные связи, накладываемые на определенные группы кинематических характеристик и определяющие характер задания программы движения в целом и программного управления в частности. По формам задания функциональных связей в программном управлении можно выделить 3 главные группы связей, существующих между звеньями биомеханической системы:

- по обобщенным координатам;
- по обобщенным скоростям;
- по обобщенным ускорениям.

Четвертая группа включает всевозможные сочетания из элементов трех главных групп: одновременно часть программных управлений представлена первой формой функциональной связи, часть – второй, оставшиеся – третьей, а также возможны их комбинации.

3 Управление на динамическом уровне

Задачу синтеза движений человека с программным управлением на динамическом уровне можно сформулировать следующим образом: для биомеханической системы определить траекторию на интервале $t \in [t_0, t_L]$, если для любого момента времени $t \in [t_0, t_L]$ известно программное управление, заданное в форме закона изменения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена по времени [2].

Так как управление происходит за счет мышечной системы, то используем выражение (1.2), относящееся непосредственно к спортсмену. Введем обозначение для управляющих функций в виде $u_{i,i-1}^{BMC} = M_{i,i-1}^{BMC}$. Уравнение (1.2) примет вид

$$u_{i,i-1}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j), \quad (3.1)$$

где $i=1, 2, \dots, N$.

После преобразований имеем

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) + u_{i,i-1}^{BMC} - g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j.$$

Таблица 2.1 – Управление на кинематическом уровне

Кинематический уровень задания управляющих функций $u(i)$			
Форма $u(i)$	Типы решаемых задач		
	1	2	3
1	По разнице обобщенных координат $u_i = f(Q_{i+1} - Q_i)$	По обобщенным координатам $u_i = f(Q_i)$	По обобщенным координатам и их разнице в сочетании $u_i = f(Q_i, Q_{i+1} - Q_i)$
2	По разнице обобщенных скоростей $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_{i+1} - \dot{Q}_i)$	По обобщенным скоростям $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_i)$	По обобщенным скоростям и их разнице в сочетании $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_i, \dot{Q}_{i+1} - \dot{Q}_i)$
3	По разнице обобщенных ускорений $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_{i+1} - \ddot{Q}_i)$	По обобщенным ускорениям $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_i)$	По обобщенным ускорениям и их разнице в сочетании $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_i, \ddot{Q}_{i+1} - \ddot{Q}_i)$
4	Сочетания из форм 1, 2, 3	Сочетания из форм 1, 2, 3	Сочетания из форм 1, 2, 3

Данную систему уравнений необходимо решать относительно обобщенных ускорений \ddot{Q}_k , определяющих эволюцию биомеханической системы во времени.

Это управление без учета опоры. Выполнив силовой расчет, рассчитывают деформацию опоры на всей траектории. Для модели (1.1) это означает определение обобщенных координат и обобщенных ускорений L_{0_b} , L_{0_r} , \dot{L}_{0_r} , \dot{L}_{0_b} с целью дальнейшего расчета полного момента мышечных сил $M_{i,i-1}$ с учетом взаимодействия человека со спортивным снарядом.

4 Моделирование движения упругой опоры

После расчета по моделям (2.2) на кинематическом уровне или моделям (3.1) на уровне динамическом необходимо выполнить силовой расчет в несколько этапов. На первом этапе определяют проекции реакций, возникающих при действии биомеханической системы на опору, по моделям

$$R_{(i,i-1)_y}^{BMC} = -\sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j,$$

$$R_{(i,i-1)_z}^{BMC} = \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=i}^N G_p.$$

Здесь $i=1$. Данные силы вызывают деформацию спортивного снаряда. Последнюю можно определить любым методом, разработанным в сопротивлении материалов для расчета упругих деформаций при изгибе балок. В результате получим группу параметров \dot{L}_{0_r} , \dot{L}_{0_b} , характеризующих движение спортивного снаряда в моделях (1.1) и пригодных для синтеза на кинематическом и динамическом уровнях.

После этого рассчитывается дополнительная реакция, возникающая из-за действия биомеханической системы на упругую опору

$$R_{(i,i-1)_y}^{OP} = m_{i,N} \dot{L}_{0_r}, \quad R_{(i,i-1)_z}^{OP} = m_{i,N} \dot{L}_{0_b}.$$

Здесь $m_{i,N}$ – массовые коэффициенты. Данное выражение необходимо решать при $i=1$, используя существующие методы вычисления подобных задач [7]. Таким образом, на спортивный снаряд действует полная реакция, определяемая через ее проекции на координатные оси, как

$$R_{(i,i-1)_y} = R_{(i,i-1)_y}^{OP} + R_{(i,i-1)_y}^{BMC},$$

$$R_{(i,i-1)_z} = R_{(i,i-1)_z}^{OP} + R_{(i,i-1)_z}^{BMC}.$$

Силовой расчет в таком виде дает возможность решить систему уравнений (1.1), определяя ее на кинематическом или динамическом уровне, в зависимости от поставленной задачи.

Заключение

Решая задачи синтеза целенаправленного движения биомеханической системы, можно спроектировать спортивное упражнение для конкретного исполнителя. Задача имеет несколько уровней: кинематический и динамический, которые задаются исследователем. При этом представленные модели хорошо структурированы и разбиваются на часть, относящуюся к спортивному снаряду, и часть, отражающую непосредственное движение человека.

Показано, что непосредственное управление в виде заданных управляющих функций направлено на биомеханическую систему, т. е. опорно-двигательный аппарат человека. Вторая часть, относящаяся к движению спортивного снаряда, с точки зрения управления является частью пассивной и лишь корректирует значения конечных функций на кинематическом и динамическом уровнях. Для ее определения необходимо выполнить силовой расчет по предлагаемым моделям, используя стандартные методики из соответствующих разделов сопротивления материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Загrevский, В.И. Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем / В.И. Загrevский. – Томск – Могилев, 1999. – 156 с.
2. Загrevский, В.И. Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ / В.И. Загrevский, Д.А. Лавшук, О.И. Загrevский. – Могилев–Томск, 2000. – 190 с.
3. Васильков, Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 256 с.
4. Крутов, В.И. Основы научных исследований: учебник для техн. вузов / В.И. Крутов, И.М. Грушко, В.В. Попов; под ред. В.И. Крутова, В.В. Попова. – М.: Высшая школа, 1989. – 400 с.
5. Покатилов, А.Е. Биомеханика взаимодействия спортсмена с упругой опорой / А.Е. Покатилов; под ред. В.И. Загrevского. – Минск: Изд. центр БГУ, 2006. – 351 с.
6. Покатилов, А.Е. Биодинамические исследования спортивных упражнений в условиях упругой опоры / А.Е. Покатилов, В.И. Загrevский, Д.А. Лавшук. – Минск: Изд. центр БГУ, 2008. – 279 с.
7. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М.: Мир, 1982. – 238 с.

Поступила в редакцию 10.07.13.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25 % в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It pro-

vides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).