



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 3 (16) 2013

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

*Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by*

Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

*F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>*

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (16) 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

| | |
|---|----|
| Андреев Василий В., Панков А.А. Анализ эффектов Z' -бозонов в эксперименте ATLAS на LHC | 7 |
| Вакулина Е.В., Максименко Н.В. Поляризуемость пиона в формализме Даффина – Кеммера | 16 |
| Гайшун В.Е., Коваленко Д.Л., Семченко А.В., Васькевич В.В. Функциональные наноструктурированные $\text{SiO}_2\text{-GeO}_2$ пленки, синтезированные золь-гель методом | 19 |
| Ласковнев А.П., Черенда Н.Н., Басалай А.В., Углов В.В., Анищик В.М., Асташинский В.М., Кузьмицкий А.М. Модификация поверхностного слоя меди под действием компрессионного плазменного потока | 24 |
| Новикова О.В., Тюменков Г.Ю. Анализ приведенных модификаций уравнения состояния Пенга – Робинсона в рамках процесса Джоуля – Томсона | 30 |
| Самофалов А.Л., Фаняев И.А., Семченко И.В., Хахомов С.А. Преобразователи поляризации электромагнитных волн на основе композитных сред со спиральной структурой | 34 |
| Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Соколов С.И. Особенности лазерного термораскалывания кварцевого стекла | 39 |

МАТЕМАТИКА

| | |
|--|----|
| Антоневич А.Б., Пантелеева Е.В. Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами | 45 |
| Атвиновский А.А., Миротин А.Р. Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения | 55 |
| Васильев В.А. О p -нильпотентности одного класса конечных групп | 61 |
| Ковалева И.С., Миротин А.Р. Теорема о свертке для преобразования Маркова – Стилтеса | 66 |
| Малинковский Ю.В., Чжао Юе. Стационарные экспоненциальные сети с обходами сообщений и формированием поступающих и обслуживаемых групп заявок случайных размеров | 71 |
| Мартынов И.П., Парманчук О.Н., Пецевич В.М. Об одной перекрестной системе двух дифференциальных уравнений | 79 |
| Мурашко В.И. Об одном обобщении теорем Бэра о гиперцентре и нильпотентном корадикале .. | 84 |
| Семенчук В.Н., Велесницкий В.Ф. Конечные группы с заданными свойствами критических подгрупп | 89 |

ТЕХНИКА

| | |
|---|----|
| Дик С.К., Терех А.С., Смирнов А.В., Конопелько В.К. Разработка системы видеорегистрации тремора конечностей человека | 93 |
| Кузнецов Д.И., Купин А.И. Метод идентификации электродвигателя в электросети с использованием нейронных сетей | 97 |

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружницкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 09.09.13. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ № 500.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2013
© Проблемы физики, математики и техники, 2013
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2013

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 3 (16) 2013

CONTENTS

PHYSICS

| | |
|---|----|
| Andreev Vasili V., Pankov A.A. Analysis of Z' -bosons effects at the LHC within ATLAS experiment | 7 |
| Vakulina E.V., Maksimenko N.V. Polarizability of the pion in the formalism of Duffin – Kemmer | 16 |
| Gaishun V.E., Kovalenko D.L., Semchenko A.V., Vaskevich V.V. Functional nanostructured $\text{SiO}_2\text{--GeO}_2$ films synthesised by sol-gel method | 19 |
| Laskovnev A.P., Cherenda N.N., Basalai A.V., Uglov V.V., Anischik V.M., Astashynski V.M., Kuzmitski A.M. Modification of the copper surface layer by the compression plasma flow ... | 24 |
| Novikova O.V., Tyumenkov G.Yu. Analysis of the reduced modifications of the Peng – Robinson equation of state in the framework of the Joule – Tomson process | 30 |
| Samofalov A.L., Faniayeu I.A., Semchenko I.V., Khakhomov S.A. Polarization transformers of electromagnetic waves based on composite media with a helical structure | 34 |
| Shershnev E.B., Nikitjuk Yu.V., Sokolov S.I. Features of controlled laser thermal cleavage of quartz glass | 39 |

MATHEMATICS

| | |
|---|----|
| Antonevich A.B., Pantsialeveva E.V. Right-side resolvents of discrete weighted shift operators with matrix weights | 45 |
| Atvinovskii A.A., Mirotin A.R. The inverse of some class of operators in Banach space and its several applications | 55 |
| Vasil'ev V.A. On p -nilpotency of one class of finite groups | 61 |
| Kovaliova I.S., Mirotin A.R. Convolution theorem for the Markov – Stieltjes transformation | 66 |
| Malinkovsky Yu.V., Zhao Yue. Steady-state exponential networks with bypassing of communications and with generation of arriving and servicing random size customer batches | 71 |
| Martynov I.P., Parmanchuk O.N., Pecevich V.M. On a cross system of two differential equations | 79 |
| Murashka V.I. On one generalization of Baer's theorems about hypercenter and nilpotent residual | 84 |
| Semenchuk V.N., Veliasnitski V.F. Finite groups with given properties of critical subgroups | 89 |

TECHNICS

| | |
|---|----|
| Dick S.K., Tereh A.S., Smirnov A.V., Konopelko V.K. Designing a system for video recording of man's extremities tremor | 93 |
| Kuznetsov D.I., Kupin A.I. Method of identification of electrical motor with the use of neural networks | 97 |

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 530.1; 539.12

АНАЛИЗ ЭФФЕКТОВ Z' -БОЗОНОВ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ATLAS НА LHCВасилий В. Андреев¹, А.А. Панков²¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, ГомельANALYSIS OF Z' -BOSONS EFFECTS AT THE LHC
WITHIN ATLAS EXPERIMENTVasili V. Andreev¹, A.A. Pankov²¹F. Scorina Gomel State University, Gomel²P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

В работе оценивается ожидаемая чувствительность сечения парного рождения W^\pm -бозонов в процессе протон-протонной аннигиляции по отношению к эффектам, генерируемым Z' -бозоном, в условиях Большого адронного коллайдера (LHC). Результаты модельно зависимого анализа эффектов Z' -бозона представлены в виде ограничений на такие его параметры, как угол $Z-Z'$ -смешивания φ и масса $M_{Z'}$. Показано, что исследуемый процесс в условиях эксперимента ATLAS обладает чувствительностью к углу смешивания φ , которая повторяет или даже превосходит таковую, продемонстрированную в резонансных экспериментах на ускорителях LEP1 и SLC в процессах $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$.

Ключевые слова: Z' -бозон, $Z-Z'$ -смешивание, калибровочное сокращение.

We discuss the foreseeable sensitivity to Z' -boson effects of W^\pm -pair production cross sections at the Large Hadron Collider (LHC). The results of the model dependent analysis are expressed in terms of constraints on such Z' -boson parameters as $Z-Z'$ -mixing angle φ and its mass $M_{Z'}$. It was shown that the process under investigation in the framework of the ATLAS experiment has the sensitivity to the mixing angle φ , which is similar or even better than that obtained during resonant experiments at LEP1 and SLC accelerators in $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$ processes.

Keywords: Z' -boson, $Z-Z'$ -mixing, gauge cancellation.

Введение

В физических программах и экспериментах на современных коллайдерах высоких энергий вопросу поиска эффектов «новой» физики, выходящей за рамки Стандартной модели сильных и электрослабых взаимодействий (СМ), например, тяжелых нейтральных (Z') калибровочных бозонов [1]–[4], традиционно уделяется большое внимание. На основе данных, полученных из низкоэнергетических экспериментов по нейтральным токам, результатов на e^+e^- -коллайдере LEP [5], а также недавно выполненных экспериментов по поиску прямого адронного рождения Z' -бозонов на Большом адронном коллайдере (LHC) при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ и $\sqrt{s} = 8$ ТэВ, с интегральной светимостью $L_{int} \approx 20$ фбн⁻¹ [6], [7], можно заключить, что для большинства расширенных калибровочных моделей граничные значения на массы дополнительных Z' -бозонов лежат в пределах $\sim 2.6-3.0$ ТэВ (в зависимости от модели), а современный масштаб ограничений на угол смешивания составляет $|\varphi| \sim 10^{-3}$ рад [8]–[11]. При этом наиболее точная информация об угле

смешивания была получена преимущественно из экспериментов на электрон-позитронных коллайдерах LEP1 и SLC по измерению резонансных наблюдаемых физических величин при энергии начальных e^+e^- -пучков, равной массе стандартного Z -бозона, $\sqrt{s} \approx M_Z$, в процессах

$$e^+ + e^- \rightarrow f + \bar{f}, \quad (0.1)$$

где конечными фермионными состояниями f были лептоны и кварки. Высокая точность, достигнутая в экспериментах на коллайдерах LEP1 и SLC, объясняется прежде всего возможностью набора большого объема данных в резонансной области энергии.

Стоит отметить, что ограничения на параметры Z' -бозона также были получены в работе [11] из экспериментальных данных по измерению процесса

$$e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^- \quad (0.2)$$

на коллайдере LEP2. В частности, был проведен комбинированный анализ данных коллабораций OPAL, DELPHI, ALEPH и L3 по измерению дифференциальных сечений процесса аннигиляционного рождения W^\pm -бозонов (0.2). В работе было показано, что чувствительность данного

процесса при энергиях, достижимых на ускорителе LEP2, не является очень высокой из-за относительно небольшой энергии в сравнении с порогом рождения пар W^\pm -бозонов. Полученные ограничения на угол $Z-Z'$ -смешивания оказались на уровне $\varphi \sim 10^{-2}$, что на порядок меньше ограничений, следующих из экспериментов на коллайдерах LEP1 и SLC. Такой же чувствительностью к углу бозонного смешивания обладает процесс парного рождения W^\pm в процессе $p\bar{p}$ столкновений на коллайдере Tevatron [12]. Тем не менее, ценность информации, полученной на коллайдере LEP2 и Tevatron, состоит в том, что она следует из «прямых» экспериментов по измерению эффектов Z' -бозонов, а не косвенных, коим являлись резонансные эксперименты на LEP1 и SLC.

Важным обстоятельством является то, что ускоритель LEP уже завершил свою работу. В этой связи большой интерес представляет анализ аналогичного рода эффектов на действующем Большом адронном коллайдере (LHC). При этом, очевидно, что исследуемым процессом является процесс рождения пар W^\pm -бозонов в адронных столкновениях:

$$p + p \rightarrow \gamma, Z, Z' \rightarrow W^+ + W^- + X. \quad (0.3)$$

По аналогии с процессом (0.2), рост чувствительности процесса (0.3) к параметрам Z' -бозонов (при условии ненулевого $Z-Z'$ -смешивания) наиболее ярко проявляется при высоких энергиях, т. е. при $\sqrt{s} \gg 2M_W$. Причиной этого роста является вклад Z' -бозона в сечение процесса (0.3), который «нарушает» механизм калибровочного сокращения в энергетическом интервале $2M_W \ll \sqrt{s} \ll M_{Z'}$. [13]–[16]. Действие механизма калибровочного сокращения состоит в том, что он обеспечивает «правильное» поведение сечения процесса (0.3) в СМ с ростом энергии. Вместе с тем, эффекты, индуцированные появлением дополнительного калибровочного бозона, «нарушают» действие механизма калибровочного сокращения, что проявляется в «разбалансировке» отдельных вкладов в сечение и, как следствие, в возникновении существенно иной (по сравнению с СМ) энергетической зависимости сечения.

В силу сказанного становится очевидным, что получение достоверных оценок параметров Z' (его массы $M_{Z'}$ и угла $Z-Z'$ -смешивания φ) на ускорителе LHC представляет значительный интерес. Такие оценки будут приведены в этой работе.

В частности, будут получены ограничения на угол смешивания и массу Z' -бозона при энергии LHC, равной $\sqrt{s} = 14$ ТэВ, и интегральной светимости $L_{int} = 100$ фбн⁻¹. Из всего спектра

расширенных калибровочных моделей будет проанализирована так называемая «последовательная Стандартная модель» (SSM). Выбор этой модели обусловлен тем фактом, что она является одним из самых простейших расширений СМ и позволяет легко протестировать разработанную методику получения ограничений на параметры «новой физики». Кроме того, в работе будет выполнено сравнение полученных результатов с ограничениями, представленными в работе [11], а также с результатами резонансных экспериментов LEP1 и SLC, дающих на данный момент наиболее строгие ограничения. Ограничения на параметры Z' -бозонов, предсказываемые другими теориями с расширенным калибровочным сектором, можно непосредственно получить из данных по SSM модели, если учесть их специфические константы связи с кварками, а также модельные предсказания для полных ширин распада Z' -бозонов.

1 Z' -бозон в расширенных калибровочных моделях

Имеется большое количество расширенных калибровочных моделей таких, например, как лево-правосимметричные модели (LR), альтернативные лево-правосимметричные модели (ALR), E_6 -модели и другие [1]–[4]. Их исследование интересно с точки зрения изучения физических эффектов, выходящих за рамки СМ, или так называемой «новой» физики. Эти модели являются одними из простейших расширений СМ, характеризующихся элементарной структурой хиггсовского сектора.

Общим для данных моделей является то, что они предсказывают новые физические объекты и явления на масштабе энергий $O(1$ ТэВ), связанные, например, с наличием тяжелых нейтральных (Z') калибровочных бозонов [1]–[4], обусловленных дополнительными калибровочными симметриями $U(1)'$. Перечислим некоторые из них:

1. E_6 -модели, основанные на идеях великого объединения, в рамках которых предпринимаются попытки найти решение калибровочной проблемы. Так как нарушение E_6 группы до СМ сопровождается появлением по крайней мере одного дополнительного $U(1)'$ фактора ($E_6 \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)'$), то с последним может быть связано существование тяжелого нейтрального калибровочного бозона, который может смешиваться со стандартным Z -бозоном.

2. Рассмотрим класс моделей, в которых линейная комбинация

$$U(1)' = \cos \beta U(1)_Z + \sin \beta U(1)_W \quad (1.1)$$

сохраняется вплоть до энергий, характерных для типичного масштаба электрослабых взаимодействий.

Угол β определяет ориентацию генератора $U(1)'$ в E_6 -групповом пространстве и удовлетворяет условию $-1 \leq \cos \beta \leq 1$. В зависимости от значений угла β различают следующие модели: χ -модель ($\beta = 0^\circ$), ψ -модель ($\beta = 90^\circ$), η -модель ($\beta = -\sqrt{5/3} \approx -52,2^\circ$), I -модель ($\beta = \sqrt{3/5} \approx 37,8^\circ$, которая «ортогональна» к модели η) и другие.

3. Лево-правосимметричные модели, в основе которых лежит калибровочная группа $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$. Эти модели привлекают своими возможностями в решении проблемы, связанной с механизмом нарушения пространственной четности, а также появлением малых масс нейтрино. В минимальных моделях, в которых пространственная четность нарушается спонтанно, предсказывается существование одного дополнительного нейтрального и двух заряженных W_R^\pm -бозонов, последние из которых смешиваются с левыми W_L^\pm -бозонами.

Для лево-правосимметричной модели LR нейтральные токи, связанные с Z'_{LR} -бозоном, могут быть записаны как

$$J_{LR}^\mu = \alpha_{LR} J_{3R}^\mu - \frac{J_{B-L}^\mu}{2\alpha_{LR}}, \quad (1.2)$$

где J_{3R}^μ – третья компонента $SU(2)_R$ -изоспина, а B и L представляют собой барионное и лептонное квантовые числа соответственно. В LR-модели левые и правые фермионы являются $SU(2)_R$ -дублетами и синглетами соответственно. Модельный параметр α_{LR} определяется как

$$\alpha_{LR} = \sqrt{\frac{c_W^2 g_R^2}{s_W^2 g_L^2} - 1},$$

где $g_L = e/s_W$, а g_R есть $SU(2)_R$ калибровочная константа связи (здесь $s_W \equiv \sin \theta_W$, $c_W \equiv \cos \theta_W$, θ_W – угол Вайнберга). В общем случае параметр α_{LR} может изменяться в интервале $\sqrt{2/3} \leq \alpha_{LR} \leq 1.52$ при $s_W^2 = 0.23$, что на языке констант связи соответствует неравенству $g_L^2/2 \leq g_R^2 \leq g_L^2$. Чаше всего в литературе LR-модель рассматривается в случае равных левых и правых констант связи, $g_R = g_L$, который реализуется при максимальных значениях α_{LR} . Заметим, что в частном случае, когда параметр $\alpha_{LR} = \sqrt{2/3} \approx 0.82$, фермионные константы связи совпадают с соответствующими константами для χ -модели ($\cos \beta = 1$) из E_6 .

4. «Последовательная Стандартная модель» (SSM) основана на калибровочной группе

$SU(2)_{B-L} \times U(1)_Y \times U(1)'_Y$. Эта модель [17] отличается тем, что предусматривает существование Z' -бозона, константы связи которого с фермионами (в нашем случае – с кварками) совпадают с их значениями, предсказываемыми СМ.

Детальное описание этих моделей, а также оригинальные ссылки можно найти, например, в обзорах [1]–[4].

В теориях с расширенным калибровочным сектором массовая матрица Z и Z' состояний может иметь недиагональные члены δM^2 , которые связаны со значениями вакуумных ожиданий полей расширенного хиггсовского сектора [3]:

$$M_{ZZ'}^2 = \begin{pmatrix} M_Z^2 & \delta M^2 \\ \delta M^2 & M_{Z'}^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь под символами Z и Z' обозначены собственные состояния слабых калибровочных бозонов группы $SU(2)_L \times U(1)_Y$ и дополнительной группы $U(1)'$ соответственно. Собственные массовые состояния Z_1 и Z_2 получаются путем вращения полей Z и Z' на угол смешивания φ :

$$Z_1 = Z \cos \varphi + Z' \sin \varphi, \quad (1.4)$$

$$Z_2 = -Z \sin \varphi + Z' \cos \varphi. \quad (1.5)$$

Угол смешивания φ определяется следующим образом:

$$\tan^2 \varphi = \frac{M_Z^2 - M_1^2}{M_2^2 - M_Z^2} \approx \frac{2M_Z \Delta M}{M_2^2}, \quad (1.6)$$

где $\Delta M = M_Z - M_1 > 0$, M_Z – масса Z_1 -бозона в отсутствие смешивания, т. е. при $\varphi = 0$, $M_1(M_2)$ – массы $Z_1(Z_2)$ -бозонов.

Важным свойством рассматриваемых моделей является тот факт, что собственное состояние Z' имеет нулевые константы связи с парой W^+W^- в силу $SU(2)_L$ -симметрии. Из формул (1.4) и (1.5) можно получить выражения для векторных и аксиально-векторных констант связи Z_1 - и Z_2 -бозонов с фермионами:

$$v_{1,f} = v_f \cos \varphi + v'_f \sin \varphi, \quad (1.7)$$

$$a_{1,f} = a_f \cos \varphi + a'_f \sin \varphi,$$

$$v_{2,f} = -v_f \sin \varphi + v'_f \cos \varphi, \quad (1.8)$$

$$a_{2,f} = -a_f \sin \varphi + a'_f \cos \varphi,$$

где $(v_f, a_f) = (g_L^f \pm g_R^f)/2$, а (v'_f, a'_f) аналогичным образом определяются через константы связи Z' -бозона. В работе используется такая нормировка констант связи, при которой выражения для векторной и аксиально-векторной констант связи Z -бозона с кварками q имеют вид:

$$v_f = \frac{T_{3,f} - 2Q_f s_W^2}{2s_W c_W} \text{ и } a_f = \frac{T_{3,f}}{2s_W c_W},$$

где $T_{3,f} = \pm 1/2$, а Q_f – заряды кварков ($f = q$). Точные значения фермионных констант связи Z' -бозонов с используемой нормировкой можно найти, например, в работе [11].

Выражения для трехбозонных констант связи g_{WWZ_1} и g_{WWZ_2} получаются аналогичным образом. При этом, однако, надо учитывать, что в силу $SU(2)_L$ -симметрии константа связи Z' -бозона с W -бозонами $g_{WWZ'} = 0$. В результате, получим:

$$g_{WWZ_1} = \cos \varphi g_{WWZ}, \quad (1.9)$$

$$g_{WWZ_2} = -\sin \varphi g_{WWZ}, \quad (1.10)$$

где $g_{WWZ} = c_W / s_W$ – трехбозонная константа связи стандартного Z -бозона с W^\pm -парой.

2 Сечение процесса $pp \rightarrow W^+W^- + X$

При высоких энергиях процесс (0.3) описывается в рамках кварк-партонной модели. Основной вклад определяется аналогом дрелл-яновского механизма, изображенного на рисунке 2.1.

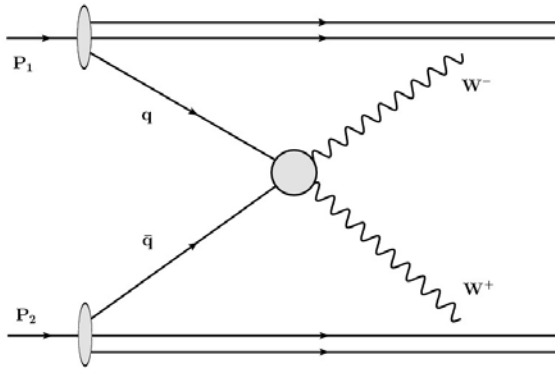


Рисунок 2.1. – Диаграммное представление образования W^+W^- -пары в столкновении двух протонов P_1 и P_2 через механизм кварк-антикварковой аннигиляции

Сечение $d\sigma(pp \rightarrow W^+W^- + X)$ запишется в виде

$$d\sigma(pp \rightarrow W^+W^- + X) = \sum_q \iint d\xi_1 d\xi_2 \left\{ \left[f_{q|P_1}(\xi_1) f_{\bar{q}|P_2}(\xi_2) + f_{\bar{q}|P_1}(\xi_1) f_{q|P_2}(\xi_2) \right] d\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow W^+W^-) \right\}, \quad (2.1)$$

где $f_{q|P_1}, f_{\bar{q}|P_1}$ – функции распределения партонов (кварков q и антикварков \bar{q}) в протонах P_1 и P_2 . Величины $\xi_{1,2}$ определяют, какую часть импульса протона несет кварк и антикварк. Сечение subprocessа $d\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow W^+W^-)$ на партонном уровне является функцией, зависящей от величины инвариантной массы M пары W^+W^- и

угла θ , определяемого как угол вылета W^- -бозона по отношению к направлению движения кваркового пучка в системе центра масс $q\bar{q}$ -пары.

Для исследования параметров дополнительных промежуточных бозонов удобно перейти от переменных $\xi_{1,2}$ к быстротам посредством соотношений:

$$\xi_1 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^y, \quad \xi_2 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^{-y}. \quad (2.2)$$

Учет экспериментальных ограничений на ЛНС для псевдобыстроты $|\eta| < \eta_{cut}$ приводит к изменению пределов интегрирования в (2.1) [18]:

$$|y| \leq Y = \min \left[\ln(\sqrt{s} / M), \eta_{cut} \right], \quad (2.3)$$

$$|z| \leq z_{cut} = \min \left[\tanh(Y - |y|) / \beta_W, 1 \right], \quad (2.4)$$

где $\beta_W = \sqrt{1 - 4M_W^2 / \hat{s}}$, $\hat{s} = \xi_1 \xi_2 s = M^2$ и M_W – масса W -бозона.

В итоге, сечение рождения резонанса $R(=Z')$ и его последующий распад в W^\pm -пару в процессе (0.3) будет определяться интегрированием сечения subprocessа по z ($z = \cos \theta$) в интервале $|z| \leq z_{cut}$, по быстрой пары $|y| \leq Y$ и по инвариантной массе M в окрестности пика резонанса с массой M_R , ($M_R - \Delta M / 2, M_R + \Delta M / 2$)

$$\sigma(pp \rightarrow W^+W^- + X) = \int_{M_R - \Delta M / 2}^{M_R + \Delta M / 2} dM \int_{-Y}^Y dy \int_{-z_{cut}}^{z_{cut}} dz \frac{d\sigma_{q\bar{q}}}{dM dy dz}, \quad (2.5)$$

где через ΔM обозначена ширина бина по инвариантной массе пары, которая зависит от энергетического разрешения детектора ATLAS.

Дифференциальное сечение в формуле (2.5) определяется как

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}}}{dM dy dz} = K \frac{2M}{3s} \sum_q \left\{ \left[f_{q|P_1}(\xi_1) f_{\bar{q}|P_2}(\xi_2) + f_{\bar{q}|P_1}(\xi_1) f_{q|P_2}(\xi_2) \right] \frac{d\hat{\sigma}_{q\bar{q}}}{dz} \right\}, \quad (2.6)$$

где через K обозначен так называемый K -фактор, учитывающий КХД-поправки высших порядков по константе взаимодействия α_s . В лидирующем порядке по α_s он имеет вид [19]

$$K = 1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(1 + \frac{4}{3} \pi^2 \right). \quad (2.7)$$

Адронное рождение векторных Z_2 -бозонов в протон-протонных столкновениях с их последующим распадом в пару W^\pm -бозонов на партонном уровне определяется subprocessом

$$q\bar{q} \rightarrow \gamma, Z_1, Z_2 \rightarrow W^+W^-, \quad (2.8)$$

диаграммы Фейнмана которого в борновском приближении приведены на рисунке 2.2.

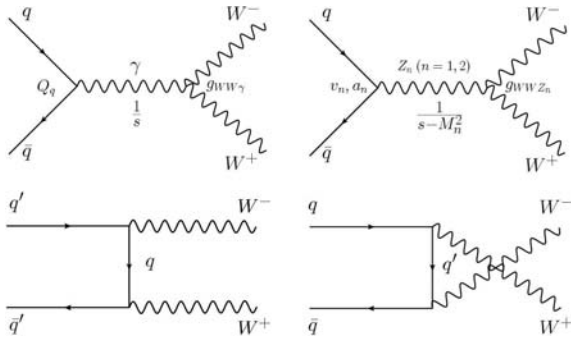


Рисунок 2.2 – Фейнмановские диаграммы для процесса $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$ в моделях с новым нейтральным калибровочным Z_2 -бозоном

Дифференциальное сечение процесса (2.8) имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}}}{d\cos\theta} = \frac{1}{4} \times \frac{\beta_W}{32\pi \hat{s}} \sum_{\lambda, \lambda', \tau, \tau'} \left| F_{\lambda\lambda'\tau\tau'}(\hat{s}, \theta) \right|^2. \quad (2.9)$$

Здесь спиральности W^- и W^+ -бозонов обозначены через $\tau, \tau' = \pm 1, 0$, а спиральности кварков – через $\lambda = -\lambda' = \pm 1/2$. Спиральные амплитуды $F_{\lambda\lambda'\tau\tau'}(\hat{s}, \theta)$ имеют структуру, представленную в таблице 2.1 [18]. В таблице 2.1 используются следующие обозначения: $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ – мандельштамовские переменные для subprocessa (2.8), $\Gamma_{1,2}$ – ширины распадов $Z_{1,2}$ -бозонов, $g_{1,f} = v_{1,f} - 2a_{1,f}\lambda$, $g_{2,f} = v_{2,f} - 2a_{2,f}\lambda$; ($f = q$) и

$$\gamma_W = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2M_W}.$$

Таблица 2.1. – Спиральные амплитуды процесса $q\bar{q} \rightarrow \gamma, Z_1, Z_2 \rightarrow W^+W^-$ в расширенных калибровочных моделях. Для получения амплитуды $F_{\lambda\lambda'\tau\tau'}(s, \theta)$ с определенной кварковой спиральностью $\lambda = -\lambda' = \pm 1/2$ и фиксированными спиральностями $\tau(W^-)$ и $\tau'(W^+)$ конечной системы необходимо каждый элемент соответствующего столбца умножить на общий множитель, стоящий в верхней его части. Полученные элементы следует последовательно умножить на соответствующие элементы первой колонки, а затем просуммировать по всем промежуточным состояниям

| | | $\tau = \pm 1,$ $\tau' = \pm 1$ | $\tau = \pm 1,$ $\tau' = \mp 1$ | $\tau = 0,$ $\tau' = 0$ | $\tau = 0,$ $\tau' = \pm 1$ | $\tau = \pm 1,$ $\tau' = 0$ |
|-----|---|---|---|---|--|---|
| | | $\frac{-e^2 \hat{s} \lambda}{2} \times$ $\times \sin \theta$ | $\frac{-e^2 \hat{s} \lambda}{2} \times$ $\times \sin \theta$ | $\frac{-e^2 \hat{s} \lambda}{2} \times$ $\times \sin \theta$ | $\frac{-e^2 \hat{s} \lambda}{2\sqrt{2}} \times$ $\times (\tau' \cos \theta - 2\lambda)$ | $\frac{-e^2 \hat{s} \lambda}{2\sqrt{2}} \times$ $\times (\tau \cos \theta + 2\lambda)$ |
| t | $\frac{2\lambda - 1}{4\hat{t} s_W^2}$ | $\cos \theta - \beta_W$ | $-\cos \theta - 2\tau\lambda$ | $2\gamma_W^2 \left[\cos \theta - \beta_W \left(1 + \frac{1}{2\gamma_W^2} \right) \right]$ | $\gamma_W \left[\cos \theta (1 + \beta_W^2) - 2\beta_W \right] - \frac{\tau' \sin^2 \theta}{\gamma_W (\tau' \cos \theta - 2\lambda)}$ | $-\gamma_W \left[\cos \theta (1 + \beta_W^2) - 2\beta_W \right] + \frac{\tau \sin^2 \theta}{\gamma_W (\tau \cos \theta + 2\lambda)}$ |
| u | $\frac{2\lambda - 1}{4\hat{u} s_W^2}$ | $\cos \theta + \beta_W$ | $-\cos \theta - 2\tau\lambda$ | $2\gamma_W^2 \left[\cos \theta + \beta_W \left(1 + \frac{1}{2\gamma_W^2} \right) \right]$ | $\gamma_W \left[\cos \theta (1 + \beta_W^2) + 2\beta_W \right] - \frac{\tau' \sin^2 \theta}{\gamma_W (\tau' \cos \theta - 2\lambda)}$ | $-\gamma_W \left[\cos \theta (1 + \beta_W^2) + 2\beta_W \right] + \frac{\tau \sin^2 \theta}{\gamma_W (\tau \cos \theta + 2\lambda)}$ |
| s | $\frac{2Q_f}{\hat{s}} + g_{1,f} \times$ $\times \frac{2g_{WWZ_1}}{\hat{s} - M_1^2 + iM_1\Gamma_1} +$ $+ g_{2,f} \times$ $\times \frac{2g_{WWZ_2}}{\hat{s} - M_2^2 + iM_2\Gamma_2}$ | $-\beta_W$ | 0 | $-\beta_W (1 + 2\gamma_W^2)$ | $-2\beta_W \gamma_W$ | $2\beta_W \gamma_W$ |

Дадим описание основных мод распада Z_2 -бозона. При этом будем полагать, что продуктами распада Z_2 могут быть кварки (адронные струи), лептоны и СМ бозоны. Ширина распада Z_2 -бозона в пару W^\pm -бозонов (Γ_2) определяется как [3]:

$$\begin{aligned} \Gamma(Z_2 \rightarrow WW) &= \\ &= \frac{\alpha}{48} g_{WWZ}^2 M_2 \sin^2 \varphi \left(\frac{M_2}{M_Z} \right)^4 \left(1 - 4 \frac{M_W^2}{M_2^2} \right)^{3/2} \times (2.10) \\ &\times \left(1 + 20 \frac{M_W^2}{M_2^2} + 12 \frac{M_W^4}{M_2^4} \right). \end{aligned}$$

В случае распада Z_2 в пару фермионов (лептонов или кварков) имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma(Z_2 \rightarrow f\bar{f}) &= N_f \beta_f M_2 \frac{g_2^2}{12\pi} \times \\ &\times \left[(v_{2,f}^2 + a_{2,f}^2) \left(1 + 2 \frac{m_f^2}{M_2^2} \right) - 6a_{2,f}^2 \frac{m_f^2}{M_2^2} \right], \quad (2.11) \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, $N_f = 1(3)$ для $f = l(q)$,

$\beta_f = \sqrt{1 - 4m_f^2 / M_2^2}$, а g_2 определяется исходя из конкретной модели с расширенным калибровочным сектором. В случае SSM модели $g_2 = g_1 = e / (2s_W c_W)$.

В работе рассматривается именно рождение Z_2 -бозона с его последующим распадом в пару W^\pm -бозонов. При этом W^\pm -бозоны могут распадаться на лептоны и/или кварки. Для полностью лептонной моды ($W^+W^- \rightarrow l^+l^- \nu_l \bar{\nu}_l$) так называемый «брэнчинг» $B_{WW \rightarrow l^+l^- \nu_l \bar{\nu}_l}$ (определяется произведением отношений парциальных ширин распада каждого W -бозона к его полной ширине распада) оказывается малым, что уменьшает величину сечения резонансного рождения W^\pm -пары ($\sigma \times B$). Кроме того, события с рождением четырех лептонов не могут быть полностью реконструированы из-за наличия двух нейтрино. Полулептонная мода распада ($W^+W^- \rightarrow l \bar{\nu}_l jj$) в определенной мере лишена вышеупомянутых недостатков. Однако стоит отметить, что для данной моды величина фона увеличивается (в основном, из-за КХД процессов), что ведет к уменьшению отношения сигнал/фон. Тем не менее, в данной работе будет исследована именно полулептонная мода распада W^\pm -бозонов. Основываясь на результатах работы [20], выполненной коллаборацией ATLAS, в последующем анализе будем учитывать возможность минимизации влияния фоновых процессов в полулептонном канале.

Рассмотрим основные источники фонов для процесса (0.3). Одним из доминирующих фоновых процессов является процесс рождения одиночного W -бозона, который распадается по лептонному каналу ($W \rightarrow l\nu$) с рождением адронных струй. Этот фон является наиболее значительным и становится крайне нежелательным, когда инвариантная масса пары адронных струй близка к массе W -бозона. Вторым по важности фоновым процессом является процесс рождения пары $t\bar{t}$, т. е. $pp \rightarrow t\bar{t} \rightarrow W^+bW^-\bar{b} + X$. Подавление настоящего фонового процесса возможно путем использования соответствующих кинематических ограничений (или «обрезаний») на вылет b -кварков в центральной области. Наконец, еще одним из значимых фоновых процессов является нерезонансное рождение W^+W^- и $W^\pm Z$. Величина этого фона много меньше первых двух процессов, однако его невозможно подавить в центральной кинематической области.

Для обеспечения эффективного подавления фоновых сечений необходимо отбирать события с высокими поперечными импульсами p_T W^\pm -бозонов и лептонов, которые образуются в результате распада Z' , а также события с большими потерями энергии в поперечном к пучку направлении.

Набор ограничений («обрезаний»), используемых при реконструкции событий и именуемых центральными, который позволяет улучшить отношение сигнала к фону в детекторе ATLAS, выглядит следующим образом [20]:

лептонные: $p_T^l, p_T^{miss} > M_{Z'}^{rec} / 10$ (ГэВ) и $|\eta_l| < 2.0$;

W -бозонные: $p_T^{W \rightarrow l\nu}, p_T^{W \rightarrow jj} > M_{Z'}^{rec} / 3$ (ГэВ);

$M_{W \rightarrow jj} = M_W \pm 15$ ГэВ;

$|\eta^{W \rightarrow jj}| < 2.0$.

Здесь $M_{Z'}^{rec}$ – реконструированная инвариантная масса Z' , p_T^l, p_T^{miss} – поперечные импульсы соответственно лептона и нейтрино, появляющихся в результате лептонного распада W -бозона, $p_T^{W \rightarrow l\nu}, p_T^{W \rightarrow jj}$ – поперечные импульсы W -бозонов, распадающихся соответственно лептонным и адронным способами, $M_{W \rightarrow jj}$ – масса адронных струй, заключенных в конусе радиусом $\Delta R = 0.5$, η_l – быстрота образующихся лептонов, $\eta^{W \rightarrow jj}$ – быстрота W -бозона, распадающегося адронным способом. В работе [20] показано, что использование этого набора ограничений позволяет улучшить отношение сигнал/фон на два порядка.

Для подавления фона, обусловленного рождением $t\bar{t}$ -пар, вводят дополнительные ограничения. В процессе их рождения появляются дополнительные струи в центральной области,

которые связаны с b -кварками, сопровождающими рождение $t\bar{t}$ -пар. Поэтому при выборе событий, сопровождающихся рождением адронных струй в центральной области ($|\eta_j| < 2.0$), применяется следующее правило: события с $p_T > p_T^{th}$ исключаются. Эффективность подавления фона при этом зависит от выбора p_T^{th} . Оптимальными значениями этих величин можно считать 20 ГэВ для низких значений светимости ускорителя LHC и 30 ГэВ – для высокой светимости. При таких значениях удается значительно подавить фон, обусловленный рождением $t\bar{t}$ -пар [20].

3 Результаты

После учета всех вышеописанных фонов можно оценить чувствительность ускорителя LHC к эффектам $Z-Z'$ -смешивания при $\sqrt{s} = 14$ ТэВ и светимости $L_{int} = 100$ фбн⁻¹.

Для получения ограничений на параметры Z' -бозона находим отношение сечений $(\sigma \times B)_{SSM}$ и $(\sigma \times B)_{lim}$, где сечение $(\sigma \times B)_{SSM}$ процесса (0.3), определяемое формулой (2.5), рассчитывается в рамках SSM модели (для произвольных φ и M_2), а $(\sigma \times B)_{lim}$ есть сечение, которое отличается от SM сечения на 2 стандартных отклонения. Тогда для получения ограничений на параметры Z' -бозона в рамках SSM модели необходимо воспользоваться следующим критерием [20]:

$$\frac{(\sigma \times B)_{SSM}}{(\sigma \times B)_{lim}} \leq 1. \quad (3.1)$$

На рисунке 3.1 представлены ограничения (уровень достоверности 95%) на параметры Z_2 -бозона (угол $Z-Z'$ -смешивания φ и массу Z_2 -бозона), полученные из анализа резонансных сечений процесса $pp \rightarrow W^+W^- + X$ для SSM модели при $\sqrt{s} = 14$ ТэВ и интегральной светимости $L_{int} = 100$ фбн⁻¹. Кроме того, на рисунке представлена нижняя граница на массу Z_2 -бозона, полученная из комбинированного анализа данных экспериментов ATLAS и CMS ускорителя LHC по измерению процессов парного рождения лептонов при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ и 8 ТэВ и совокупной интегральной светимости $L_{int} \approx 20$ фбн⁻¹. Следует отметить, что ограничения, представленные на рисунке 3.1, были получены для значения ширины распада Z_2 -бозонов $\Gamma_2 = 0.03 \times M_2$.

В таблице 3.1 представлены ограничения на угол $Z-Z'$ -смешивания φ , полученные в рамках SSM модели на ускорителе LEP2 при анализе

данных коллабораций OPAL, DELPHI, ALEPH и L3 по дифференциальным сечениям процесса аннигиляционного рождения W^\pm -бозонов [11] при $M_2 = 3$ ТэВ. Также приведены ограничения на угол φ , полученные из резонансных экспериментов на ускорителях LEP1 и SLC в процессе $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$, и ограничения для LHC при $M_2 = 3$ ТэВ.

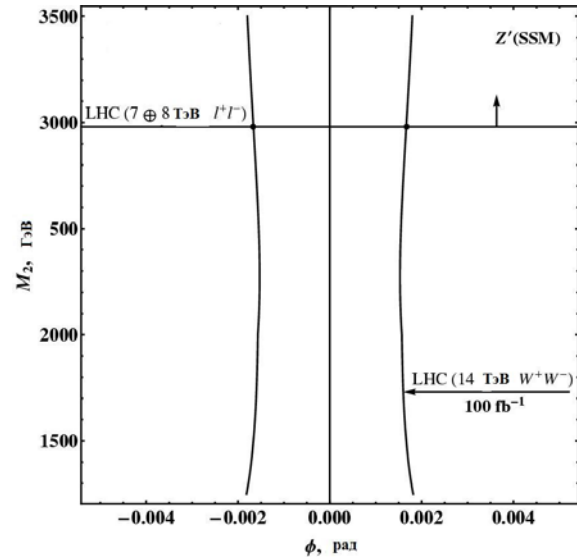


Рисунок 3.1. – Ограничения (95% C.L.) на параметры Z_2 -бозона (SSM) на плоскости (φ, M_2) , полученные при энергии $\sqrt{s} = 14$ ТэВ и интегральной светимости $L_{int} = 100$ фбн⁻¹. Приведена также нижняя граница на массу Z_2 -бозона, полученная из экспериментов на LHC по измерению процесса $pp \rightarrow l^+l^- + X$ при $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ и интегральной светимости $L_{int} \approx 20$ фбн⁻¹

Таблица 3.1 Ограничения (95% C.L.) на угол $Z-Z'$ -смешивания φ , полученные для SSM модели при анализе экспериментальных данных на различных коллайдерах.

| Коллайдер | Угол смешивания, $ \varphi $ |
|------------|------------------------------|
| LEP2 | $7.0 \cdot 10^{-2}$ |
| LEP1 и SLC | $3.0 \cdot 10^{-3}$ |
| LHC | $1.7 \cdot 10^{-3}$ |

Из таблицы 3.1 видно, что измерение полного резонансного сечения для процесса (0.3) на Большом адронном коллайдере при энергии $\sqrt{s} = 14$ ТэВ и интегральной светимости $L_{int} = 100$ фбн⁻¹ позволяет получить ограничения на угол $Z-Z'$ -смешивания φ того же порядка малости или даже меньше тех, которые следуют из резонансных экспериментов на ускорителях

LEP1 и SLC в процессе $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$. Таким образом, процесс парного рождения W^\pm -бозонов при высоких энергиях обладает значительной чувствительностью к эффектам «новой» физики и большими потенциальными возможностями для проведения прецизионных измерений на LHC.

Отметим также, что чувствительность процесса (0.2) к углу бозонного смешивания в экспериментах на Международном линейном коллайдере ILC соответствует величине $|\varphi| \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ [21], [22].

Заключительные замечания

В работе были исследованы потенциальные возможности Большого адронного коллайдера (LHC) по поиску сигналов, генерируемых новыми нейтральными калибровочными бозонами, предсказываемыми различными моделями с расширенным калибровочным сектором, в процессах аннигиляционного рождения пар W^\pm -бозонов.

Установлено, что чувствительность коллайдера LHC к $Z-Z'$ -смешиванию при выбранной энергии и интегральной светимости превосходит соответствующие современные ограничения для ряда моделей с расширенным калибровочным сектором. Дополнительные возможности для увеличения чувствительности связаны с выбором оптимальных наблюдаемых и увеличении интегральной светимости установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Langacker, P. The Physics of Heavy Z' Gauge Bosons / P. Langacker // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – P. 1199–1228.
2. Rizzo, T.G. Z' phenomenology and the LHC [Electronic resource] / T.G. Rizzo. – 2006. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0610104>. – Date of access: 14.04.2007.
3. Leike, A. The Phenomenology of extra neutral gauge bosons / A. Leike // Phys. Rept. – 1999. – Vol. 317. – P. 143–250.
4. Hewett, J.L. Low-Energy Phenomenology of Superstring Inspired E(6) Models / J.L. Hewett, T.G. Rizzo // Phys. Rept. – 1989. – Vol. 183. – P. 193–381.
5. LEP Collaborations. A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model [Electronic resource] / LEP Collaborations. – 2007. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0612034v2>. – Date of access: 12.02.2007.
6. ATLAS Collaboration. Search for high-mass dilepton resonances in 20 fb^{-1} of pp collisions at $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ with the ATLAS experiment [Electronic resource] / ATLAS Collaboration. – 2013. – Mode of access: <http://inspirehep.net/record/1229965/files>

/ATLAS-CONF-2013-017.pdf. – Date of access: 15.03.2013.

7. Search for narrow resonances using the dijet mass spectrum in pp collisions at $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ [Electronic resource] / S. Chatrchyan [et al.] – 2013. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/1302.4794v1>. – Date of access: 20.02.2013.

8. Improved Constraints on Z' -prime Bosons from Electroweak Precision Data / J. Erler [et al.] // JHEP. – 2009. – Vol. 0908. – P. 017–035.

9. del Aguila, F. Electroweak Limits on General New Vector Bosons / F. del Aguila, J. de Blas, M. Perez-Victoria // JHEP. – 2010. – Vol. 1009. – P. 033–082.

10. Langacker, P. Z' Physics at the LHC [Electronic resource] / P. Langacker. – 2009. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0911.4294>. – Date of access: 17.01.2010.

11. Андреев, Вас.В. Ограничения на угол $Z-Z'$ -смешивания из данных по измерению процесса $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ на коллайдере LEP2 / Вас. В. Андреев, А.А. Панков // Ядерная физика. – 2012. – Т. 75, № 1. – С. 67–80.

12. Search for WW and WZ resonances decaying to electron, missing E_T , and two jets in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ / T. Aaltonen [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104. – P. 241801–241808.

13. Бабич, А.А. Дополнительный Z' -бозон и поляризационные асимметрии в процессе аннигиляционного рождения пары скалярных кварков / А.А. Бабич, А.А. Панков // Изв. Вузов. Физика. – 1991. – № 4. – С. 101–106.

14. Панков, А.А. Усиление эффектов новой физики в процессе $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ / А.А. Панков // Ядерная физика. – 1992. – Т. 55. – С. 461.

15. Babich, A.A. Lepton mixing in W^+W^- pair production with polarized e^+e^- collisions / A.A. Babich, A.A. Pankov, N. Paver // Phys. Lett. – 1993. – Vol. B299. – P. 351–357.

16. Бабич, А.А. Эффекты лептонного смешивания в процессе парного рождения W^\pm -бозонов на линейных коллайдерах с поляризованными e^+e^- -пучками / А.А. Бабич, А.А. Панков // Ядерная физика. – 1994. – Т. 57. – С. 2061–2069.

17. Review of particle physics / J. Beringer [et al.] // Phys. Rev. – 2012. – Vol. D86. – P. 010001.

18. Nuss, E. Diboson production at hadron colliders with general three gauge boson couplings. Analytic expressions of helicity amplitudes and cross-section / E. Nuss // Z. Phys. – 1997. – Vol. C76. – P. 701–719.

19. Next-to-leading order QCD corrections to the Drell-Yan cross section in models of TeV -scale gravity / P. Mathews [et al.] // Nucl. Phys. – 2005. – Vol. B713. – P. 333–377.

20. *Benckroun, D.* Search for $Z' \rightarrow WW$ at LHC with the ATLAS detector / D. Benckroun, C. Driouichi, A. Hoummada // Eur. Phys. J. C. – 2001. – Vol. 3. – P. 1–17.

21. *Discriminating Z' from Anomalous Trilinear Gauge Coupling Signatures in $e+e- \rightarrow W+W-$ at ILC with Polarized Beams* / V.V. Andreev [et al.] // Eur. Phys. J. C. – 2012. – Vol. 72. – P. 2147–2164.

22. *Андреев, Вас.В.* Разделение эффектов Z' -бозонов и аномальных калибровочных констант связи в процессе парного рождения W^- -бозонов на линейном коллайдере / Вас. В. Андреев, А.А. Панков // Ядерная физика. – 2013. – Т. 76, № 6. – С. 803–816.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного центра теоретической физики им. Абдуса Салама (программы AC-88, TRIL и STEP) и Белорусского республиканскому фонда фундаментальных исследований (грант Ф13Д-009).

Поступила в редакцию 05.07.13.

УДК 530.1, 539.12

ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПИОНА В ФОРМАЛИЗМЕ ДАФФИНА – КЕММЕРА

Е.В. Вакулина¹, Н.В. Максименко²¹Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Новозыбков, Россия²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

POLARIZABILITY OF THE PION IN THE FORMALISM OF DUFFIN – KEMMER

E.V. Vakulina¹, N.V. Maksimenko²¹I.G. Petrovsky Bryansk State University, Novozibkov, Russia²F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В формализме Даффина – Кеммера на основе принципа калибровочной инвариантности определены в ковариантной форме лагранжиан и уравнение движения пиона в электромагнитном поле с учётом его электрической и магнитной поляризуемостей. На основе решения уравнения взаимодействия пиона с электромагнитным полем, полученного методом функции Грина, определена амплитуда комптоновского рассеяния с учётом отдачи и поляризуемостей пиона.

Ключевые слова: амплитуда комптоновского рассеяния, теоретико-полевого подход, лагранжиан, электрическая поляризуемость, магнитная поляризуемость, формализм Даффина – Кеммера.

The Lagrangian in the covariant form and the equation of motion of the pion in the electromagnetic field, taking into account its electric and magnetic polarizabilities were defined in the formalism of Duffin – Kemmer on the basis of the principle of gauge invariance. The amplitude of Compton scattering was defined on the basis of the solution of the equation of the interaction of the pion with the electromagnetic field produced by the method of Green's function, taking into account the impact and polarizabilities of the pion.

Keywords: Compton scattering amplitude, field-theoretical approach, Lagrangian, electric polarizability, magnetic polarizability, formalism of Duffin – Kemmer.

Введение

Низкоэнергетические теоремы в основе которых лежат общие принципы релятивистской квантовой теории и разложение амплитуды комптоновского рассеяния по частоте фотонов играют важную роль в понимании структуры адронов. Согласно низкоэнергетической теореме, амплитуда комптоновского рассеяния определяется не только зарядом и магнитным моментом адронов, но и такими важными электромагнитными характеристиками, как аномальные магнитные моменты, электрическая и магнитная поляризуемости.

В последнее время измерение поляризуемостей реализуется не только в экспериментах по комптоновскому рассеянию, но и в других электродинамических процессах [1], [2]. Определение вклада поляризуемостей в амплитуды и сечения двухфотонных электродинамических процессов можно осуществить в последовательном релятивистском теоретико-полевого подходе [3], [4]. В работах [4], [5], [6] были развиты ковариантные методы получения лагранжианов, уравнений и амплитуд двухфотонных электродинамических процессов с учетом поляризуемостей адронов. При развитии такого подхода возникает задача определения универсальных ковариантных лагранжианов и адронных электродинамических амплитуд с учетом поляризуемостей для адронов разных спинов.

В настоящей работе в рамках ковариантного теоретико-полевого подхода, используя метод из работы [4], получен лагранжиан, уравнения и амплитуды взаимодействия электромагнитного поля с адронами спина ноль в формализме Даффина – Кеммера, что открывает возможности теоретико-полевого описания поляризуемостей адронов, например спина единица.

1 Описание поляризуемости пиона в формализме Даффина – Кеммера

Используя релятивистские теоретико-полевые свойства полей в формализме Даффина – Кеммера возможно установить новые свойства поляризуемостей структурных частиц [7]. Уравнения Даффина – Кеммера для свободных скалярных частиц имеют вид:

$$\left(\beta_\mu \bar{\partial}_\mu + m\right)\psi(x) = 0, \quad (1.1)$$

$$\bar{\psi}(x)\left(\bar{\partial}_\mu \beta_\mu - m\right) = 0, \quad (1.2)$$

где $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ – пятимерные волновые функции скалярных частиц, а четырёхмерный импульс определяется компонентами $a_\mu \left\{ \vec{a}, a_4 = ia_0 \right\}$.

В уравнениях (1.1) и (1.2) пятимерные матрицы $\beta_\mu = \beta_\mu^{(5)}$ являются матрицами Даффина – Кеммера и удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\rho + \delta_{\rho\nu} \beta_\mu. \quad (1.3)$$

Из ковариантного формализма Лагранжа следует, что уравнения (1.1) и (1.2) следуют из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2} \bar{\psi} (\beta_\mu \bar{\partial}_\mu + m) \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} (\bar{\partial}_\mu \beta_\mu - m) \psi. \quad (1.4)$$

Чтобы получить уравнения взаимодействия электромагнитного поля с пионами в формализме Даффина – Кеммера с учетом их поляризуемостей, воспользуемся принципом калибровочной инвариантности. Для этого согласно работе [8], в лагранжиан (1.4) необходимо ввести

$$L^{(\gamma)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

и сделать замену производных $\bar{\partial}_\mu$ и $\bar{\partial}_\mu$ на удлинённые производные

$$\hat{D} = \bar{\partial}_\nu \beta_\sigma \eta_{\sigma\nu} + ie \hat{A}, \quad (1.5)$$

$$\hat{D} = \eta_{\sigma\nu} \beta_\sigma \bar{\partial}_\nu - ie \hat{A}, \quad (1.6)$$

$$\eta_{\sigma\nu} = \delta_{\sigma\nu} + \frac{2\pi}{m} [\alpha_E F_{\sigma\mu} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}]. \quad (1.7)$$

В соотношениях (1.5)–(1.7) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор, а $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ – дуальный тензор электромагнитного поля. Если в соотношении (1.4) учесть (1.5)–(1.7), то получим

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\psi} \hat{D}_\mu \beta_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + ie \bar{\psi} \hat{A} \psi + K_{\sigma\nu} \theta_{\sigma\nu}. \quad (1.8)$$

В выражении (1.8) введены следующие обозначения:

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m} [\alpha_E F_{\sigma\mu} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}],$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta_\sigma \bar{\partial}_\nu \psi,$$

стрелки над производными указывают их действие на волновые функции пиона в пятимерном пространстве, а α_E и β_M – электрическая и магнитная поляризуемости пиона.

Выделим в уравнении (1.8) часть лагранжиана, связанную с поляризуемостями пиона:

$$L^{(\alpha_E, \beta_M)} = K_{\sigma\nu} \theta_{\sigma\nu}. \quad (1.9)$$

В системе покоя пиона лагранжиан (1.9) принимает вид:

$$L^{(\alpha_E, \beta_M)} = -H^{(\alpha_E, \beta_M)} = 2\pi(\alpha_E \vec{E}^2 + \beta_M \vec{H}^2),$$

где $H^{(\alpha_E, \beta_M)}$ – гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля с пионом с учетом наведенных дипольных моментов в статическом пределе.

Убедимся теперь, что в амплитуду комптоновского рассеяния поляризуемости входят в соответствии с низкоэнергетической теоремой. Для этого получим уравнение взаимодействия

пиона с электромагнитным полем с учетом поляризуемостей, используя лагранжиан (1.8)

$$(\hat{\partial} + m)\psi = ie \hat{A} \psi - \frac{1}{2} [\partial_\mu (K_{\sigma\mu} \beta_\sigma \psi) + K_{\sigma\mu} \beta_\sigma \partial_\mu \psi]. \quad (1.10)$$

Представим дифференциальное уравнение (1.10), в котором будем учитывать только вклад поляризуемостей, в интегральной форме:

$$\psi(x) = \psi^0(x) + \int S(x-x') V^{(\alpha_E, \beta_M)}(x') dx',$$

где потенциал имеет вид:

$$V^{(\alpha_E, \beta_M)}(x') = -\frac{1}{2} [\partial_\mu (K_{\sigma\mu} \beta_\sigma \psi) + K_{\sigma\mu} \beta_\sigma \partial_\mu \psi]$$

а функция Грина $S(x-x')$ удовлетворяет уравнению

$$(\hat{\partial} + m)S(x-x') = \delta(x-x').$$

Определим матричный элемент S_{fi} рассеяния фотонов на пионе, следуя работам [9], [10], [11]. Для этого воспользуемся соотношением:

$$\int \bar{\psi}_{p_2}(x) S(x-x') d^3x \Big|_{t \rightarrow +\infty} = (-i) \bar{\psi}_{p_2}(x'),$$

$$\text{где } \bar{\psi}_{p_2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_2}} \bar{\varphi}(\vec{p}_2) e^{-ip_2 x}.$$

Функция $\bar{\varphi}(\vec{p}_2)$ – импульсное представление волновой функции $\bar{\psi}_{p_2}(x)$, которая в формализме Даффина – Кеммера определяется следующим образом:

$$\bar{\varphi}(\vec{p}_2) = -\frac{i}{2} \left(\varepsilon^{10} - \frac{i}{m} p_{2\mu} \varepsilon^{1\mu} \right),$$

где ε^{AB} – элементы полной матричной алгебры, которые удовлетворяют соотношениям:

$$(\varepsilon^{AB})_{DC} = \delta_{AD} \delta_{BC},$$

$$\varepsilon^{AB} \varepsilon^{CD} = \delta_{BC} \varepsilon^{AD},$$

индексы A, B, C, D пробегает значения от 0 до 4.

В результате получим

$$S_{fi} = (-i) \int \bar{\psi}_{p_2}(x') V^{(\alpha_E, \beta_M)}(x') d^4x'. \quad (1.11)$$

Используя граничные условия [9], [10], [11] и перекрёстную симметрию, выражение (1.11) можно представить в виде:

$$S_{fi} = \frac{im\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{4\omega_1 \omega_2 E_1 E_2}} M. \quad (1.12)$$

В выражении (1.12) амплитуда комптоновского рассеяния представляется выражением:

$$M = \frac{2\pi}{m} \varphi(p_2) \left\{ \left[\hat{k}_2 e_\mu^{(\lambda_2)} - k_{2\mu} e^{(\lambda_2)} \right] \times \right. \\ \times \left[k_{1\mu} (e^{(\lambda_1)} P) - (k_1 P) e_\mu^{(\lambda_1)} \right] + \\ \left. + \left[k_{2\mu} (e^{(\lambda_2)} P) - (k_2 P) e_\mu^{(\lambda_2)} \right] \times \right.$$

$$\times \left[\hat{k}_1 e_{\mu}^{(\lambda_1)} - k_{1\mu} e^{(\lambda_1)} \right] \left\{ (\alpha_E + \beta_M) \varphi(p_1) + \right. \\ \left. + 2\pi\beta_M \bar{\varphi}(p_2) \left[k_{2\nu} e_{\nu}^{(\lambda_2)} - k_{2\nu} e_{\mu}^{(\lambda_2)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[k_{1\mu} e_{\nu}^{(\lambda_1)} - k_{1\nu} e_{\mu}^{(\lambda_1)} \right] \varphi(p_1) \right\}$$

В этом выражении $e_{\mu}^{(\lambda_1)}$ и $e_{\mu}^{(\lambda_2)}$ – векторы поляризации начального и конечного фотонов, $P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, k_1, p_1 и k_2, p_2 – импульсы начальных, конечных фотонов и пионов соответственно.

В системе покоя начального пиона амплитуда M с учётом электрического заряда и поляризуемостей с точностью до второго порядка по частоте фотонов принимает вид [12]:

$$M = \left(-\frac{e^2}{m} + 4\pi\omega^2 \alpha_E \right) (\bar{e}^{(\lambda_2)} \bar{e}^{(\lambda_1)}) + \\ + 4\pi\omega^2 \beta_M \left([\bar{n}_2 \bar{e}^{(\lambda_2)}] \cdot [\bar{n}_1 \bar{e}^{(\lambda_1)}] \right),$$

где \bar{n}_1 и \bar{n}_2 – единичные вектора, направленные по \bar{k}_1 и \bar{k}_2 , что согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния на пионе.

2 Выводы

В формализме Даффина – Кеммера на основе принципа калибровочной инвариантности определены в ковариантной форме лагранжиан и уравнение движения пиона в электромагнитном поле с учётом его электрической и магнитной поляризуемостей.

На основе решения уравнения взаимодействия пиона с электромагнитным полем, полученным методом функции Грина, определена амплитуда комптоновского рассеяния с учётом отдачи и поляризуемостей пиона.

Показано, что разработанный ковариантный формализм Лагранжа для взаимодействия низкоэнергетических фотонов с пионом согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carlson, C.E.* Constraining off-shell effects using low-energy Compton scattering / C.E. Carlson, M. Vanderhaeghen // [Electronic resource]. – 2011.

– Mode of access: <http://physics.atom-ph/1109.3779>.
– Date of access: 04.10.2011.

2. *Birse, M.C.* Proton polarisability contribution to the Lamb shift in muonic hydrogen at fourth order in chiral perturbation theory / M.C. Birse, J.A. McGovern // [Electronic resource]. – 2012. – Mode of access: <http://hep-ph/1206.3030>. – Date of access: 15.08.2012].

3. *Moroz, L.G.* Scattering matrix taking into account the interaction Pauli / L.G. Moroz, F.I. Fedorov // ZhETF. – 1960. – Vol. 2, № 39. – P. 293–303.

4. *Maksimenko, N.V.* Polarizability and gyration elementary particles / N.V. Maksimenko, L.G. Moroz // Problems of atomic science and technology. Series: General and nuclear physics. – 1979. – № 4 (10). – P. 26–27.

5. *Levchuk, M.I.* The nucleon gyration as one of nucleon electromagnetic structure characteristics / M.I. Levchuk, L.G. Moroz // Proc. Academy of Sciences of BSSR. Ser. fiz.-mat. navuk. – 1985. – № 1. – P. 45–54.

6. *Андреев, В.В.* Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевого подходе / В.В. Андреев, Н.В.Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 7–11.

7. *Максименко, Н.В.* Ковариантное определение поляризуемости адронов спина единица / Н.В. Максименко // Доклады Академии наук Беларуси. – 1992. – Т. 36. – № 6. – С. 508–510.

8. *Андреев, В.В.* Ковариантные уравнения движения в электромагнитном поле частиц спина с учетом поляризуемостей / В.В. Андреев, Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова // 4 конгресс физиков Беларуси. Гл. ред. С.Я. Килин и др. – Минск : Ковчег, 2013. – С. 19–20.

9. *Baryshevsky, V.G.* Nuclear optics of polarized media / V.G. Baryshevsky // M.: Energoatomizdat, 1995. – 315 p.

10. *Bogush, A.A.* Introduction in the calibration of the field theory of electroweak interactions / A.A. Bogush // Minsk: Science and technology, 1987. – 359 p.

11. *Bjorken, J.D.* Relativistic quantum field theory / J.D. Bjorken, E.D. Drell // M.: Science. – 1978. – Vol. 1. – 295 p.

12. *Петрунькин, В.А.* Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т.12. – Вып. 3. – С. 692–753.

Поступила в редакцию 26.08.13.

УДК 621.315.5

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫЕ $\text{SiO}_2\text{-GeO}_2$ ПЛЕНКИ, СИНТЕЗИРОВАННЫЕ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ

В.Е. Гайшун, Д.Л. Коваленко, А.В. Семченко, В.В. Васькевич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FUNCTIONAL NANOSTRUCTURED $\text{SiO}_2\text{-GeO}_2$ FILMS SYNTHESISED BY SOL-GEL METHOD

V.E. Gaishun, D.L. Kovalenko, A.V. Semchenko, V.V. Vaskevich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Создание низкоразмерных систем и наноструктурных композитов в виде функциональных стекол и оксидных пленок на основе твердой матрицы и равномерно распределенными в них полупроводниковыми наночастицами с размерами 5–100 нм является одной из наиболее важных областей исследования синтеза неорганических материалов и дисперсных систем. Наноструктуры на основе Ge–Si, несмотря на разницу в параметрах решетки 4%, привлекают внимание инженеров из-за больших успехов в создании новых современных устройств на основе квантовых эффектов. Эффективным способом получения неорганических материалов в виде стекол и пленок с контролируруемыми оптико-механическими и физико-химическими характеристиками является золь-гель процесс.

Ключевые слова: золь-гель технология, GeO_2 золь-гель покрытия, SiO_2 золь-гель покрытия, оптические свойства, структура.

Creating low-dimensional systems and nanostructured composites in the form of functional, special glasses and oxide films based on the solid matrix and uniformly distributed in them highly organized semiconductors with sizes of 5–100 nm, is one of the most important areas of research in the field of synthesis and characterization of inorganic materials and dispersed systems. Nanostructures based on Ge–Si, despite the difference in lattice parameters of 4%, attracted the attention of engineers because of great strides in creating new advanced devices using quantum effects. There are light-emitting and photo detecting silicon-germanium devices in silicon technology to compete successfully with traditional optoelectronic materials. An effective way of obtaining inorganic materials with controlled optical-mechanical and physico-chemical characteristics is sol-gel process of formation of nanoscale particles and clusters dispersed in the silicate matrices of different types: monoliths, films, and quasi-spherical structures.

Keywords: sol-gel technology, GeO_2 sol-gel films, SiO_2 sol-gel films, optical properties, structure.

Введение

В настоящее время встречается много работ, посвященных исследованию германосиликатных материалов (стекла и пленки) [1]–[4]. Германосиликатное стекло представляет собой кренийоксидную матрицу с равномерно распределенными в ней нанокристаллами германия. Образование нанокристаллов германия, как одного из продуктов реакции взаимодействия молекулярного водорода с германосиликатным стеклом, представляет большой интерес в связи с открытием в нанокристаллах полупроводников оптической нелинейности третьего порядка и обнаружением характерной люминесценции, положение и интенсивность которой связана с размером и условиями локализации формируемых нанокристаллов Ge. Наноструктурные материалы на основе $\text{GeO}_2\text{-SiO}_2$ позволяют получить новые современные устройства, работающие на квантовых эффектах, способные успешно конкурировать с традиционными материалами в оптоэлектронике.

Создание низкоразмерных и наноструктурированных систем в виде функциональных композитов, специальных оксидных стёкол и

плёнок, на основе твердотельных матриц и равномерно распределенных в них высокоорганизованных полупроводников с размерами 5–100 нм, является одним из наиболее актуальных направлений исследований в области синтеза и изучения свойств неорганических материалов и дисперсных систем.

Эффективным способом получения неорганических материалов с контролируемыми оптико-механическими и физико-химическими характеристиками является золь-гель процесс формирования наноразмерных частиц и кластеров, диспергированных в силикатных матрицах различного типа: монолитах, пленках и квазисферических структурах. В качестве модификаторов силикатной матрицы могут быть использованы оксиды переходных металлов и стеклообразующих элементов (бора, фосфора, алюминия, титана и олова), примеси редкоземельных ионов и полупроводниковые наночастицы.

В настоящее время встречаются работы, в которых описаны германо-силикатные пленки с содержанием диоксида германия до 70 % молекулярной массы, которые трудно получить с помощью обычного золь-гель метода. При их

создании использовались тетраэтилортогерманат (ТЭОГ) и диэтилортосиликат (ДЭОС). Исследования в данном направлении показали, что ДЭОС способствует стабилизации германия в двойной системе, благодаря чему получают стойкие покрытия, после термообработки при температуре 600°C в течение 20 минут с последующим восстановлением в водородной печи в течение 120 минут при температуре 550°C . В результате в покрытиях возникала полоса поглощения в области 241 нм, что являлось естественным фильтром для УФ излучения. Также возникала люминесценция в области 375 и 275 нм благодаря присутствию диэтилортосиликата [5].

1 Методика эксперимента

Синтез покрытий золь-гель методом условно можно разделить на основные стадии: приготовление пленкообразующего раствора, созревание пленкообразующего раствора, нанесение раствора на подложку, термообработка (рисунок 1.1).

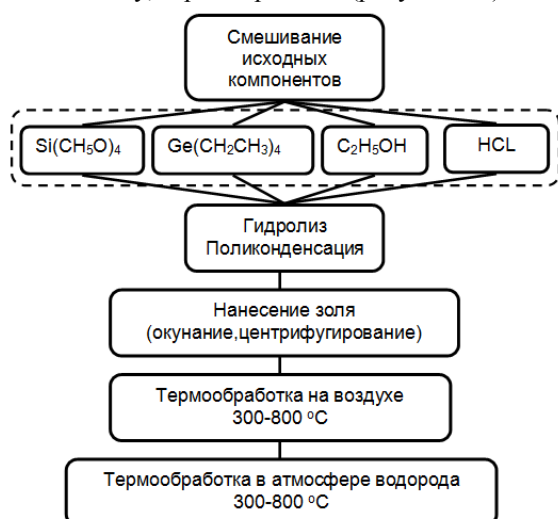
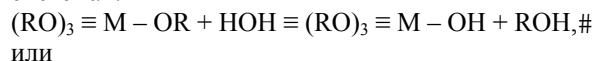


Рисунок 1.1 – Схема синтеза $\text{GeO}_2\text{-SiO}_2$ покрытий

Одной из самых важных задач является получение стабильных пленкообразующих растворов для синтеза покрытий. В работе растворы были получены из металлоорганических соединений Тетраэтилортогерманат (ТЭОГ) $[\text{Ge}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4]$ и Тетраэтилортосиликат (ТЭОС) $[\text{Si}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4]$. После смешивания исходных компонентов их заливали этиловым спиртом и медленно перемешивали. Для прохождения реакции гидролиза полученной системе необходим катализатор, которым выступает соляная кислота. Поэтому в полученную смесь вводили концентрированную соляную кислоту до достижения раствором уровня $\text{pH} = 5$. Для подробного исследования свойств полученных пленок были также приготовлены растворы с различным мольным соотношением ТЭОГ:ТЭОС. Отдельно растворы на основе тетраэтилортогерманата и тетраэтилортосиликата.

Остановимся подробнее на веществах, благодаря которым в растворах образуются золи. Такие вещества называют прекурсорами. Как правило, это соединения, способные к гидролизу: алкоксиды металлов $\text{Me}(\text{OR})_n$, где M – металл, OR – алкоксильные группы, например CH_3O^- , $\text{C}_2\text{H}_5\text{CH}_2\text{O}^-$, алкоксисоединения, соли, кислоты. Рассмотрим основные структурообразующие процессы, происходящие в золь-гель системах:



или $\equiv \text{M} - \text{OH} + \text{RO} - \text{M} \equiv \rightarrow \equiv \text{M} - \text{O} - \text{M} \equiv + \text{ROH}, \#$ где R – алкоксильная группа, $\text{M} - \text{Ge}, \text{Si}, \text{Ti}, \text{Zr}$ и др.

Скорость и степень полноты их протекания зависит от ряда химических и технологических факторов, а именно от: а) природы и количества алкоксидов; б) количества воды; в) кислотности среды – pH среды; г) природы и количества органических растворителей; д) приемов гомогенизации золь-гель систем; е) температуры и длительности процесса синтеза. По мере углубления процессов гидролиза и поликонденсации в золях протекают процессы структурирования, сопровождающиеся повышением вязкости и завершающиеся переходом в гель.

Готовые золи выдерживали при комнатной температуре в течение 3 дней. Дополнительно были проведены исследования реологических свойств готовых пленкообразующих растворов с интервалом в 30 суток. Было установлено, что динамическая вязкость золя в которой преобладает ТЭОС существенно не увеличилось с $4,19 \text{ МПа}\cdot\text{с}$ (для свежих золь) до $4,35 \text{ МПа}\cdot\text{с}$ (для золя хранившегося в течение 30 суток). В золях с равным мольным соотношением ТЭОГ:ТЭОС и в золях где преобладает ТЭОГ динамическая вязкость не изменяется.

Нанесение золя на подложку возможно такими методами, как метод окувания, метод аэрозольного распыления и метод центробежного ускорения. Важным параметром при выборе метода нанесения является возможность контролировать толщины полученного покрытия. Для этих целей был выбран метод центрифугирования, позволяющий варьировать толщину полученной пленки, меняя скорость вращения центрифуги. Этот метод является оптимальным при получении покрытий в оптоэлектронике и электронике, где зачастую используются подложки круглой формы. Данный метод обеспечивает минимальный расход пленкообразующего раствора и обеспечивает равномерную толщину покрытий.

Готовые золи наносили на кремниевые и германиевые пластины методом центрифугирования с проведением естественной сушки на воздухе при температуре $18\text{--}23^{\circ}\text{C}$, затем при повышенной температуре $60\text{--}100^{\circ}\text{C}$ в сушильном шкафу, при температуре $300\text{--}800^{\circ}\text{C}$ в муфельной

печи и в печи с атмосферой водорода при 300–800°С. Благодаря такой термообработке из пленки удалялись все органические остатки и формировалась аморфная матрица диоксида кремния с наночастицами германия.

2 Исследование оптических свойств

Одна из важных областей применения полученных германо-силикатных покрытий в качестве просветляющих – оптика тепловизионных камер. Такие устройства используются в системах пассивного тепловидения, военных системах инфракрасного наведения, приборах ночного видения, противопожарных системах. Такие покрытия также используются в ИК спектроскопии в оптических приборах, использующих высокочувствительные ИК датчики. Во всех перечисленных приборах используются германиевые линзы либо германиевые окошки, которые представлены на рисунке 2.1.

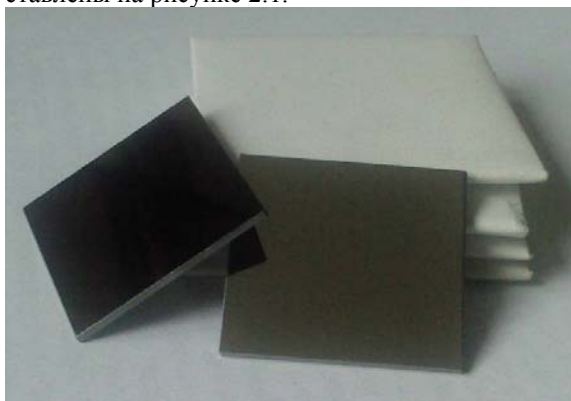


Рисунок 2.1 – Ge подложки для ИК устройств

На рисунке 2.2 представлен спектр поглощения Ge подложки без и с GeO₂ и GeO₂-SiO₂ покрытиями.

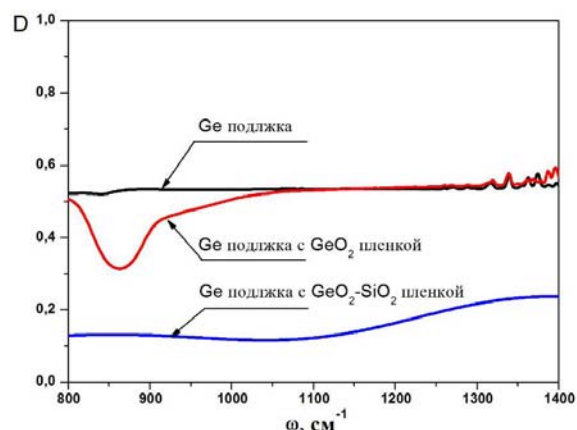


Рисунок 2.2 – Спектр поглощения Ge подложки с GeO₂ и GeO₂-SiO₂ покрытиями

Проанализировав графики, можно сделать вывод, что полученные просветляющие германо-силикатные покрытия увеличивают пропускание германиевой подложки до 80–85%, что делает возможным применение данных покрытий в

производстве оптических элементов инфракрасной оптики (линз, призм, оптических окон датчиков). Наиболее важная область применения полученных германо-силикатных покрытий находит себя в оптике тепловизионных камер.

3 Исследование ИК спектров

На рисунках 3.1–3.3 приведены спектры пропускания золь-гель покрытий, GeO₂, SiO₂ и GeO₂-SiO₂ покрытий. Данные покрытия нанесены на полированные пластины монокристаллического кремния (марки КЭФ-4.5), который характеризуется пропусканием в исследуемой ИК-области спектра в среднем около 65–70%. Покрытия прошли термообработку при различных температурах в течение 5 минут на воздухе.

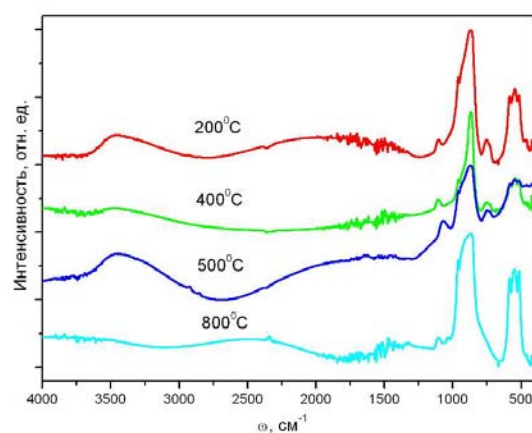


Рисунок 3.2 – ИК спектры GeO₂ золь-гель пленок

На графике (рисунок 3.1) отчетливо видна широкая полоса поглощения в области 3300 см⁻¹, связанная с наличием гидроксильных групп OH. Полосы 1008–1040 см⁻¹ в значительной степени зависят от мостиковых связей германия с кислородом Ge–O–Ge, а полосы 1059–1156 см⁻¹ соответствуют валентным антисимметричным колебаниям Ge–O–Ge.

Следует отметить, что широкая полоса поглощения в области 3300 см⁻¹, связанная с наличием гидроксильных групп OH, полностью отсутствует после термообработки пленок при 800°С в течение 20 минут.

Из инфракрасных спектров SiO₂ пленок (рисунок 3.2), следует, что основные пики поглощения приходятся на Si–O–Si связи и наличие гидроксильных групп OH. На графике отчетливо видна широкая полоса поглощения в области 3300 см⁻¹, связанная с наличием полосы 1008–1040 см⁻¹ в значительной степени зависят от мостиковых связей германия с кислородом Ge–O–Ge, а полосы 1059–1156 см⁻¹ соответствуют валентным антисимметричным колебаниям Ge–O–Ge.

Также были сняты ИК спектры полученных германо-силикатных покрытий.

Таблица 3.1 – Сопоставление волнового числа и типа колебаний

| Волновое число | ТИП колебаний | Отнесение |
|---|------------------|------------------|
| Для SiO₂ покрытий | | |
| 465 | деформ. | Si–O–Si |
| 450–512 | вал.с. | Si–O–Si |
| 845–896 | деформ | O–H |
| 870 | деформ. | Si–O–H |
| 945 | вал.а.с. | Si–OH |
| 950 | вал.а.с. | Si–O–Si |
| 1058–1100 | вал.а.с. | Si–O–Si |
| 1090 | вал. | Si–O |
| 1530–1550 | деформ. | H ₂ O |
| 1630 | деформ. | H–O–H |
| 1600–1700 | деформ. | H–O–H |
| 3200–3500 | вал. | O–H |
| 3450 | вал. | O–H |
| 3535–3540 | вал. | O–H |
| Для GeO₂ покрытий | | |
| 450–512 | вал. а. с. | Ge–O–Ge |
| 1008–1040 | мостиковые связи | Ge–O–Ge |
| 1059–1156 | вал. а. с. | Ge–O–Ge |
| 1530–1550 | деформ. | H ₂ O |
| 1630 | деформ. | H–O–H |
| 1600–1700 | деформ. | H–O–H |
| 3200–3500 | вал. | O–H |
| 3450 | вал. | O–H |
| 3535–3540 | вал. | O–H |
| Для GeO₂–SiO₂ покрытий | | |
| 450–512 | вал. а. с. | Si–O–Ge |
| 700–940 | мостиковые связи | Si–O–Ge |
| 1043–1167 | вал. а. с. | Si–O–Ge |
| 1530–1550 | деформ. | H ₂ O |
| 1630 | деформ. | H–O–H |
| 1600–1700 | деформ. | H–O–H |
| 3500–3950 | вал. | O–H |

вал. – валентные симметричные;
вал. а. с. – валентные антисимметричные;
деформ. – деформационные

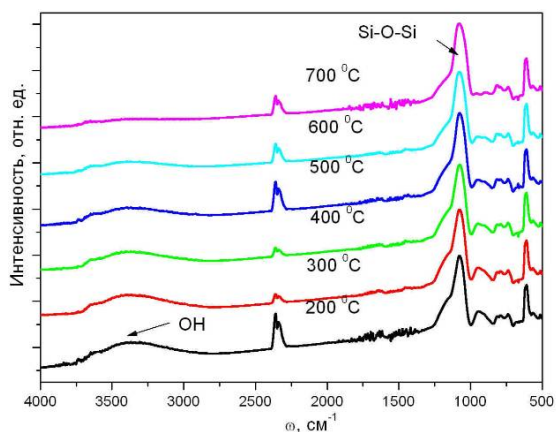


Рисунок 3.2 – ИК спектры SiO₂ золь-гель пленок

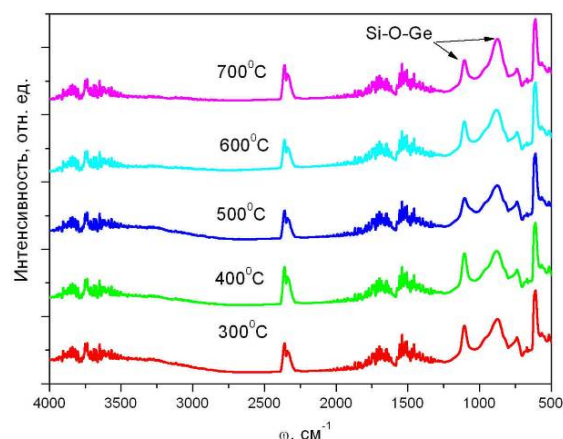


Рисунок 3.3 – ИК спектры GeO₂–SiO₂ золь-гель пленок

В ИК-спектре можно выделить полосы характерные для всех золь-гель пленок, а также зависимость интенсивности пиков от температуры. В таблице 3.1 приведены полосы поглощения и их спектральное значение.

С целью выявления особенностей влияния температуры отжига на структурообразование в аморфных силикатных пленках были проведены исследования оптических свойств пленок в дальней ИК-области спектра. В ИК-спектрах золь-гель плёнок наблюдаемые полосы 3200–3900 см⁻¹, отвечают валентным симметричным колебаниям OH групп. Полосы 1068 см⁻¹, 810 см⁻¹, 950 см⁻¹, отвечают валентным симметричным колебаниям (Si–O–Si), (Ge–O–Ge), (Si–O–Ge) деформационным (Si–O–Si), (Ge–O–Ge), (Si–O–Ge).

4 Исследование структурных свойств

Изучение фазовых переходов в синтезированных матрицах проведено с использованием измерительно-вычислительного комплекса «Рентген-структура», включающего ДРОН-7, блок управления и компьютер Pentium. Съёмка рентгendifракционных профилей проводилась на Cu_{Kα} по методу Брега – Брентано ($\theta-2\theta$) сканированием детектора с шагом $\Delta\theta=0.02$ град и временем набора импульсов 1 с в интервалах $20 \leq 2\theta \leq 40$ градусов.

Рентгенограммы золь-гель пленок на основе диоксида кремния (SiO₂) и диоксидов германия и кремния (SiO₂–GeO₂), прошедших восстановление в течение 1 часа в атмосфере водорода, представлены на рисунке 4.1.

На рентгенограмме пленки, на основе SiO₂ наблюдается отсутствие пиков, что указывает на аморфную структуру. На рентгенограмме SiO₂–GeO₂ пленки можно выделить наличие нескольких пиков при углах 2θ равных 21 и 24.5, что указывает на образование в аморфной матрице кремния кристаллических фаз на основе германия.

На рисунке 4.2 представлен вид структуры полученного покрытия состоящего из аморфной SiO₂ матрицы и кристаллических GeO₂ включений.

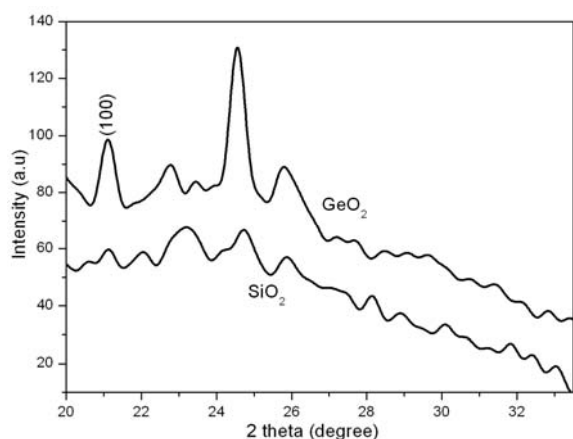


Рисунок 4.1 – Рентгенограммы SiO₂-GeO₂, SiO₂ золь-гель пленок

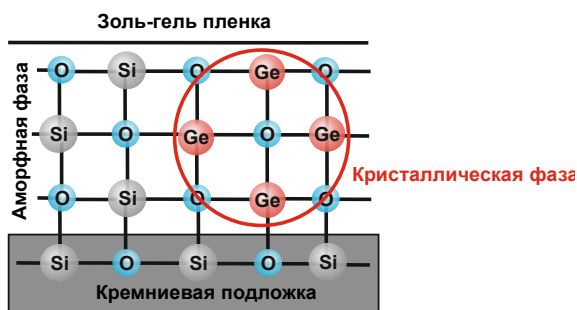


Рисунок 4.2 – Формирование германиевых кластеров в готовой пленке

Заключение

Разработанные покрытия могут применяться в различных отраслях науки и техники. Двухслойные антиотражающие GeO₂ и SiO₂ пленки позволяют увеличить эффективность солнечных батарей за счет увеличения длинноволнового диапазона рабочей области солнечных элементов, а также могут применяться в качестве антиотражающих покрытий для тепловизоров, приборов ночного видения и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sol-gel preparation of Ge nanocrystals embedded in SiO₂ glasses* / Heqing Yanga [et al.] // Journal of Crystal Growth. – 2002. – Vol. 236. – P. 371–375.
2. *Synthesis of GeO₂-doped SiO₂ aerogels and xerogels* / S. Grandi [et al.] // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2002. – Vol. 303. – P. 208–217.
3. *The structure of GeO₂-SiO₂ glasses and melts: A Raman spectroscopy study* / Grant, S. Henderson [et al.] // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2009. – Vol. 355. – P. 468–474.
4. *GeO₂ based k dielectric material synthesized by sol-gel process* / A. Phai [et al.] // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2007. – Vol. 353. – P. 692–696.
5. *Fabrication of sol-gel 70GeO₂-30SiO₂ thick films from TEOG and DEOS and investigation of the 5 eV band* / Chengbin Jing [et al.] // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2006. – Vol. 39. – P. 1174–1180.

Поступила в редакцию 15.08.13.

УДК 669.35:533.924

МОДИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ МЕДИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОМПРЕССИОННОГО ПЛАЗМЕННОГО ПОТОКА

А.П. Ласковнев¹, Н.Н. Черенда², А.В. Басалай¹, В.В. Углов²,
В.М. Анищик², В.М. Асташинский³, А.М. Кузьмицкий³

¹Физико-технический институт НАН Беларуси, Минск

²Белорусский государственный университет, Минск

³Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, Минск

MODIFICATION OF THE COPPER SURFACE LAYER BY THE COMPRESSION PLASMA FLOW

A.P. Laskovnev¹, N.N. Cherenda², A.V. Basalai¹, V.V. Uglov²,
V.M. Anischik², V.M. Astashynski³, A.M. Kuzmitski³

¹Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

²Belarusian State University, Minsk

³A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Методами оптической микроскопии и рентгеноструктурного анализа исследована морфология поверхности и микроструктура меди М1, обработанной компрессионным плазменным потоком. Установлен характер изменения морфологии поверхности и микротвердости в зависимости от величины энергии, поглощаемой поверхностью образца (5–18 Дж/см²). Толщина модифицированного слоя достигает 36 мкм (при плотности поглощенной энергии 18 Дж/см²).

Ключевые слова: медь, компрессионный плазменный поток, морфология поверхности, микроструктура.

The surface morphology and microstructure of copper M1 treated by the compression plasma flow have been investigated by the methods of optical microscopy and X-ray structural analysis. The correlation between the structure, microhardness and the amount of energy absorbed by the sample surface (5–18 J/cm²) has been found. The thickness of the modified layer is about 36 μm (at the absorbed energy density – 18 J/cm²).

Keywords: copper, compression plasma flow, surface morphology, microstructure.

Введение

Медь и сплавы на ее основе широко используются в технике как конструкционные материалы. Однако, для работы в условиях повышенных температур, коррозии и износа медные сплавы обладают недостаточной стойкостью. Этим и объясняется поиск и разработка технологий формирования защитных слоев, повышающих сопротивление медных сплавов газовой и химической коррозии, эрозионному и кавитационному износу. Традиционно, с целью получения требуемых свойств поверхностных слоев материалов и изделий, применяются методы химико-термической обработки, обработка лазерным лучом, обработка ионными пучками и ряд других методов [1].

В настоящее время одним из активно развивающихся способов модификации поверхностного слоя материалов является обработка компрессионным плазменным потоком (КПП) [2]. Взаимодействие плазменного потока с поверхностью материала характеризуется протеканием процессов сверхбыстрого нагрева до температуры, превышающей температуру плавления, и охлаждения (до 10⁷ К/с), приводящих к изменению

структуры поверхностного слоя толщиной порядка нескольких десятков микрометров. В данной работе были проведены исследования морфологии поверхности, структуры и микротвердости образцов меди М1 в зависимости от энергии, передаваемой образцу компрессионным плазменным потоком. Исследование таких объектов связано с необходимостью получения токопроводящих материалов, работающих в агрессивных средах с целью направленной трансформации их структуры и комплекса физико-механических свойств.

1 Методика эксперимента

Объектом исследования были образцы меди М1 (степень деформации δ=65%), обработанные КПП, генерируемым в атмосфере азота. Исследуемые образцы представляли собой параллелепипеды с размерами торцевой поверхности 10×15 мм и толщиной 3 мм с полированной поверхностью. Обработку одним импульсом КПП осуществляли в газоразрядном магнитоплазменном компрессоре (МПК) компактной геометрии, в котором ускорение плазмы в аксиально-симметричной системе двух электродов сопровождается

ее сжатием за счет взаимодействия продольной составляющей тока с собственным азимутальным магнитным полем. Длительность разряда составляла ~ 100 мкс. Перед разрядом предварительно откачанная вакуумная камера МПК заполнялась рабочим газом (азотом) до давления 400 Па. Напряжение на конденсаторной батарее варьировалось в диапазоне 3,5–4,5 кВ. В камере образцы располагались на расстоянии 12 см от среза внутреннего электрода перпендикулярно набегающему потоку (схема расположения образцов в камере – рисунок 1.1). Согласно [3] значения плотности энергии, поглощаемой поверхностью образца, в зависимости от напряжения составляют 5–18 Дж/см² за импульс.

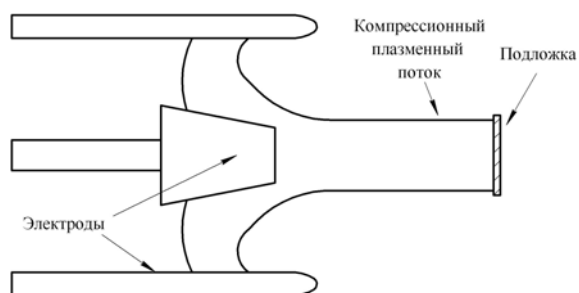


Рисунок 1.1 – Схема расположения образца в камере

Металлографические исследования проводились на оптическом микроскопе МИКРО – 200. Анализ микроструктуры производился как непосредственно на поверхности, подвергшейся воздействию КПП, так и на шлифах, поперечных к поверхности. Микротвердость образцов определялась на приборе ПМТ-3 при нагрузке 1 Н. Рентгеноструктурный анализ образцов проводился с помощью рентгеновского дифрактометра ДРОН – 3 в излучении линии Cu K_α.

2 Экспериментальные результаты и их обсуждение

Воздействие КПП на полированную поверхность образцов меди приводит к изменению ее морфологии. Этот эффект наиболее выражен при увеличении энергии потока (рисунок 2.1).

При минимальном режиме, т. е. обработке КПП с плотностью энергии 5 Дж/см² (рисунок 2.1 а), визуально не заметно изменение состояния поверхности, следовательно, при данном режиме обработки образец был нагрет до температуры, не превышающей температуру плавления. При плотности энергии 10 Дж/см² наблюдается формирование локальных областей зеленого цвета (рисунок 2.1 б, стрелки 1, 2, 3), вероятно, связанных с окислением. При увеличении энергии воздействия плазменного потока такие области на поверхности меди не наблюдаются.

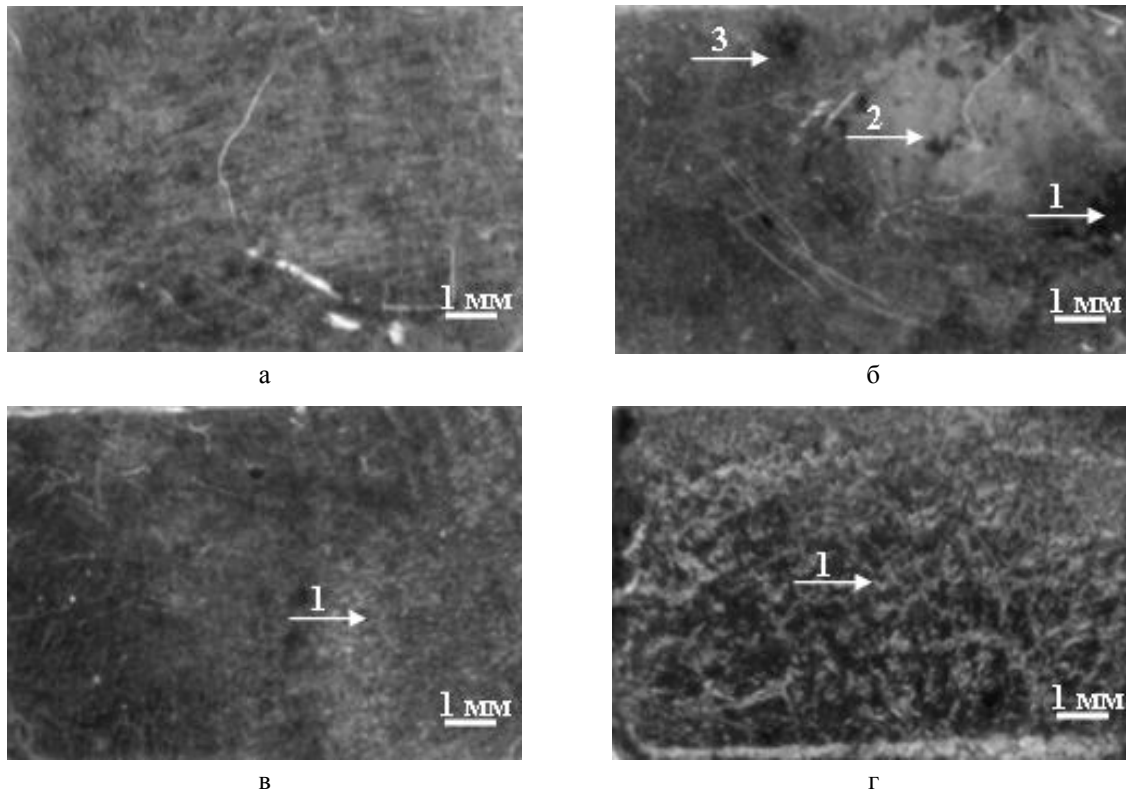


Рисунок 2.1 – Морфология поверхности образцов, обработанных КПП с плотностью поглощенной энергии: 5 Дж/см² (а), 10 Дж/см² (б); 14 Дж/см² (в); 18 Дж/см² (г)

На рисунке 2.2 представлены различные участки окисленной зоны поверхности образца (рисунок 2.1 б, стрелка 1), обработанного КПП при плотности энергии 10 Дж/см^2 . Как было показано ранее [4], воздействие КПП, генерируемого в атмосфере азота, на сталь приводит к проникновению в поверхностный слой атомов азота, кислорода и углерода из остаточной атмосферы вакуумной камеры. При одновременном присутствии азота и кислорода формирование оксидов металлов, как правило, термодинамически более выгодно, что и приводит к формированию в данном случае оксида меди. В работе [5] показано, что увеличение энергии, поглощенной поверхностью, приводит к уменьшению концентрации атомов, диффундирующих из остаточной атмосферы, что связывалось с экранирующим действием ударно-сжатого слоя, формирующегося у поверхности мишени при плазменном воздействии. Этот эффект позволяет объяснить отсутствие локальных окисленных областей при обработке с плотностью энергии большей 10 Дж/см^2 .

Как показано на рисунке 2.1 в, г, при плотности энергии $14\text{--}18 \text{ Дж/см}^2$ на поверхности наблюдается формирование волнообразного рельефа, обусловленного нагревом поверхностного слоя выше температуры плавления, возникновением гидродинамических неустойчивостей на межфазной поверхности, приводящим к конвективному движению расплава и генерации

колебаний расплава, а также минимизации поверхностной энергии на стадии быстрой кристаллизации [4]. Волнообразные структуры ориентированы по направлению движения плазмы (рисунок 2.1 г) в результате растекания расплава к краям образца под давлением плазменного потока, огибающего образец.

Использование прицельной металлографии позволяет фиксировать трансформацию одних и тех же участков поверхности после воздействия. На рисунке 2.3 представлены участки поверхности образцов до и после обработки КПП с плотностью энергии 14 и 18 Дж/см^2 (на рисунке 2.1 в, г, эти участки указывает стрелка 1). При обработке образца с плотностью энергии 14 Дж/см^2 еще наблюдаются участки с сохранившейся исходной поверхностью (рисунок 2.3 б), а при энергии 18 Дж/см^2 такие участки отсутствуют, поверхность полностью трансформировалась (рисунок 2.3 г). Увеличение энергии, поглощаемой поверхностью образца, приводит к увеличению времени существования расплава, что должно приводить к формированию расплавленного поверхностного слоя большей толщины [2].

На рисунке 2.4 представлена микроструктура поперечного шлифа исходного образца (рисунок 2.4 а) и образцов, подвергнутых обработке КПП (рисунок 2.4 б, в, г).

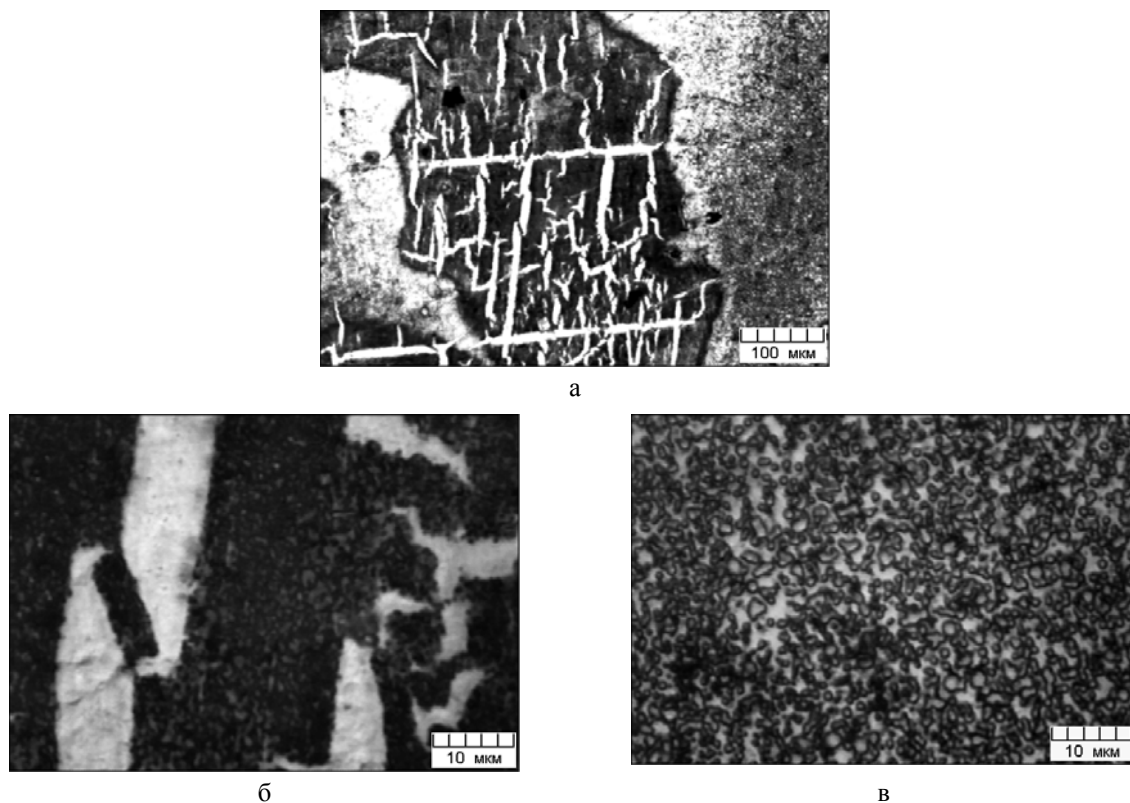


Рисунок 2.2 – Микроструктура поверхности образца, обработанного КПП с плотностью поглощенной энергии 10 Дж/см^2

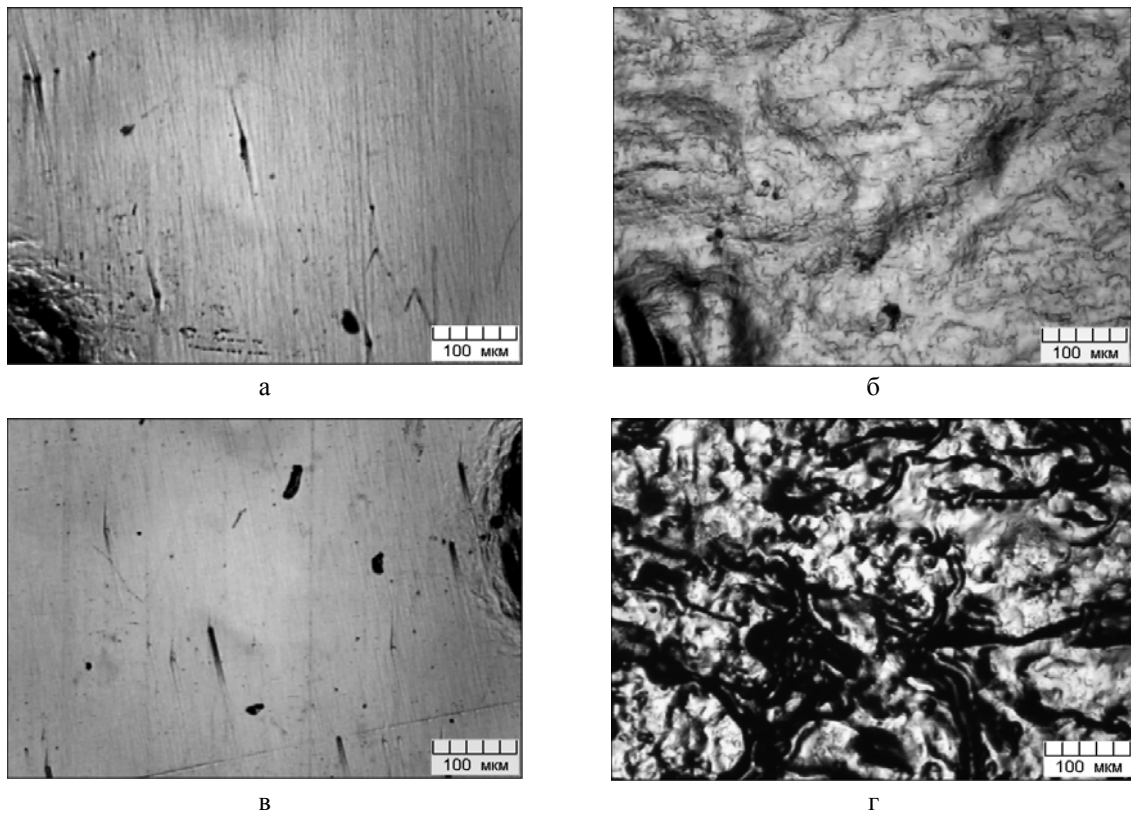


Рисунок 2.3 – Морфология поверхности образцов до обработки (а, в) и обработанных КПП с плотностью поглощенной энергии 14 Дж/см² (б) и 18 Дж/см² (г)

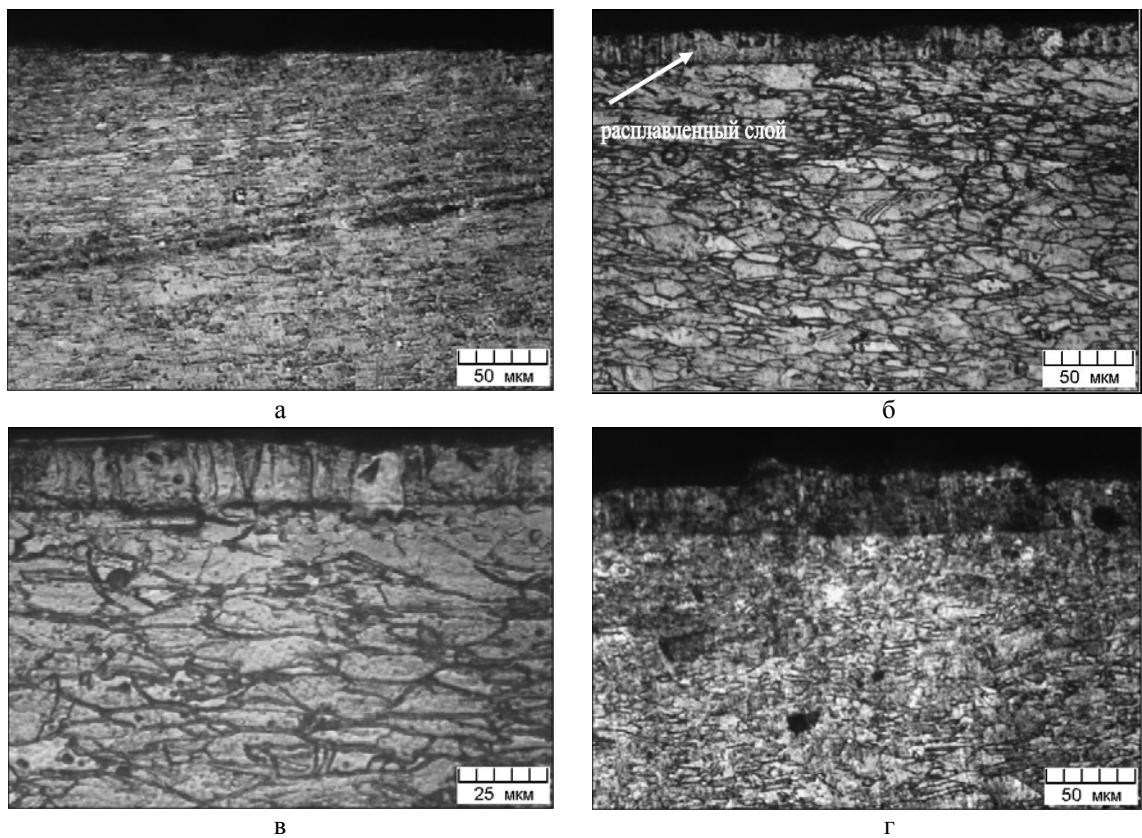


Рисунок 2.4 – Микроструктура поперечных шлифов исследуемых образцов: исходного (а), обработанных КПП с плотностью поглощенной энергии 14 Дж/см² (б, в) и 18 Дж/см² (г)

На приведенных микрофотографиях видно, что в результате обработки КПП с плотностью поглощенной энергии 14 Дж/см² и 18 Дж/см² происходит плавление поверхностного слоя исследуемого материала, толщина модифицированного слоя увеличивается с повышением плотности энергии, поглощенной поверхностью образца, и составляет 16–19 мкм при 14 Дж/см² и 28–36 мкм при 18 Дж/см². При кристаллизации расплава происходит формирование столбчатых зерен, ориентированных перпендикулярно поверхности. В работе [2] описан механизм формирования микроstructures армко-железа при воздействии компрессионного плазменного потока. В процессе воздействия КПП происходит плавление поверхностного слоя за счет термализации кинетической энергии плазменного потока при его торможении на мишени, после чего начинается быстрое охлаждение расплава за счет теплоотвода в объем образца. По мере возрастания степени переохлаждения на границе жидкость – твердое тело начинают образовываться зародыши кристаллизации. Образовавшиеся кристаллы приобретают столбчатую форму, так как частота зарождения новых зерен в расплаве, в условиях большого переохлаждения, перед движущимся фронтом кристаллизации, как правило, недостаточна для торможения роста первоначальных кристаллов. Таким образом, в связи с особенностями процессов кристаллизации в условиях сверхбыстрой закалки наблюдается рост кристаллов в направлении, обратном направлению теплоотвода, т. е. перпендикулярно поверхности.

Таблица 2.1 – Полусные плотности исходного образца меди

| Дифракционные линии | Полусная плотность (P_{hkl}) исходного образца |
|---------------------|--|
| 111 | 0,16 |
| 200 | 0,36 |
| 220 | 2,42 |
| 311 | 1,05 |

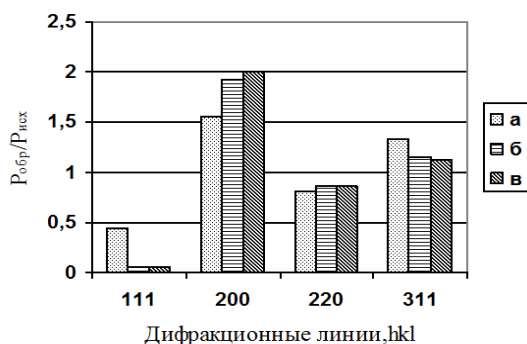


Рисунок 2.5 – Отношение полусных плотностей образцов, подвергнутых воздействию КПП, к полусной плотности исходного образца (плотность энергии при обработке: 10 Дж/см² (а), 14 Дж/см² (б), 18 Дж/см² (в))

Так как исходные образцы были деформированы, по данным рентгеноструктурного анализа, они имеют одинаковую ярко выраженную текстуру типа (110) (таблица 2.1). Для установления характера изменения текстуры образцов, подвергнутых воздействию КПП, было найдено отношение полусных плотностей обработанных образцов к полусной плотности исходного образца соответствующих дифракционных линий (рисунок 2.5). Проведенные исследования показали, что при сохранении преимущественной текстуры (110), происходит увеличение полусной плотности линии (200) с ростом плотности поглощенной энергии.

Известно, что в условиях большого термического и концентрационного переохлаждения, например при лазерном воздействии, возможно формирование ячеисто-дендритной структуры при кристаллизации из расплава [6]–[8]. В металлах с гцк кристаллической структурой рост дендритов, как правило, происходит в направлении $\langle 100 \rangle$, которое совпадает или близко ориентировано к направлению теплоотвода [6], [7]. Это вызвано термодинамическим условием, при котором выступающие в расплаве элементы поверхности кристаллитов должны иметь максимальную скорость роста [6]. Такое условие реализуется в гцк металлах, если ось дендрита совпадает с направлением ребра куба, являющегося осью пирамиды, образованной четырьмя плотно упакованными плоскостями $\{111\}$, то есть с направлением типа $\langle 100 \rangle$ [6], [7]. Следует отметить, что эти рассуждения не являются универсальными. В работе [8] отмечается, что в фольгах алюминия, полученных сверхбыстрым охлаждением (до 10⁴ К/с), наблюдается рост столбчатых кристаллов в других направлениях.

В условиях проведенных экспериментов преимущественным направлением роста столбчатых кристаллов остается направление $\langle 110 \rangle$, соответствующее оси текстуры исходного образца. Поскольку глубина анализа рентгеновскими лучами в меди не превышает ~ 15 мкм, то уже при плотности поглощенной энергии более 14 Дж/см² данные рентгеноструктурного анализа характеризуют только перекристаллизованный слой. Можно предположить, что ориентация зерен на границе расплав – твердое тело оказывает существенное влияние на ориентацию кристаллизующихся зерен в процессе движения фронта кристаллизации из объема к поверхности. Данное предположение подтверждают проведенные исследования микроstructures поперечного шлифа образца меди М1 с меньшей степенью деформации (35%), подвергнутого воздействию КПП с плотностью поглощенной энергии 14 Дж/см² (рисунок 2.6). Как видно из рисунка, поверхностный слой, кристаллизовавшийся из расплава, и нижележащий слой имеют общие зерна. При этом часть зерна, которая находится в

перекристаллизованном слое, растет перпендикулярно поверхности.



Рисунок 2.6 – Микроструктура поперечного шлифа образца меди М1 (степень деформации 35%), обработанного КПП с плотностью поглощенной энергии 14 Дж/см²

Воздействие КПП на поверхность меди приводит к изменению ее свойств. На рисунке 2.7 представлены результаты измерения микротвердости поверхности до и после обработки КПП. Видно, что при увеличении энергии, поглощаемой поверхностью образца до значений, при которых происходит плавление поверхности (14–18 Дж/см²), среднее значение микротвердости незначительно снижается. Это может быть связано со снятием остаточных напряжений в результате перекристаллизации поверхностного слоя, так как исходный образец являлся деформационно упрочненным.



Рисунок 2.7 – Средние значения микротвердости на поверхности исходного образца и поверхности, обработанной плазмой с плотностью энергии 5–18 Дж/см², при нагрузке 1 Н

Заключение

Установлено, что обработка компрессионным плазменным потоком в диапазоне плотности энергии (5–18 Дж/см²), поглощенной поверхностью образца, деформированных образцов меди приводит к изменению морфологии поверхности и структуры поверхностного слоя. Плавление поверхностного слоя, сопровождающееся формированием характерного рельефа поверхности в виде волнообразных структур, наблюдается при

обработке КПП с плотностью поглощенной энергии 14 Дж/см² и выше. Увеличение энергии, поглощаемой поверхностью образца, приводит к формированию расплавленного поверхностного слоя большей толщины. Структура этого слоя после кристаллизации характеризуется присутствием столбчатых кристаллов, ориентированных перпендикулярно поверхности, в направлении теплоотвода. Основное направление их роста <110> совпадает с направлением оси текстуры исходного образца. С увеличением плотности поглощенной энергии происходит увеличение полюсной плотности линии (200) в ~ 2 раза. При обработке КПП с плотностью энергии 14–18 Дж/см² наблюдается незначительное снижение микротвердости, связываемое со снятием напряжений в результате перекристаллизации поверхностного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Corrosion behavior of laser-alloyed copper with titanium fabricated by high power diode laser* / P.K. Wong [et al.] // Corrosion Science. – 2012. – № 57. – P. 228–240.
2. *Изменение микроструктуры и механических свойств железа в результате воздействия компрессионного плазменного потока* / В.В. Углов [и др.] // Физика и химия обработки материалов. – 2004. – № 4. – С. 37–42.
3. *Особенности структурно-фазовой модификации твердых сплавов и сталей при воздействии на них компрессионных плазменных потоков* / В.В. Аскерко [и др.] // Взаимодействие излучений с твердым телом: материалы VI международной конференции, Минск, 28–30 сентября 2005 г. / БГУ; редкол.: В.М. Анищик [и др.]. – Минск, 2005. – С. 161–163.
4. *Структурно-фазовое состояние системы титан-сталь, облученной компрессионным плазменным потоком азота* / В.В. Углов [и др.] // Физика и химия обработки материалов. – 2005. – № 2. – С. 36–41.
5. *Азотирование поверхностного слоя стали и титана компрессионными плазменными потоками* / Н.Н. Черенда [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2012. – № 4. – С. 35–42.
6. *Физическое металловедение*: в 3 т. / под ред.: Р. Кана – М.: Мир, 1968. – Т.2: Фазовые превращения. Металлография. – 490 с.
7. *Вайнгард, У.* Введение в физику кристаллизации металлов / У. Вайнгард. – М.: Мир, 1967. – 170 с.
8. *Калиниченко, А.С.* Управляемое направленное затвердевание и лазерная обработка: теория и практика / А.С. Калиниченко, Г.В. Бергман. – Минск : Технопринт, 2001. – 367 с.

Поступила в редакцию 20.05.13.

УДК 530.1; 539.12

АНАЛИЗ ПРИВЕДЕННЫХ МОДИФИКАЦИЙ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПЕНГА – РОБИНСОНА В РАМКАХ ПРОЦЕССА ДЖОУЛЯ – ТОМСОНА

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ANALYSIS OF THE REDUCED MODIFICATIONS OF THE PENG – ROBINSON EQUATION OF STATE IN THE FRAMEWORK OF THE JOULE – TOMSON PROCESS

O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В статье в рамках термодинамического метода рассмотрены модификации уравнения состояния Пенга – Робинсона. Рассчитаны критические параметры и определены приведенные формы модифицированных уравнений. На их основе проанализирован процесс Джоуля – Томсона и определены формы кривых инверсии знака эффекта.

Ключевые слова: критические параметры, уравнение состояния Пенга – Робинсона, модифицированное уравнение, приведенные переменные, процесс Джоуля – Томсона, кривая инверсии, положительный эффект.

In the framework of thermodynamic method the modifications of the Peng – Robinson equations of state are considered in the paper. Critical parameters of the modified equations are calculated and their reduced forms are found as well. On this basis the Joule – Tomson process is analyzed and the explicit forms of effect sign inversion curves are built.

Keywords: critical parameters, the Peng – Robinson equation of state, modified equation, reduced variables, the Joule – Tomson process, inversion curve, positive effect.

Введение

Уравнение состояния Пенга – Робинсона [1] (далее ПР – уравнение) является одним из основных уравнений состояния, используемых в современной физической химии. Основными областями его применения являются теория и технология нефтегазодобычи, криогеника и т. д., что говорит о прикладной значимости последнего. Однако, необходимо помнить, что по своему происхождению это уравнение является полуэмпирическим и относится к феноменологии макросистем, то есть к основному разделу теоретической физики, называемому термодинамикой. Рассмотрим его с термодинамической точки зрения. Традиционно используемая молярная форма ПР – уравнения имеет вид

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a(T)}{V(V+b)+b(V-b)},$$

где использованы общепринятые термодинамические обозначения, а физический смысл параметров уравнения a и b близок к Ван-дер-Ваальсовскому.

В данной работе рассматриваются модификации ПР – уравнения с $a \neq a(T)$, что часто оправдано, и с вариацией знака второго слагаемого в знаменателе добавки к давлению, поэтому их можно называть двухпараметрическими

$$P_{(\mp)} = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V(V+b)+b(V \mp b)}. \quad (0.1)$$

Первое приближение позволяет точно фиксировать параметры критического состояния, что делает возможным использование методически эффективных приведенных переменных, а второе иллюстрирует правомерность выбора данного знака при формировании уравнений состояния в целом. Таким образом, мы определяем критические параметры модификаций ПР – уравнения, находим их приведенные формы, рассчитываем параметры процесса Джоуля – Томсона и строим кривые инверсии соответствующего эффекта, далее сравнивая их с наиболее эффективной теоретической и экспериментальной кривыми.

1 Приведенные модификации ПР – уравнения

Определим критические параметры для (0.1) исходя из того, что они являются координатами точки перегиба и одновременно точки схождения экстремумов изотермы в PV – плоскости [2]. Математически это означает, что

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T_{кр}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T_{кр}} = 0. \quad (1.1)$$

Для уравнения (0.1) условие (1.1) приводит к соотношениям

$$\frac{RT_{кр(-)}}{(V_{кр} - b)^2} = \frac{2a(V_{кр} + b)}{[V_{кр}(V_{кр} + b) + b(V_{кр} - b)]^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{RT_{kp(+)}}{(V_{kp} - b)^2} = \frac{2a}{(V_{kp} + b)^3}, \quad (1.3)$$

$$\frac{2RT_{kp(-)}}{(V_{kp} - b)^3} = \frac{2a[3(V_{kp} + b)^2 + 2b^2]}{[V_{kp}(V_{kp} + b) + b(V_{kp} - b)]^3}, \quad (1.4)$$

$$\frac{2RT_{kp(+)}}{(V_{kp} - b)^3} = \frac{6a}{(V_{kp} + b)^4}. \quad (1.5)$$

Полученные соотношения (1.2)–(1.5) образуют систему уравнений, позволяющую выразить искомые характеристики критического состояния через параметры a, b уравнения (0.1). Причем в случае (1.2)–(1.4) возникает необходимость решения кубического уравнения, имеющего одно вещественное и два комплексно-сопряженных решения. Последние не представляют физического интереса, а вещественное решение находится с использованием формулы Кордано. Таким образом, получаем критические объемы

$$V_{kp(-)} = \varphi b = 3,9514b, \quad V_{kp(+)} = 5b, \quad (1.6)$$

где $\varphi = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} + 1 \cong 3,9514$. Далее ищем критические температуры

$$T_{kp(-)} = \frac{a}{2(\varphi - 1)Rb} = \frac{a}{5,8774Rb},$$

$$T_{kp(+)} = \frac{4a}{27Rb} \quad (1.7)$$

и, наконец, критические давления

$$P_{kp(-)} = \left[\frac{1}{2(\varphi - 1)^2} - \frac{1}{\varphi^2 + 2\varphi - 1} \right] \frac{a}{b^2} = 0,0130 \frac{a}{b^2},$$

$$P_{kp(+)} = \frac{a}{108b^2}. \quad (1.8)$$

Традиционно определив приведённые переменные как

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_{kp}}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_{kp}}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{P_{kp}}$$

и подставив (1.6)–(1.8) в (0.1), получим приведенные модификации ПР – уравнения

$$\left[\frac{1}{2(\varphi - 1)^2} - \frac{1}{\varphi^2 + 2\varphi - 1} \right] \tilde{P}_{(-)} =$$

$$= \frac{\tilde{T}}{2(\varphi - 1)(\varphi \tilde{V} - 1)} - \frac{1}{\varphi^2 \tilde{V}^2 + 2\varphi \tilde{V} - 1}, \quad (1.9)$$

$$\tilde{P}_{(+)} = \frac{16\tilde{T}}{(5\tilde{V} - 1)} - \frac{108}{(5\tilde{V} + 1)^2}. \quad (1.10)$$

2 Процесс Джоуля – Томсона

Применим приведенные модификации ПР – уравнения для исследования подсистемно-равновесного изохорического ($dW=0$) процесса прокачки реального газа сквозь пористую перегородку (процесс Джоуля – Томсона) [2], актуальность исследования которого в настоящее

время подкрепляется многочисленными публикациями, например [3]. При этом процессе наблюдается изменение температуры реального газа, а области разного знака изменения разделяются кривой инверсии, явный вид которой для уравнений (1.9) и (1.10) будет определен в данной работе.

Как показано в работах [4]–[5], в рамках рассматриваемого процесса удобно использовать его параметр, записанный в терминах приведенных переменных

$$\tilde{\lambda} = \tilde{V} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{V}} \right)_{\tilde{T}} + \tilde{T} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{T}} \right)_{\tilde{V}}. \quad (2.1)$$

При уменьшении давления ($d\tilde{P} < 0$), следующем из условия протекания процесса Джоуля – Томсона, возможны два варианта изменения температуры в зависимости от знака параметра процесса $\tilde{\lambda}$: $\tilde{\lambda} > 0 \rightarrow d\tilde{T} < 0$, $\tilde{\lambda} < 0 \rightarrow d\tilde{T} > 0$. Первый вариант соответствует положительному дифференциальному эффекту Джоуля – Томсона (газ остывает), второй – отрицательному (газ нагревается). Условием же $\tilde{\lambda} = 0$ задаются точки инверсии, в которых изменяется знак эффекта, поэтому данному условию можно сопоставить температуру инверсии T_i и получить выражение для ее расчета.

Найдем $\tilde{\lambda}_{(\mp)}$ на основе определения (2.1) и уравнений состояния (1.9), (1.10), предварительно переопределив в (1.9) множитель, стоящий перед $\tilde{P}_{(-)}$, как

$$\left[\frac{1}{2(\varphi - 1)^2} - \frac{1}{\varphi^2 + 2\varphi - 1} \right] = \varphi_1 = 0,0130.$$

В итоге получим

$$\tilde{\lambda}_{(-)} = \frac{2\varphi\tilde{V}(\varphi\tilde{V} + 1)}{\varphi_1[\varphi^2\tilde{V}^2 + 2\varphi\tilde{V} - 1]^2} - \frac{\tilde{T}}{\varphi_1 2(\varphi - 1)(\varphi\tilde{V} - 1)^2},$$

$$\tilde{\lambda}_{(+)} = \frac{1080\tilde{T}}{(5\tilde{V} + 1)^3} - \frac{16\tilde{T}}{(5\tilde{V} - 1)^2}.$$

Далее на основании критерия инверсии $\tilde{\lambda}_{(\mp)} = 0$ устанавливаем зависимости для приведённой температуры инверсии

$$\tilde{T}_{i(-)}(\tilde{V}) = \frac{4\varphi(\varphi - 1)\tilde{V}(\varphi\tilde{V} + 1)(\varphi\tilde{V} - 1)^2}{[\varphi^2\tilde{V}^2 + 2\varphi\tilde{V} - 1]^2}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{T}_{i(+)}(\tilde{V}) = \frac{135\tilde{V}(5\tilde{V} - 1)^2}{2(5\tilde{V} + 1)^3}, \quad (2.3)$$

что, в свою очередь, позволяет также выразить давление в точках инверсии как функцию объема

$$\tilde{P}_{i(-)}(\tilde{V}) = \frac{2\varphi^3\tilde{V}^3 - \varphi^2\tilde{V}^2 - 4\varphi\tilde{V} + 1}{\varphi_1[\varphi^2\tilde{V}^2 + 2\varphi\tilde{V} - 1]^2}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{P}_{i(+)}(\tilde{V}) = \frac{108(50\tilde{V}^2 - 15\tilde{V} - 1)}{(5\tilde{V} + 1)^3}. \quad (2.5)$$

Выявленные инверсионные зависимости (2.2) и (2.3) приведены на рисунке 2.1, а (2.4) и (2.5) на рисунке 2.2. Они задают искомые инверсионные кривые в двух физических плоскостях: $(\tilde{T}\tilde{V})$ и $(\tilde{P}\tilde{V})$. Кроме того, на обоих рисунках показаны для сравнения аналогичные кривые, следующие из уравнения Редлиха – Квонга, которые наиболее точно соответствуют эксперименту [6], проведенному с легкими веществами такими как CH_4 , O_2 , Ar , CO_2 и т. д.

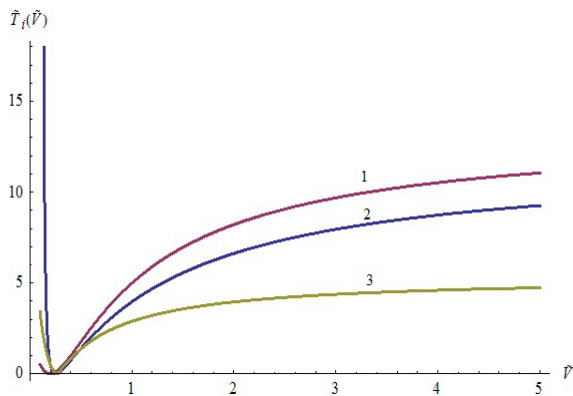


Рисунок 2.1 – Графики инверсионных зависимостей $\tilde{T}_i(\tilde{V})$: модификация $PP_{(+)}$ (1), модификация $PP_{(-)}$ (2), уравнение Редлиха – Квонга (3)

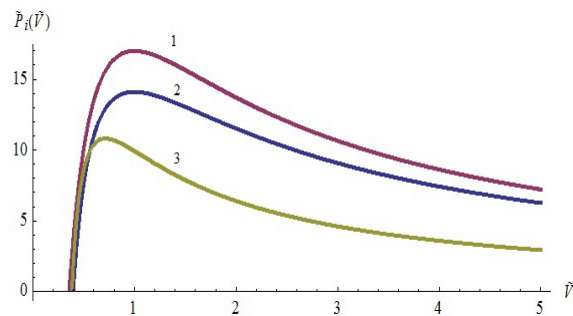


Рисунок 2.2 – Графики инверсионных зависимостей $\tilde{P}_i(\tilde{V})$: модификация $PP_{(+)}$ (1), модификация $PP_{(-)}$ (2), уравнение Редлиха – Квонга (3)

Выражения (2.2)–(2.5) не позволяют нам явно определить давление как функцию температуры инверсии в аналитическом виде $\tilde{P}_i(\tilde{T}_i)$. Но на их основе можно реализовать численное и графическое исследование данной зависимости. Причем наиболее удобным для этой процедуры как раз и является использование уравнений, записанных в приведенной форме. В этом случае результат имеет общий характер, и численное решение достаточно выполнить только один раз.

Приведем полученные графические результаты для (2.2)–(2.5) снова в сравнении с кривой инверсии Редлиха – Квонга на рисунке 2.3. Заметим, что использование физической $\tilde{P}\tilde{T}$ -плоскости является традиционным для изображения кривых инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона.

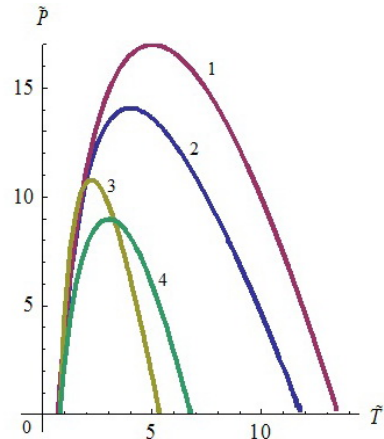


Рисунок 2.3 – Графики инверсионных кривых: модификация $PP_{(+)}$ (1), модификация $PP_{(-)}$ (2), уравнение Редлиха – Квонга [5] (3), уравнение Ван-дер-Ваальса [2] (4)

На рисунках 2.1–2.3 заметны существенные отклонения кривых инверсии, полученных на основе исследования модификаций уравнения Пенга – Робинсона, от кривой, следующей из уравнения состояния Редлиха – Квонга, наиболее соответствующей классическому эксперименту с легкими веществами [6]. При схожести поведения в областях низких приведенных температур отклонения значительно возрастают при высоких приведенных температурах, то есть в наиболее интересной с точки зрения процесса Джоуля – Томсона области. Это в данном случае в целом не умаляет достоинств PP – уравнения и его модификаций, а только говорит о том, что область их применения несколько иная. В последнее время становится понятно, что она связана с более сложными химическими соединениями, в частности, с углеводородами [7]. К сожалению, в открытой научной периодике экспериментальной кривой инверсии для углеводородов обнаружить не удалось, может быть, в силу специфики материала. Поэтому будем считать, что полученные в данной работе результаты имеют предиктивный характер.

Заключение

Таким образом, в данной работе получены характеристики критического состояния модификаций уравнения состояния Пенга – Робинсона, определен явный вид приведенных форм уравнений, рассчитаны параметры процесса Джоуля – Томсона и построены графики кривых инверсий в различных физических плоскостях.

Полученные результаты могут быть использованы в учебном процессе в рамках курсов «Термодинамика и статистическая физика» и «Физическая химия». Также они могут быть рекомендованы для использования при совершенствовании технологий охлаждения природных газов с целью их дальнейшего сжижения. Кроме того, сравнение теоретически предсказанной области положительного эффекта с экспериментальной даст возможность проводить анализ соответствия исследуемого вещества предлагаемой модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peng, D.Y. A new two – constant equation of state / D.Y. Peng, D.B. Robinson // *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. – 1976. – Vol. 15. – P. 59–64.
2. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск : Издательство Новосибирского университета, 2000. – 608 с.
3. Abbas, R. Joule – Thomson coefficients and Joule – Thomson inversion curves for pure compounds and binary systems predicted with the group contribution equation of state VTPR / R. Abbas //

Fluid Phase Equilibria. – 2011. – Vol. 306. – P. 181–189.

4. Дей, Е.А. Кривые инверсии процесса Джоуля – Томсона в приведенных переменных / Е.А. Дей, Г.Ю. Тюменков, П.В. Астахов // *Чрезвычайные ситуации: образование и наука*. – 2012. – Т. 7. – № 1. – С. 101–105.

5. Дей, Е.А. Расчет параметров изоэнтальпического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. – 2012. – № 6 (75). – С. 38–42.

6. Hendricks, R.C. Joule – Thomson Inversion Curves and Related Coefficients for Several Simple Fluids / R.C. Hendricks, I.C. Peller, A.K. Baron // *NASA Technical Note TN D-6807*. – NASA, 1972. – 59 p.

7. Garland, C.W. *Experiments in Physical Chemistry* / C.W. Garland, J.W. Nibler, D.P. Shoemaker. – New York : McGraw-Hill Higher Education, 2009. – 100 p.

Поступила в редакцию 12.06.13.

УДК 621.396

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД СО СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

А.Л. Самофалов, И.А. Фаняев, И.В. Семченко, С.А. Хахомов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

POLARIZATION TRANSFORMERS OF ELECTROMAGNETIC WAVES BASED ON COMPOSITE MEDIA WITH A HELICAL STRUCTURE

A.L. Samofalov, I.A. Faniayeu, I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В СВЧ диапазоне проведено компьютерное моделирование, основанное на методе конечных элементов, частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для одиночных одновитковых и двухвитковых спиралей и двумерных решеток, состоящих из таких спиралей. Показана возможность преобразования падающей линейно поляризованной электромагнитной волны в циркулярно поляризованную волну, отраженную от двумерной решетки на основе одновитковых и двухвитковых спиралей. Отраженная циркулярно поляризованная волна наблюдается на частотах, близких к резонансной, при этом не зависит от ориентации плоскости поляризации падающей волны относительно оси спиралей.

Ключевые слова: моделирование, преобразование поляризации, одновитковая и двухвитковая спираль, коэффициент эллиптичности.

Computer simulation was carried out in the microwave range based on the finite element method for the frequency dependence of the ellipticity coefficient of reflected wave for single-turn and double-turn helices and two-dimensional arrays consisting of the same helices. The possibility of the transformation of the incident linearly polarized electromagnetic waves in a circularly polarized wave reflected from the two-dimensional array on the basis of a single-turn and double-turn helices was shown. Reflected circularly polarized wave is observed at frequencies close to the resonance and doesn't depend on the orientation of the plane polarization of incident wave relative to the axis of the helices.

Keywords: simulation, transformation of polarization, single-turn and double-turn helices, ellipticity coefficient.

Введение

Для получения циркулярно поляризованной волны в большинстве работ рассматриваются цилиндрические спиральные антенны, соединенные с питающим фидером (активные спирали), в таких устройствах реализован режим осевого излучения с эллиптической поляризацией излучения [1], [2] и др.

В данной работе рассматриваются одновитковые и двухвитковые спирали, а также двумерные решетки, возбуждаемые плоской электромагнитной волной. Спираль является пассивным элементом и обеспечивает формирование циркулярно поляризованной волны в направлении, перпендикулярном оси спирали (боковое излучение), вследствие связанных между собой компонент электрического дипольного и магнитного моментов [3]–[6]. Ранее преобразование поляризации электромагнитных волн структурами различной природы и геометрии исследовано в [7]–[20]. В настоящей работе показана возможность перехода от одиночной спирали к двумерной решетке, при сохранении поляризационных свойств на одной и той же частоте. Получение циркулярно поляризованной волны, отраженной от спиральных структур, не зависит от ориентации плоскости поляризации падающей волны.

1 Исследование частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для одиночных одновитковых и двухвитковых спиралей

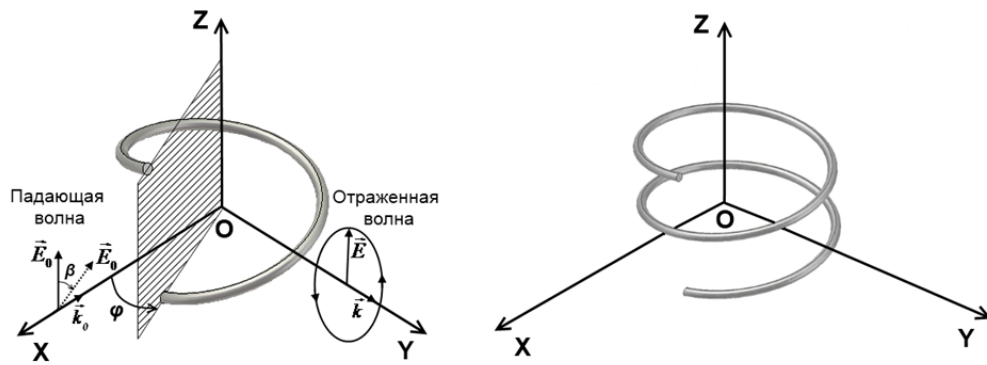
Для подтверждения теоретических расчетов, проведенных в работах [3]–[6], проведены исследования, с помощью компьютерного моделирования, которое основано на методе конечных элементов, одиночных спиралей с параметрами:

$$1) N = 1; \alpha = 13,65^\circ; L = 0,05 \text{ м}; r = 7,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}; h = 11,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}; d = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$2) N = 2; \alpha = 7,1^\circ; L = 0,05 \text{ м}; r = 3,95 \cdot 10^{-3} \text{ м}; h = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}; d = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

где N – число витков спирали; α – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали; L – длина проволоки, из которой изготовлена спираль; r – радиус витка; h – шаг спирали; d – диаметр проволоки. Исследуемая модель рассматривается в вакууме. Спираль является идеально проводящим проводником. Ось спирали направлена вдоль оси OZ (рисунки 1.1).

На рисунках 1.2–1.3 показаны графики частотной зависимости коэффициента эллиптичности для одиночной одновитковой и двухвитковой



а) одиночная одновитковая спираль с углом подъема $13,65^\circ$;
 б) одиночная двухвитковая спираль с углом подъема $7,1^\circ$
 Рисунок 1.1 – Расположение спиралей относительно системы координат

спирали при различной ориентации плоскости поляризации падающей линейно поляризованной электромагнитной волны, характеризуемой углом β (рисунок 1.1, а). Отраженная волна исследуется в направлении оси OY (рисунок 1.1).

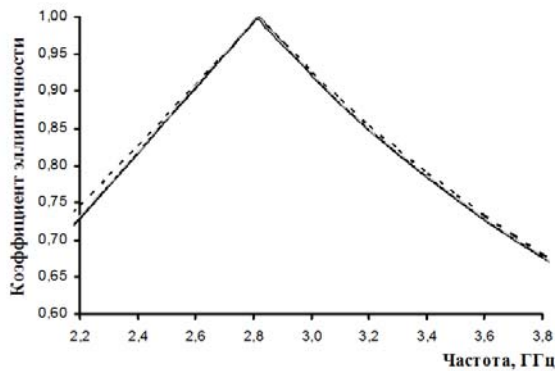


Рисунок 1.2 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для одновитковой спирали: $\beta=0^\circ$ – сплошная линия, $\beta=45^\circ$ – штрихпунктирная линия, $\beta=90^\circ$ – штриховая линия

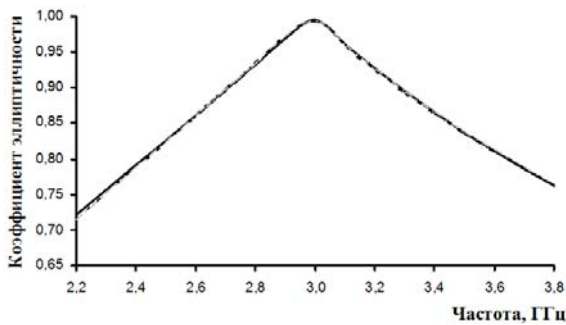


Рисунок 1.3 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для двухвитковой спирали: $\beta=0^\circ$ – сплошная линия, $\beta=45^\circ$ – штрихпунктирная линия, $\beta=90^\circ$ – штриховая линия

Как видно из рисунков 1.2–1.3, коэффициент эллиптичности отраженной волны для

одиночной одновитковой и двухвитковой спирали не зависит от ориентации плоскости поляризации падающей линейно поляризованной электромагнитной волны. Угол поворота спирали, относительно оси OZ , задается углом φ , отсчитываемым от оси OX (рисунок 1.1, а).

На рисунках 1.4–1.5 представлены графики частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для одиночных спиралей при различных значениях угла φ . Отраженная волна исследуется в направлении оси OY .

Из рисунков 1.4–1.5 следует, что при возбуждении линейно поляризованной электромагнитной волной одиночной спирали с определенными параметрами, обеспечивающими возникновение одинаково значимых электрического дипольного и магнитного моментов, отраженная волна является циркулярно поляризованной. При этом коэффициент эллиптичности отраженной волны существенно изменяется в зависимости от ориентации концов одновитковой спирали относительно направления распространения падающей электромагнитной волны.

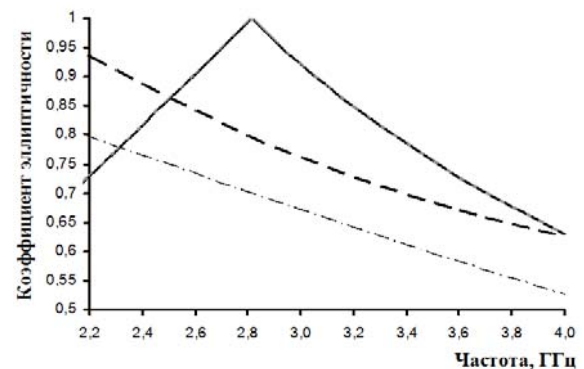


Рисунок 1.4 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для одновитковой спирали при различных значениях угла φ : $\varphi=0^\circ$ – сплошная линия; $\varphi=90^\circ$ – штрихпунктирная линия; $\varphi=135^\circ$ – линия с крупным штрихом; $\varphi=180^\circ$ – линия с мелким штрихом

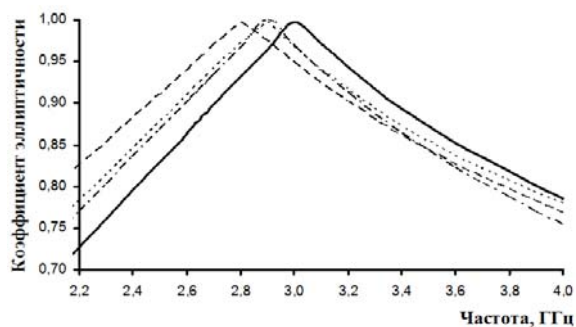


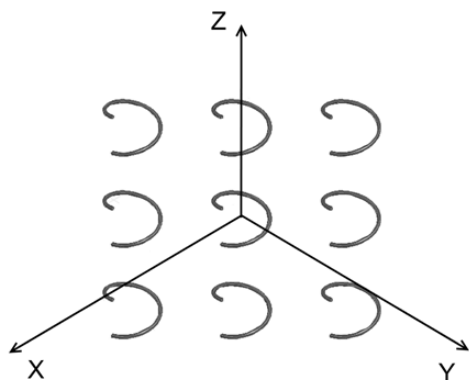
Рисунок 1.5 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для двухвитковой спирали при различных значениях угла φ : $\varphi=0^\circ$ – сплошная линия; $\varphi=90^\circ$ – штрихпунктирная линия; $\varphi=135^\circ$ – линия с крупным штрихом; $\varphi=180^\circ$ – линия с мелким штрихом

Отраженная волна, распространяющаяся в направлении оси OY , то есть перпендикулярно падающей, является циркулярно поляризованной, если волновой вектор падающей волны направлен в сторону концов спирали или в противоположную сторону ($\varphi=0^\circ$ и $\varphi=180^\circ$). Для двухвитковой спирали отраженная волна является циркулярно поляризованной, вблизи резонансной частоты (2,93 ГГц) и не зависит от изменения угла φ .

2 Исследование частотной зависимости коэффициента эллиптичности для двумерных решеток, состоящих из одновитковых и двухвитковых спиралей

Перейдем от исследований одиночных одновитковых и двухвитковых спиралей к аналогичным исследованиям двумерных решеток, состоящих из таких же спиралей. Исследования проводятся с помощью компьютерного моделирования, которое основано на методе конечных элементов.

Исследуемые решетки рассматриваются в вакууме. Каждая спираль в решетке является идеальным проводником. Ось спиралей в решетке направлена вдоль оси OZ (рисунок 2.1).



а) двумерная решетка, состоящая из одновитковых спиралей с периодом решетки, равным 3,5 см;

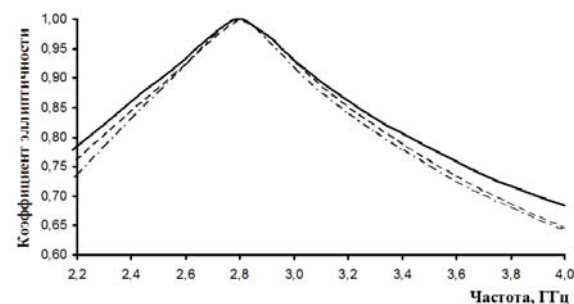


Рисунок 2.2 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для двумерной решетки, состоящей из одновитковых спиралей: $\beta=0^\circ$ – сплошная линия, $\beta=45^\circ$ – штрихпунктирная линия, $\beta=90^\circ$ – штриховая линия

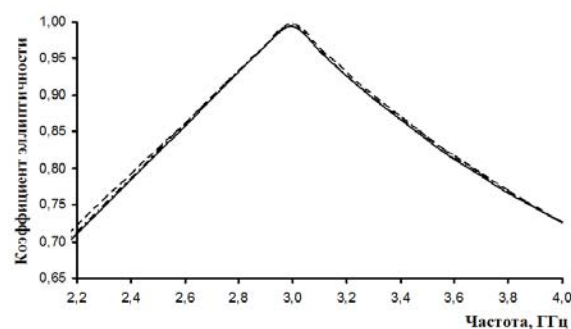
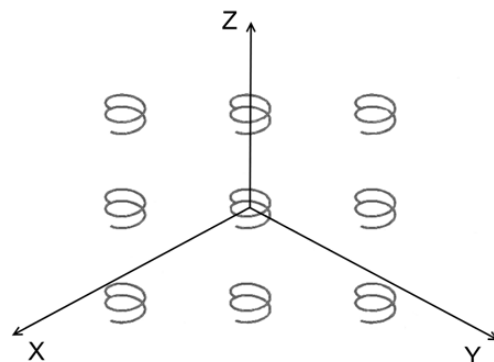


Рисунок 2.3 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны для двумерной решетки, состоящей из двухвитковых спиралей: $\beta=0^\circ$ – сплошная линия, $\beta=45^\circ$ – штрихпунктирная линия, $\beta=90^\circ$ – штриховая линия



б) двумерная решетка, состоящая из двухвитковых спиралей с периодом решетки, равным 2,5 см

Рисунок 2.1 – Расположение спиралей в двумерных решетках

На рисунках 2.4–2.5 показаны графики частотной зависимости коэффициента эллиптичности для двумерных решеток, состоящих из одновитковых и двухвитковых спиралей при различных значениях угла φ . Отраженная волна исследуется в направлении оси OY .

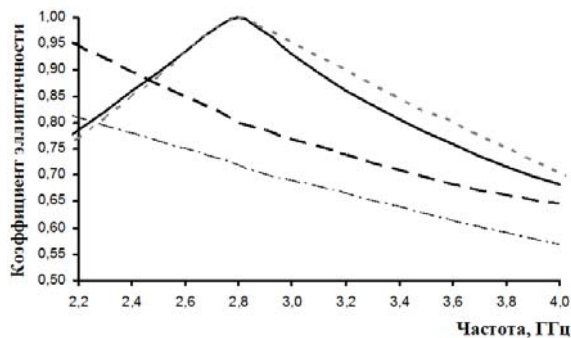


Рисунок 2.4 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности для двумерной решетки, состоящей из одновитковых спиралей при различных значениях угла φ :
 $\varphi=0^\circ$ – сплошная линия;
 $\varphi=90^\circ$ – штрихпунктирная линия;
 $\varphi=135^\circ$ – линия с крупным штрихом;
 $\varphi=180^\circ$ – линия с мелким штрихом

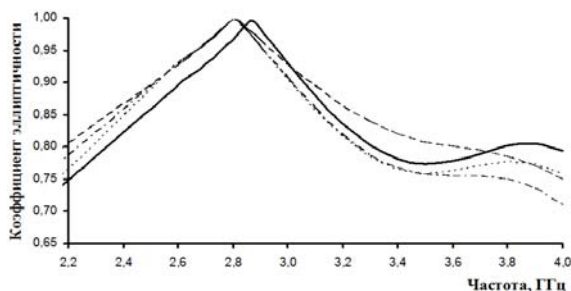


Рисунок 2.5 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности для двумерной решетки, состоящей из двухвитковых спиралей при различных значениях угла φ :
 $\varphi=0^\circ$ – сплошная линия;
 $\varphi=90^\circ$ – штрихпунктирная линия;
 $\varphi=135^\circ$ – линия с крупным штрихом;
 $\varphi=180^\circ$ – линия с мелким штрихом

С помощью компьютерного моделирования был подтвержден ряд теоретических предположений, сформулированных в работах [3]–[6]:

1) возникновение одинаково значимых электрического дипольного и магнитного моментов в одновитковой и двухвитковой спирали с определенными параметрами дает возможность преобразования поляризации из падающей линейно поляризованной волны в отраженную циркулярно поляризованную;

2) для получения циркулярно поляризованной волны в направлении, перпендикулярном падающей, с помощью спирали, состоящей из

одного витка, необходимо, чтобы волновой вектор падающей волны был направлен в сторону концов (усов) спирали;

3) для двухвитковой спирали излучение циркулярно поляризованной волны имеет место при любой ориентации концов спирали относительно волнового вектора падающей волны.

Анализ полученных результатов путем моделирования, проведенного для одиночной спирали и двумерной решетки, состоящей из таких же спиралей, позволяет сделать вывод о том, что при переходе от одиночной спирали к двумерной решетке поляризационные свойства сохраняются на одной и той же частоте (2,82 ГГц).

Результаты экспериментальных исследований поляризационных свойств, проведенных с образцами двумерных решеток, состоящих из одновитковых металлических (медных) спиралей с углом подъема $13,65^\circ$ и двухвитковых с углом подъема $7,1^\circ$, приведены в работах [4], [5], [21]. Полученные экспериментальные данные и результаты моделирования согласуются в пределах погрешностей измерений.

Заключение

На основании проведенного моделирования показана возможность преобразования поляризации падающей линейно поляризованной электромагнитной волны в циркулярно поляризованную, отраженную от одиночной спирали и двумерной решетки, состоящей из таких же спиралей, в области частот, близких к резонансной. Показано, что преобразователями поляризации могут быть как одновитковые спирали с углом подъема $13,65^\circ$, так и двухвитковые спирали с углом подъема $7,1^\circ$.

Также показано, что для получения циркулярно поляризованной волны с помощью одновитковой спирали или решетки, состоящей из таких же спиралей, необходимо, чтобы волновой вектор падающей волны был направлен в сторону концов спирали. При этом отраженная волна рассматривается в направлении, перпендикулярном падающей волне. Для двухвитковой спирали и двумерной решетки излучение циркулярно поляризованной волны имеет место при любой ориентации концов спирали относительно волнового вектора падающей волны.

На основе полученных результатов можно сделать вывод о возможности получения преобразователей поляризации электромагнитных волн на основе композитных сред со спиральной структурой с целью трансформации падающей линейно поляризованной волны в циркулярно поляризованную отраженную волну.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дробкин, А.Л. Антенно-фидерные устройства / А.Л. Дробкин, В.Л. Зузенко – М.: Сов. радио, 1961. – 816 с.

2. Юрцев, О.А. Спиральные антенны / О.А. Юрцев, А.В. Рунов, А.Н. Казарин – М.: Сов. радио, 1974. – 224 с.
3. Исследование поляризации электромагнитного излучения, рассеянного на металлической спирали / И.В. Семченко [и др.] // Лазерная и оптико-электронная техника. – 2002. – Вып. 7. – С. 84–91.
4. Хахомов, С.А. Получение циркулярно-поляризованной отраженной волны с помощью искусственной плоской решетки из одновитковых спиралей / С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов, С.А. Третьяков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 2. – С. 87–90.
5. Семченко, И.В. Преобразование поляризации электромагнитных волн спиральными излучателями / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 8. – С. 917–922.
6. Семченко, И.В. Оптимальная форма спирали: равенство диэлектрических, магнитных и киральных свойств / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2009. – Т. 2, № 5. – С. 30–36.
7. *Microwave analogy of optical properties of cholesteric liquid crystals with local chirality under normal incidence of waves* / I.V. Semchenko [et al.] // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1999. – Т. 32, № 24. – P. 3222–3226.
8. *Electromagnetic waves in artificial chiral structures with dielectric and magnetic properties* / I.V. Semchenko [et al.] // Electro-magnetics. – 2001. – Т. 21, № 5. – P. 401–414.
9. Semchenko, I.V. Artificial anisotropic chiral structures with dielectric and magnetic properties at oblique incidence of electromagnetic waves / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // 2001 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference. Belem, Brazil. – 2001. – P. 227–230.
10. Semchenko, I.V. Artificial uniaxial bianisotropic media at oblique incidence of electromagnetic waves / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // Electromagnetics. – 2002. – Т. 22, № 1. – P. 71–84.
11. Устройство для преобразования поляризации электромагнитной волны: пат. 2316857 Рос. Федерация: МПК7 Н 01 Q 15/24, Н 01 Q 21/06 / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов; заявитель и патенто-обладатель УО «Гомельский гос. ун-т. им. Ф. Скорины». – № 2006112520/09; заявл. 14.04.2006; опубл. 10.02.2008 // Патенты России. Официальный бюллетень «Изобретения. Полезные модели» (с полным описанием изобретений к патентам) [Электронный ресурс]: полнотекстовая база данных (602 Мб). – М: ФИПС, 2008. – № 4. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
12. Излучение циркулярно поляризованных волн сверхвысокочастотного диапазона плоской периодической структурой из Ω -элементов / И.В. Семченко [и др.] // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 9. – С. 1084–1088.
13. Семченко, И.В. Использование парных спиралей оптимальной формы для создания слабоотражающих покрытий в СВЧ диапазоне / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1 (1). – С. 33–39.
14. Семченко, И.В. Поляризация селективность искусственных анизотропных структур на основе ДНК-подобных спиралей / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.П. Балмаков // Кристаллография. – 2010. – Т. 55, № 6. – С. 979–984.
15. Semchenko, I.V. Polarization selectivity of interaction of DNA molecules with X-ray radiation / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.P. Balmakov // Biophysics. – 2010. – Т. 55, № 2. – P. 194–198.
16. Semchenko, I.V. Helices of optimal shape for nonreflecting covering / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // The European Physical Journal. Applied Physics. – 2010. – Т. 49, № 3. – ar09156.
17. Самофалов, А.Л. Моделирование и исследование искусственных анизотропных структур с большой киральностью в СВЧ диапазоне / А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 28–31.
18. Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью / И.В. Семченко [и др.] // Кристаллография. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 398–405.
19. Преимущества искусственных слабоотражающих структур на основе оптимальных спиралей при преломлении и поглощении электромагнитных волн / И.В. Семченко [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 64–67.
20. Поляризатор циркулярно-поляризованного СВЧ излучения на основе двухспиральных частиц / А.П. Балмаков [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 7–12.
21. Самофалов, А.Л. Использование спиральных излучателей для преобразования поляризации электромагнитных волн / А.Л. Самофалов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 4 (55), Ч. 2. – С. 176–183.

Поступила в редакцию 11.07.13.

УДК 621.373.826

ОСОБЕННОСТИ ЛАЗЕРНОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ КВАРЦЕВОГО СТЕКЛА

Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FEATURES OF CONTROLLED LASER THERMAL CLEAVAGE OF QUARTZ GLASS

E.B. Shershnev, Yu.V. Nikitjuk, S.I. Sokolov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В данной работе представлены результаты моделирования процесса формирования лазерно-индуцированной трещины в кварцевом стекле, полученные с использованием техники перестроения конечно-элементной сетки. Моделирование проводилось в рамках теории термоупругости с использованием критериев механики разрушения для определения условий роста трещины.

Ключевые слова: трещина, лазерное раскалывание, кварцевое стекло.

This paper presents finite element analysis based on the remeshing technique to predict laser-induced crack propagation in quartz glass. The simulation process is accomplished by the analysis of the coupled temperature and stress fields together with the criteria of fracture mechanics of the crack growth.

Keywords: crack, laser cleaving, quartz glass.

Введение

Кварцевое стекло характеризуется высокой механической прочностью и высокой термостойкостью, устойчиво к действию кислот и воды. Благодаря этим свойствам кварцевое стекло используется в качестве материала для изготовления иллюминаторов космических кораблей, окон фотоприемников и колб газоразрядных ламп. Из кварцевого стекла производятся линзы для передачи ультрафиолетового излучения и призмы для монохроматоров и спектрофотометров [1].

Традиционные методы обработки кварцевого стекла основываются на применении для резки алмазного инструмента, гидроабразивной струи или на применении лазерного излучения для резки в режиме испарения материала. Основным недостатком традиционных методов является высокая дефектность получаемых кромок, что приводит к значительному снижению прочности стекла [2].

Одним из наиболее эффективных методов высокоточной обработки хрупких неметаллических материалов является управляемое лазерное термораскалывание. Сущность данного метода заключается в разделении материала в результате формирования термо-индуцированной трещины при последовательном лазерном нагреве и воздействии хладагента на обрабатываемую поверхность. К основным достоинствам управляемого лазерного раскалывания относятся высокая точность разделения и высокая скорость обработки, безотходность и повышение прочности получаемых изделий [3].

Изучению лазерного раскалывания стекол, керамики и кристаллов посвящены работы [2]–[17]. Исследование особенностей лазерного раскалывания кварцевого стекла проведено в работах [2], [15]–[17]. В этих работах отмечается высокая термостойкость кварцевого стекла, определяемая низкими значениями коэффициента линейного термического расширения. Высокая термостойкость кварцевого стекла обуславливает повышенную зависимость от параметров лазерной обработки надежности формирования лазерно-индуцированной трещины.

Отметим, что моделирование процессов лазерной обработки в работах [15]–[17] проводилось в рамках теории термоупругости и при этом не учитывалось наличие в материале стартового дефекта и лазерно-индуцированной трещины. Это не позволяет использовать полученные результаты для точных расчетов технологических параметров лазерного раскалывания кварцевого стекла, так как наличие стартового дефекта и лазерно-индуцированной трещины существенным образом влияет на распределение полей напряжений. Кроме этого нужно отметить, что определение пространственной локализации термоупругих полей не позволяет установить, с необходимой точностью, будет ли стабильно развиваться лазерно-индуцированная трещина. Для решения данной задачи необходимо определение критического состояния в соответствии с критериями механики разрушения [18]–[19].

В работе [2] была предпринята попытка использования критериев механики разрушения

для анализа лазерного раскалывания кварцевого стекла, однако расчеты были выполнены в приближении бесконечной пластины ослабленной полубесконечной трещиной. Данное приближение значительно снижает точность расчетов режимов формирования лазерно-индуцированной трещины в кварцевом стекле и не позволяет использовать полученные результаты для точных расчетов технологических параметров данного процесса.

В работах [20]–[21] разработаны алгоритмы 2-D и 3-D моделирования процесса формирования термо-индуцированной трещины в рамках теории термоупругости и линейной механики разрушения с использованием техники перестроения конечноэлементной сетки. Предложенное авторами работ [20]–[21] перестроение конечно-элементной сетки, последовательность которого определяется расчетными значениями коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины, в значительной степени повышает точность моделирования лазерного раскалывания хрупких неметаллических материалов.

В связи с этим представляется целесообразным проведение исследования лазерного раскалывания кварцевого стекла в рамках теории термоупругости и линейной механики разрушения с учетом параметров стартового дефекта и с использованием предложенного в [20]–[21] техники перестроения конечно-элементной сетки.

1 Моделирование лазерного раскалывания кварцевых пластин

Моделирование лазерного раскалывания кварцевых пластин было выполнено с использованием алгоритма разработанного в [20]–[21] (рисунок 1.1). Расчет полей температурных напряжений осуществлялся в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке с использованием метода конечных элементов [22].

Были использованы следующие условия роста лазерно-индуцированной трещины: расчетный коэффициент интенсивности напряжений K_I в вершине трещины должен превышать критический коэффициент интенсивности напряжений K_{IC} , при этом напряжения в вершине трещины должны быть растягивающими [20]. Критический коэффициент интенсивности напряжений K_{IC} представляет собой механическую характеристику материала, которая характеризует его способность сопротивляться распространению трещины нормального отрыва при хрупком разрушении [18]–[19].

Для повышения точности расчетов K_I были использованы специальные элементы моделирующие сингулярность напряжений у вершины трещины. При этом для получения корневой асимптотики у вершины трещины осуществлялся сдвиг узлов изопараметрических элементов на

четверть стороны элемента в направлении вершины [18], [20].

На рисунке 1.2 приведена схема расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента в плоскости обработки. Позицией 1 отмечен лазерный пучок, позицией 2 – хладагент, позицией 3 – трещина, позицией 4 – стеклянная пластина. Горизонтальной стрелкой на рисунке указано направление перемещения обрабатываемого изделия относительно лазерного пучка и хладагента.

Для проведения сравнительного анализа в данной работе расчеты выполнялись для кварцевого стекла и для листового силикатного стекла. Свойства данных материалов приведены в таблице 1.1.

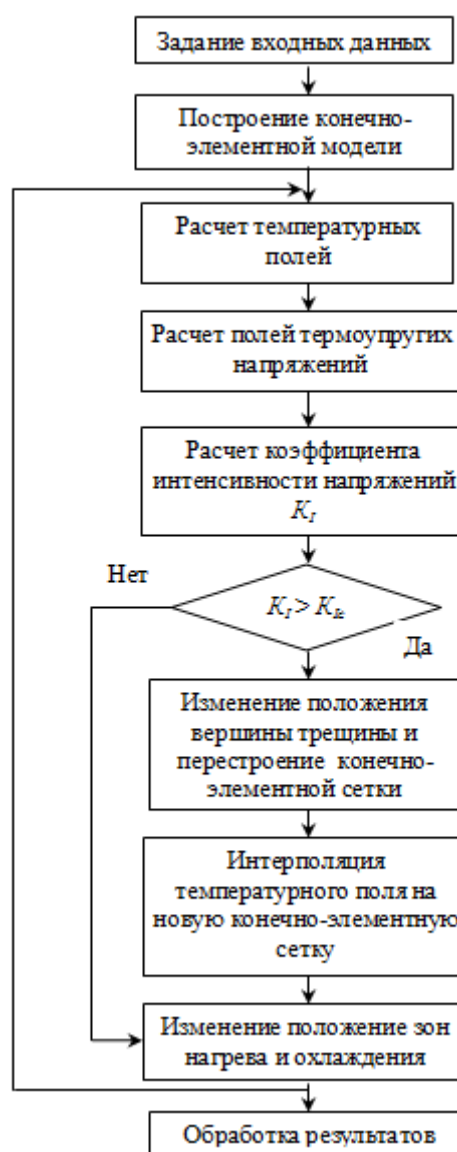


Рисунок 1.1 – Алгоритм конечно-элементного моделирования лазерного раскалывания кварцевого стекла

Расчеты проводились для прямоугольных пластин с геометрическими размерами $15 \times 20 \times 1$ мм. Моделирование проводилось для случая воздействия лазерного излучения с длиной волны равной $10,6$ мкм.

Были использованы следующие значения параметров лазерного пучка: большая ось $A = 6 \cdot 10^{-3}$ м, малая ось $B = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Скорость перемещения пластины относительно лазерного пучка и хладагента выбиралась равной $v = 15$ мм/с. Полагалось, что используемые параметры подачи воздушно-водяной смеси обеспечивают охлаждение поверхности стекла с коэффициентом теплоотдачи равным 7000 Вт/м²К [23]. Радиус пятна хладагента $R_h = 3$ мм. Длина стартовой трещины изменялась в диапазоне от $0,75$ мм до $1,5$ мм.

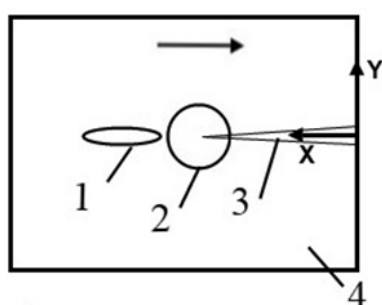


Рисунок 1.2 – Схема расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента в плоскости обработки стеклянной пластины

Таблица 1.1 – Свойства листового и кварцевого стекла

| Свойства материала | Листовое силикатное стекло | Кварцевое стекло |
|---|----------------------------|------------------|
| Плотность, кг/м ³ | 2450 | 2200 |
| Удельная теплоемкость, Дж/кг·К | 860 | 880 |
| Теплопроводность, Вт/м·К | 0,88 | 1,34 |
| Коэффициент линейного термического расширения, град ⁻¹ ·10 ⁻⁷ | 89 | 5 |
| Модуль Юнга, ГПа | 70 | 78 |
| Коэффициент Пуассона | 0,22 | 0,17 |
| Критический коэффициент интенсивности напряжений K_{IC} , МПа м ^{1/2} | 0,5 | 0,7 |

Отметим, что температура в зоне обработки при лазерном раскалывании должна быть ограничена значениями, соответствующими отсутствию релаксации термоупругих напряжений. Для стекол в качестве верхнего предела допустимых температур выбирают соответствующее данной марке стекла значение температуры стеклования (для кварцевого стекла температура стеклования равна 1473 К, для листового силикатного стекла – 789 К [4]).

2 Результаты численного эксперимента

В ходе численного эксперимента были определены значения мощности лазерного излучения, обеспечивающие нагрев материала до температуры стеклования, при использовании вышеперечисленных параметров обработки и геометрии образцов. В случае термораскалывания кварцевого стекла максимальная допустимая мощность лазерного излучения $P = 30$ Вт, а в случае листового силикатного стекла $P = 10$ Вт.

Результаты проведенных расчетов представлены на рисунках 2.1–2.6.

На рисунках 2.1–2.3 цифрой 1 отмечены расчетные кривые соответствующие случаю термораскалывания кварцевого стекла, а цифрой 2 отмечены расчетные кривые, полученные при моделировании термораскалывания листового силикатного стекла. При проведении сравнительного анализа лазерного термораскалывания кварцевого и листового силикатного стекла длина стартовой трещины задавалась равной 1 мм, при этом не использовалась техника перестройки конечно-элементной сетки (т. е. длина трещины оставалась постоянной).

Как уже отмечалось ранее, при используемых параметрах обработки нагрев материала осуществлялся до температур стеклования кварцевого и листового силикатного стекла (рисунок 2.1).

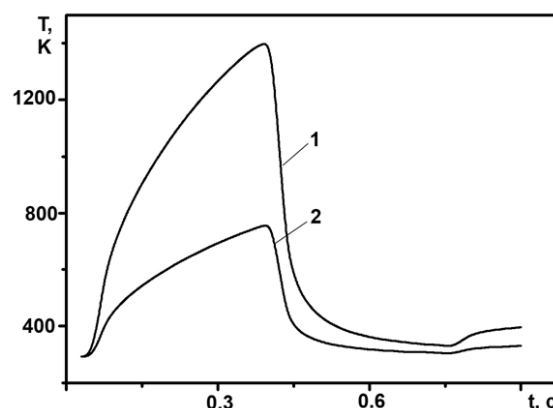


Рисунок 2.1 – Расчетные значения температуры T в вершине трещины

Как видно из графиков, представленных на рисунке 2.2, при лазерном термораскалывании кварцевых и листовых силикатных стекол в вершине стартового дефекта в результате лазерного

нагрева формируются значительные по величине напряжения сжатия. Максимальные по величине значения сжимающих напряжений в вершине стартовой трещины достигают 168 МПа для кварцевого стекла и 692 МПа для листового силикатного стекла. Далее вследствие воздействия хладагента в вершине стартового дефекта формируются растягивающие напряжения, максимальные значения которых равны соответственно 143 МПа в случае моделирования обработки кварцевого стекла и 388 МПа в случае листового силикатного стекла (рисунок 2.2).

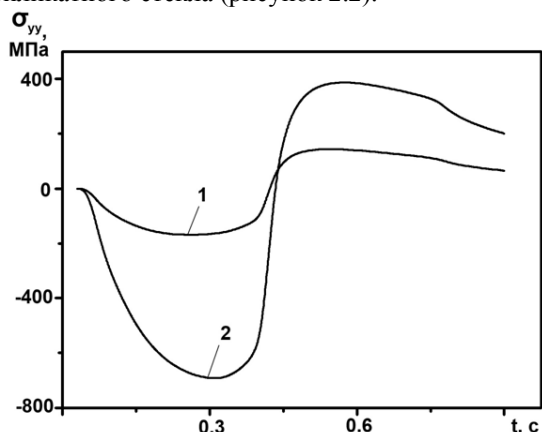


Рисунок 2.2 – Расчетные значения упругих напряжений σ_{yy} в вершине трещины

Как видно из графиков, представленных на рисунке 2.3, в вершине стартовой трещины последовательно формируются два максимума коэффициентов интенсивности напряжений. При этом второй максимум значений коэффициентов интенсивности напряжений значения которого для кварцевого стекла равно $0,82 \text{ МПа м}^{1/2}$ и $2,14 \text{ МПа м}^{1/2}$ для листового силикатного стекла соответствует уже растягивающим напряжениям в вершине трещины, что означает выполнение обоих необходимых условий для начала развития трещины.

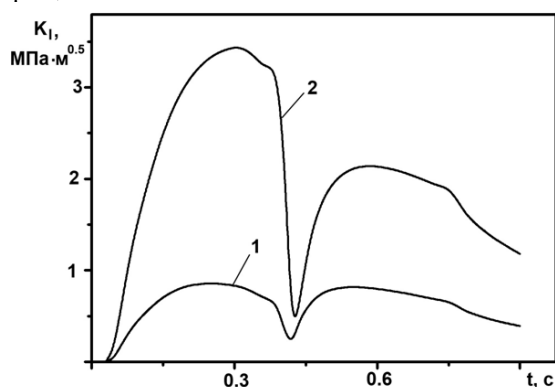


Рисунок 2.3 – Расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершине трещины

При сравнении значений величины термоупругих напряжений и значений коэффициентов

интенсивности напряжений формируемых в вершине трещины при термораскальвании листового и кварцевого стекла видно, что в случае резки кварцевого стекла максимальные значения коэффициента интенсивности напряжений меньше в 2,6 раз. При этом необходимо учитывать, что сравнение проводится при различных максимальных значениях температуры в зоне обработки (рисунок 2.1).

Следует обратить внимание, что выбранные режимы обработки обеспечивают практически минимальные необходимые значения коэффициента интенсивности напряжений в случае резки кварцевого стекла. Таким образом, при небольшом увеличении скорости обработки или при небольшом снижении мощности лазерного излучения значения коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины не достигнут значений критического коэффициента интенсивности напряжений, что на эксперименте приведет к срыву процесса формирования лазерно-индуцированной трещины. Основной причиной низких значений коэффициентов интенсивности напряжений, формируемых в вершине трещины, является низкое значение коэффициента линейного термического расширения кварцевого стекла, которое на порядок меньше, чем у большинства промышленных силикатных стекол.

Для изучения влияния параметров стартового дефекта на процесс инициализации лазерно-индуцированной трещины были выполнены расчеты значений напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины для различных значений длины стартового дефекта с использованием техники перестроения конечно-элементной сетки.

На рисунках 2.4–2.6 цифрой 1 отмечены расчетные кривые, полученные при длине стартового дефекта $L = 0,75 \text{ мм}$, цифрой 2 отмечены кривые, полученные при $L = 1 \text{ мм}$, цифрой 3 отмечены кривые, полученные при $L = 1,5 \text{ мм}$.

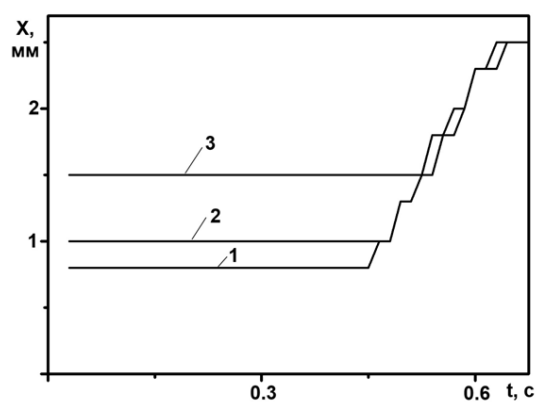


Рисунок 2.4 – Расчетные значения координат X вершины трещины

Необходимо отметить, что во всех трех расчетных случаях осуществляется развитие

лазерно-индуцированных трещин из стартовых дефектов (рисунок 2.4). Однако следует обратить внимание на заметное влияние длины стартового дефекта на величину термоупругих напряжений и коэффициентов интенсивности напряжения в вершине трещины (рисунок 2.5, 2.6).

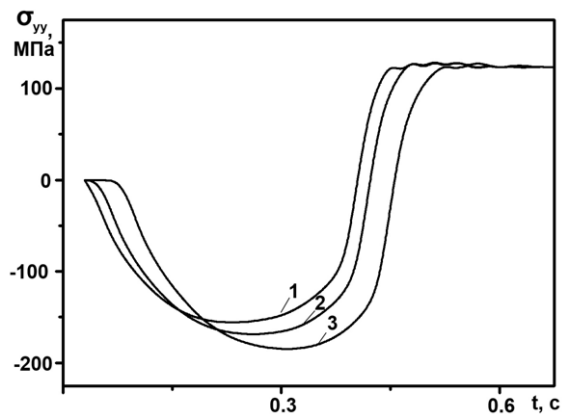


Рисунок 2.5 – Расчетные значения упругих напряжений σ_{yy} в вершине трещины

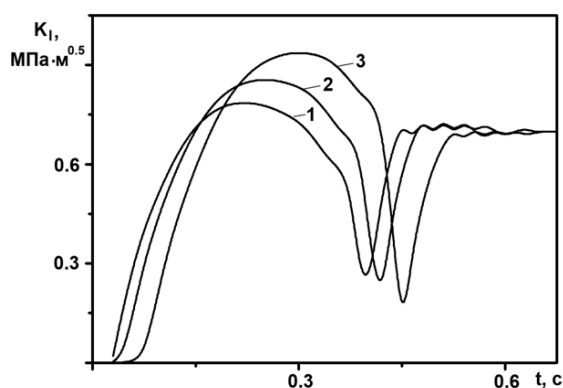


Рисунок 2.6 – Расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершине трещины

Так при длине стартового дефекта $L = 0,75$ мм максимальные значения коэффициента интенсивности напряжений составляют $K_I = 0,79$ МПа м^{1/2}, при $L = 1$ мм, максимальные значения коэффициента интенсивности напряжений составляют $K_I = 0,86$ МПа м^{1/2}, а при $L = 1,5$ мм максимальные значения коэффициента интенсивности напряжений составляют $K_I = 0,94$ МПа м^{1/2}.

Таким образом, за счет увеличения длины стартового дефекта можно увеличивать вероятности инициализации лазерно-индуцированной трещины, что принципиально важно в случае отработки режимов лазерного термораскалывания кварцевых стекол. При этом применение технологии 3-D моделирования процесса формирования термо-индуцированной трещины в рамках теории термоупругости и линейной механики разрушения с использованием техники перестроения конечноэлементной сетки обеспечивает

возможность проведения необходимых расчетов технологических режимов лазерного термораскалывания кварцевых стекол с учетом параметров стартового дефекта.

Заключение

Полученные в работе результаты показывают принципиальную необходимость учета параметров стартового дефекта при расчете технологических режимов лазерного раскалывания кварцевых стекол.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арбузов, В.И. Основы радиационного оптического материаловедения / В.И. Арбузов. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2008. – 284 с.
2. Борисовский, В.Е. Развитие теории и разработка комплекса технологий и оборудования для лазерной обработки кварцевого стекла: автореф. дис. докт. техн. наук : 05.11.14 / В.Е. Борисовский; МГУПИ. – М., 2011. – 36 с.
3. Способ резки неметаллических материалов: пат. 2024441 РФ, МКИ 5 С03В33/02 / В.С. Кондратенко; заявитель В.С. Кондратенко; заявл. 04.02.92; опубл. 12.15.94
4. Мачулка, Г.А. Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – М.: Сов. радио, 1979. – 136 с.
5. Chwan-Huei Tsai. Fracture mechanism of laser cutting with controlled fracture / Chwan-Huei Tsai, Chi-Sheng Liou // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2003. – Vol. 125. – P. 519–528.
6. Двухлучевое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов / С.В. Шалупаев [и др.] // Оптический журнал. – 2005. – Т. 73, № 5. – С. 62–66.
7. Шалупаев, С.В. Лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов по замкнутым криволинейным контурам / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Оптический журнал. – 2008. – Т. 75, № 2. – С. 11–15.
8. Junke, J. Cutting glass substrates with dual-laser beams / J. Junke, W. Xinbing // Optics and Lasers in Engineering. – 2009. – Vol. 47. – P. 860–864.
9. Effect of thermal stress on chip-free diode laser cutting of glass / Salman Nisar [et al.] // Optics and Laser Technology. – 2009. – Vol. 41. – P. 318–327.
10. YAG laser cutting soda-lime glass with controlled fracture and volumetric heat absorption / L.J. Yang [et al.] // International Journal of Machine Tools & Manufacture. – 2010. – Vol. 50. – P. 849–859.
11. Концепция двухлазерного термораскалывания стеклянных элементов для космических аппаратов / В.К. Сысоев [и др.] // Вестник «ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина». – 2011. – № 1. – С. 38–44.
12. Гундин, П.Д. Разработка новых технологий и оборудования на основе метода лазерного управляемого термораскалывания для обработки

деталей приборостроения, микро- и оптоэлектроники: автореф. дис. докт. техн. наук : 05.11.14 / П.Д. Гиндин; МГУПИ. – М., 2009. – 43 с.

13. Сердюков, А.Н. Особенности управляемого лазерного термораскалывания кристаллического кремния / А.Н. Сердюков, С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк // Кристаллография. – 2010. – Т. 55, № 6. – С. 1180–1184.

14. Особенности управляемого лазерного термораскалывания кристаллического кварца / А.Н. Сердюков [и др.] // Кристаллография. – 2012. – Т. 57, № 6. – С. 906–912.

15. Шалупаев, С.В. Термоупругие поля, формируемые в твердых телах световыми и звуковыми потоками: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.04.05 / С.В. Шалупаев. – Мн, 1987. – 157 с.

16. Шершнев, Е.Б. Разработка и внедрение новых эффективных процессов в производство стеклоизделий с применением лазерной технологии: дис. ... канд. техн. наук: 05.17.11 / Е.Б. Шершнев. – М., 1990. – 145 с.

17. Никитюк, Ю.В. Физические закономерности лазерного термораскалывания силикатных стекол и алюмооксидной керамики : дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.21 / Ю.В. Никитюк. – Гомель, 2009. – 165 с.

18. Морозов, Е.М. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения / Е.М. Морозов, А.Ю. Муйземнек, А. С. Шадский. – М. ЛЕНАНД, 2008. – 456 с.

19. Партон, В.З. Механика разрушения: от теории к практике / В.З. Партон. – М. : Наука, 1990. – 240 с.

20. Shahani, A.R. Simulation of glass cutting with an impinging hot air jet / A.R. Shahani, M. Seyedian // International journal of solids and structures. – 2004. – Vol. 41, № 5–6. – P. 1313–1329.

21. Analysis of laser thermosplitting processes within the framework of the linear fracture mechanics / S.V. Shalupaev [et al.] // CERAMICS. POLISH CERAMIC BULLETIN. – 2008. – Vol. 101. – P. 275–284.

22. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л. : Машиностроение, 1983. – 212 с.

23. Богуславский, И.А. Высокопрочные закаленные стекла / И.А. Богуславский. – М. : Издательство литературы по строительству, 1969. – 208 с.

Поступила в редакцию 12.08.13.

УДК 517.9

ПРАВОСТОРОННИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА С МАТРИЧНЫМИ ВЕСАМИ

А.Б. Антоневиц, Е.В. Пантелеева

Белорусский государственный университет, Минск

RIGHT-SIDE RESOLVENTS OF DISCRETE WEIGHTED SHIFT OPERATORS WITH MATRIX WEIGHTS

A.B. Antonevich, E.V. Pantsialejeva

Belarusian State University, Minsk

Для дискретных операторов взвешенного сдвига построены правосторонние резольвенты и получены оценки их норм.

Ключевые слова: дискретный оператор взвешенного сдвига, правосторонняя резольвента, устойчивое векториальное подмножество.

Right-side resolvents are constructed for discrete weighted shift operator and estimates of their norms are given.

Keywords: discrete weighted shift operator, right-side resolvent, stable vectorial subset.

Введение

Если λ принадлежит спектру оператора B , то оператор $B - \lambda I$ необратим, но при этом представляют интерес такие его свойства, как замкнутость образа, размерность ядра и коядра, существование одностороннего обратного оператора и т. д. В частности, существование правого обратного эквивалентно существованию решения соответствующего уравнения при любой правой части, а явное построение правого обратного эквивалентно получению явной формулы решения.

В спектральной терминологии исследование указанных свойств есть задача о нахождении некоторых частей спектра $\Sigma(B)$, называемых обычно существенными спектрами. Чаще всего используется спектр Фредгольма:

$$\Sigma_f(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ не является оператором Фредгольма}\}.$$

Напомним, что оператор B , действующий в гильбертовом пространстве H , называется оператором Фредгольма, если его ядро $\ker B$ и коядро (ядро сопряженного оператора) $\ker B^*$ конечномерны и образ ImB замкнут. Индексом фредгольмова оператора B называется число $indB = \dim \ker B - \dim \ker B^*$.

Кроме спектра Фредгольма, представляют интерес и другие части спектра оператора B , в частности:

$$\Sigma^\pm(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ не имеет правого (левого) обратного}\}.$$

Правосторонней резольвентой для оператора B будем называть семейство правых

обратных к $B - \lambda I$, определенное и аналитическое зависящее от λ на множестве $\Sigma(B) \setminus \Sigma^+(B)$.

В работе рассмотрен случай, когда B есть дискретный оператор взвешенного сдвига, действующий в пространстве $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$, состоящем из двусторонних последовательностей векторов $u = (u(k)), u(k) \in \mathbb{C}^m$, таких, что $\sum_k \|u(k)\|^2 < \infty$. Получены условия существования одностороннего обратного к $B - \lambda I$, построена правосторонняя резольвента и получены оценки норм.

Дискретный оператор сдвига W действует в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ по формуле

$$(Wu)(k) = u(k+1),$$

дискретным оператором взвешенного сдвига будем называть оператор в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$, действующий по формуле

$$(Bu)(k) = A(k)u(k+1), \quad (0.1)$$

где $A(k)$ – заданная ограниченная последовательность матриц, называемых весами.

Как известно, левосторонняя обратимость оператора эквивалентна правосторонней обратимости сопряженного. Если B есть дискретный оператор взвешенного сдвига, то сопряженный оператор также является оператором взвешенного сдвига. Поэтому условия левосторонней обратимости и левосторонняя резольвента могут быть записаны как простые следствия полученных ниже результатов.

Для дискретного оператора взвешенного сдвига в скалярном случае ($m=1$) описание фредгольмова спектра, спектров $\Sigma^\pm(B)$ и формула для правосторонней резольвенты получены в

[1] для произвольной ограниченной последовательности скалярных весов $a(k)$. В векторном случае задача существенно труднее, здесь мы рассматриваем случай, когда для последовательности коэффициентов существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} A(k) := A(\pm\infty). \quad (0.2)$$

Предполагаем также, что все матрицы $A(k)$ невырождены и матрицы $A(\pm\infty)$ также невырождены. При этих условиях такие операторы и соответствующие разностные уравнения исследовались ранее [2]–[8], основополагающие результаты были получены еще в работах А. Пуанкаре и О. Перрона [2]. В частности, условия правосторонней обратимости оператора $B - \lambda I$ могут быть получены из результатов работы [8].

Основным результатом данной работы является построение правосторонней резольвенты, по ходу исследования получены условия существования одностороннего обратного к $B - \lambda I$ в разных терминах.

Для дальнейшего удобно ввести компактное топологическое пространство X , построенное с помощью присоединения к (дискретному) пространству \mathbb{Z} бесконечно удаленных точек $\pm\infty$. Тогда условие существования пределов (0.2) (и аналогичных) эквивалентно условию, что $A \in C(X, \mathbb{C}^{m \times m})$, т. е. последовательность матриц $A = (A(k))$ задает непрерывное отображение из X в алгебру матриц $\mathbb{C}^{m \times m}$. Отображение сдвига $k \rightarrow k+1$ также продолжается до непрерывного отображения $\alpha : X \rightarrow X$, действующего по формуле

$$\alpha(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{Z}; \\ x, & x = \pm\infty. \end{cases}$$

1 Спектр и фредгольмов спектр

Условия, при которых оператор $B - \lambda I$ является оператором Фредгольма, давно известны (см. например, [3], [4]), они используют только пределы коэффициентов – матрицы $A(\pm\infty)$.

Пусть $\lambda_j^\pm, 1 \leq j \leq m$, есть собственные значения матрицы $A(\pm\infty)$, причем каждое из них записано столько раз, какова его кратность. Обозначим через $\nu^\pm(\lambda)$ количество собственных значений матрицы $A(\pm\infty)$, удовлетворяющих условию $|\lambda_j^\pm| > |\lambda|$.

Предложение 1.1. Пусть

$$A \in C(X, \mathbb{C}^{m \times m}), B = AW.$$

Оператор $B - \lambda I$ является оператором Фредгольма тогда и только тогда, когда

$$|\lambda| = |\lambda_j^\pm| \text{ для всех } \lambda_j^\pm, \quad (1.1)$$

т. е. спектр Фредгольма есть объединение конечного числа окружностей:

$$\Sigma_F(B) = \bigcup S_j^\pm, S_j^\pm = \{\lambda : |\lambda| = |\lambda_j^\pm|\}.$$

Весь спектр $\Sigma(B)$ принадлежит кольцу K , заключенному между окружностью с наибольшим радиусом и окружностью с наименьшим радиусом.

При $\lambda \notin \Sigma_F(B)$ индекс оператора выражается формулой

$$\text{ind}(B - \lambda I) = \nu^+(\lambda) - \nu^-(\lambda).$$

Дополнение $K' = K \setminus \bigcup S_j^\pm$ представляет собой конечный набор непересекающихся открытых колец, в каждом из которых величины $\nu^+(\lambda)$ и $\nu^-(\lambda)$ постоянны. Так как

$$\text{ind}(B - \lambda I) = \nu^+(\lambda) - \nu^-(\lambda),$$

то те кольца, где $\nu^+(\lambda) - \nu^-(\lambda) \neq 0$, принадлежат спектру $\Sigma(B)$.

Если в некотором кольце выполнено

$$\nu^+(\lambda) - \nu^-(\lambda) = 0,$$

то оператор $B - \lambda I$ фредгольмов и имеет нулевой индекс. Такой оператор может быть обратимым и может быть необратимым. Эти свойства не определяются через пределы $A(\pm\infty)$, а зависят от всех коэффициентов $A(k)$. Эта зависимость имеет более сложный вид и описывается с помощью свойств вспомогательного отображения β_λ , называемого *линейным расширением* отображения сдвига.

Пусть $E = X \times \mathbb{C}^m$. Для заданного λ отображение $\beta_\lambda : E \rightarrow E$, ассоциированное с оператором B , задается формулой:

$$\beta_\lambda(x, \xi) = (\alpha(x), \lambda A^{-1}(x)\xi), \quad x \in X, \quad \xi \in \mathbb{C}^m.$$

Произведение $E = X \times \mathbb{C}^m$ является m -мерным векторным расслоением над X со слоями $E_x = \{x\} \times \mathbb{C}^m$. Так как $E_x \approx \mathbb{C}^m$, в каждом таком слое определено скалярное произведение и определена норма. Далее используем обозначение $\|(x, \xi)\| := \|\xi\|_{\mathbb{C}^m}$.

Каждое подмножество $S \subset E$ разбивается на слои $S_x = S \cap E_x$, подмножество называется *векторным подрасслоением*, если слои S_x являются векторными подпространствами одинаковой размерности и при этом непрерывно зависят от x .

Отображение β_λ линейно отображает слой над точкой $x \in X$ в слой над точкой $\alpha(x)$. Отображение векторного расслоения в себя, обладающее указанным свойством, называется *линейным расширением* отображения α [9].

Связи линейного расширения β_λ с оператором, непосредственно следующие из определений, описываются в следующей лемме.

Лемма 1.1. Последовательность векторов $u = (u(k))$ является решением однородного

уравнения $A(k)u(k+1) = \lambda u(k)$ в пространстве всех последовательностей векторов тогда и только тогда, когда последовательность $(k, u(k))$ (график последовательности u) является траекторией при действии β_λ на E , т. е. выполнено равенство

$$(k, u(k)) = \beta_\lambda^k(0, u(0)). \quad (1.2)$$

Если $u = (u(k))$ есть произвольная последовательность векторов и $\eta = (\lambda B^{-1})^n u$, то график последовательности η является образом графика последовательности u :

$$\beta_\lambda^n(k-n, u(k-n)) = (k, \eta(k)). \quad (1.3)$$

Равенство (1.2) получаем непосредственной проверкой; фактически отображение β_λ строилось так, чтобы выполнялось это равенство.

Оператор $(\lambda B^{-1})^n$ действует на последовательность $u = (u(k)) \in l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ по формуле

$$\eta(k) = [(\lambda B)^{-n} u](k) = \lambda^n M_{n,k} u(k-n),$$

где $M_{n,k}$ есть матрица

$$M_{n,k} = A^{-1}(k-1)A^{-1}(k-2)\dots A^{-1}(k-n). \quad (1.4)$$

По построению, действие β^n задается с помощью той же матрицы:

$$\begin{aligned} \beta^n(k-n, u(k-n)) &= \\ &= (k, M_{n,k-n} u(k-n)) = (k, \eta(k)). \end{aligned}$$

Менее очевидная связь линейного расширения с оператором описывается с использованием следующих понятий.

Векторное подрасслоение $E^s \subset E$ называется *устойчивым в положительном направлении*, если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in E^s$ выполняется неравенство

$$\|\beta_\lambda^n(x, \xi)\| \leq C\gamma^n \|(x, \xi)\|, \quad n \geq 0.$$

Векторное подрасслоение $E^u \subset E$ называется *неустойчивым в положительном направлении*, если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in E^u$ выполняется неравенство

$$\|\beta_\lambda^n(x, \xi)\| \geq C\gamma^{-n} \|(x, \xi)\|, \quad n \geq 0.$$

Основной результат об обратимости формулируется следующим образом [4], [5].

Предложение 1.2. *Оператор $B - \lambda I$ обратим тогда и только тогда, когда существуют векторные подрасслоения E^s и E^u , устойчивые и неустойчивые для линейного расширения β_λ , такие, что $E = E^s \oplus E^u$, т. е. для любого $x \in X$ выполнено*

$$E_x^s \oplus E_x^u = \mathbb{C}^m \quad (1.5)$$

и, значит, определен проектор $p(x)$ на слой E_x^s , задающий разложение (1.5).

Если это условие выполнено для некоторого λ_0 , то оно выполнено для всех λ , лежащих в том же кольце K_0 из K' , что и λ_0 . В K_0 устойчивое и неустойчивое подрасслоения E^s и E^u определены однозначно и не зависят от λ .

В кольце K_0 резольвента

$$R(\lambda, B) = (B - \lambda I)^{-1}$$

задается формулой

$$R(\lambda, B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}} B^j P - \sum_{j=-\infty}^{-1} \lambda^{-j+1} B^j [I - P], \quad (1.6)$$

где P есть проектор в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$, действующий как умножение на последовательность матриц $p(k)$.

Это предложение позволяет выделить среди колец, составляющих множество K' , те кольца, которые не принадлежат спектру оператора B , и, тем самым, найти спектр оператора и построить резольвенту.

2 Условия правосторонней обратимости

Согласно лемме 1.1, решение однородного уравнения $(B - \lambda I)u = 0$ однозначно определяется по своему значению в одной точке, например, по значению $u(0)$. Поэтому ядро оператора $B - \lambda I$ конечномерно и его размерность не превосходит m . Отсюда следует, что если оператор $B - \lambda I$ обратим справа, но необратим, то он является оператором Фредгольма и имеет положительный индекс.

Из сказанного выше получаем, что если в некотором кольце (из числа составляющих множество $K' = K \setminus \bigcup S_k^\pm$) выполнено $v^+(\lambda) - v^-(\lambda) < 0$, то оператор $B - \lambda I$ не может быть обратимым справа, и такое кольцо принадлежит существенному спектру $\Sigma^+(B)$. Если в некотором кольце выполнено $v^+(\lambda) - v^-(\lambda) = 0$, то из обратимости справа следует обратимость, и такое кольцо не принадлежит существенному спектру $\Sigma^+(B)$. Поэтому необходимым условием правосторонней обратимости $B - \lambda I$ является неравенство

$$v^+(\lambda) > v^-(\lambda).$$

Покажем, как некоторая модификация рассмотренных выше конструкций позволяет исследовать правостороннюю обратимость оператора $B - \lambda I$ и построить правостороннюю резольвенту. Для этого введем ряд аналогов использованных выше понятий.

Подмножество $S \subset E$ называется *векториальным* подмножеством, если для любого x слой S_x является векторным подпространством в E_x [9].

Подмножество $S \subset E$ называется *векториальным подрасслоением*, если слои S_x являются векторными подпространствами и непрерывно зависят от x .

Векториальное подмножество может иметь слою разной размерности, в определении векториального подрасслоения условие непрерывности существенно только в точках $\pm\infty$; непрерывность в этих точках означает, в частности, что слою S_k имеют одинаковую размерность при $k > k^+$ и имеют одинаковую размерность при $k < k^-$.

Приведенные выше определения устойчивости и неустойчивости подрасслоения не используют того, что рассматриваемое множество S является подрасслоением и имеет смысл для произвольных подмножеств.

Подмножество $S \subset E$ будем называть *устойчивым в положительном направлении* (в отрицательном направлении), если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in S$ выполняется неравенство

$$\|\beta_\lambda^n(x, \xi)\| \leq C\gamma^n \|(x, \xi)\|, \quad n \geq 0 \quad (n \leq 0).$$

Подмножество $S \subset E$ называется *неустойчивым в положительном направлении* (в отрицательном направлении), если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in S$ выполняется неравенство

$$\|\beta_\lambda^n(x, \xi)\| \geq C\gamma^{-n} \|(x, \xi)\|, \quad n \geq 0 \quad (n \leq 0).$$

Заметим, что если подмножество $S \subset E$ инвариантно относительно β и β^{-1} , то устойчивость в отрицательном направлении эквивалентна неустойчивости в положительном направлении. Для произвольных подмножеств такой связи нет и указанные четыре свойства различны.

Множеством асимптотической устойчивости для β_λ на $\pm\infty$ будем называть подмножество $E^\pm \subset E$, состоящее из пар $(x, \xi) \in E$, для которых $\|\beta_\lambda^n(k, \xi)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm\infty$.

Важным техническим моментом в данной работе является следующее известное утверждение о «факторизации со сдвигом» последовательности матриц, идея которого восходит к работам А. Пуанкаре и О. Перрона [6], [8].

Лемма 2.1. *При выполнении условия (1.1) для любого $q \in \mathbb{Z}$ существует такая последовательность невырожденных матриц $D(k), k \geq q$, имеющая невырожденный предел $D(+\infty)$, что после замены*

$$v(k) = \begin{cases} D(k)u(k), & k \geq q, \\ u(k), & k < q; \end{cases}$$

оператор B переходит в оператор взвешенного сдвига, у которого коэффициенты

$$A'(k) = D(k)^{-1} A(k) D(k+1)$$

имеют при $k > q$ блочно-диагональный вид

$$A'(k) = \begin{pmatrix} A^+(k) & 0 \\ 0 & A^-(k) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $A^+(+\infty)$ есть матрица размерности $v^+(\lambda)$, у которой модули собственных значений больше $|\lambda|$, $A^-(+\infty)$ есть матрица размерности $m-v^+$, у которой модули собственных значений меньше $|\lambda|$.

Инвариантные подпространства, соответствующие блокам в (2.1), обозначим $L^\pm(+\infty)$.

Из леммы 2.1 следует также, что при $k \leq q$ оператор также может быть приведен к виду, в котором матрицы коэффициентов имеют при $k \leq q$ аналогичный блочно-диагональный вид. Но здесь блоки имеют размерности $v^-(\lambda)$ и $m-v^-$, и у матрицы $A^+(-\infty)$ модули собственных значений больше $|\lambda|$, а у матрицы $A^-(-\infty)$ модули собственных значений меньше $|\lambda|$. Соответствующие инвариантные подпространства обозначим $L^\pm(-\infty)$.

Говорят, что для матрицы A выполнено *условие Перрона*, если модули всех m собственных значений различны. В [10] показано, что если для матриц $A(\pm\infty)$ выполнены условия Перрона, то существует такая двусторонняя последовательность матриц $D(k)$, что замена $v(k) = D(k)u(k)$ приводит матрицу коэффициентов к диагональному виду для всех k . В этом случае исследование оператора сводится к исследованию m скалярных операторов.

Но в общем случае невозможно глобальное приведение даже к блочно-диагональному виду: размерности соответствующих блоков разные при $k > q$ и при $k < q$; кроме того, для приведения коэффициента в точке q к блочно-диагональному виду, согласованному с видом при $k > q$, надо делать одну замену, а для приведения к блочно-диагональному виду, согласованному с видом при $k < q$, надо делать другую замену.

Поэтому наиболее простой вид, к которому может быть приведен оператор B , следующий: при $k > q$ матрицы $A(k)$ блочно-диагональны с блоками размерностей $v^+(\lambda)$ и $m-v^+(\lambda)$, при $k < q$ матрицы $A(k)$ блочно-диагональны с блоками размерностей $v^-(\lambda)$ и $m-v^-(\lambda)$, матрица $A(q)$ произвольная. В этом случае будем говорить, что оператор записан в *нормальной форме*.

Кроме того, будем считать, что в каждом слое E_k задано такое скалярное произведение $\|\xi, \eta\|_k$, что при $k > q$ подпространства $L^+(+\infty)$

и $L^-(+\infty)$ ортогональны, а при $k < q$ ортогональны подпространства $L^+(-\infty)$ и $L^-(-\infty)$. Такое скалярное произведение порождает в пространстве $l_2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^m)$ норму, эквивалентную исходной.

Ввиду равенства $B - \lambda I = \lambda(\frac{1}{\lambda}B - I)$, исследование можно свести к случаю спектральной точки 1 для оператора взвешенного сдвига $\frac{1}{\lambda}B$. В связи с этим для упрощения обозначений зафиксируем далее $\lambda_0 = 1$ и $\beta = \beta_1$ и далее будем считать, что для $\lambda_0 = 1$ выполнены условия (1.1). Тогда кольцо K_0 , содержащее $\lambda_0 = 1$, имеет вид

$$K_0 = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}, \quad (2.2)$$

где

$$r^- = \max\{|\lambda_j(\pm)| : |\lambda_j(\pm)| < 1\},$$

$$r^+ = \min\{|\lambda_j(\pm)| : |\lambda_j(\pm)| > 1\}.$$

В этом кольце величины $v^\pm(\lambda)$ не зависят от λ , будем обозначать их v^\pm .

Непосредственным следствием леммы 2.1 является описание множеств асимптотической устойчивости.

Лемма 2.2. Пусть K_0 есть кольцо (2.2).

Множество E^\pm асимптотической устойчивости для β является векториальным подмножеством, инвариантным относительно β и β^{-1} , и оно является множеством асимптотической устойчивости для β_λ при всех λ из кольца K_0 .

Над подмножеством $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ векториальное подмножество E^+ является векторным подрасслоением размерности v^+ , причем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_k^+ = E_{+\infty}^+ = L^+(+\infty).$$

При этом может не существовать предел последовательности слоев E_k^+ при $k \rightarrow -\infty$.

Если $(x, \xi) \notin E^+$, то $\|\beta^n(x, \xi)\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Для заданного $q \in \mathbb{Z}$ векторное расслоение E^+ над множеством $X_q^+ = \{q, q+1, \dots\}$ является устойчивым в положительном направлении: для любого $\gamma < 1$, удовлетворяющего условию $\frac{1}{r^+} < \gamma < 1$, существует число C_q^+ , что при $x \geq q$ и всех $(x, \xi) \in E^+$ выполняются неравенства

$$\|\beta_\lambda^n(x, \xi)\| \leq C_q^+ \gamma^n \|(x, \xi)\|, \quad n \geq 0.$$

При этом не существует постоянной, при которой эти неравенства выполнены для всех $x > -\infty$.

Аналогичными свойствами обладает множество E^- .

Доказательство. Если оператор записан в нормальной форме, то подмножество E^+ имеет

следующий вид: если $k > q$, то $E_k^+ = L^+(+\infty)$ – это есть подпространство, порожденное первыми v^+ базисными векторами, а для $k \leq q$ слои E_k^+ задаются как траектория подпространства E_q^+ при действии отображения β^{-1} :

$$E_{q-n}^+ = \beta^{-n}(E_q^+).$$

Над точкой $-\infty$ имеем $E_{-\infty}^+ = L^+(-\infty)$, и размерность этого слоя есть v^+ .

Для оператора, записанного в нормальной форме, все утверждения леммы проверяются непосредственно. При преобразованиях подобия, описанных в лемме 2.1, множество асимптотической устойчивости переходит в множество асимптотической устойчивости; свойство устойчивости переходит в свойство устойчивости с тем же показателем γ и другой постоянной C . Поэтому утверждения леммы выполнены и для оператора, не имеющего канонического вида.

Аналогично устроено подрасслоение E^- : если $k < q-1$, то $E_k^- = L^-(-\infty)$, размерность этого слоя есть $m - v^-$; для $k \geq q-1$ слои E_k^- задаются как траектория подпространства E_{q-1}^- при действии отображения β :

$$E_{q+n-1}^- = \beta^n(E_{q-1}^-).$$

Над точкой $+\infty$ имеем $E_{+\infty}^- = L^-(-\infty)$, и размерность этого слоя есть $m - v^+$.

Свойства оператора $B - \lambda I$ могут быть описаны с помощью множеств асимптотической устойчивости.

Теорема 2.1. Пусть K_0 есть кольцо (2.2).

При $\lambda \in K_0$ следующие свойства эквивалентны

- 1) оператор $B - \lambda I$ обратим справа;
- 2) $\dim(E_q^+ \cap E_q^-) = v^+ - v^-$;
- 3) $E_q^+ + E_q^- = C^m$.

В частности, величина $\dim(E_q^+ \cap E_q^-)$ одинакова для всех $q \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимым и достаточным условием правосторонней обратимости фредгольмова оператора является условие

$$\dim \text{Ker}(B - \lambda I)^* = 0.$$

Из формулы индекса получаем, что это условие эквивалентно тому, что

$$\dim \text{Ker}(B - \lambda I) = \text{ind}(B - \lambda I) = v^+ - v^-.$$

В пространстве $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ рассмотрим решения $(u(k))$ однородного уравнения

$$(B - \lambda I)u = 0.$$

Согласно лемме 1.1, каждое решение $(u(k))$ является траекторией некоторой точки (q, ξ) при действии β_λ .

Если $(q, \xi) \in (E_q^+ \cap E_q^-)$, то последовательность $(u(k))$ быстро убывает на $\pm\infty$ и принадлежит пространству $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$.

Если $(q, \xi) \notin E_q^\pm$, то $\|u(k)\| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \pm\infty$ и, значит, последовательность $(u(k))$ не принадлежит пространству $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$.

Таким образом, векторы ξ из $E_q^+ \cap E_q^-$ и только они порождают решения однородного уравнения, принадлежащие пространству $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$. При этом линейно независимым векторам ξ соответствуют линейно независимые решения. Поэтому

$$\dim \text{Ker}(B - \lambda I) = \dim(E_q^+ \cap E_q^-).$$

Для размерности алгебраической суммы подпространств $E_q^+ + E_q^-$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \dim(E_q^+ + E_q^-) &= \\ &= \dim E_q^+ + \dim E_q^- - \dim(E_q^+ \cap E_q^-) = \\ &= \nu^+ + m - \nu^- - \dim(E_q^+ \cap E_q^-). \end{aligned}$$

Поэтому $\dim(E_q^+ + E_q^-) = m$ тогда и только тогда, когда $\dim(E_q^+ \cap E_q^-) = \nu^+ - \nu^-$.

3 Правосторонняя резольвента

Основной результат работы заключается в том, что в каждом из колец, составляющих множество $\Sigma(B) \setminus \Sigma^+(B)$, можно построить правостороннюю резольвенту по формуле, аналогичной формуле (1.6) для резольвенты. По формулировке этот результат похож на предложение 1.2, отличие только в том, что рассматриваются не векторные, а векториальные подрасслоения.

Здесь следует отметить, что в предложении 1.2 векторные подрасслоения автоматически являются инвариантными относительно β и β^{-1} , а в теореме 3.1 векториальные подрасслоения не являются инвариантными и имеют разные размерности слоёв в разных точках.

Как пояснено выше, достаточно рассмотреть λ из кольца K_0 , заданного (2.2).

Теорема 3.1. *Оператор $B - \lambda I$ обратим справа тогда и только тогда, когда существуют устойчивое (относительно β_λ) в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^- , такие, что для любого $x \in X$ выполнено*

$$E_x \equiv C^m = V_x^+ \oplus V_x^- \quad (3.1)$$

и, следовательно, определен проектор $p(x)$ на V_x^+ в слое E_x , который задает разложение (3.1). Если это условие выполнено для $\lambda_0 = 1$, то

в кольце (2.2) правосторонняя резольвента может быть построена по формуле

$$R_r(\lambda, B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}} B^j P - \sum_{j=0}^{-1} \lambda^{-j+1} B^j [I - P], \quad (3.2)$$

где P есть проектор в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$, действующий как умножение на последовательность матриц $p(k)$.

Первую часть доказательства сформулируем в виде леммы.

Лемма 3.1. *Пусть для $\lambda_0 = 1$ существуют устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^- , такие, что для любого $x \in X$ выполнено (3.1). Тогда справедливы следующие утверждения.*

Для всех $x \in X$ выполнено $V_q^+ \subset E_q^+$, $V_q^- \subset E_q^-$, причем $V^\pm(\pm\infty) = E^\pm(\pm\infty)$.

Существует N^+ , такое, что для $q \geq N^+$ выполнено $V_q^+ = E_q^+$ и $\dim V_q^- = m - \nu^+$.

Существует N^- , такое, что для $q \leq N^-$ выполнено $V_q^- = E_q^-$ и $\dim V_q^+ = m - \nu^-$.

При этом последовательности слоёв V_q^\pm имеют на $\pm\infty$ пределы, равные, соответственно, $E^\pm(\pm\infty)$. В частности, векториальные подмножества V^\pm являются векториальными подрасслоениями.

Векториальные подрасслоения V^+ и V^- являются устойчивыми относительно β_λ для всех $\lambda \in K_0$.

Доказательство. По определению устойчивости подмножества V^+ существуют C^+ и $\gamma^+ < 1$ такие, что для $(k, \xi) \in V^+$ выполняется неравенство

$$\|\beta_\lambda^n(k, \xi)\| \leq C^+ (\gamma^+)^n \|\xi\|, \quad n \geq 0. \quad (3.3)$$

В частности, $\|\beta_\lambda^n(k, \xi)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому для любого $x \in X$ слой V_x^+ принадлежит слою E_x^+ .

Аналогично, $\|\beta_\lambda^{-n}(x, \xi)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, для $(x, \xi) \in V^-$, откуда $V_x^- \subset E_x^-$.

В точках $x = \pm\infty$ имеем разложение $E_x = E_x^+ \oplus E_x^-$, поэтому равенство (3.1) возможно только при $V_x^\pm = E_x^\pm$.

Покажем, что для достаточно больших k выполнено $V_k^+ = E_k^+$. Зафиксируем точку q и пусть $k = q + n$.

Предположим, что $V_{q+n}^+ \neq E_{q+n}^+$. Тогда

$$\dim V_{q+n}^- + \dim E_{q+n}^+ > m$$

и, следовательно, $V_{q+n}^- \cap E_{q+n}^+ \neq \{0\}$.

Пусть $\xi_n \in V_{q+n}^- \cap E_{q+n}^+$, $\xi_n \neq 0$. Рассмотрим точку $(q, \xi) = \beta^{-n}(q+n, \xi_n)$. В силу включения $\xi_n \in V_{q+n}^-$ и устойчивости V^- справедлива оценка

$$\|\beta^{-n}(q+n, \xi_n)\| = \|\xi\| \leq C^-(\gamma^-)^n \|\xi_n\|.$$

С другой стороны, в силу включения $\xi_n \in E_q^+$, выполнено

$$\|\xi_n\| \leq C_q^+(\gamma_q^+)^n \|\xi\|.$$

Таким образом, для вектора ξ_n имеем оценку

$$\|\xi_n\| \leq C_q^+(\gamma_q^+)^n C^-(\gamma^-)^n \|\xi_n\|.$$

Существует такое N , что $C^+(\gamma^+)^{N^+} C^-(\gamma^-)^N < 1$. Тогда, в силу того, что $\xi_n \neq 0$, при $n \geq N$ получаем противоречие.

Значит, $V_k^+ = E_k^+$ для $k \geq N^+ = q + N$, в частности,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} V_k^+ = \lim_{k \rightarrow +\infty} E_k^+ = E_{+\infty}^+.$$

Отсюда следует, в частности, что при $k \geq N^+$ имеем

$$V_k^- \cap E_k^+ = \{0\}.$$

Далее будем считать, что оператор записан в нормальной форме и введено описанное выше скалярное произведение. При такой записи все подпространства E_k^+ одинаковы при больших k : $E_k^+ = E_{+\infty}^+ = L^+(+\infty)$.

Покажем, что с дальнейшим ростом k подпространство V_k^- не только не пересекается с E_k^+ , но и становится «почти ортогональным» к нему, откуда следует, что существует предел последовательности подпространств V_k^- и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} V_k^- = E_{+\infty}^-.$$

Уточним, что мы понимаем под сходимостью подпространств в конечномерном гильбертовом пространстве. Расстояние между подпространствами L_1 и L_2 может быть задано формулой

$$\varrho(L_1, L_2) = \|P_{L_1} - P_{L_2}\|,$$

где P_{L_j} есть ортогональный проектор на соответствующее подпространство L_j . Как известно [11], это расстояние для подпространств одинаковой размерности может быть также задано формулой

$$\varrho(L_1, L_2) = \max_{\xi_1 \in L_1, \|\xi_1\|=1} \min_{\xi_2 \in L_2, \|\xi_2\|=1} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

Покажем, что $\varrho(V_k^-, E_{+\infty}^-) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Пусть $(q+n, \xi_n) \in V_{q+n}^-$ и пусть

$$(q, \xi) = \beta^{-n}(q+n, \xi_n).$$

В силу включения $\xi_n \in V_{q+n}^-$ справедлива оценка

$$\|\beta^{-n}(q+n, \xi_n)\| = \|\xi\| \leq C^-(\gamma^-)^n \|\xi_n\|.$$

Рассмотрим проекции $\eta = Q\xi, \eta_n = Q\xi_n$, где Q есть ортогональный проектор на подпространство $L^+(+\infty)$.

Тогда $(q, \eta) \in V_q^+$ и выполнено неравенство

$$\|\beta^n(q, \eta)\| \leq C^+(\gamma^+)^n \|\eta\|.$$

В силу перестановочности Q с действием β имеем $\beta^n(q, \eta) = (q+n, \eta_n)$. В результате имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|Q\xi_n\| &\leq C^+(\gamma^+)^n \|\eta\| \leq C^+(\gamma^+)^n \|\xi\| \leq \\ &\leq C^+(\gamma^+)^n C^-(\gamma^-)^n \|\xi_n\|. \end{aligned}$$

Таким образом, для больших n проекция $Q\xi_n$ мала по сравнению с вектором ξ_n . Это с геометрической точки зрения означает, что вектор ξ_n почти ортогонален к подпространству $L^+(+\infty)$. Из этого получаем требуемое. Для $\varepsilon > 0$ выберем n_0 так, что $C^+C^-(\gamma^+\gamma^-)^{n_0} < \varepsilon$. Пусть $n \geq n_0$ и $\xi_n \in V_{q+n}^-$, $\|\xi_n\| = 1$. Вектор $[I-Q]\xi_n$ принадлежит L^- и выполнено

$$\|\xi_n - [I-Q]\xi_n\| \leq \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $\varrho(L^-, V_{q+n}^-) < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть для подмножеств V^+ и V^- выполнены условия теоремы.

Обратим внимание на то, что здесь проекторы $p(k)$ не являются ортогональными и могут иметь большие нормы. В частности, если для некоторых векториальных подмножеств V^+ и V^- выполнено (3.1), то из этого еще не следует, что последовательность проекторов $p(k)$ ограничена. Но если эти подмножества устойчивы, то, согласно лемме 3.1, последовательность проекторов $p(k)$ имеет пределы на $\pm\infty$ и, следовательно, ограничена по норме. Поэтому оператор P является ограниченным и

$$\|P\| = \sup_k \|p(k)\|.$$

Докажем сходимость по норме ряда из ограниченных линейных операторов

$$\sum_1^{+\infty} \lambda^{j-1} B^{-j} P. \quad (3.4)$$

Пусть $u \in l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$, $v = Pu$, т. е. $v(k) = p(k)u(k)$. Тогда

$$\|v\| \leq \|P\| \|u\|.$$

Согласно формуле (1.3), если $\eta(k) = [B^{-n}v](k)$, то $(k, \eta(k)) = \beta^n(k-n, v(k-n))$. Поскольку $(k-n, v(k-n)) \in V_{k-n}^+$, выполнены неравенства (3.3), из которых получаем оценку

$$\|\eta(k)\| \leq C^+ (\gamma^+)^n \|v(k-n)\|$$

и неравенство

$$\|B^{-n}v\| \leq C^+ (\gamma^+)^n \|v\|.$$

Таким образом,

$$\|B^{-n}Pu\| \leq \|P\| C^+ (\gamma^+)^n \|u\|,$$

откуда следует оценка норм операторов:

$$\|B^{-n}P\| \leq \|P\| C^+ (\gamma^+)^n.$$

Поэтому ряд (3.4) сходится при $\gamma^+ |\lambda| < 1$ и для нормы суммы ряда имеем оценку

$$\left\| \sum_1^{+\infty} \lambda^{j-1} B^{-j} P \right\| \leq C^+ \|P\| \frac{\gamma^+}{1 - \gamma^+ |\lambda|}.$$

Утверждение, что V^+ является устойчивым относительно β_λ для любого $\lambda \in K_0$, означает, в частности, что для заданного $\lambda \in K_0$ число γ^+ в (3.3) может быть выбрано так, что $\gamma^+ |\lambda| < 1$. Отсюда следует сходимость ряда (3.4) при всех $\lambda \in K_0$.

Аналогично из устойчивости в отрицательном направлении V^- получаем сходимость ряда

$$\sum_{-\infty}^{-1} \lambda^{-j+1} B^j [I - P]$$

при $\lambda \in K_0$ и оценку нормы суммы ряда.

Проверка того, что сумма ряда (3.2) есть правый обратный, осуществляется прямыми вычислениями.

Пусть теперь выполнено условие правосторонней обратимости. Существует много пар устойчивых подмножеств V^+ и V^- , для которых выполнены условия теоремы, укажем некоторые из них. Зафиксируем точку $q \in \mathbb{Z}$ и зададим векториальные подмножества по правилу

$$V_k^+ = \begin{cases} E_k^+, & k \geq q, \\ (E_k^-)^\perp, & k < q; \end{cases} \quad (3.5)$$

$$V_k^- = \begin{cases} (E_k^+)^\perp, & k \geq q, \\ E_k^-, & k < q. \end{cases}$$

Здесь ортогональное дополнение понимается по отношению к скалярному произведению, соответствующему нормальной форме оператора. Для оператора, записанного в нормальной форме, устойчивость построенных векториальных подмножеств проверяется непосредственно, ввиду явного задания этих подмножеств.

4 О структуре устойчивых векториальных подмножеств

В заключение обсудим произвол, который имеется в построении множеств V^+ и V^- и влиянии их выбора на норму построенной правосторонней резольвенты. Этот вопрос связан с исследованием более сложных операторов взвешенного сдвига, которое может быть сведено к исследованию семейства дискретных операторов. Но

при этом играет роль существование таких правых обратных, что множество их норм в совокупности ограничено. Поэтому возникает задача о построении правых обратных с достаточно малой нормой. Построенные выше правые обратные (и их нормы) зависят от выбора пары V^+ и V^- , причем в оценку нормы правосторонней резольвенты входит величина $C^+ + C^-$. Поэтому нужно строить V^+ и V^- так, чтобы соответствующие оценки выполнялись для постоянных C^+ и C^- с достаточно малой суммой $C^+ + C^-$.

Поясним эту задачу на примере оператора B в пространстве $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ скалярных последовательностей, действующего по формуле $(Bu)(k) = a(k)u(k+1)$, где $a(k)$ – заданная ограниченная числовая последовательность, имеющая на бесконечности пределы $a(\pm\infty) \neq 0$.

Как следует из предыдущего, оператор $B - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда $|a(-\infty)| < 1 < |a(+\infty)|$. Для любого $q \in \mathbb{Z}$ можем построить подмножества V^+ и V^- по формулам (3.5) и по формуле (3.2) построить правый обратный R_q к оператору $B - I$. Оценки снизу и сверху для норм $\|R_q\|$ получены в [12]. Из этих оценок следует, что $\|R_q\| \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \pm\infty$. Поэтому для заданной постоянной C условие $\|R_q\| \leq C$ может быть выполненным только для конечного множества значений q . В частности, существует значение q , при котором $\|R_q\|$ минимальна.

Таким образом, даже в скалярном случае и при рассмотрении только векториальных подмножеств V^+ и V^- вида (3.5) имеется большой произвол в выборе этих подмножеств, существенно влияющий на норму построенного правого обратного.

Пусть векториальные подмножества V^+ и V^- удовлетворяют условиям теоремы, в частности, для любого k выполнены условия

$$V_k^\pm \subset E^\pm, \quad E_k^+ + E_k^- = C^m, \quad V_k^+ \oplus V_k^- = C^m. \quad (4.1)$$

Проанализируем, какой произвол имеется в выборе слоев V_k^\pm , удовлетворяющих этим условиям.

Пусть

$$S^+(C^+, \gamma^+) = \{(x, \xi) \in E :$$

$$\|\beta^n(x, \xi)\| \leq C^+ (\gamma^+)^n \|(x, \xi)\|, n \geq 0\},$$

т. е. $S^+(C^+, \gamma^+)$ есть максимальное устойчивое в положительном направлении множество, соответствующее заданным постоянным. Рассмотрим слой $S^+(C^+, \gamma^+)_k$ над точкой k .

По построению, если $(k+n, \xi_n) = \beta^n(k, \xi)$, то $\xi_n = M_{n,k} \xi$, где матрицы $M_{n,k}$ заданы формулой (1.4). Величину $\|\beta^n(k, \xi)\|^2$ рассмотрим как функцию от ξ ; тогда

$$\psi_{n,k}(\xi) := \|\beta^n(k, \xi)\|^2 = \langle M_{n,k}^* M_{n,k} \xi, \xi \rangle,$$

откуда видно, что $\psi_{n,k}(\xi)$ есть положительно определенная квадратичная (эрмитова) форма. Величина $[C^+(\gamma^+)^n \|(q, \xi)\|^2]$ также является положительно определенной квадратичной формой.

Каждая из разностей

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k}(\xi) &= [C^+(\gamma^+)^n \|(k, \xi)\|^2] - \|\beta^n(k, \xi)\|^2 = \\ &= \langle [(C^+)^2(\gamma^+)^{2n} - M_{n,k}^* M_{n,k}] \xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

также является квадратичной формой, причем неравенство

$$\|\beta^n(k, \xi)\| \leq C^+(\gamma^+)^n \|(k, \xi)\|$$

эквивалентно неравенству $\varphi_{n,k}(\xi) \geq 0$. Здесь существенно, что формы $\varphi_{n,k}(\xi)$ могут не быть положительными.

Рассмотрим произвольную квадратичную форму $\varphi(\xi)$ и множество

$$K = \{\xi : \varphi(\xi) \geq 0\}.$$

Как известно, с помощью линейной замены переменных $\xi = M\eta$ можно ввести новую систему координат η таким образом, что квадратичная форма будет иметь канонический вид

$$\varphi(M\eta) = \sum_{j=1}^{d_1} |\eta_j|^2 - \sum_{j=d_2}^m |\eta_j|^2.$$

Поэтому

$$K = \left\{ \eta : \sum_{j=1}^{d_1} |\eta_j|^2 \geq \sum_{j=d_2}^m |\eta_j|^2 \right\}$$

имеет структуру полнотелого конуса. Этот конус содержит векторные подпространства размерности d , где d есть количество неотрицательных слагаемых в каноническом виде, и не содержит векторных подпространств размерности $d+1$. Конус K содержит, например, подпространство, порожденное первыми d базисными векторами в системе координат η , и содержит много других d -мерных подпространств.

Таким образом, каждое из множеств

$$K_{n,q} = \{\xi : \varphi_{n,q}(\xi) \geq 0\}$$

является некоторым конусом.

Это рассуждение позволяет выяснить геометрический смысл проведенных построений и утверждений, полученных в лемме 3.1, и получить дополнительную информацию о слоях V_k^\pm .

Теорема 4.1. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ слой $S^+(C^+, \gamma)_k$ является пересечением конусов и сам имеет структуру конуса:

$$S^+(C^+, \gamma)_k = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_{n,k}.$$

Для максимальной размерности $d(k)$ векторных подпространств, содержащихся в этом слое, выполнены неравенства $v^- \leq d(k) \leq v^+$.

Существует такое N^+ , что при $k \geq N^+$ слоем $S^+(C^+, \gamma)_k$ является векторное подпространство E_k^+ размерности v^+ .

Существует такое N^- , что при $k \leq N^-$ выполнено $d(k) = v^-$ и

$$S^+(C^+, \gamma)_k \cap E_k^- = \{0\}.$$

При $k \rightarrow -\infty$ конусы $S^+(C^+, \gamma)_k$ стягиваются к v^- -мерному векторному подпространству $E^+(-\infty)$.

Для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$S^+(C^+, \gamma)_k \subset E_k^+,$$

причем существует такое $N(k)$, что

$$\bigcap_{n=N(k)}^{+\infty} K_{n,k} = E_k^+.$$

Поэтому слой $S^+(C^+, \gamma)_k$ может быть задан с помощью конечного числа условий

$$S^+(C^+, \gamma)_k = \{\xi \in E_k^+ :$$

$$\varphi_{n,k}(\xi) \geq 0, n = 0, 1, \dots, N(k) - 1\}.$$

Аналогично устроено множество $S^-(C^-, \gamma^-)$, устойчивое в отрицательном направлении, при этом в качестве слоя V_k^- может быть выбрано любое векторное подпространство, принадлежащее соответствующему конусу $S^-(C^-, \gamma^-)_k$.

Обсудим теперь выбор постоянных C^+ и C^- и построение V^+ и V^- . Для выполнения условия $C^m = V_k^+ \oplus V_k^-$ нужно выбирать постоянные C^+ и C^- достаточно большими. Примеры показывают, что если зафиксировать некоторое «малое» значение C^+ , то подходящее значение C^- приходится выбирать слишком большим.

Поэтому можно руководствоваться следующим правилом. Строим конусы $S^\pm(C, \gamma)_k$, соответствующие одной и той же постоянной C . С ростом C конусы $S^\pm(C, \gamma)_k$ увеличиваются; увеличиваем C до тех пор, пока эти конусы не станут настолько большими, что будут содержать требуемые векторные подпространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонецвич, А.Б. Спектральные свойства дискретного оператора взвешенного сдвига / А.Б. Антонецвич, А.А. Ахматова // Труды института математики. – 2012. – Т. 20. – № 1. – С. 14–21.

2. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М. : Наука, 1967. – 376 с.
3. Гохберг, И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
4. Антоневиц, А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневиц. – Мн. : Университетское, 1988. – 233 с.
5. Antonevich, A.B. Functional differential equations: I. C^* -theory / A.B. Antonevich, A. Lebedev. – Harlow : Longman Scientific & Technical, 1994. – 504 с.
6. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Kluwer : Math. Appl. – 1994. – 289 с.
7. Karapetiants, N. Equations with involutive operators / N. Karapetiants, S. Samko. – Boston, Basel, Berlin : Birkhäuser, 2001. – 427 p.
8. Антоневиц, А.Б. Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке / А.Б. Антоневиц // Функциональный анализ и его прил. – Т. 39, вып. 1. – 2005. – С. 52–69.
9. Бронштейн, И.У. Неавтономные динамические системы / И.У. Бронштейн. – Кишинев : Штиинца, 1984. – 292 с.
10. Антоневиц, А.Б. Об одной факторизации разностного оператора / А.Б. Антоневиц // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 3. – С. 10–15.
11. Глазман, И.М. Конечномерный линейный анализ в задачах / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. – М. : Наука, 1969. – 477 с.
12. Antonevich, A.B. Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class / A.B. Antonevich, J. Jakubowska // J. Math. Sci. – 2010. – Vol. 164, № 4. – С. 497–517.

Поступила в редакцию 02.04.13.

УДК 517.983.23: 517.983.5

ОБРАЩЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE INVERSE OF SOME CLASS OF OPERATORS IN BANACH SPACE AND ITS SEVERAL APPLICATIONS

A.A. Atvinovskii, A.R. Mirotin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предложен метод обращения одного класса операторов в банаховом пространстве. Полученный результат применяется к уравнениям, содержащим замкнутые операторы. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: функция Маркова, класс Крейна, функциональное исчисление, замкнутый оператор, операторное уравнение.

The paper deals with the method proposed for the inverse of some class of operators. The result is applied to some equations with closed operators. The examples are considered.

Keywords: Markov function, Krein class, functional calculus, closed operator, operator equation.

Введение

В статье рассмотрен класс функций R_b , содержащийся в классе функций Маркова $R[0, b]$, изучавшемся М.Г. Крейном [1], и класс замкнутых плотно определенных операторов в комплексном банаховом пространстве X , спектры которых пересекается с отрезком $[0, b]$ по множеству $\{b\}$. Целью работы являются теоремы, позволяющие разрешать уравнения, содержащие функции класса R_b от этих операторов, с помощью введенного ниже функционального исчисления (Q_b -исчисления), рассмотрены примеры.

1 Вспомогательные сведения

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о функциях классов Неванлинны R и Крейна $R[a, b]$ [1].

Говорят, что функция f принадлежит классу R , если она голоморфна в открытой верхней полуплоскости и отображает её в себя.

Пусть $a < b$. Будем говорить, что функция g относится к классу $R[a, b]$, если она принадлежит R и голоморфна и положительна на $(-\infty, a)$, и голоморфна и отрицательна на $(b, +\infty)$. При этом g можно единственным образом представить в виде

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}, \quad (1.1)$$

где τ – ограниченная неубывающая функция, отличная от постоянной [1, с. 525–526]. Функции вида (1) называются *функциями Маркова*.

Всюду ниже X – банахово пространство над полем \mathbb{C} , $V_{[a,b]}(X)$ – класс всех замкнутых плотно определенных операторов в пространстве X , спектры которых не пересекаются с отрезком $[a, b]$.

Определение 1.1 [2]. Для функции g класса $R[a, b]$ с интегральным представлением (1.1) и оператора $A \in V_{[a,b]}(X)$ положим

$$g(A) = \int_a^b R(t, A) d\tau(t), \quad (1.2)$$

где $R(t, A) = (tI - A)^{-1}$ – резольвента оператора A .

Для решения задачи об обратимости оператора $g(A)$ рассмотрим класс функций $Q[a, b]$.

Определение 1.2 [3]. Пусть $a < b$. Положим

$$Q[a, b] = \{\varphi \mid \varphi = 1/g, g \in R[a, b]\}.$$

Известно [2], что функцию $\varphi \in Q[a, b]$ можно единственным образом представить в виде

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z - h(z), \quad (1.3)$$

где $h \in R[a, b]$, интегралы, представляющие $h(a)$ и $h(b)$ по формуле (1.1), где $a = 0$, сходятся, а числа α и β удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \alpha + \beta a - h(a) \geq 0, \\ \alpha + \beta b - h(b) \leq 0, \\ \beta < 0, \end{cases}$$

причем

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x}, \\ \alpha &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x) - \beta x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Определение 1.3 [2]. Для $\varphi \in Q[a, b]$ вида (1.3) и оператора $A \in V_{[a, b]}(X)$ положим

$$\varphi(A) := \alpha + \beta A - h(A) \quad (1.5)$$

($D(\varphi(A)) = D(A)$), где $h(A)$ понимается в смысле определения 1.1. Данное функциональное исчисление будем называть $Q[a, b]$ -исчислением.

Роль $Q[a, b]$ -исчисления видна из следующей теоремы.

Теорема 1.1 [2]. Для любой функции g из класса $R[a, b]$ и оператора $A \in V_{[a, b]}(X)$ оператор $g(A)$ имеет левый обратный, задаваемый формулой

$$g(A)^{-1} = \varphi(A), \quad (1.6)$$

где $\varphi = 1/g$, и правая часть понимается в смысле $Q[a, b]$ -исчисления.

2 Теорема обращения

Главной целью данной работы является распространение теоремы 1.1 на более широкий класс операторов.

Определение 2.1. Будем говорить, что замкнутый плотно определенный оператор A в пространстве X принадлежит классу $V_b(X)$, если $\sigma(A) \cap [0, b] \subseteq \{b\}$ и для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство

$$\|R(t, A)\| \leq \frac{M}{b-t}, \quad t \in [0, b).$$

Пример 2.1. Пусть

$$X = L^p(\mathbb{R}) (p \in [1, \infty)), \quad b > 0.$$

Рассмотрим оператор $A = \frac{d}{dt} + bI$ с областью определения $D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R})$ (пространство Соболева). Известно (см., например, предложение 8.4.1 в [5]), что A замкнут и

$$\sigma(A) = b + i\mathbb{R}, \quad R(t, A)u = r_{t-b} * u,$$

где

$$r_\lambda(s) = -e^{\lambda s} \chi_{(0, \infty)}(s) \text{ при } \operatorname{Re}(\lambda) < 0,$$

$$r_\lambda(s) = e^{\lambda s} \chi_{(-\infty, 0)}(s) \text{ при } \operatorname{Re}(\lambda) > 0.$$

Следовательно, при $t \in [0, b)$ имеем в силу неравенства Юнга для свертки

$$\|R(t, A)\| \leq \|r_{t-b}\|_{L^1} = \frac{1}{b-t}.$$

Таким образом, $A \in V_b(X)$.

Определение 2.2. Пусть $b > 0$. Будем говорить, что функция g принадлежит классу R_b , если она принадлежит классу $R[0, b]$ и определена и непрерывна в точке $z = b$.

В силу теоремы Б. Леви непрерывность в точке $z = b$ равносильна тому, что интеграл (1.1), в котором положено $a = 0$, сходится при $z = b$.

Определение 2.3. Пусть g есть функция класса R_b с интегральным представлением (1.1), где $a = 0$, $A \in V_b(X)$. Определим оператор $g(A)$ формулой (1.2), в которой положено $a = 0$.

Заметим, что интеграл в (1.2) существует в смысле Бохнера, так как

$$\int_0^b \|R(t, A)\| d\tau(t) \leq \int_0^b \frac{M d\tau(t)}{b-t},$$

причем интеграл, стоящий в правой части, сходится в силу определения 2.2. Следовательно, оператор $g(A)$ ограничен.

Возникающее функциональное исчисление будем называть R_b -исчислением. Следующий пример показывает, что класс R_b содержит функции, не голоморфные в окрестности точки b , а потому R_b -исчисление не сводится к голоморфному.

Пример 2.2. Из равенства

$$-b + (b-z) \ln \frac{z-b}{z} = \int_0^b \frac{(b-t) dt}{t-z}$$

следует, что функция

$$g(z) = -b + (b-z) \ln((z-b)/z),$$

где \ln обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, принадлежит классу R_b . Легко видеть, что g не голоморфна в окрестности точки b (если бы функция $g(z)$ голоморфно продолжалась в окрестность точки b , то после замены $w = (z-b)/z$ отсюда бы следовала голоморфная продолжимость функции $w \ln w$ в окрестность нуля, что неверно).

Следующая лемма связывает R_b - и $R[0, b]$ -исчисления.

Лемма 2.1. Пусть $g \in R_b$, $A \in V_b(X)$. Тогда для любого действительного $k > 1$ оператор $g(kA)$ определен в смысле $R[0, b]$ -исчисления, причём

$$\|g(kA) - g(A)\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 1+0).$$

Доказательство. Так как $\sigma(kA) = k\sigma(A)$, то $\sigma(kA) \cap [0, b] = \emptyset$ при $k > 1$, а потому оператор $g(kA)$ определен в смысле $R[0, b]$ -исчисления. Далее, для любого $t \in [0, b)$ и любого $k > 1$ справедлива оценка

$$\|R(t, kA)\| = \frac{1}{k} \left\| R\left(\frac{t}{k}, A\right) \right\| \leq \frac{1}{k} \frac{M}{b-t/k} \leq \frac{2M}{b-t},$$

а потому

$$\|R(t, kA) - R(t, A)\| \leq \frac{3M}{b-t},$$

причем $3M/(b-t) \in L^1(\tau)$. Кроме того, для любого $t \in [0, b)$ имеем с учетом непрерывности резольвенты на $[0, b)$

$$\|R(t, kA) - R(t, A)\| = \left\| \frac{1}{k} R\left(\frac{t}{k}, A\right) - R(t, A) \right\| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow 1+0$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\|g(kA) - g(A)\| \leq \int_0^b \|R(t, kA) - R(t, A)\| d\tau(t) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 1+0),$$

что и требовалось доказать.

Определение 1.4. Пусть $b > 0$. Положим

$$Q_b = \{\varphi \mid \varphi = 1/g, g \in R_b\}.$$

Заметим, что $Q[0, b] \supset Q_b$.

Приведем лемму, которая даёт интегральное представление функций класса Q_b .

Лемма 2.2. Для того чтобы функция φ принадлежала классу Q_b , необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде (1.3) с $a = 0$, где $h \in R_b$. В частности, Q_b есть конус.

Доказательство. Если функция φ принадлежит Q_b , то она имеет вид (1.3) с $a = 0$, причем функция h в этом представлении принадлежит R_b , так как она непрерывна в точке $z = b$ вслед за φ .

Обратно, если функция φ имеет вид (1.3) с $a = 0$, причем $h \in R_b$, то, в силу теоремы об интегральном представлении функций класса $Q[a, b]$ из [3], она принадлежит $Q[0, b]$ и потому имеет вид $1/g$, где $g \in R[0, b]$. А так как φ непрерывна в точке b , то $g \in R_b$, что и требовалось доказать.

Определение 2.5. Пусть $A \in V_b(X)$, $\varphi \in Q_b$.

Определим оператор $\varphi(A)$ с областью определения $D(A)$ формулой (1.5), в которой $h(A)$ понимается в смысле определения 2.3. Возникающее функциональное исчисление будем называть Q_b -исчислением.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2.1. Для любой функции $g \in R_b$ и любого оператора $A \in V_b(X)$ оператор $g(A)$ имеет левый обратный, задаваемый формулой

$$g(A)^{-1} = \varphi(A), \quad (2.1)$$

где $\varphi = 1/g$ и правая часть понимается в смысле Q_b -исчисления.

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 2.3. Для любых $g, h \in R_b$ и любого $A \in V_b(X)$ операторы $g(A)$ и $h(A)$ коммутируют.

Доказательство. В силу свойств голоморфного функционального исчисления

$$g(kA)h(kA) = h(kA)g(kA) \quad (k > 1),$$

осталось положить здесь $k \rightarrow 1+0$ и воспользоваться леммой 2.1.

Лемма 2.4. Для $g \in R_b$, $\varphi \in Q_b$ и любого $A \in V_b(X)$ операторы $g(A)$ и $\varphi(A)$ коммутируют в том смысле, что $g(A)\varphi(A) \subset \varphi(A)g(A)$. Кроме того, $\text{Im } g(A) \subset D(A)$ и оператор $\varphi(A)g(A)$ ограничен.

Доказательство. Покажем сначала, что при всех $x \in X$ справедливо включение

$$g(A)x \in D(A) (= D(\varphi(A))).$$

В самом деле, если τ – представляющая мера для g , то функция $t \mapsto AR(t, A)$ принадлежит $L^1(\tau)$, поскольку при $t \in [0, b]$

$$\|AR(t, A)\| = \|-I + tR(t, A)\| \leq 1 + \frac{bM}{b-t}.$$

Так как функция $t \mapsto R(t, A)$ также принадлежит $L^1(\tau)$, а оператор A замкнут, то при всех $x \in X$ имеем

$$A \int_0^1 R(t, A)x d\tau(t) = \int_0^1 AR(t, A)x d\tau(t),$$

причем левая часть существует, т. е. $g(A)x \in D(A)$. Более того, так как операторы A и $R(t, A)$ коммутируют, то из доказанного равенства следует, что операторы A и $g(A)$ тоже коммутируют. С учетом предыдущей леммы получаем теперь, что при $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \varphi(A)g(A)x &= \\ &= \alpha g(A)x + \beta Ag(A)x - h(A)g(A)x = \\ &= g(A)\varphi(A)x. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\varphi(A)g(A)$ – замкнутый оператор, определенный на всем X , и применить теорему о замкнутом графике.

Доказательство теоремы 2.1. По теореме 1.1 оператор $g(kA)$ имеет левый обратный $\varphi(kA)$. Следовательно, при $x \in D(A)$ с учетом лемм о коммутировании имеем

$$x - \varphi(A)g(A)x = g(kA)\varphi(kA)x - g(A)\varphi(A)x.$$

Пусть $y_k := \varphi(kA)x$, $y := \varphi(A)x$ ($x \in D(A)$). Тогда $y_k = \alpha x + \beta kAx - h(kA)x \rightarrow y$ ($k \rightarrow 1+0$) (лемма 2.1) и, в частности, направленность y_k ограничена: $\|y_k\| \leq C$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \|x - \varphi(A)g(A)x\| &= \|g(kA)y_k - g(A)y\| \leq \\ &\leq \|g(kA)y_k - g(A)y_k\| + \|g(A)y_k - g(A)y\| \leq \\ &\leq \|g(kA) - g(A)\|C + \|g(A)y_k - g(A)y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow 1+0$. Таким образом, $\varphi(A)g(A)x = x$ при $x \in D(A)$. Так как в левой части последнего

равенства стоит ограниченный оператор, то по непрерывности оно справедливо при всех $x \in X$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.1. Пусть $\varphi \in Q_b$, $g = 1/\varphi$ и $A \in V_b(X)$. Тогда оператор $\varphi(A)$ ограниченно обратим и обратный к нему оператор можно вычислить по формуле

$$\varphi(A)^{-1} = g(A),$$

где правая часть понимается в смысле R_b -исчисления.

3 Некоторые приложения

Теорема 2.1 означает, что уравнение

$$g(A)x = y$$

с оператором $A \in V_b(X)$ имеет для любого $y \in D(A)$ единственное решение $x = \varphi(A)y$, где $\varphi = 1/g \in Q_b$, и правая часть понимается в смысле Q_b -исчисления. При этом важно отметить, что, как и в работе [4], оператор $\varphi(A)$ можно вычислить с помощью формул обращения интегрального преобразования Стильтеса. Аналогичное замечание можно сделать и по поводу следствия 1. Приведем две теоремы, служащие иллюстрацией этого тезиса. В первой из них рассматривается уравнение

$$-bx + (bI - A)\ln(A - bI)A^{-1}x = y (y \in D(A)).$$

Теорема 3.1. Пусть $b > 0$, $A \in V_b(X)$.

Уравнение

$$\int_0^b (b-t)R(t, A)x dt = y$$

для любого $y \in D(A)$ имеет единственное решение

$$x = \frac{2}{3b}y - \frac{2}{b^2}Ay - \int_0^b \frac{(b-t)R(t, A)y dt}{(-b + (b-t)\ln \frac{b-t}{t})^2 + (\pi(b-t))^2}.$$

Доказательство. Как показано в примере 2.2, функция $g(z) = -b + (b-z)\ln((z-b)/z)$, где \ln обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, принадлежит классу R_b и имеет представляющую меру, сосредоточенную на полуинтервале $[0, b)$ и равную на нём $(b-t)dt$. Стало быть, функция

$$\varphi(z) = 1/(-b + (b-z)\ln((z-b)/z))$$

принадлежит Q_b , а исходное уравнение имеет вид $g(A)x = y$. Имея целью применить для его решения теорему 2.1, получим для φ представление (1.3). Найдём α и β из формул (1.4):

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(-b + (b-x)\ln \frac{x-b}{x})} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{b}{t}(-b + (b + \frac{b}{t})(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)))} = -\frac{2}{b^2},$$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-b + (b-x)\ln \frac{x-b}{x}} + \frac{2x}{b^2} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{b}{3}t^2 + o(t^2)}{\frac{b^2}{2}t^2 + o(t^2)} = \frac{2}{3b}$$

(мы воспользовались заменой $t = -1 + (x-b)/x$).

Для получения интегрального представления функции $h \in R_b$ из (3) воспользуемся комплексной формулой обращения преобразования Стильтеса (см., например, [6, с. 70, формула 264], или [7, с. 340, теорема 7b]). В нашем случае функция $h(z) = \alpha + \beta z - \varphi(z)$ принадлежит R_b . Будем искать ее интегральное представление в виде

$$h(z) = \int_0^b \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Тогда функция

$$F(\zeta) := h(-\zeta) = \int_0^b \frac{f(t)dt}{t+\zeta}$$

может рассматриваться как преобразование Стильтеса функции f , сосредоточенной на полуинтервале $[0, b)$. Поэтому в соответствии с упомянутой формулой обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} (F(-x-i0) - F(-x+i0)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (h(x+i0) - h(x-i0)) = \quad (3.1)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (\varphi(x-i0) - \varphi(x+i0)).$$

Заметим, что при $\text{Re}(z) \in (0, b)$ для главного значения логарифма справедливо равенство $\ln((z-b)/z) = \ln(z-b) - \ln z$. Следовательно,

$$\varphi(x \pm i0) =$$

$$= \frac{1}{-b + (b-x \mp i0)(\ln((x-b) \pm i0) - \ln(x \pm i0))}.$$

Воспользовавшись для вычисления правой части формулой $\ln(x \pm i0) = \ln|x| \pm i\pi\theta(-x)$, где θ – функция Хевисайда, имеем

$$\varphi(x \pm i0) =$$

$$= \frac{1}{-b + (b-x \mp i0) \left(\ln \frac{|x-b|}{|x|} \pm i\pi\theta(-x+b) \mp i\pi\theta(-x) \right)},$$

что после преобразований приобретает вид

$$\varphi(x \pm i0) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{-b + (b-x)\ln \frac{x-b}{x}}, & \text{если } x \in (-\infty, 0) \cup [b, \infty); \\ \frac{1}{-b + (b-x)(\ln \frac{b-x}{x} \pm i\pi)}, & \text{если } x \in [0, b). \end{cases}$$

Подставляя это в (3.1), заключаем, что искомая функция f сосредоточена на полуинтервале $[0, b)$ и имеет на нем вид

$$f(x) = \frac{b-x}{(-b+(b-x)\ln\frac{b-x}{x})^2+(\pi(b-x))^2},$$

а потому

$$\varphi(z) = \frac{2}{3b} - \frac{2}{b^2}z - \int_0^b \frac{(b-t)dt}{\left((-b+(b-t)\ln\frac{b-t}{t})^2+(\pi(b-t))^2\right)(t-z)}$$

(после замены $x = \ln\frac{b-t}{t}$ эта формула может быть проверена также с помощью вычетов, см. [8, с. 230, формула (3.10)]. Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 2.1 и определением 2.5.

Проиллюстрируем предыдущую теорему следующим примером.

Пример 3.1. Пусть $A = \frac{d}{dt} + bI$ – оператор из примера 2.1.

Имеем при $x \in L^p(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_0^b (b-t)R(t, A)x(u)dt &= \int_0^b (b-t)r_{t-b} * x(u)dt = \\ &= \int_0^b (b-t) \left(-\int_0^\infty e^{(t-b)s} x(u-s)ds \right) dt = \\ &= \int_0^\infty x(u-s) \left(\int_0^b (t-b)e^{(t-b)s} dt \right) ds = \\ &= \int_0^\infty x(u-s) \frac{(bs+1)e^{-bs}-1}{s^2} ds \end{aligned}$$

(теорема Фубини применима, так как функция

$$\frac{(bs+1)e^{-bs}-1}{s^2}$$

принадлежит классу $L^q(\mathbb{R}_+)$).

Следовательно, уравнение

$$\int_0^b (b-t)R(t, A)x(u)dt = y(u)$$

имеет вид

$$\int_0^\infty x(u-s) \frac{(bs+1)e^{-bs}-1}{s^2} ds = y(u)$$

и может рассматриваться как уравнение Винера-Хопфа первого рода. В силу теоремы 3.1 для любого $y \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ последнее уравнение имеет единственное решение в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$), задаваемое равенством

$$\begin{aligned} x(u) &= -\frac{4}{3b}y(u) - \frac{2}{b^2}y'(u) + \\ &+ \int_0^b \frac{(b-t) \int_0^\infty e^{(t-b)s} y(u-s)ds}{(-b+(b-t)\ln\frac{b-t}{t})^2+(\pi(b-t))^2} dt. \end{aligned}$$

Теорема 3.2. Пусть $b > 0$ и числа α и β удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} \alpha - \frac{b^2}{2} \geq 0, \\ \alpha + \beta b + \frac{b^2}{2} \leq 0, \\ \beta < 0. \end{cases}$$

Если $A \in V_b(X)$, то уравнение

$$\alpha x + \beta Ax - \int_0^b t(b-t)R(t, A)xdt = y$$

для любого $y \in X$ имеет единственное решение

$$x = \int_0^b \frac{R(t, A)dt}{\left(\alpha - \frac{b^2}{2} + (\beta + b)t - t(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2 + \pi^2}.$$

Доказательство. Из легко проверяемого равенства

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{b^2}{2} + (\beta + b)z - z(b-z)\ln\frac{z-b}{z} &= \\ &= \alpha + \beta z - \int_0^b \frac{t(b-t)dt}{t-z} \end{aligned}$$

следует, что функция

$$\varphi(z) = \alpha - \frac{b^2}{2} + (\beta + b)z - z(b-z)\ln\frac{z-b}{z},$$

где \ln обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, а α и β удовлетворяют условиям теоремы, принадлежит классу \mathcal{Q}_b и в качестве представляющей имеет меру, сосредоточенную на полуинтервале $[0, b)$ и равную на нём $t(b-t)dt$. Следовательно, функция $g = 1/\varphi$ принадлежит R_b . Исходное уравнение имеет вид $\varphi(A)x = y$. С целью применить следствие теоремы 2.1 установим для функции g представление (1.1), где положено $a = 0$ и $d\tau(t) = f(t)dt$. Как и в доказательстве теоремы 3.1, воспользовавшись комплексной формулой обращения преобразования Стильтjesа, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} (g(x+i0) - g(x-i0)).$$

При этом

$$\begin{aligned} g(x \pm i0) &= \\ &= \frac{1}{\alpha - \frac{b^2}{2} + (\beta + b)x - x(b-x)(\ln((x-b) \pm i0) - \ln(x \pm i0))}. \end{aligned}$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получаем после выкладок, аналогичных выкладкам, использовавшимся в доказательстве теоремы 3.1, что искомая функция f сосредоточена на полуинтервале $[0, b)$ и имеет на нем вид

$$f(t) = \frac{1}{\left(\alpha - \frac{b^2}{2} + (\beta + b)t - t(b-t) \ln \frac{b-t}{t}\right)^2 + \pi^2},$$

а потому

$$g(z) = \int_0^b \frac{dt}{\left(\alpha - \frac{b^2}{2} + (\beta + b)t - t(b-t) \ln \frac{b-t}{t}\right)^2 + \pi^2} (t - z)$$

(как и в доказательстве теоремы 3.1, эта формула может быть проверена с помощью вычетов, см. [8, с. 230, формула (3.10)]. Для завершения доказательства осталось воспользоваться следствием 2.1 и определением 2.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука, 1973. – 552 с.
2. Атвиновский, А.А. Об однозначной разрешимости одного класса операторных уравнений / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах. Т. 1. Математический анализ.

– Минск : Ин-т матем. НАН Беларуси, 2012. – С. 28–32.

3. Атвиновский, А.А. Об интегральном представлении одного класса аналитических функций / А.А. Атвиновский // Изв. Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 3–7.

4. Миротин, А.Р. Обращение операторно-монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин // Труды института математики. – Минск. – 2004. – Т. 12, № 1. – С. 104–108.

5. Haase, M. The functional calculus for sectorial operators / M. Haase. – Basel : Birkhauser Verlag, 2006. – 392 p.

6. Брычков, Ю.А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М., 1977. – 286 с.

7. Widder, D.V. The Laplace transform / D.V. Widder. – Princeton, 1946. – 406 p.

8. Евграфов, М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – М. : Наука, 1991. – 447 с.

Поступила в редакцию 23.04.13.

УДК 512.542

О p -НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.А. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON p -NILPOTENCY OF ONE CLASS OF FINITE GROUPS

V.A. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Подгруппа H называется модулярной в группе G , если она является модулярным элементом (в смысле Куроша) решетки $L(G)$ всех подгрупп группы G . Модулярным ядром H_{mG} подгруппы H в группе G называется подгруппа, порожденная всеми теми подгруппами из H , которые модулярны в G . В работе, используя понятие m -добавляемой подгруппы, которое является расширением понятий модулярной и добавляемой подгрупп соответственно, получен новый признак p -нильпотентности группы.

Ключевые слова: конечная группа, p -нильпотентная группа, модулярная подгруппа, модулярное ядро, m -добавляемая подгруппа, максимальная подгруппа, циклическая подгруппа, силовская p -подгруппа.

A subgroup H of a group G is called modular in G if H is a modular element (in sense of Kurosh) of the lattice $L(G)$ of all subgroups of G . The subgroup of H generated by all modular subgroups of G contained in H is called the modular core of H and denoted by H_{mG} . In the paper a new criterion of the p -nilpotency of a group was obtained on the basis of the concept of the m -supplemented subgroup which is the extension of concepts of modular and supplemented subgroups respectively.

Keywords: finite group, p -nilpotent group, modular subgroup, modular core, m -supplemented subgroup, maximal subgroup, cyclic subgroup, Sylow p -subgroup.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G , если выполняются следующие условия:

$$(1) \langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z \text{ для всех } X \leq G,$$

$Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и

$$(2) \langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z \text{ для всех } Y \leq G,$$

$Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [1, гл. 2, с. 43]) решетки всех подгрупп группы. Понятие модулярной подгруппы впервые анализировалось в работе Р. Шмидта [2] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [1, гл. 5] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеристик различных классов групп. Подгруппа, порожденная двумя модулярными подгруппами, сама является модулярной (см. раздел 5.1 в [1]). Таким образом, каждая подгруппа H группы G обладает наибольшей содержащейся в ней модулярной подгруппой H_{mG} группы G . Эту подгруппу H_{mG} называют модулярным ядром подгруппы

H . Базируясь на понятии модулярного ядра, в работе [3] было введено следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

Определение. Подгруппа H группы G называется m -добавляемой в G , если в G существует такая подгруппа K , что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть G – группа и P – силовская p -подгруппа группы G , где p – простой делитель $|G|$. Предположим, что по крайней мере одно из следующих утверждений выполняется:

(i) $(p-1, |G|) = 1$ и каждая максимальная подгруппа из P , не имеющая p -нильпотентного добавления в G , является m -добавляемой в G ;

(ii) $(p-1, |G|) = 1$ и каждая циклическая подгруппа из P простого порядка или порядка 4 (если $p = 2$ и P неабелева), не имеющая p -нильпотентного добавления в G , является m -добавляемой в G .

Тогда G является p -нильпотентной группой.

Мы докажем эту теорему в разделе 3. Используемая в статье терминология стандартна и

при необходимости мы отсылаем читателя к монографиям [4], [5], [6].

1 Некоторые предварительные результаты

Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

Лемма 1.1 [1, гл. 5, раздел 5.1]. Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) если M_1 и M_2 являются модулярными в G подгруппами, то $\langle M_1, M_2 \rangle$ – модулярная в G подгруппа;

(б) если N – нормальная в G подгруппа, то N является модулярной в G подгруппой;

(с) если N – нормальная в G подгруппа и M – модулярная в G подгруппа, то MN/N – модулярная в G/N подгруппа.

Символом $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G , у которой все G -главные факторы циклически ($Z_{\mathfrak{U}}(G) = 1$, если в G нет неединичных нормальных подгрупп с таким свойством).

Лемма 1.2 [1, гл. 5, теорема 5.2.5]. Если подгруппа H модулярна в G , то

$$H^G / H_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G / H_G).$$

Общие свойства t -добавляемых подгрупп описывает следующая лемма.

Лемма 1.3 [3]. Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если H является t -добавляемой в G подгруппой и $H \leq M \leq G$, то H является t -добавляемой в M подгруппой.

(2) пусть N – нормальная подгруппа в G и $N \leq H$. Тогда и только тогда H является t -добавляемой в G подгруппой, когда H/N является t -добавляемой в G/N подгруппой;

(3) пусть N – нормальная подгруппа группы G , H – t -добавляемая подгруппа в G и $(|H|, |N|) = 1$. Тогда HN – t -добавляемая подгруппа в G .

Пусть \mathfrak{F} – любой класс групп, содержащий все единичные группы. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ используется для обозначения пересечения всех нормальных подгрупп N группы G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Класс групп \mathfrak{F} называется формацией, если либо $\mathfrak{F} = \emptyset$, либо $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ и для каждой группы G любой гомоморфный образ её фактор-группы $G/G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит \mathfrak{F} . Напомним, что формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если \mathfrak{F} содержит каждую группу G такую, что $G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(G)$.

Лемма 1.4 [4, гл. VI, теорема 24.2]. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и G – минимальная не- \mathfrak{F} -группа с разрешимым \mathfrak{F} -кордикалом $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда:

(а) $P = G^{\mathfrak{F}}$ является p -группой для некоторого простого p и P – группа экспоненты p или экспоненты 4 (если P является неабелевой 2-группой).

(б) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G и $(P/\Phi(P)) \times (G/C_G(P/\Phi(P))) \notin \mathfrak{F}$.

Лемма 1.5. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G и $L \leq O_p(G)$. Если некоторая минимальная подгруппа из L является t -добавляемой в G , то $|L| = p$.

Доказательство. Предположим, что $|L| > p$. Пусть R – минимальная подгруппа в L и R является t -добавляемой в G . Тогда существует такая подгруппа T в G , что $RT = G$ и $R \cap T \leq R_{mG}$. Предположим, что $T < G$. Тогда $G = L \lambda T$, что влечет $RT \neq G$. Это противоречие показывает, что $T = G$. Тогда $R = R_{mG}$ – модулярная подгруппа в G . Значит, по лемме 1.2, $R^G/R_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/R_G)$. Но $R_G = 1$ и $R^G \neq 1$. Следовательно, $R^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ и $L \cap Z_{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$, что влечет $L \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Значит, $|L| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 1.6 [7]. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа из P обладает p -нильпотентным дополнением в G , то G является p -нильпотентной группой.

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 1.7. Пусть G – группа, $A, B \leq G$ и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ для всех $x \in G$.

Пусть $L(G)$ – решетка всех подгрупп группы G . Если $X, Y \in L(G)$ и $X \leq Y$, то множество $[X, Y] = \{Z \in L(G) \mid X \leq Z \leq Y\}$ называется интервалом.

Лемма 1.8 [1, гл. 2, теорема 2.1.5]. Пусть G – группа, M – её подгруппа. Следующие свойства эквивалентны:

(а) M – модулярная подгруппа группы G ;

(б) для любой подгруппы $A \leq G$ отображение $\phi_{A,M} : [A \cap M, A] \rightarrow [M, \langle A, M \rangle]; X \mapsto \langle X, M \rangle$

является изоморфизмом.

2 Доказательство основной теоремы

Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G – контрпример наименьшего порядка. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G .

(1) $(p-1, |G|) = 1$ и каждая максимальная подгруппа из P , не имеющая p -нильпотентного добавления в G , является t -добавляемой в G .

Предположим, что это не так. Тогда по условию $(p-1, |G|) = 1$ и каждая циклическая подгруппа из P простого порядка или порядка 4 (если $p = 2$ и P неабелева), не имеющая p -нильпотентного добавления в G , является m -добавляемой в G . Так как G не является p -нильпотентной группой, и поэтому G имеет p -замкнутую подгруппу Шмидта $H = H_p \rtimes H_q$ согласно [8, гл. IV, теорема 5.4]. Не нарушая общности, можем полагать, что $H_p \leq P$. Пусть $\Phi = \Phi(H_p)$. По лемме 1.4, H_p / Φ является нецентральный главным фактором группы H и H_p является группой экспоненты p или экспоненты 4 (если $p = 2$ и H_p – неабелева). Значит, $|H_p / \Phi| > p$, поскольку $(p-1, |H|) = 1$. Это влечет, что P – нециклическая группа. Пусть X / Φ – минимальная подгруппа в H_p / Φ , $x \in X \setminus \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$. Следовательно, L является m -добавляемой подгруппой в G . Предположим, что $L_{mG} \neq L$. Тогда для некоторой собственной подгруппы T из G имеем $LT = G$ и $H = L(T \cap H)$. Понятно, что $T \cap H < H$. Так как $\Phi \leq \Phi(H)$, получаем $\Phi(T \cap H) < H$. Пусть L_1 – максимальная в L подгруппа. Заметим, что $L_1 \leq \Phi$. Значит, $|H : \Phi T| = p$. Следовательно, $|H_p / \Phi| = |H / \Phi : \Phi T / \Phi| = |H : \Phi T| = p$. Это противоречие показывает, что $L_{mG} = L$ и L является модулярной подгруппой в G . Значит, $L\Phi / \Phi = X / \Phi$ является модулярной подгруппой в H / Φ по лемме 1.1 (а)–(с). Следовательно, каждая минимальная подгруппа из H_p / Φ является m -добавляемой в H / Φ . Таким образом, $|H_p / \Phi| = p$ по лемме 1.5. Полученное противоречие завершает доказательство (1).

(2) Если $N \leq O_p(G)$ или N абелева, то G/N p -нильпотентна.

Если $P \leq N$, то G/N является p' -группой, поэтому G/N p -нильпотентна. Предположим теперь, что $P \not\leq N$. Ясно, что

$$PN/N \in \text{Syl}_p(G/N).$$

Пусть V/N – максимальная подгруппа из PN/N . Тогда $V = WN$ для некоторой максимальной подгруппы W из P . Если W имеет p -нильпотентное добавление T в G , то $TN/N = T/T \cap N$ является p -нильпотентным добавлением к V/N в G/N . С другой стороны, если V является m -добавляемой подгруппой в G , то V/N является m -добавляемой в G/N

по лемме 1.3 (2) (3). Ввиду (1), условие теоремы выполняется для G/N , и поэтому G/N p -нильпотентна по выбору группы G .

(3) $O_{p'}(G) = 1$. (Это следует из (2) и выбора группы G).

(4) Если $P \leq U < G$, то U p -нильпотентна.

Пусть V – максимальная подгруппа из P , которая не имеет p -нильпотентного добавления в U . Если V имеет p -нильпотентное добавление T в G , то $T \cap U$ является p -нильпотентным добавлением к V в U , что противоречит выбору V . Поэтому V не имеет p -нильпотентного добавления в G и V является m -добавляемой в G . Тогда V является m -добавляемой в U по лемме 1.3 (1). Условие теоремы выполняется для U , и поэтому U p -нильпотентна по выбору группы G .

(5) G является p -разрешимой группой.

Ввиду (2), необходимо лишь показать, что в G есть абелева минимальная нормальная подгруппа. Предположим, что это не так. Тогда $p = 2$ согласно теореме Фейта-Томсона о разрешимости групп нечетного порядка.

Покажем, что для некоторой максимальной подгруппы V из P имеет место $V_{mG} \neq 1$. Предположим, что $V_{mG} = 1$ для любой максимальной подгруппы V из P . Согласно условию, в G найдется такая подгруппа T , что $G = VT$ и либо T является 2-нильпотентной группой, либо $V \cap T \leq V_{mG} = 1$. Во втором случае T является дополнением к V в G , и поэтому T является 2-нильпотентной группой [8, гл. IV, теорема 2.8], так как порядок силовской 2-подгруппы из T равняется 2. Применяя лемму 1.6, получаем, что G является 2-нильпотентной группой. Полученное противоречие показывает, что существуют такие максимальные в P подгруппы V , что $V_{mG} \neq 1$. Пусть $L = V_{mG}$. Тогда по лемме 1.2 получаем, что $L^G / L_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/L_G)$. Предположим, что $L_G \neq 1$. Пусть R – минимальная нормальная в G подгруппа и $R \leq L_G$. Тогда R абелева. Это противоречие показывает, что $L_G = 1$. Поэтому $L^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, а значит, $Z_{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$. Но $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ – нормальная подгруппа в G , и она имеет циклические G -главные факторы. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G , содержащаяся в $Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Но тогда R абелева, что противоречит нашему предположению о группе G . Таким образом, утверждение (5) доказано.

Заключительное противоречие. Пусть R – произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда ввиду (3) и (5), R

является p -подгруппой и, значит, G/R является p -нильпотентной группой согласно (2).

Хорошо известно, что класс \mathfrak{F} всех p -нильпотентных групп является насыщенной формацией [8, с. 698]. Поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G , $N \not\leq \Phi(G)$ и G/N является p -нильпотентной группой. Следовательно, G – примитивная группа, и поэтому $N = C_G(N) = F(G)$ согласно [5, гл. А, теорема 15.2]. Пусть M – максимальная подгруппа из G такая, что $G = N \rtimes M$, и пусть $M_p \in \text{Syl}_p(M)$. Так как $M \cong G/N$ p -нильпотентна, то M имеет нормальную холлову p' -подгруппу E . Ввиду (3), $M = N_G(E)$. Пусть V – максимальная подгруппа из P такая, что $M_p \leq V$ и $N \not\leq V$. Тогда $VM \neq G$, и поэтому $VM^x \neq G$ для всех $x \in G$ по лемме 1.7. Действительно, $\frac{|V \parallel M|}{|V \cap M|} = \frac{|V \parallel M|}{|M_p|} \neq |N \parallel M|$, т. к. $\frac{|V|}{|M_p|} = |V \cap N| \neq |N|$. Предположим, что $V_{mG} = 1$. Согласно условию, в G найдется такая подгруппа T , что $G = VT$ и либо T является p -нильпотентной группой, либо $V \cap T \leq V_{mG} = 1$. Заметим, что во втором случае у подгруппы T порядок силовской p -подгруппы равен p , и поэтому T является p -нильпотентной группой, поскольку $(p-1, |G|) = 1$. Пусть B – p' -холлова подгруппа из T . Тогда B – холлова p' -подгруппа из G . Так как G p -разрешима, то произвольные две холловы p' -подгруппы из G сопряжены по [8, гл. VI, теорема 1.7]. Значит, $E^x = B$ для некоторого $x \in G$ и $E^x \in \text{Hall}_{p'}(M^x)$. Так как M p -нильпотентна, то $M^x = N_G(E^x) = N_G(B)$. Ввиду того что E^x нормальна в T , получаем $T \leq N_G(E^x) = M^x$. Но тогда $VT = G = VM^x$. Полученное противоречие показывает, что $L = V_{mG} \neq 1$. Согласно лемме 1.2,

$$L^G / L_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G / L_G).$$

Предположим, что $L_G \neq 1$. Тогда $N \leq L_G$, а это влечёт $N \leq V$. Полученное противоречие показывает, что $L_G = 1$. Значит, $L^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, и поэтому $Z_{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$. Но тогда $N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ и $|N| = p$. Приходим к противоречию с $(p-1, |G|) = 1$, которое завершает доказательство теоремы.

3 Приложения основной теоремы

Из доказанной выше теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 3.1 [9]. Пусть G – группа нечетного порядка и пусть p – наименьший простой делитель $|G|$. Если все максимальные подгруппы любой силовской p -подгруппы группы G являются добавляемыми в G , то G является p -нильпотентной группой.

Напомним, что подгруппа H группы G называется s -нормальной [10] в G , если существует такая нормальная подгруппа T из G , что $TH = G$ и $H \cap T \subseteq H_G$.

Следствие 3.2 [11]. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа из G . Если каждая максимальная подгруппа из P является s -нормальной в G , то G p -нильпотентна.

Напомним, что подгруппа H группы G называется s -добавляемой [12] в G , если существует такая подгруппа K из G , что $G = HK$ и $H \cap K \subseteq H_G$.

Следствие 3.3 [13]. Пусть p – простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа из G . Если каждая максимальная подгруппа из P является s -добавляемой в G и $(|G|, p-1) = 1$, то G p -нильпотентна.

В заключении мы построим пример, показывающий, что в общем случае класс всех t -добавляемых подгрупп группы является более широким, чем класс всех ее модулярных подгрупп.

Пример 3.4. Пусть

$$G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

– группа диэдра порядка 8. Рассмотрим ее подгруппы $H_1 = \langle b \rangle$ и $H_2 = \langle ba \rangle$. Ясно, что отображение

$$[1, H_1] = [H_1 \cap H_2, H_1] \rightarrow [H_2, \langle H_1, H_2 \rangle] = [H_2, G]$$

не является изоморфизмом. Значит, применяя лемму 1.8, подгруппы H_1 и H_2 не являются модулярными подгруппами группы G , но легко заметить, что они являются t -добавляемыми в G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
2. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.
3. Васильев, В.А. Об одном обобщении модулярных подгрупп / В.А. Васильев, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2011. – Т. 63, №10. – С. 1314–1325.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

5. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin etc : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
6. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht etc : Springer, 2006. – 385 p.
7. Shemetkov, L.A. On the $\mathfrak{X}\Phi$ -hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2009. – Vol. 322. – P. 2106–2117.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin etc : Springer, 1967. – 793 s.
9. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 161–166.
10. Wang, Y. c -normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
11. Guo, X. On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow p -subgroups / X. Guo, K.P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80. – P. 561–569.
12. Ballester-Bolinches, A. c -supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang, X.Y. Guo // Glasgow Math. J. – 2000. – Vol. 42. – P. 383–389.
13. Guo, X. On p -nilpotency of finite groups with some subgroups c -supplemented. / X. Guo, K.P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 10. – P. 250–266.

Поступила в редакцию 27.05.13.

УДК 517.444

ТЕОРЕМА О СВЕРТКЕ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА

И.С. Ковалева, А.Р. Миروتин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

CONVOLUTION THEOREM FOR THE MARKOV – STIELTJES TRANSFORMATION

I.S. Kovaliova, A.R. Mirotin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Устанавливается теорема о свертке для преобразования Маркова – Стильтеса и дается ее применение к решению одного класса сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральное преобразование, функция Маркова – Стильтеса, свертка, интегральное уравнение.

A convolution theorem for the Markov – Stieltjes transformation is stated and its application to a class of singular integral equations is given.

Keywords: integral transform, Markov – Stieltjes function, convolution, integral equation.

Введение

Общее определение преобразования Стильтеса мер над полугруппой было дано в [1, глава 6]. В случае аддитивной полугруппы Z_+ неотрицательных целых чисел оно приводит к следующему интегральному преобразованию.

Определение 0.1 [1]. Преобразование Маркова – Стильтеса измеримой функции $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть функцией, определяемую соотношением

$$Sf(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt. \quad (0.1)$$

(Терминология мотивирована тем обстоятельством, что в теории приближений функции вида (0.1) называются функциями типа Маркова – Стильтеса, см., например, [2]). При этом предполагается, что интеграл существует как интеграл Лебега или в смысле главного значения. Последнее означает, что при $z \in [1, \infty)$ он понимается как предел

$$P \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{t \in [0, 1]; |t-z^{-1}| > \varepsilon\}} \frac{f(t)}{1-tz} dt.$$

Пример 0.1. Пусть $f(t) = (t(1-t))^{-1/2}$. С помощью замены $t = x^2 / (1+x^2)$ нетрудно подсчитать, что в этом случае $Sf(z) = (1-z)^{-1/2}$, если $z \notin [1, \infty)$ (берется главное значение корня), но $Sf(z) = 0$ при $z \in [1, \infty)$.

Как известно, свертка является одной из важнейших операций в анализе и его приложениях (см., например, [3]). Теорема о свертке для классического преобразования Стильтеса была

доказана в работе [4], там же было дано ее применение к решению одного класса сингулярных интегральных уравнений. В настоящей работе аналогичные результаты устанавливаются для преобразования Маркова – Стильтеса. Указаны также и другие следствия основной теоремы.

1 Свойства преобразования Маркова – Стильтеса

Нам понадобится ряд свойств рассматриваемого преобразования.

Теорема 1.1. При $f \in L^1[0, 1]$ функция Sf определена и аналитична в комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $[1, \infty)$.

Доказательство. При $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ интеграл в (0.1) существует как интеграл Лебега, поскольку при этих z имеет место неравенство

$$\min_{t \in [0, 1]} |1-tz| = |1-t_z z| > 0.$$

Докажем аналитичность функции Sf в области $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. Для любой точки $s_0 \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ рассмотрим окрестность $U(s_0)$, замыкание $\bar{U}(s_0)$ которой не пересекается с лучом $[1, \infty)$. Тогда

$$M = \max_{\substack{s \in \bar{U}(s_0) \\ 0 \leq t \leq 1}} \frac{1}{(1-ts)^2} = \frac{1}{\min_{\substack{s \in \bar{U}(s_0) \\ 0 \leq t \leq 1}} (1-ts)^2} = \frac{1}{(1-t_s s_1)^2} < \infty.$$

Поэтому при всех $s \in U(s_0), t \in [0, 1]$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{f(t)}{1-ts} \right) \right| = \left| \frac{tf(t)}{(1-ts)^2} \right| \leq M |f(t)|.$$

Поскольку $M[f(t)] \in L^1[0,1]$, функция Sf дифференцируема в любой точке $s_0 \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ по теореме о дифференцировании интеграла Лебега, зависящего от параметра, что и требовалось доказать.

Замечание 1.1. Пример 0.1 показывает, что теорему 1.1 нельзя усилить.

Теорема 1.2 (единственности). Пусть $f \in L^1[0,1]$ и множество $E \subset \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ имеет предельную точку, принадлежащую E . Если $Sf|_E = 0$, то $f = 0$.

Доказательство. Заметим сначала, что $Sf(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ в силу теоремы 1.1. Разлагая ядро оператора в сумму бесконечной геометрической прогрессии и применяя теорему Лебега о почленном интегрировании ряда, получаем, что при всех $x \in (0,1)$

$$Sf(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tx} dt = \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^{\infty} x^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\int_0^1 f(t) t^n dt \right) = 0.$$

(Применимость теоремы Лебега следует из сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\int_0^1 |f(t)| t^n dt \right)$$

при всех $x \in (0,1)$, что, в свою очередь, вытекает из ограниченности коэффициентов ряда: $\int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt$.)

Таким образом, $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$ для любого целого $n \geq 0$, а потому

$$\int_0^1 f(t) p(t) dt = 0$$

для любого алгебраического многочлена p . В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса отсюда следует, что $f = 0$ п. в. (можно считать функцию f вещественнозначной; поскольку для любого алгебраического многочлена p

$$\int_0^1 p(t) f^+(t) dt = \int_0^1 p(t) f^-(t) dt,$$

где f^\pm – положительная и отрицательная части f , то $f^+ = f^-$ п. в. в силу теоремы Вейерштрасса и теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в $C[0,1]$). Теорема доказана.

Известно (см., например, [1], [5]), что при $1 < p < \infty$ преобразование Гильберта

$$Hf(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

есть ограниченный оператор в $L^p(\mathbb{R})$ (теорема М. Рисса), и справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf(z)}{z-t} dz \quad (1.1)$$

(интегралы понимаются в смысле главного значения). Отсюда легко следует, что преобразование Маркова – Стильеса есть ограниченный оператор в $L^p[0,1]$ ($1 < p < \infty$) (но он не ограничен в $L^1[0,1]$, см. [1]).

Из (1.1) нетрудно получить формулу обращения для преобразования Маркова – Стильеса.

Теорема 1.3. Если $f \in L^p[0,1]$ ($1 < p < \infty$), то при п. в. $x \in \mathbb{R}$ существует преобразование Маркова-Стильеса $f^*(x) := Sf(x)$, и справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(x)}{1-tx} dx.$$

Доказательство. Полагая в определении преобразования Маркова – Стильеса

$$z = 1/y \quad (y \in \mathbb{R}, y \neq 0),$$

имеем

$$f^*(z) = y \int_0^1 \frac{f(t)}{y-t} dt = y\pi Hf_1(y),$$

где функция

$$f_1(t) := \begin{cases} f(t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases}$$

принадлежит $L^p(\mathbb{R})$, а потому преобразование существует. Ясно, что

$$Hf_1(y) = \frac{1}{\pi y} f^*\left(\frac{1}{y}\right).$$

В силу (1.1) получаем после замены $y = 1/x$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf_1(y)}{y-t} dy = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1/y) f^*(1/y)}{y-t} dy = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \frac{(1/y) f^*(1/y)}{y-t} dy \right) = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \frac{x^2 f^*(x)}{x^2(1-tx)} dx \right) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(x)}{1-tx} dx. \end{aligned}$$

В частности, при $t \in [0,1]$ имеем

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(x)}{1-tx} dx,$$

что и завершает доказательство.

2 Теорема о свертке

Теперь установим основной результат данной работы.

Определение 2.1. Пусть функции f и g определены и измеримы на отрезке $[0,1]$. Определим функцию h на $[0,1]$ следующим образом:

$$h(t) = tf(t) \int_0^1 \frac{g(u)}{t-u} du + tg(t) \int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du, \quad (2.1)$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, если оно существует. Функцию h будем называть сверткой Маркова-Стилтьеса функций f и g и обозначать $h = f \bullet g$.

Теорема 2.1. Пусть $f \in L^p[0,1]$, $g \in L^q[0,1]$, где $1 < p < \infty$; $1 < q < \infty$ и $1/r := 1/p + 1/q < 1$. Тогда свертка $h = f \bullet g$ существует, принадлежит $L^r[0,1]$, и ее преобразование Маркова-Стилтьеса удовлетворяет равенству

$$Sh(s) = Sf(s) \cdot Sg(s). \quad (2.2)$$

Доказательство. Введем вспомогательные функции

$$F(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du, t \in [0,1],$$

$$f_1(t) := \begin{cases} f(t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Очевидно, что $f_1 \in L^p(\mathbb{R})$ при $f \in L^p[0,1]$. Кроме того, $Hf_1 \in L^p(\mathbb{R})$ по теореме М. Рисса. Отсюда выводим, что $F = Hf_1|_{[0,1]} \in L^p[0,1]$. По условию теоремы $g \in L^q[0,1]$, а потому $(tg(t))^r \in L^{q/r}[0,1]$. Аналогично $F^r \in L^{p/r}[0,1]$. Применяя теперь неравенство Гёльдера, получим $(tg(t)F(t))^r \in L[0,1]$,

т. е.

$$tg(t)F(t) \in L^r[0,1].$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$G(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{g(u)}{t-u} du \in L^q[0,1]$$

и

$$tf(t)G(t) \in L[0,1].$$

Поэтому $h \in L^r[0,1]$, и первое утверждение теоремы доказано.

Из него следует, что по теореме Гёльдера существует преобразование Маркова-Стилтьеса $Sh(s)$ для любого $s \in [0,1)$. При этом

$$Sh(s) = \int_0^1 \frac{tf(t)}{1-ts} \left(\int_0^1 \frac{g(u)}{t-u} du \right) dt + \int_0^1 \frac{tg(t)}{1-ts} \left(\int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du \right) dt. \quad (2.4)$$

Положим

$$F_\varepsilon(t) := \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^1 \right) \frac{f(u)}{t-u} du \quad (\varepsilon > 0),$$

где по умолчанию предполагается, что первый интеграл равен нулю при $0 < t < \varepsilon$. Тогда

$$F_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{f_1(u)}{t-u} du =: H_\varepsilon f_1(t)$$

есть усеченное преобразование Гильберта. Известно (см., например, [5]), что максимальное преобразование Гильберта

$$H_M f(t) := \sup_{\varepsilon > 0} |H_\varepsilon f(t)|$$

удовлетворяет неравенству

$$\|H_M f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

с константой C_p , не зависящей от f . Следовательно,

$$\|F_\varepsilon\|_{L^p[0,1]} = \|H_\varepsilon f_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f_1\|_{L^p(\mathbb{R})} = C_p \|f\|_{L^p[0,1]}. \quad (2.5)$$

Отметим также, что $\forall s \in [0,1)$

$$(1-ts)^{-1} \in L^p[0,1] \quad (r^{-1} + \varrho^{-1} = 1).$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера для трех функций, получаем, что $\forall s \in [0,1)$

$$\phi_\varepsilon(t) := (1-ts)^{-1} tg(t)F_\varepsilon(t) \in L^1[0,1]$$

и, кроме того,

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^1[0,1]} \leq \left\| \frac{1}{1-ts} \right\|_{L^p[0,1]} \|F_\varepsilon\|_{L^p[0,1]} \|tg\|_{L^q[0,1]} \leq C \left\| \frac{1}{1-ts} \right\|_{L^p[0,1]} \|f\|_{L^p[0,1]} \|tg\|_{L^q[0,1]}. \quad (2.6)$$

Так как правая часть в (2.6) конечна и не зависит от ε , то $\forall s \in [0,1)$ имеем

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|\phi_\varepsilon\|_{L^1[0,1]} < \infty.$$

Кроме того, в силу (2.5)

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} |\phi_\varepsilon| \in L^p[0,1].$$

Таким образом, применяя теорему Лебега, получаем

$$\int_0^1 \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi_\varepsilon(t) \right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \phi_\varepsilon(t) dt$$

или, что эквивалентно,

$$\int_0^1 \frac{tg(t)}{1-ts} \left(\int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du \right) dt = \int_0^1 f(u) \left(\int_0^1 \frac{tg(t)}{(1-ts)(t-u)} dt \right) du.$$

Следовательно, формула (2.4) превращается в

$$Sh(s) = \int_0^1 \frac{tf(t)}{1-ts} \int_0^1 \frac{g(u)}{t-u} dudt + \int_0^1 \frac{tg(t)}{1-ts} \int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} dudt = \int_0^1 f(u) \int_0^1 \frac{tg(u)}{(1-ts)(t-u)} dudt + \int_0^1 f(u) \int_0^1 \frac{tg(t)}{(1-ts)(t-u)} dtdu =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 f(t) \int_0^1 \frac{tg(u)}{(1-ts)(t-u)} dudt + \\ &+ \int_0^1 f(t) \int_0^1 \frac{ug(u)}{(1-us)(u-t)} dudt = \\ &= \int_0^1 f(t) \int_0^1 \frac{g(u)}{t-u} \left(\frac{t}{1-ts} - \frac{u}{1-us} \right) dudt = \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{1-ts} \int_0^1 \frac{g(u)}{1-us} dudt. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $s \in [0,1]$ имеем

$$Sh(s) = Sf(s)Sg(s). \quad (2.7)$$

А так как $f \in L^p[0,1] \subset L^1[0,1]$ и аналогично $g, h \in L^1[0,1]$, то в силу теоремы 1.1 равенство (2.7) верно во всей комплексной s -плоскости с разрезом по $[1, \infty)$, что и завершает доказательство.

Следствие 2.1. Пусть $f \in L^p[0,1]$ и $g \in L^q[0,1]$, где $1 < p < \infty$; $1 < q < \infty$ и

$$1/r := 1/p + 1/q < 1.$$

Если $f \bullet g = 0$ п. в., то либо $f = 0$, либо $g = 0$ п. в.

Доказательство. Пусть $f \bullet g = 0$ п. в. Тогда $Sf(s)Sg(s) = 0$ в области $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ по теореме 2.1. Другими словами, $\mathbb{C} \setminus [1, \infty) = \Omega_f \cup \Omega_g$, где

$$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty) : Sf(s) = 0\},$$

$$\Omega_g = \{s \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty) : Sg(s) = 0\}.$$

Так как множества Ω_f и Ω_g замкнуты в $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, то хотя бы одно из них имеет непустую внутренность. Пусть, для определенности, $\text{int}\Omega_f \neq \emptyset$. В силу теоремы 1.1 $Sf = 0$ в $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, а потому (теорема 1.2) $f = 0$ п. в.

Ясно, что свертка Маркова – Стильеса (при условии существования) обладает переместительным и распределительным свойствами. Укажем условия, при которых справедливо сочетательное свойство.

Следствие 2.2. Пусть

$$f_i \in L^p[0,1] \quad (1 < p < \infty, i = 1, 2, 3).$$

Если свертки $f_1 \bullet f_2$, $f_2 \bullet f_3$, $(f_1 \bullet f_2) \bullet f_3$ и $f_1 \bullet (f_2 \bullet f_3)$ существуют и принадлежат $L^p[0,1]$, то $(f_1 \bullet f_2) \bullet f_3 = f_1 \bullet (f_2 \bullet f_3)$.

Доказательство. Это сразу следует из теорем 2.1 и 1.2.

Отметим также следующий аналог неравенства Юнга.

Следствие 2.3. При условиях теоремы 2.1 справедливо неравенство

$$\|f \bullet g\|_{L^p[0,1]} \leq 2A_p \|f\|_{L^p[0,1]} \|g\|_{L^q[0,1]},$$

где

$$A_p = \text{tg} \frac{\pi}{2p} \quad \text{при } 1 < p \leq 2,$$

$$A_p = \text{ctg} \frac{\pi}{2p} \quad \text{при } 2 \leq p < \infty.$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 2.1 было отмечено, что $F = Hf_1 | [0,1] \in L^p[0,1]$. Поэтому в силу неравенств Гельдера и М. Рисса имеем

$$\begin{aligned} &\|tg(t)F(t)\|_{L^p[0,1]} \leq \|g\|_{L^q[0,1]} \|F\|_{L^p[0,1]} \leq \\ &\leq \|g\|_{L^q[0,1]} \|Hf_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq A_p \|g\|_{L^q[0,1]} \|f\|_{L^p[0,1]}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\|tf(t)G(t)\|_{L^p[0,1]} \leq A_p \|g\|_{L^q[0,1]} \|f\|_{L^p[0,1]}.$$

Осталось заметить, что

$$f \bullet g(t) = tf(t)G(t) + tg(t)F(t).$$

Использованное выше точное значение константы A_p в неравенстве М. Рисса было дано в [6].

3 Одно применение теоремы о свертке

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$f(t) + \lambda \int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du = g(t) \quad (\lambda \neq 0) \quad (3.1)$$

с неизвестной функцией f (мы предполагаем, что функции f и g таковы, что нижеследующие рассуждения имеют смысл). Решение уравнений вида (3.1) (и даже более общих уравнений) было получено ранее сведением к краевой задаче Римана (см., например, [7, глава 6, § 47]). Покажем, как для этой цели могут быть использованы теоремы 1.3 и 2.1.

Известно [8, с. 242], что при $0 < \text{Re} \alpha < 1$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} (1-u)^{-\alpha}}{t-u} du = \\ &= \begin{cases} \pi \text{ctg} \alpha \pi \frac{t^{\alpha-1}}{(1-t)^\alpha}, & 0 < t < 1 \\ \frac{-\pi}{\sin \alpha \pi (1-t)} \left| \frac{-t}{1-t} \right|^{\alpha-1}, & t < 0 \text{ или } t > 1. \end{cases} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Поэтому при $0 < \text{Re} \alpha < 1$

$$\begin{aligned} &f(t) \bullet \frac{t^{\alpha-1}}{(1-t)^\alpha} = \\ &= tf(t) \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} (1-u)^{-\alpha}}{t-u} du + \frac{t^\alpha}{(1-t)^\alpha} \int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du = \\ &= f(t) \pi \text{ctg} \alpha \pi \frac{t^\alpha}{(1-t)^\alpha} + \frac{t^\alpha}{(1-t)^\alpha} \int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du = \\ &= \pi \text{ctg} \alpha \pi \frac{t^\alpha}{(1-t)^\alpha} \left(f(t) + \frac{1}{\pi} \text{tg} \alpha \pi \int_0^1 \frac{f(u)}{t-u} du \right). \end{aligned}$$

Подберем число α_0 , $0 < \text{Re} \alpha_0 < 1$, так, что $\text{tg} \alpha_0 \pi = \lambda \pi$. Умножая обе части (3.1) на $t^{\alpha_0} (1-t)^{-\alpha_0} \pi \text{ctg} \alpha_0 \pi$, получим

$$f(t) \bullet \frac{t^{\alpha_0-1}}{(1-t)^{\alpha_0}} = g(t) \frac{t^{\alpha_0}}{(1-t)^{\alpha_0}} \pi \operatorname{ctg} \alpha_0 \pi.$$

Применение теоремы 2.1 к последнему соотношению дает

$$Sf(s) \left(S \frac{t^{\alpha_0-1}}{(1-t)^{\alpha_0}} \right) (s) = \pi \operatorname{ctg} \alpha_0 \pi \left(S \frac{g(t)t^{\alpha_0}}{(1-t)^{\alpha_0}} \right) (s).$$

Но равенство (3.2) показывает, что (ниже положено $y = 1/s$)

$$\begin{aligned} \left(S \frac{t^{\alpha_0-1}}{(1-t)^{\alpha_0}} \right) (s) &= y \int_0^1 \frac{t^{\alpha_0-1} (1-t)^{-\alpha_0}}{y-t} dt = \\ &= \frac{-\pi y}{\sin \alpha_0 \pi (1-y)} \Big|_{1-y}^{\alpha_0-1} = \frac{\pi}{\sin \alpha_0 \pi} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Значит,

$$Sf(s) = (1-s)^{\alpha_0} \cos \alpha_0 \pi \left(S \frac{g(t)t^{\alpha_0}}{(1-t)^{\alpha_0}} \right) (s).$$

Используя теперь теорему 1.3, имеем окончательно

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\cos \alpha_0 \pi}{\pi^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-s)^{\alpha_0}}{1-ts} S \left(g(x) x^{\alpha_0} (1-x)^{-\alpha_0} \right) (s) ds. \end{aligned}$$

Мы получили решение уравнения (3.1) в форме, отличной от данной в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Миротин, А.Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А.Р. Миротин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.
2. Вячеславов, Н.С. Рациональные приближения функций типа Маркова – Стилтгеса / Н.С. Вячеславов, Е.П. Мочалина // Вестник МГУ, Серия 1. Математика-механика. – 2008. – № 4. – С. 3–13.
3. Хиршман, И.И. Преобразования типа свертки / И.И. Хиршман, Д.В. Уиддер. – М. : ИЛ, 1958. – 309 с.
4. Srivastava, H.M. A new convolution theorem for the Stieltjes transform and its application to a class of singular integral equations / H.M. Srivastava, Vu Kim Tuan // Archiv der Mathematik. – 1995. – Vol. 64, № 2. – P. 144–149.
5. King, F.W. Hilbert transforms: in 2 Vol. / F.W. King. – Cambridge University Press, 2009. – Vol. 1. – 858 p.
6. Pichorides, S.K. On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund, and Kolmogorov / S.K. Pichorides // Studia Math. – 1972. – Vol. 44, № 2. – P. 165–169.
7. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1977. – 640 с.
8. Прудников, А.П. Интегралы и ряды: в 3 т. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – 2-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Т. 1: Элементарные функции. – 632 с.

Поступила в редакцию 13.06.13.

УДК 621.394.74:519.2

СТАЦИОНАРНЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ С ОБХОДАМИ СООБЩЕНИЙ И ФОРМИРОВАНИЕМ ПОСТУПАЮЩИХ И ОБСЛУЖИВАЕМЫХ ГРУПП ЗАЯВОК СЛУЧАЙНЫХ РАЗМЕРОВ

Ю.В. Малинковский, Чжао Юе

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

STEADY-STATE EXPONENTIAL NETWORKS WITH BYPASSING OF COMMUNICATIONS AND WITH GENERATION OF ARRIVING AND SERVICING RANDOM SIZE CUSTOMER BATCHES

Yu.V. Malinkovsky, Zhao Yue

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассмотрен класс экспоненциальных сетей массового обслуживания с джексоновским трафиком сообщений и возможностью мгновенного обхода сообщениями узлов с вероятностями, зависящими от их состояний. Принятые в узлы сети сообщения формируют группы заявок случайных размеров, присоединяющиеся к этим узлам. Заявки обслуживаются группами случайного размера, который определяется в момент окончания обслуживания этих групп (assemble-transfer batch service). После обслуживания в узле очередной группы эта группа покидает сеть и посылает или не посылает сообщения в остальные узлы в соответствии с некоторой матрицей маршрутизации. В терминах изолированных узлов, помещенных в фиктивную случайную среду, установлены достаточные условия, при которых стационарное распределение состояний сети имеет мультипликативную форму. В качестве примера рассмотрен случай, когда размеры принимаемых в узлы групп имеют геометрическое распределение, а стационарное распределение имеет форму произведения смещенных квазигеометрических распределений.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповые перемещения, сообщения, обходы узлов, квазиобратимость, форма произведения смещенных квазигеометрических распределений.

The exponential queueing networks class with Jackson traffic of communications and with possibility of instant bypassing of nodes by communications with probabilities depending on their states is considered. The communications taking over by thenodes generate customers' batches of random sizes and will be joined to these nodes. Customers' batch of random size is served simultaneously, the size being determinated at the moment of completing the service due to the assemble-transfer batch service discipline. When customers batch service is finished it leaves the network and sends communication to other nodes or leaves the network with according to some routing matrix. Sufficient conditions are established for the product form stationary network distribution in terms of insulating nodes in fictitious random environment. As an example we considered the case when the sizes of customers' batches taking over by nodes have a geometric distribution and the network state stationary distribution has the product form of factors which have shift quasigeometric distribution.

Keywords: queueing networks, batches movements, communications, bypassing of nodes, quasireversibility, product-form of shift quasigeometric distributions.

Введение

Сети массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием часто встречаются в приложениях. Например, знаки в сообщениях могут поступать и передаваться группами знаков случайного размера, образующих слова некоторого алфавита, программы, поступающие в вычислительный центр для обработки, могут приходиться в виде пакетов случайного размера и т. д. Несмотря на это, статей, посвященных аналитическому исследованию таких сетей, мало. Это объясняется тем обстоятельством, что граф переходов между состояниями соответствующего марковского процесса для системы с групповыми перемещениями сильно связан, что не позволяет в общем случае находить стационарное распределение для системы и, тем более, для сети массового обслуживания, состоящей из таких систем.

В работе [1] рассмотрен класс сетей массового обслуживания с нелинейными уравнениями трафика – сети с групповым поступлением и групповым ассемблерно-трансферным обслуживанием (assemble-transfer batch service). Эта работа обобщает работы [2], [3] для сетей с групповыми уходами на случай, когда размеры передаваемых групп могут меняться в соответствии с марковской матрицей маршрутизации. При этом предполагается, что принимающие и передающие узлы, а также размеры, с которыми передаются группы и поступают переданные группы, могут зависеть друг от друга. Ассемблерно-трансферное обслуживание возникает, например, при работе в интернете. В этом случае в качестве времени обслуживания выступает время сеанса пользователя, а обслуженными в конце сеанса считаются все открытые за время сеанса приложения. В работе [1] установлено, что для

существования стационарного распределения в форме произведения геометрических распределений необходимо введение дополнительного пуассоновского потока, заявки которого поступают, когда сеть свободна от заявок. В противном случае стационарное распределение в указанной форме не существует. Альтернативный алгоритм решения поставленной в [1] задачи приводится в [4]. Введение дополнительного потока в [1], [4] делает постановку задачи несколько искусственной. В [5] показано, что для сети с передачей и джексоновским трафиком сообщений и формированием поступающих и обслуживаемых групп случайного размера без какого бы то ни было дополнительного потока стационарное распределение при определенных условиях может иметь форму произведения смещенных геометрических распределений. В настоящей работе некоторые из результатов [5] распространяются в несколько иной форме на аналогичные сети с обходами сообщений и условной интенсивностью обслуживания, зависящей от состояния соответствующего узла. Кроме того, устанавливаются достаточные условия для представления совместного стационарного распределения чисел заявок в форме произведения смещенных квазигеометрических распределений.

1 Модель однолинейного узла с групповыми перемещениями и обходами

Сначала рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием и обходами узлов. В систему поступает стационарный пуассоновский поток сообщений с интенсивностью λ . Каждое сообщение входного потока независимо от других сообщений с вероятностью f_n , зависящей от числа n заявок в системе в момент ее поступления, направляется в систему, а с вероятностью $1 - f_n$ покидает ее (совершает обход системы). В момент направления сообщения в систему мгновенно формируется группа заявок случайного размера X_m (m – номер m -го по счету поступившего сообщения). Эта группа заявок присоединяется к очереди, если в системе имеются другие заявки, в противном случае из заявки этой группы формируется группа заявок, которая сразу начинает обслуживаться (при этом остальные заявки, если такие будут, остаются в системе). Механизм формирования требуемой для обслуживания группы точно такой, как описанный ниже механизм формирования группы на обслуживание после окончания обслуживания очередной группы. Предполагается, что $\{X_m, m = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых положительных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием m_A и вероятностями

значений $a(k) = P\{X_n = k\}, k = 1, 2, \dots$. Пусть

$$\check{A}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k)z^k - \text{производящая функция } X_n. \text{ В}$$

момент окончания обслуживания очередной группы на обслуживание выбирается группа заявок случайного размера Y_m (m – номер m -й по счету обслуженной группы), которая обслуживается целиком, при этом условное распределение времени обслуживания – экспоненциальное с интенсивностью $\mu(n)$, зависящей от числа заявок в системе в момент начала ее обслуживания. Предполагается, что $\mu(n) > 0$ для $n > 0$ и $\mu(0) = 0$. Если в момент окончания обслуживания очередной группы размер требуемой для обслуживания группы строго больше числа оставшихся заявок в системе, то на обслуживание выбирается некомплектная группа из всех оставшихся в системе заявок. Предполагается, что $\{Y_m, m = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых положительных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием m_B и вероятностями значений $b(k) = P\{Y_m = k\}, k = 1, 2, \dots$. Пусть

$$\check{B}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b(k)z^k - \text{производящая функция}$$

Y_m . Обслуживание предполагается ассемблерно-трансферным, т. е. решение о размере обслуживаемой группы принимается в конце процесса обслуживания этой группы. Фактически последнее означает то, что если в момент t в системе находилось n заявок и началось обслуживание группы заявок, то вероятность окончания обслуживания группы из k заявок в промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ равна

$$\mu(n)[b(k)I_{\{k \neq n\}} + \bar{B}(k)I_{\{k=n\}}]\Delta t + o(\Delta t)$$

при $\Delta t \rightarrow 0, k = \bar{1}, n$, где

$$\bar{B}(k) = 1 - b(1) - \dots - b(k-1).$$

Процессы поступления и обслуживания предполагаются независимыми. Размеры поступающих групп и размеры выбираемых на обслуживание групп также независимы.

Пусть $n(t)$ – число заявок в системе в момент t . Семейство случайных величин $\{n(t)\}$ есть цепь Маркова с непрерывным временем с пространством состояний $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$. Интенсивности ее перехода есть

$$\begin{aligned} q(n, n+k) &= \lambda a(k), \text{ если } k \geq 1, n \geq 0, \\ q(n, n-k) &= \mu(n)[b(k)I_{\{k \neq n\}} + \bar{B}(n)I_{\{k=n\}}], \end{aligned} \quad (1.1)$$

если $n \geq k \geq 1$.

Здесь I_A – индикатор A , равный 1, если событие A происходит, и 0, если событие A не происходит.

Уравнение равновесия для стационарного распределения $\{p(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$ цепи Маркова $n(t)$, если оно существует, имеет вид

$$p(n)[\lambda f_n + \mu(n)] = \lambda \sum_{k=1}^n f_{n-k} p(n-k) a(k) + \sum_{k=1}^{\infty} p(n+k) \mu(n+k) [b(k) I_{\{n \neq 0\}} + \bar{B}(k) I_{\{n=0\}}], \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.2)$$

Хорошо известно (см., например, [5]), что для квазиобратимости цепи $n(t)$ необходимо и достаточно, чтобы эти уравнения распадались на локальные уравнения равновесия

$$p(n) \mu(n) = \lambda \sum_{k=1}^n f_{n-k} p(n-k) a(k), \quad (1.3)$$

$$p(n) \lambda f_n = \sum_{k=1}^{\infty} p(n+k) \mu(n+k) \times [b(k) I_{\{n \neq 0\}} + \bar{B}(k) I_{\{n=0\}}], \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.4)$$

Исследуем специальный случай, когда вероятности того, что не будет обхода, пропорциональны интенсивности обслуживания:

$$f_n = d \mu(n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad f_0 \in (0, 1], \quad (1.5)$$

где постоянная d не зависит от n . Физически это означает, что вероятность принятия сообщения системой тем больше, чем больше интенсивность ее обслуживания. Для корректности условия (1.5) необходимо предположить, что $\nu = \sup_{n \geq 1} \mu(n) < \infty$, т. е. интенсивность обслуживания должна быть ограниченной функцией от n . Так как $\mu(n) > 0$ для $n \geq 1$, то $0 < \nu < \infty$. Пусть теперь d – любое число такое, что $0 < d \leq \frac{1}{\nu}$. Тогда, очевидно, что определенные с помощью (1.5) f_n будут для $n \geq 1$ удовлетворять неравенству $0 < f_n \leq d \nu \leq 1$.

Вводя новые переменные

$$r(n) = p(n) \mu(n) = \frac{f_n}{d} p(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.6)$$

и обозначая $\rho = \lambda d$, можно переписать локальные уравнения равновесия следующим образом:

$$r(n) = \rho \sum_{k=1}^n r(n-k) a(k), \quad n \geq 1, \quad (1.7)$$

$$\rho r(n) = \sum_{k=1}^{\infty} r(n+k) \times [b(k) I_{\{n \neq 0\}} + \bar{B}(k) I_{\{n=0\}}], \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Запишем (1.8) отдельно для $n = 0$ и $n \geq 1$:

$$\rho r(0) = \sum_{k=1}^{\infty} r(k) \bar{B}(k), \quad (1.9)$$

$$\rho r(n) = \sum_{k=1}^{\infty} r(n+k) b(k), \quad n \geq 1. \quad (1.10)$$

Решение (1.7), (1.8) будем искать в виде

$$r(0) = r_0, \quad r(n) = r(1-c)c^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (1.11)$$

где r_0, r и c – некоторые постоянные, $r_0, r > 0, c \in (0, 1)$. Подставляя (1.11) в (1.9), получим $\rho r_0 = r[1 - \bar{B}(c)]$, откуда

$$\check{B}(c) = 1 - \rho \frac{r_0}{r}. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.11) в (1.10), получим

$$\check{B}(c) = \rho. \quad (1.13)$$

Из сравнения (1.12) с (1.13) вытекает

$$r = \frac{\rho}{1-\rho} r_0. \quad (1.14)$$

Заметим, что если c – корень уравнения (1.13), то в силу абсолютной монотонности производящей функции $\check{B}(z)$ с необходимостью должно выполняться неравенство $\rho \leq c$. Таким образом, $\{r(n), n \geq 0\}$ – решение (1.8) тогда и только тогда, когда выполняется (1.14), а c – корень уравнения (1.13).

Обозначим через

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) z^n = r_0 + r \frac{(1-c)z}{1-cz}$$

производящую функцию последовательности $\{r(n)\}$, определенной равенством (1.11). Умножая (1.7) на z^n и суммируя по всем $n = 1, 2, \dots$, получим

$$R(z) - r_0 = \rho \check{A}(z) R(z).$$

Используя (1.14), откуда находим

$$\check{A}(z) = \frac{R(z) - r_0}{\rho R(z)} = \frac{r(1-c)z}{\rho[r_0 - (r_0 c - r + cr)z]} = \frac{(1-c)z}{1-\rho - (c-\rho)z} = \frac{(1-\frac{c-\rho}{1-\rho})z}{1-\frac{c-\rho}{1-\rho}z}.$$

Но это – производящая функция геометрического распределения на множестве натуральных чисел с параметром $a = \frac{c-\rho}{1-\rho}$, причем не исключается случай вырожденного распределения, сосредоточенного в точке 1 при $a = 0$. Так как для корня уравнения (1.13) выполнено $\rho \leq c \in (0, 1)$, то $0 \leq a < 1$. Таким образом, имеет место следующая

Лемма 1.1. Для того чтобы решение (1.7), (1.8) имело вид (1.11), необходимо и достаточно, чтобы c являлось корнем уравнения (1.13), выполнялось равенство (1.14), а размеры формируемых при поступлении сообщений групп имели геометрическое распределение с параметром $a = \frac{c-\rho}{1-\rho}$, включая вырожденное распределение при $c = \rho$.

Возвратимся к старым переменным

$$p(n) = \frac{r(n)}{\mu(n)} = \frac{d}{f_n} r(n) = \frac{\rho}{\lambda f_n} r(n),$$

для которых решение (1.11) уравнений (1.7), (1.8) в новых переменных перейдет в решение

$$p(0) = \frac{\rho}{\lambda f_0} r_0, \quad (1.15)$$

$$p(n) = \frac{\rho^2 r_0}{\lambda f_n (1-\rho)} (1-c)c^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

уравнений (1.3), (1.4) в старых переменных. При этом из условия нормировки

$$r_0 = \frac{\lambda}{\rho} \left[\frac{1}{f_0} + \frac{\rho(1-c)}{1-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{f_n} \right]^{-1}. \quad (1.16)$$

Необходимым условием эргодичности $n(t)$ является следующее условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{f_n} < \infty. \quad (1.17)$$

Нетрудно понять, используя эргодическую теорему Фостера [6], что (1.17) является не только необходимым, но и достаточным условием эргодичности. Резюмируя вышесказанное, приходим к следующему результату.

Теорема 1.1. Пусть

$$f_n = d\mu(n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad f_0 \in (0, 1].$$

Для эргодичности марковского процесса $n(t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1.17). Для того, чтобы эргодический процесс $n(t)$ имел стационарное распределение (1.15) и был квазиобратимым, необходимо и достаточно, чтобы c являлось корнем уравнения (1.13), а размеры формируемых при поступлении сообщений групп имели геометрическое распределение с параметром $a = \frac{c-\rho}{1-\rho}$, включая вырожденное распределение при $c = \rho$. При этом r_0 определяется с помощью (1.16).

2 Модель сети с обходами узлов сообщениями и формированием групп заявок случайных размеров

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, склеенную из узлов того же типа, как система, рассмотренная в разделе 1. Дадим независимое описание этой сети. В сеть, состоящую из N узлов, поступают независимые стационарные пуассоновские потоки сообщений с интенсивностью λ_i в i -й узел.

Пусть $\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i$, $p_{0i} = \frac{\lambda_i}{\lambda}$. Это эквивалентно

тому, что в сеть поступает стационарный пуассоновский поток сообщений с параметром λ , а каждое сообщение независимо от других сообщений с вероятностью p_{0i} направляется в i -й

узел $\left(i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N p_{0i} = 1 \right)$. Сообщение, направленное

в i -й узел (извне или из другого узла), с вероятностью $f_n^{(i)}$, зависящей от числа заявок n_i в i -м узле, мгновенно принимается этим узлом, а с дополнительной вероятностью $1 - f_n^{(i)}$ мгновенно обходит этот узел, после чего мгновенно двигается с вероятностью p_{ij} в j -й узел или покидает

сеть с вероятностью $p_{i0} \left(i, j = \overline{1, N}, \sum_{j=0}^N p_{ij} = 1 \right)$. В

момент принятия n -го сообщения i -м узлом в нем мгновенно формируется группа заявок случайного размера X_{ni} (n – номер n -го по счету принятого i -м узлом сообщения). Эта группа заявок присоединяется к очереди, если в i -м узле имеются другие заявки, в противном случае из заявок этой группы формируется группа заявок, которая сразу начинает обслуживаться (при этом остальные заявки, если такие будут, остаются в узле). Механизм формирования требуемой для обслуживания группы точно такой, как описанный ниже механизм формирования группы на обслуживание после окончания обслуживания очередной группы. Предполагается, что $\{X_{ni}, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательности независимых положительных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с конечными математическими ожиданиями m_{A_i} и вероятностями значений

$$a_i(k) = P\{X_i = k\}, \quad k = 1, 2, \dots (i = \overline{1, N}).$$

В момент окончания обслуживания очередной группы в i -м узле на обслуживание выбирается группа заявок случайного размера Y_{ni} , которая обслуживается целиком, при этом обслуживание – экспоненциальное с интенсивностью $\mu_i(n_i)$, зависящей от числа заявок n_i в i -м узле в момент начала обслуживания этой группы (n – номер n -й по счету обслуженной в i -м узле группы). Предполагается, что $\mu_i(0) = 0$, $\mu_i(n_i) > 0$ при $n_i > 0$. Если в момент окончания обслуживания очередной группы размер требуемой для обслуживания группы строго больше числа оставшихся в узле заявок, то на обслуживание выбирается некомплектная группа из всех оставшихся в i -м узле заявок. Как и для изолированного узла в п. 2 обслуживание предполагается ассемблерно-трансферным, т. е. решение о размере обслуживаемой группы принимается в конце процесса обслуживания этой группы. Предполагается, что $\{Y_{ni}, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательности независимых положительных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с конечными математическими ожиданиями m_{B_i} и вероятностями значений

$$b_i(k) = P\{Y_i = k\}, \quad k = 1, 2, \dots (i = \overline{1, N}).$$

Процессы поступления и обслуживания предполагаются независимыми. Размеры поступающих групп и размеры выбираемых на обслуживание групп также независимы между собой.

Предположим, что расширенная матрица маршрутов $(p_{ij}, i, j = \overline{0, N})$, где $p_{00} = 0$, неприводима. Обозначим через $\lambda \varepsilon_i$ интенсивность потока сообщений из i -го узла. Тогда система линейных уравнений трафика

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p_{ij}, j = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

имеет единственное строго положительное решение. Эта система выражает сохранение интенсивностей потоков сообщений $\lambda \varepsilon_i$ при прохождении узлов сети.

Пусть $n_i(t)$ – число заявок в i -м узле в момент t . Состояние сети будем описывать неприводимой цепью Маркова $\{\mathbf{n}(t)\}$ с непрерывным временем с пространством состояний \mathbb{Z}_+^N , где $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$.

Пусть $\varphi_i(\mathbf{n})$ – условная вероятность того, что сообщение, поступающее в i -й узел, когда сеть находится в состоянии \mathbf{n} , не приведет к формированию групп заявок ни в одном из узлов; $\psi_{ij}(\mathbf{n})$ – условная вероятность того, что сообщение, поступающее в i -й узел, когда сеть находится в состоянии \mathbf{n} , впервые приведет к формированию групп заявок в j -м узле; $\alpha_i(\mathbf{n})$ – условная вероятность того, что группа заявок, обслуженная i -м узлом, когда сеть находится в состоянии \mathbf{n} непосредственно перед моментом окончания ее обслуживания, не приведет к формированию групп заявок ни в одном из узлов; $\beta_{ij}(\mathbf{n})$ – условная вероятность того, что группа заявок, обслуженная i -м узлом, когда сеть находится в состоянии \mathbf{n} непосредственно перед моментом окончания ее обслуживания, приведет к формированию группы заявок впервые в j -м узле. Кроме того, пусть

$$\theta_i(n_i, k) = b_i(k)I_{\{n_i \neq 0\}} + \bar{B}_i(k)I_{\{n_i = 0\}}$$

– вероятность того, что в i -м узле будет обслужена группа размера k , если в момент начала ее обслуживания в нем находилось $n_i + k$ заявок. Используя формулу полной вероятности и строго марковское свойство, имеем

$$\varphi_i(\mathbf{n}) = (1 - f_{n_i}^{(i)}) \left[p_{i0} + \sum_{j=1}^N p_{ij} \varphi_j(\mathbf{n}) \right], i = \overline{1, N}, \quad (2.2)$$

$$\psi_{ij}(\mathbf{n}) = f_{n_i} \delta_{ij} + (1 - f_{n_i}^{(i)}) \sum_{k=1}^N p_{ik} \psi_{kj}(\mathbf{n}), i, j = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

$$\alpha_i(\mathbf{n}) = p_{i0} + \sum_{m=1}^N p_{im} \sum_{k=1}^{n_i} \varphi_m(\mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) \theta_i(n_i, k), i = \overline{1, N}, \quad (2.4)$$

$$\beta_{ij}(\mathbf{n}) =$$

$$= \sum_{m=1}^N p_{im} \sum_{k=1}^{n_i} \psi_{mj}(\mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) \theta_i(n_i, k), i, j = \overline{1, N}, \quad (2.5)$$

где \mathbf{e}_i – n -мерный вектор, i -я которого равна 1, а остальные равны 0, δ_{ij} – символ Кронекера.

При этом, очевидно,

$$\varphi_i(\mathbf{n}) + \sum_{j=1}^N \psi_{ij}(\mathbf{n}) = 1,$$

$$\alpha_i(\mathbf{n}) + \sum_{j=1}^N \beta_{ij}(\mathbf{n}) = 1.$$

Уравнения (2.2), (2.3) совпадают с соответствующими уравнениями для вспомогательных функций сети Джексона с обходами из работы [7], в которой доказано, что если расширенная матрица маршрутов $(p_{ij}, i, j = \overline{0, N})$ неприводима, то (2.2), (2.3) однозначно определяют условные вероятности $\varphi_i(\mathbf{n}), \psi_{ij}(\mathbf{n})$. Тогда оставшиеся вероятности $\alpha_i(\mathbf{n}), \beta_{ij}(\mathbf{n})$ однозначно найдутся из соотношений (2.4), (2.5). Итак, выполняется следующая

Лемма 2.1. Если матрица $(p_{ij}, i, j = \overline{0, N})$ неприводима, то при каждом фиксированном $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N$ соотношения (2.2)–(2.5) однозначно определяют вероятности $\varphi_i(\mathbf{n}), \psi_{ij}(\mathbf{n}), \alpha_i(\mathbf{n}), \beta_{ij}(\mathbf{n}) (i, j = \overline{1, N})$.

Предположим, что исходные параметры сети таковы, что процесс $\mathbf{n}(t)$ эргодичен. Для общего случая из-за возможности обходов узлов сообщениями и зависимости интенсивности обслуживания от количества заявок в узле установить вид необходимых и достаточных условий эргодичности сложно. Но по крайней мере, если $\mu_i(n_i) = \mu_i$ при $n_i > 0$, то условие

$$\lambda \varepsilon_i m_{A_i} < \mu_i m_{B_i}, i = \overline{1, N},$$

являющееся, как известно, необходимым и достаточным для эргодичности рассматриваемой сети, но без обходов (все $f_{n_i}^{(i)} = 1$), а следовательно, будет достаточным условием эргодичности для рассматриваемой нами сети с обходами. Пусть для эргодического процесса начальное распределение совпадает со стационарным эргодическим распределением. Тогда $\mathbf{n}(t)$ – стационарный марковский процесс, а его распределение в произвольный момент времени является единственным с точностью до постоянного множителя нетривиальным решением уравнений глобального равновесия

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}) \sum_{i=1}^N [\lambda p_{0i} (1 - \varphi_i(\mathbf{n})) + \mu_i(n_i) (1 - \beta_{ii}(\mathbf{n}))] = \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_i} p(\mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) \lambda p_{0j} \psi_{ji}(\mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) a_i(k) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} p(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_i) \mu_i(n_i + k) \theta_i(n_i, k) \alpha_i(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_i) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_j} (p(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_j - l\mathbf{e}_i) \mu_j(n_j + k) \times \\
 & \quad \times \theta_j(n_j, k) \beta_{ji}(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_j - l\mathbf{e}_i) a_i(l)). \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N$ и предполагается, что $p(\mathbf{n}) = 0$ для $\mathbf{n} \notin \mathbb{Z}_+^N$.

Можно надеяться, что результат о представлении стационарного распределения в виде произведения множителей, характеризующих отдельные узлы, будет, по аналогии с результатом работы [7], выполняться. Для доказательства надо разбить (2.6) на уравнения локального равновесия. Первое уравнение получается, если приравнять интенсивность потока из состояния за счет поступления сообщений в сеть интенсивности потока в это же состояние за счет ухода сообщений из сети:

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{n}) \sum_{i=1}^N \lambda p_{0i} (1 - \varphi_i(\mathbf{n})) = \\
 & = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} p(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_i) \mu_i(n_i + k) \theta_i(n_i, k) \alpha_i(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_i), \quad (2.7) \\
 & \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N.
 \end{aligned}$$

Второе уравнение локального равновесия получается, если для каждого $i = \overline{1, N}$ приравнять интенсивность потока из состояния за счет ухода сообщений из i -го узла интенсивности потока в это же состояние за счет поступления сообщений в i -й узел (извне и из других узлов):

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{n}) \mu_i(n_i) (1 - \beta_{ii}(\mathbf{n})) = \\
 & = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_j} p(\mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) \lambda p_{0j} \psi_{ji}(\mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) a_i(k) + \\
 & + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_j} (p(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_j - l\mathbf{e}_i) \mu_j(n_j + k) \times \\
 & \quad \times \theta_j(n_j, k) \beta_{ji}(\mathbf{n} + k\mathbf{e}_j - l\mathbf{e}_i) a_i(l)), \quad (2.8) \\
 & \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N.
 \end{aligned}$$

Так как (2.6) получается сложением (2.7) с (2.8), просуммированным по $i = \overline{1, N}$, то всякое решение (2.7), (2.8) является решением (2.6).

Можно показать, что если $p_i(n_i), i = \overline{1, N}$, удовлетворяют уравнениям локального равновесия (1.3), (1.4) для изолированных узлов с учетом обходов, в которые поступают стационарные пуассоновские потоки заявок с интенсивностями $\lambda \varepsilon_i$, где $(\varepsilon_i, i = \overline{1, N})$ – положительное решение уравнений трафика (2.1), т. е. уравнениям

$$\begin{aligned}
 & p_i(n_i) \mu_i(n_i) = \lambda \varepsilon_i \sum_{k=1}^n f_{n_i-k}^{(i)} p_i(n_i - k) a_i(k), \quad (2.9) \\
 & p_i(n_i) \lambda \varepsilon_i f_{n_i}^{(i)} = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} p_i(n_i + k) \mu_i(n_i + k) \theta_i(n_i, k), \quad n_i \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

то $p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N)$ будет являться решением (2.6). Для этого достаточно показать, что если $p_i(n_i), i = \overline{1, N}$, удовлетворяют (2.9), (2.10), то они удовлетворяют (2.7), (2.8). Это сделать чрезвычайно сложно, но можно обойтись без этого этапа, если воспользоваться известной теоремой Келли [8]–[10]. Так как наша сеть получается склеиванием изолированных узлов сообщений с помощью джексоновского трафика, а изолированные узлы, рассматриваемые вместе с обходами, квазиобратимы, то стационарное распределение марковского процесса $\{\mathbf{n}(t)\}$ будет иметь искомую мультипликативную форму. Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.1. Пусть марковский процесс $\mathbf{n}(t)$ эргодичен, а изолированные от сети узлы в фиктивной окружающей среде (со стационарными пуассоновскими входящими потоками с интенсивностями $\lambda \varepsilon_i$ для i -го узла, где $(\varepsilon_i, i = \overline{1, N})$ – положительное решение уравнений трафика (2.1)) квазиобратимы с учетом обходов, т. е. для стационарных вероятностей состояний изолированных узлов выполнены уравнения локального равновесия (2.9), (2.10). Тогда стационарные вероятности состояний процесса $\mathbf{n}(t)$ имеют форму произведения

$$p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N, \quad (2.11)$$

где $\{p_i(n_i), n_i \in \mathbb{Z}_+\}$ – решение системы локальных уравнений равновесия (2.9), (2.10), удовлетворяющее условию нормировки $\sum_{n_i=0}^{\infty} p_i(n_i) = 1$.

Пусть начальное распределение $\mathbf{n}(t)$ совпадает со стационарным распределением (2.11), тогда $\mathbf{n}(t)$ – стационарный марковский процесс, одномерные распределения которого не зависят от времени (сеть функционирует в стационарном режиме). Тогда случайные процессы $n_1(t), \dots, n_N(t)$ точно независимы в стационарном режиме, т. е. в каждый фиксированный момент времени. Однако в стационарном режиме рассматриваемые в различные моменты времени случайные величины $n_1(t_1), \dots, n_N(t_N)$, вообще говоря, зависимы. Таким образом, узлы влияют друг на друга, однако «мгновенный снимок» состояний сети выражает независимость их функционирования.

3 Достаточное условие для представления стационарного распределения состояний сети в форме произведения смещенных квази-геометрических распределений

В этом разделе рассматривается сеть из раздела 2. Предположим, что $\sup_{n_i \geq 1} \mu_i(n_i) < \infty, i = \overline{1, N}$.

Тогда, как показано в разделе 1, существуют постоянные $d_i > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} f_n^{(i)} &= d_i \mu_i(n_i), \quad n_i = 1, 2, \dots, \\ f_0^{(i)} &\in (0, 1], \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что вероятности обхода в нашей модели выбраны в соответствии с (3.1). Пусть, как и ранее, $\{\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\}$ – положительное решение уравнений трафика (2.1), а $\rho_i = \lambda \varepsilon_i d_i$. Обозначим через c_i корни уравнений

$$\check{B}_i(c_i) = \rho_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.2)$$

Предположим также, что размеры групп, формируемых принятыми в узлы сообщениями, имеют геометрическое распределение с параметром $a_i = \frac{c_i - \rho_i}{1 - \rho_i}$ для i -го узла (включая вырожденное распределение, сосредоточенное в точке 1 при $a = 0$). Кроме того, пусть

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{c_i^{n_i-1}}{f_n^{(i)}} < \infty \quad (3.3)$$

и

$$r_0^{(i)} = \frac{\lambda \varepsilon_i}{\rho_i} \left[\frac{1}{f_0^{(i)}} + \frac{\rho_i(1-c_i)}{1-\rho_i} \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{c_i^{n_i-1}}{f_n^{(i)}} \right]^{-1}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим каждый узел i изолированно от сети в фиктивной окружающей среде, характеризующейся тем, что в этот узел поступает стационарный пуассоновский поток сообщений с параметром $\lambda \varepsilon_i$ (известно, что даже в сети Джексона суммарный поступающий в узел поток не является пуассоновским). По теореме 1.1 при выполнении (3.3) процесс, описывающий состояния изолированного узла, будет эргодическим, квазиобратимым с учетом обходов, а его стационарное распределение задается как

$$\begin{aligned} p_i(0) &= \frac{\rho_i}{\lambda \varepsilon_i f_0^{(i)}}, \\ p_i(n_i) &= \frac{\rho_i^2 r_0^{(i)}}{\lambda \varepsilon_i f_n^{(i)} (1 - \rho_i)} (1 - c_i) c_i^{n_i-1}, \quad n_i \geq 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

По теореме 2.1 стационарное распределение процесса $\mathbf{n}(t)$ будет иметь вид (2.11), в котором множители $p_i(n_i)$ определены равенством (3.5). Докажем, что при выполнении перечисленных в этом разделе условий марковская цепь с непрерывным временем $\mathbf{n}(t)$ эргодична. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и того, что во всех узлах сети $\mu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$, а $f_n^{(i)} > 0$ для $n_i \geq 0$, цепь является неприводимой. Очевидно, она консервативна. Согласно эргодической теореме Фостера [6] остается доказать, что система глобальных уравнений равновесия (2.6) имеет нетривиальное решение такое, что ряд

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N} q(\mathbf{n}) p(\mathbf{n}) \quad (3.6)$$

сходится, где

$$q(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N [\lambda p_{0i} (1 - \varphi_i(\mathbf{n})) + \mu_i(n_i) (1 - \beta_{ii}(\mathbf{n}))]$$

– интенсивность выхода из состояния \mathbf{n} . В силу того, что $\sup_{n_i \geq 1} \mu_i(n_i) < \infty, i = \overline{1, N}$, найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$q(\mathbf{n}) \leq \lambda + \sum_{i=1}^N \mu_i(n_i) < C. \quad (3.7)$$

По признаку сравнения рядов с неотрицательными слагаемыми для сходимости ряда (3.6) достаточно сходимости ряда $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N} p(\mathbf{n})$. Но последний ряд при выполнении условия (3.3) распадается в произведение сходящихся рядов $\sum_{n_i=1}^{\infty} p_i(n_i)$.

Впрочем, известно, что условие (3.7) является достаточным условием регулярности цепи, а для регулярных цепей более слабый вариант теоремы Фостера позволяет требовать только сходимости ряда из стационарных вероятностей. Резюмируя сказанное, получаем следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть для $i = \overline{1, N}$

$$\sup_{n_i \geq 1} \mu_i(n_i) < \infty,$$

$$f_n^{(i)} = d_i \mu_i(n_i), \quad n_i = 1, 2, \dots, \quad f_0^{(i)} \in (0, 1],$$

$\{\varepsilon_i\}$ – положительное решение уравнений трафика (2.1), $\rho_i = \lambda \varepsilon_i d_i$, c_i – корни уравнений (3.2), размеры групп, формируемых принятыми в узлы сообщениями, имеют геометрическое распределение с параметром $a_i = \frac{c_i - \rho_i}{1 - \rho_i}$ для i -го

узла (включая вырожденное распределение, сосредоточенное в точке 1 при $a = 0$), а также выполнено (3.2). Тогда марковский процесс $\mathbf{n}(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет вид (2.11), в котором множители $p_i(n_i)$ определены равенством (3.5).

Результат теоремы 3.1 останется в силе, если считать, что для некоторых (или всех) i существуют K_i такие, что $f_n^{(i)} > 0$ при $n_i < K_i$ и $f_n^{(i)} = 0$ при $n_i \geq K_i$. В этом случае стационарное распределение надо сузить на $X = X_1 \times \dots \times X_N$, где $X_i = \{0, 1, \dots, K_i\}$, если в i -м узле найдется такое K_i , и $X = \mathbb{Z}_+$ в противном случае. При этом условии $f_n^{(i)} = d_i \mu_i(n_i)$ в узлах, для которых найдется K_i , надо накладывать для $n_i = \overline{1, K_i}$. Тогда процесс $\mathbf{n}(t)$ будет неприводим на X , а

при выполнении остальных условий теоремы 3.1 также эргодичным на X . На пространстве \mathbb{Z}_+^N процесс $\mathbf{n}(t)$ не будет эргодическим, но будет иметь стационарное распределение, совпадающее с эргодическим на X и равным нулю на $\mathbb{Z}_+^N \setminus X$.

Например, если сообщение, поступающее в узел, решает вопрос о присоединении к узлу или его обходе по числу находящихся там заявок, т. е. для всех $i = \overline{1, N}$

$$f_{n_i}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{если } n_i < K_i, \\ 0, & \text{если } n_i \geq K_i, \end{cases}$$

то $\mathbf{n}(t)$ неприводим и эргодичен на $X = X_1 \times \dots \times X_N$, где $X_i = \{0, 1, \dots, K_i\}$. При этом не имеет значения, каким образом определены и определены ли вообще $\mu_i(n_i)$ при $n_i > K_i$. Теорема 3.1 выполняется на X , если $f_{n_i}^{(i)} = d_i \mu_i(n_i)$ для $n_i = \overline{1, K_i}$.

Заключение

Из-за максимальной связности графа переходов марковских процессов, описывающих состояния систем и сетей массового обслуживания с групповыми перемещениями, невозможно в общем случае находить их стационарные распределения в аналитическом виде. Исследованию поддаются весьма редкие случаи. В настоящей статье за счет предположения о пропорциональности вероятности присоединения сообщения о формировании группы к узлу сети условной интенсивности обслуживания этим узлом удалось найти стационарное распределение сети в форме произведения смещенных квазигеометрических распределений. В рассмотренной нами модели сети формирование поступающих и требуемых для обслуживания групп является внутренним свойством узла, а в сеть узлы связываются с помощью стохастической матрицы маршрутизации, позволяющей передавать сообщения о формировании групп. Большой интерес вызывает рассмотрение сети, в которой происходит не передача сообщений о формировании групп, а передаются сами обслуженные группы. Авторы статьи предполагают в дальнейшем исследовать такие сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miyazawa, M. A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-standard Batch Arrivals and Batch Transfers / M. Miyazawa, P.G. Taylor // Adv. Appl. Prob. – 1997. – Vol. 29, № 2. – P. 1–22.
2. Chao, X. On Generalized Networks of Queues with Positive and Negative Arrivals / X. Chao, M. Pinedo // Prob. Eng. Inf. Sci. – 1993. – Vol. 7. – P. 301–304.
3. Chao, X. A Network of Assembly Queues with Product-form Solution / X. Chao, M. Pinedo, D. Shaw // J. Appl. Prob. – 1996. – Vol. 33. – P. 858–869.
4. Малинковский, Ю.В. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения геометрических распределений / Ю.В. Малинковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1 (1). – С. 51–59.
5. Малинковский, Ю.В. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений / Ю.В. Малинковский, Е.В. Коробейникова // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 43–56.
6. Foster, F.G. On Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Process / F.G. Foster // Ann. Math. Statist. – 1953. – Vol. 24, № 2. – P. 355–360.
7. Малинковский, Ю.В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 2. – С. 102–110.
8. Kelly, F.P. Reversibility and Stochastic Networks / F.P. Kelly. – N.Y. : Wiley. – 1979.
9. Pollet, P.K. Preserving Partial Balance in Continuous-time Markov Chains / P.K. Pollet // Adv. Appl. Probab. – 1987. – Vol. 19, № 2. – P. 431–453.
10. Taylor, P.G. Quasi-reversibility and Networks of Queues with Non-Standard Batch Movements / P.G. Taylor // Oper. Res. – 1997. – № 2. – P. 602–610.

Поступила в редакцию 03.05.13.

УДК 517.925

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.П. Мартынов¹, О.Н. Парманчук², В.М. Пецевич¹

¹Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

²Гродненский государственный аграрный университет, Гродно

ON A CROSS SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS

I.P. Martynov¹, O.N. Parmanchuk², V.M. Peceovich¹

¹Y. Kupala Grodno State University, Grodno

²Grodno State Agrarian University, Grodno

В статье рассмотрена перекрестная система двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной и четвертой степени относительно переменных специального вида. Найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений данной системы.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, упрощенное дифференциальное уравнение.

The article deals with the cross-system of the two differential equations of the second degree and fourth-degree derivative of the variables. The necessary and sufficient conditions for the Painlevé property for solutions of the system are found.

Keywords: system of the differential equations, property of Painlevé, simplified differential equation.

Введение

В работе [1] рассмотрена система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'^2 &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + \\ &+ y(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0), \\ y'^2 &= c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 + \\ &+ x(d_3y^3 + d_2y^2 + d_1y + d_0),\end{aligned}$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{0,3}$ – функции аналитические от t при ограничениях

$$\begin{aligned}|a_3| + |b_3| &\neq 0, \\ |c_3| + |d_3| &\neq 0, \\ |b_3| + |b_2| + |b_1| + |b_0| &\neq 0, \\ |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| &\neq 0.\end{aligned}$$

Для удобства изучения аналитических свойств системы она была разбита на 4 случая. В случае $b_0 = 0, b_3 = 0, a_3 \neq 0$ найдены необходимые и достаточные условия, при которых данная система не имеет подвижных критических особых точек.

В данной работе продолжим исследование решений системы на наличие свойства Пенлеве в случае $a_0 = K_0b_0, a_3 = K_1b_3, b_0 \neq 0, b_3 \neq 0$, где K_0, K_1 – некоторые постоянные.

1 Используемые результаты

Для дальнейшего исследования нам потребуются

Лемма 1.1 [2]. Для того чтобы уравнение

$(x'' + A(t, x, x'))^n = B(t, x, x')$, где $n = 2, 3, \dots$, A, B – рациональные по x, x' и локально аналитические от t функции, не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы A и B были полиномами по x' степени 2 и $2n$ соответственно.

Лемма 1.2 [3] (правило степени $n + \frac{1}{2}$).

Пусть в дифференциальном уравнении второго порядка второй степени

$$w''^2 = E(w', w, z)w'' + F(w', w, z): w' = p \text{ и}$$

$$\Delta(p, w, z) = E^2 + 4F = 4(G(p, w, z))^{2m+1} K(p, w, z),$$

где m – неотрицательное целое число и E, F, G, K голоморфны по всем трём комплексным переменным в некоторой области D . Предположим далее, что G имеет, по крайней мере, один простой нуль вида $p = \mu(w, z)$ или $y = v(z)$, где $K \neq 0$ и μ, v не дают особенностей для K^{-1} . Тогда необходимым условием для отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения

$$w''^2 = E(w', w, z)w'' + F(w', w, z)$$

есть $G_z + pG_w + \frac{1}{2}EG_p = 0$ для всех простых нулей G .

2 Необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= K_1 b_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + K_0 b_0 + \\ &+ y(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \\ y'^2 &= c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 + \\ &+ x(d_3 y^3 + d_2 y^2 + d_1 y + d_0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $b_0 \neq 0, b_3 \neq 0, |c_3| + |d_3| \neq 0, |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0, a_i, a_2, b_i, c_i, d_i, i = 0, 3$ – функции аналитические от t, K_0, K_1 – некоторые постоянные. С помощью линейного преобразования

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{b_3}}, y \rightarrow y - K_1,$$

аналитической замены независимой переменной и сохранения для коэффициентов прежних обозначений можно записать

$$\begin{aligned} x'^2 &= a_2 x^2 + a_1 x + K_0 b_0 + \\ &+ y(x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \\ y'^2 &= c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 + \\ &+ x(d_3 y^3 + d_2 y^2 + d_1 y + d_0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 \neq 0, |c_3| + |d_3| \neq 0, \\ |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Построив из системы (2.2) уравнения относительно переменных x и y и требуя для них выполнения условий леммы 1.1, получим следующие соотношения между коэффициентами системы:

$$\begin{aligned} d_0 = 0, a_2' = 0, a_0 b_0' - a_0' b_0 = 0, \\ a_0 b_1' - a_0' b_1 + a_1 b_0' - a_1' b_0 = 0, \\ a_0 b_2' - a_0' b_2 + a_1 b_1' - a_1' b_1 + a_2 b_0' = 0, \\ a_1 b_2' - a_1' b_2 + a_2 b_1' - a_2' b_1 = 0, \\ a_2 b_2' - a_2' b_2 = 0, a_0^2 b_0 c_2 - a_0 b_0^2 c_1 + b_0^3 c_0 - a_0^3 c_3 = 0, \\ 3b_0^2 b_1 c_0 - 3a_0^2 a_1 c_3 + a_0^2 b_1 c_2 - a_1 b_0^2 c_1 + 2a_0 a_1 b_0 c_2 - \\ - a_0 b_0^2 d_1 + a_0^2 b_0 d_2 - 2a_0 b_0 b_1 c_1 - a_0^3 d_3 = 0, \\ 3b_0^2 b_2 c_0 - 3a_0 a_1^2 c_3 + 2a_0 a_1 b_1 c_2 - 2a_0 b_0 b_2 c_1 - \\ - 3a_0^2 a_1 d_3 + 3b_0 b_0^2 c_0 + a_1^2 b_0 c_2 - a_1 b_0^2 c_1 - \\ - 2a_0 b_0 b_1 d_1 - a_1 b_0^2 d_1 - 2a_1 b_0 b_1 c_1 + \\ + a_0^2 b_2 c_2 + 2a_0 a_2 b_0 c_2 + a_0^2 b_1 d_2 - \\ - a_0 b_1^2 c_1 - 3a_0^2 a_2 c_3 + 2a_0 a_1 b_0 d_2 = 0, \\ -a_1 b_1^2 c_1 - 2a_0 b_0 c_1 - 3a_0^2 a_2 d_3 - 3a_0 a_1^2 d_3 + \\ + a_1^2 b_0 d_2 + a_0^2 b_2 d_2 - a_2 b_0^2 d_1 - \\ - a_0 b_1^2 d_1 + 3b_0^2 b_2 d_0 + 3b_0 b_1^2 d_0 + a_1^2 b_1 c_2 - \\ - a_1^3 c_3 + a_0^2 c_2 + 3b_0^2 c_0 + b_1^3 c_0 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6a_0 a_1 a_2 c_3 + 2a_1 a_2 b_0 c_2 + 2a_0 a_2 b_1 c_2 + \\ + 2a_0 a_1 b_2 c_2 - 2a_2 b_0 b_1 c_1 - 2a_1 b_0 b_2 c_1 - \\ - 2a_0 b_1 b_2 c_1 - 2a_1 b_0 b_1 d_1 - 2a_0 b_0 b_2 d_1 + \\ + 2a_0 a_2 b_0 d_2 + 2a_0 a_1 b_1 d_2 + 6b_0 b_1 b_2 c_0 = 0, \\ 2a_0 a_1 c_2 - a_2 b_1^2 c_1 - 2a_1 b_0 c_1 - 2a_0 b_1 c_1 - \\ - a_0 b_2^2 c_1 + 6b_0 b_1 c_0 + 3b_0 b_2^2 c_0 - 2a_2 b_0 b_1 d_1 + \\ + 3b_1^2 b_2 c_0 + a_1^2 b_1 d_2 - a_1 b_1^2 d_1 - 2a_0 b_0 d_1 - \\ - 3a_1^2 a_2 c_3 + a_1^2 b_2 c_2 + a_2^2 b_0 c_2 - \\ - 3a_2^2 a_0 c_3 - a_1^3 d_3 + a_0^2 d_2 + 2a_2 a_1 b_1 c_2 + \\ + 2a_0 a_2 b_2 c_2 - 2a_2 b_0 b_2 c_1 - 2a_1 b_1 b_2 c_1 - \\ - 2a_1 b_0 b_2 d_1 - 2a_0 b_1 b_2 d_1 - 6a_0 a_1 a_2 d_3 + \\ + 2a_1 a_2 b_0 d_2 + 2a_0 a_2 b_1 d_2 + 2a_0 a_1 b_2 d_2 = 0, \\ -c_2^3 + a_2 c_2^2 d_3 - a_1 c_3 d_2^2 + a_2 c_3^2 d_1 - \\ - a_1 c_1 d_3^2 + 3a_0 d_1 d_3^2 + 3a_0^2 d_2^2 d_3 - \\ - 6c_1 c_2 c_3 + b_2 c_2^2 d_2 - b_1 c_2 d_2^2 - b_1 c_0 d_3^2 - \\ - 3c_0 c_3^2 - 2b_1 c_1 d_2 d_3 + 6b_0 d_1 d_2 d_3 + \\ + b_0 d_2^3 + 2a_2 c_2 c_3 d_2 + 2a_2 c_1 c_3 d_3 - \\ - 2a_1 c_3 d_1 d_3 - 2a_1 c_2 d_2 d_3 + 2b_2 c_2 c_3 d_1 + \\ + 2b_2 c_1 c_3 d_2 + 2b_2 c_0 c_3 d_3 + 2b_2 c_1 c_2 d_3 - \\ - 2b_1 c_3 d_1 d_2 - 2b_1 c_2 d_1 d_3 = 0, \\ -a_0 d_1 + 3b_2^2 c_0 - 2a_1 b_2 d_1 + 2a_2 a_1 d_2 - \\ - 2b_2 c_1 + a_2^2 c_2 - a_1 c_1 + a_2^2 b_2 d_2 - \\ - a_2 b_2^2 d_1 + 3b_1 c_0 - a_2^3 d_3 - 2a_2 b_1 d_1 = 0, \\ 2a_2 c_0 c_1 d_1 + a_2 c_0^2 d_2 - a_1 c_0 d_1^2 - 3c_0^2 c_1 + b_2 c_0^2 d_1 = 0, \\ -2a_2 b_0 c_1 - 2a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2^2 c_1 - 2a_0 b_2 c_1 + \\ + 6b_0 b_2 c_0 + 3b_1 b_2^2 c_0 - 3a_0 a_2^2 d_3 - \\ - 3a_1^2 a_2 d_3 + a_2^2 b_0 d_2 + a_1^2 b_2 d_2 + 2a_0 a_1 d_2 - \\ - a_2 b_1^2 d_1 - 2a_1 b_0 d_1 - 2a_0 b_1 d_1 - \\ - a_0 b_2^2 d_1 + 2a_2 a_0 c_2 - 3a_1 a_2 c_3 + a_2^2 b_1 c_2 + \\ + a_1^2 c_2 + 3b_1^2 c_0 + 2a_1 a_2 b_2 c_2 - \\ - 2a_2 b_0 b_2 d_1 - 2a_1 b_1 b_2 d_1 + 2a_1 a_2 b_1 d_2 + \\ + 2a_0 a_2 b_2 d_2 - 2a_2 b_1 b_2 c_1 = 0, \\ -a_2^3 c_3 - 2a_2 b_0 d_1 + a_2^2 b_1 d_2 - 2a_1 b_2 c_1 - a_2 b_2^2 c_1 + \\ + 2a_1 a_2 c_2 - a_1 b_2^2 d_1 - a_0 c_1 + 2a_0 a_2 d_2 - 2a_2 b_1 b_2 d_1 + \\ + 2a_1 a_2 b_2 d_2 + 3b_0 c_0 - 3a_1 a_2^2 d_3 - \\ - 2a_0 b_2 d_1 + b_2^3 c_0 + 6b_1 b_2 c_0 + a_1^2 d_2 - \\ - 2a_1 b_1 d_1 + a_2^2 b_2 c_2 - 2a_2 b_1 c_1 = 0, \\ -a_2 c_1 - 2a_2 b_2 d_1 + 3b_2 c_0 - a_1 d_1 + a_2^2 d_2 = 0, \\ -a_2 d_1 + c_0 = 0, \quad (2.4) \\ c_0 d_1' - c_0' d_1 = 0, c_1 d_1' - c_1' d_1 + c_0 d_2' - c_0' d_2 = 0, \\ c_3 d_3' - c_3' d_3 = 0, \\ c_2 d_1' - c_2' d_1 + c_0 d_3' - c_0' d_3 + c_1 d_2' - c_1' d_2 = 0, \\ -c_0^3 + a_2 c_0^2 d_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c_1 d_3' - c_1' d_3 + c_2 d_2' - c_2' d_2 + c_3 d_1' - c_3' d_1 = 0, \\
 & c_2 d_3' - c_2' d_3 + c_3 d_2' - c_3' d_2 = 0, \\
 & a_2 c_1^2 d_1 + a_2 c_0^2 d_3 - a_1 c_1 d_1^2 + b_2 c_0^2 d_2 - \\
 & - b_1 c_0 d_1^2 + a_0 d_1^3 - 3c_0^2 c_2 - 3c_0 c_1^2 + \\
 & + 2a_2 c_0 c_2 d_1 + 2a_2 c_0 c_1 d_2 - 2a_1 c_0 d_1 d_2 + 2b_2 c_0 c_1 d_1 = 0, \\
 & -c_1^3 + a_2 c_1^2 d_2 - a_1 c_2 d_1^2 - a_1 c_0 d_2^2 + 3a_0 d_1^2 d_2 - \\
 & - 6c_0 c_1 c_2 + b_2 c_1^2 d_1 + b_2 c_0^2 d_3 - b_1 c_1 d_1^2 + b_0 d_1^3 - \\
 & - 3c_0^2 c_3 + 2a_2 c_0 c_3 d_1 + 2a_2 c_1 c_2 d_1 + 2a_2 c_0 c_2 d_2 + \\
 & + 2a_2 c_0 c_1 d_3 - 2a_1 c_1 d_1 d_2 - 2a_1 c_0 d_1 d_3 + 2b_2 c_0 c_2 d_1 + \\
 & + 2b_2 c_0 c_1 d_2 - 2b_1 c_0 d_1 d_2 = 0, \\
 & a_2 c_2^2 d_1 + a_2 c_1^2 d_3 - a_1 c_3 d_1^2 - a_1 c_1 d_2^2 + 3a_0 d_1^2 d_3 + \\
 & + 3a_0 d_1 d_2^2 - 6c_0 c_1 c_3 + b_2 c_1^2 d_2 - b_1 c_2 d_1^2 - b_1 c_0 d_2^2 + \\
 & + 3b_0 d_0 d_2^2 + 3b_0 d_1^2 d_2 - 3c_1^2 c_2 - 2b_1 c_1 d_1 d_2 - \\
 & - 3c_0 c_2^2 + 2a_2 c_1 c_3 d_1 + 2a_2 c_0 c_3 d_2 + \\
 & + 2a_2 c_1 c_2 d_2 + 2a_2 c_0 c_2 d_3 - 2b_1 c_0 d_1 d_3 - 2a_1 c_1 d_1 d_3 - \\
 & - 2a_1 c_2 d_1 d_2 - 2a_1 c_0 d_2 d_3 + 2b_2 c_0 c_3 d_1 + \\
 & + 2b_2 c_1 c_2 d_1 + 2b_2 c_0 c_2 d_2 + 2b_2 c_0 c_1 d_3 = 0, \\
 & a_2 c_2^2 d_2 - a_1 c_2 d_2^2 - a_1 c_0 d_3^3 - 6c_0 c_2 c_3 + b_2 c_2^2 d_1 + \\
 & + b_2 c_1^2 d_3 - b_1 c_3 d_1^2 - 2b_1 c_0 d_2 d_3 - b_1 c_1 d_2^2 + \\
 & + 3b_0 d_1^2 d_3 + 3b_0 d_1 d_2^2 + a_0 d_2^3 - 3c_1^2 c_3 - \\
 & - 3c_1 c_2^2 + 2a_2 c_2 c_3 d_1 - 2b_1 c_1 d_1 d_3 + 2a_2 c_1 c_3 d_2 + \\
 & + 2a_2 c_0 c_0 d_3 + 2a_2 c_1 c_2 d_3 - 2a_1 c_3 d_1 d_2 - 2a_1 c_2 d_1 d_3 - \\
 & - 2b_1 c_2 d_1 d_2 - 2a_1 c_1 d_2 d_3 + 6a_0 d_1 d_2 d_3 + 2b_2 c_1 c_3 d_1 + \\
 & + 2b_2 c_0 c_3 d_2 + 2b_2 c_1 c_2 d_2 + 2b_2 c_0 c_2 d_3 = 0, \\
 & - 2a_1 c_3 d_2 d_3 + b_2 c_3^2 d_1 - 2b_1 c_3 d_1 d_3 - 2b_1 c_2 d_2 d_3 - \\
 & - b_1 c_3 d_2^2 + 2a_2 c_2 c_3 d_3 - 3c_2^2 c_3 + 3b_0 d_1 d_3^2 - \\
 & - b_1 c_1 d_3^2 + 3b_0 d_2^2 d_3 - a_1 c_2 d_3^2 - 3c_1 c_3^2 + b_2 c_2^2 d_3 + \\
 & + 3a_0 d_2 d_3^2 + 2b_2 c_2 c_3 d_2 + a_2 c_3^2 d_2 + 2b_2 c_1 c_3 d_3 = 0, \\
 & a_0 d_3^3 + 3b_0 d_2 d_3^2 - 2b_1 c_3 d_2 d_3 + b_2 c_3^2 d_2 - \\
 & - a_1 c_3 d_3^2 - 3c_2 c_3^2 + a_2 c_3^2 d_3 - b_1 c_2 d_3^2 + 2b_2 c_2 c_3 d_3 = 0, \\
 & -c_3^2 - b_1 c_3 d_3^2 + b_0 d_3^2 + b_2 c_3^2 d_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Для компоненты x из (2.2) построим уравнение вида $(x'' + A(t, x, x'))^2 = B(t, x, x')$, в котором, полагая $x = \varepsilon^{-1} X$, $t = t_0 + \varepsilon \tau$ при $\varepsilon = 0$, получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$X'' - \left(\frac{3}{2} - \lambda \frac{\sqrt{d_3}}{2} \right) \frac{X'^2}{X} = 0, \text{ где } \lambda^2 = 1. \text{ Для}$$

однозначности решения последнего уравнения необходимо требовать [4] $d_3 = 0$ или $d_3 = 1$. Подставив $d_3 = 0$ в ранее полученные соотношения (2.4) для коэффициентов системы, получим $c_3 = 0$, что противоречит условиям (2.3). Поэтому необходимо требовать

$$d_3 = 1. \tag{2.5}$$

Построим из системы (2.2) уравнения относительно переменных x и y и потребуем для них выполнения условий леммы 1.2. Тогда с учетом (2.5) получим следующие соотношения между коэффициентами системы (2.2):

$$\begin{aligned}
 & -4d_1 + d_2^2 = 0, \\
 & 2b_2 d_2^2 - 8b_2 d_1 + 2a_2 d_2 + 2c_2 d_2 - 4c_1 - 4c_3 d_1 = 0, \\
 & 2b_1 d_2^2 - 8b_2 c_3 d_1 + 2a_2 b_2 d_2 - 4c_1 c_3 - 3a_2^2 + \\
 & + 2a_1 d_2 + 2a_2 c_2 - 8b_1 d_1 + c_2^2 - 4b_2^2 d_1 = 0, \\
 & 2a_1 c_3 d_2 - 8b_1 c_1 + 2b_2 c_2^2 - 8b_1 c_3 d_1 - 4b_2^2 c_1 + \\
 & + 4b_1 c_2 d_2 + 2a_1 c_2 + 2a_2 b_2 c_3 d_2 + 2a_1 b_2 d_2 + \\
 & + 2a_2 c_2 c_3 + 2a_2 b_1 d_2 + 2b_1 b_2 d_2^2 - 8b_0 d_1 + 2b_2^2 c_2 d_2 + \\
 & + 2b_0 d_2^2 - 6a_2^2 c_3 - 8b_2 c_1 c_3 - 6a_1 a_2 - 8b_1 b_2 d_1 = 0, \\
 & b_1^2 d_2^2 + b_2^2 c_2^2 + 2b_1 c_2^2 - 3a_1^2 - 3a_2^2 c_3^2 + 2a_2 b_1 c_2 + \\
 & + 2a_1 b_2 c_2 + 2a_1 b_2 c_3 d_2 + 2a_2 b_1 c_3 d_2 + 2a_2 b_2 c_2 c_3 + \\
 & + 2K_0 b_0 b_2 d_2 + 2a_2 b_0 d_2 - 8b_1 b_2 c_3 d_1 - 8b_0 b_2 d_1 - \\
 & - 8b_1 b_2 c_1 - 12a_1 a_2 c_3 + 2a_1 b_1 d_2 + 4b_1 b_2 c_2 d_2 - 8b_1 c_1 c_3 + \\
 & + 2b_0 b_2 d_2^2 + 2K_0 b_0 c_2 + 2a_1 c_2 c_3 - 6K_0 b_0 a_2 - 4b_1^2 d_1 + \\
 & + 4b_0 c_2 d_2 - 8b_0 c_1 - 8b_0 c_3 d_1 - 4b_2^2 c_1 c_3 + 2K_0 b_0 c_3 d_2 = 0, \\
 & - 8b_0 c_1 c_3 - 4b_1^2 c_1 d_3 + 2b_0 b_1 d_2^2 - 4b_1^2 c_3 d_1 - \\
 & - 6a_1 a_2 c_3^2 - 6K_0 b_0 a_1 + 2b_1 b_2 c_2^2 + 2K_0 b_0 c_2 c_3 - \\
 & - 6a_1^2 c_3 d_3 + 2b_1^2 c_2 d_2 + 2b_0 c_2^2 + 2a_1 b_0 d_2 + \\
 & + 2a_1 b_1 c_3 d_2 + 2a_1 b_2 c_2 c_3 + 2a_2 b_0 c_3 d_2 + \\
 & + 2K_0 b_0 b_1 d_2 + 2K_0 b_0 b_2 c_2 - 8b_0 b_2 c_3 d_1 - \\
 & - 8b_1 b_2 c_1 c_3 - 8b_0 b_1 d_1 - 8b_0 b_2 c_1 + 4b_0 b_2 c_2 d_2 + \\
 & + 2a_2 b_0 c_2 + 2a_1 b_1 c_2 + 2a_2 b_1 c_2 c_3 + \\
 & + 2K_0 b_0 b_2 c_3 d_2 - 12K_0 b_0 a_2 c_3 = 0, \\
 & - 6K_0 b_0 a_2 c_3^2 + 2a_1 b_0 c_2 + 2a_2 b_0 c_2 c_3 + 2K_0 b_0 b_2 c_2 c_3 + \\
 & + 2b_0 b_2 c_2^2 - 4b_0^2 d_1 - 8b_0 b_1 c_3 d_1 + 2K_0 b_0 b_1 c_2 + \\
 & + 4b_0 b_1 c_2 d_2 + 2K_0 b_0^2 d_2 + b_0^2 d_2^2 - 8b_0 b_2 c_1 c_3 + \\
 & + 2a_0 b_1 c_3 d_2 + 2a_1 b_1 c_2 c_3 - 8b_0 b_1 c_1 - 3a_0^2 - 12K_0 a_1 b_0 c_3 + \\
 & + b_1^2 c_2^2 - 4c_1 b_1^2 c_3 - 3a_1^2 c_3^2 + 2a_1 b_0 c_3 d_2 = 0, \\
 & 6K_0^2 b_0^2 c_3 + 2b_0 b_1 c_2^2 + 2K_0 b_0^2 c_3 d_2 - 8b_0 b_1 c_1 c_3 - \\
 & - 4b_0^2 c_1 d_3 - 4b_0^2 c_3 d_1 - 6K_0 b_0 a_1 c_3^2 + 2K_0 b_0 b_1 c_2 c_3 + \\
 & + 2K_0 b_0^2 c_2 + 2a_1 b_0 c_2 c_3 + 2b_0^2 c_2 d_2 = 0, \\
 & - 3K_0^2 c_3^2 b_0^2 + 2K_0 b_0^2 c_2 c_3 - 4b_0^2 c_1 c_3 + b_0^2 c_2^2 = 0, \\
 & - 6c_2 c_3 + 2b_2 c_3 d_2 + 2a_2 c_3 + 2b_2 c_2 - \\
 & - 4a_1 + 2b_2^2 d_2 + 2a_2 b_2 - 8b_1 d_2 = 0, \\
 & 2b_2^2 d_1 + 2b_2 c_2 d_2 + 2a_2 c_3 d_2 - 8b_1 d_1 - 8a_1 d_2 - \\
 & - 3c_2^2 + b_2^2 d_2^2 + a_2^2 + 2a_2 c_2 + 2b_2 c_3 d_1 - 6c_1 c_3 + \\
 & + 2b_2 c_1 + 4a_2 b_2 d_2 - 4b_1 d_2^2 = 0, \\
 & 2b_2 c_2 d_1 + 2b_2^2 d_1 d_2 + 2a_2^2 d_2 - 4a_1 d_2^2 - 6c_0 c_3 + \\
 & + 4a_2 b_2 d_1 - 8a_1 d_1 + 2b_2 c_1 d_2 - 8b_1 d_1 d_2 + 2a_2 c_1 + \\
 & + 2a_2 c_3 d_1 + 2b_2 c_0 + 2a_2 c_2 d_2 + 2a_2 b_2 d_2^2 - 6c_1 c_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
 &4a_2b_2d_1d_2 + 2a_2c_0 + b_2^2d_1^2 + a_2^2d_2^2 + 2a_2c_2d_1 + \\
 &+ 2a_2^2d_1 - 6c_0c_2 - 3c_1^2 + 2b_2c_0d_2 - 8a_1d_1d_2 + \\
 &+ 2b_2c_1d_1 - 4b_1d_1^2 + 2a_1c_1d_2 = 0, \\
 &2a_2b_2d_1^2 + 2a_2c_0d_2 - 4a_1d_1^2 - 6c_0c_1 + \\
 &+ 2a_2c_1d_1 + 2a_2^2d_1d_2 + 2b_2c_0d_1 = 0, \\
 &-3c_3^2 + 2b_2c_3 - 4b_1 + b_2^2 = 0, \\
 &(-c_0 + a_2d_1)(3c_0 + a_2d_1) = 0.
 \end{aligned}$$

Разрешая соотношения (2.4) и (2.6) с учетом условий (2.3) и (2.5), получим следующие наборы решений:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= K_0K_1b_2 - K_0K_1^2, \quad a_2 = K_0K_1, \quad c_3 = K_1, \\
 d_0 &= 0, \quad d_1 = \frac{d_2^2}{4}, \quad b_0 = \frac{1}{4}K_1(b_2 - K_1)^2, \\
 b_1 &= \frac{1}{2}K_1b_2 - \frac{3}{4}K_1^2 + \frac{1}{4}b_2^2, \\
 c_0 &= K_0K_1\frac{d_2^2}{4},
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{1}{4}K_1d_2^2 + K_0K_1d_2, \\
 c_2 &= K_0K_1 + K_1d_2; \\
 a_1 &= 0, \quad a_2 = 0, \quad b_0 = K_1^3, \quad b_1 = 3K_1^2, \\
 b_2 &= 3K_1, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}K_1d_2^2,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= K_1d_2, \quad c_3 = K_1, \quad d_0 = 0, \quad d_1 = \frac{d_2^2}{4}; \\
 a_1 &= K_0K_1b_2 + K_1, \quad a_2 = K_0K_1, \\
 b_0 &= \frac{1}{4}K_1(b_2 - K_1)^2, \quad c_0 = K_0K_1d_1, \\
 c_1 &= \frac{1}{2}c_2d_2 - \frac{1}{4}K_1d_2^2 + \frac{1}{2}K_0K_1d_2, \\
 b_1 &= \frac{1}{2}K_1b_2 - \frac{3}{4}K_1^2 + \frac{1}{4}b_2^2, \\
 c_2 &= 4K_1d_2 - 3K_0K_1 - b_2d_2, \\
 c_3 &= K_1, \quad d_0 = 0, \quad d_1 = \frac{d_2^2}{4},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $d_2 = \frac{4K_0K_1}{3K_1 - b_2}$, $b_2 \neq 3K_1$, K_0, K_1 – некоторые постоянные.

Подставляя (2.7)–(2.9) в (2.2), соответственно получим системы:

$$x'^2 = \left(x + \frac{b_2 - K_1}{2}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1), \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
 y'^2 &= \left(y + \frac{d_2}{2}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1); \\
 x'^2 &= (x + K_1)^3 y,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$y'^2 = y \left(y + \frac{d_2}{2}\right)^2 (x + K_1);$$

$$x'^2 = \left(x + \frac{b_2 - K_1}{2}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1),$$

$$\begin{aligned}
 y'^2 &= \left(y - \frac{2K_0K_1}{b_2 - 3K_1}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1), \\
 &b_2 \neq 3K_1.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Выполняя линейные преобразования относительно независимых переменных x и y в системах (2.10)–(2.12) получим, что справедлива

Теорема 2.1. Для того чтобы у решений системы (2.2) с условиями (2.3) отсутствовали подвижные многозначные особенности, необходимо, чтобы она линейным преобразованием x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к виду

$$\begin{aligned}
 x'^2 &= (x + b)^2 (xy + H), \\
 y'^2 &= (y + d)^2 (xy + H),
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

где H – постоянная, b, d – функции аналитические от t .

Из системы (2.13) для компоненты y построим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
 &(2y(y + d)y'' - (4y + d)y'^2 - 2d'yy' + \\
 &+ (y + d)^2 (-by^2 + 2Hy + Hd)) \times \\
 &\times (2y(y + d)y'' - (2y + d)y'^2 - 2d'yy' + \\
 &+ (y + d)^2 (by^2 + Hd)) = 0,
 \end{aligned}$$

которое распадается на два. Рассмотрим первое из них

$$\begin{aligned}
 &2y(y + d)y'' - (4y + d)y'^2 - 2d'yy' + \\
 &+ (y + d)^2 (-by^2 + 2Hy + Hd) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Пусть $d \neq 0$. Выполняя в уравнении (2.14) замену переменной по формуле $y = -\frac{du}{u+1}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}
 u'' &= \frac{u'^2}{2u} - \frac{2d'}{d}uu' - \frac{d'^2}{2d^2}u^3 - \frac{dd'' - d'^2}{d^2}u^2 + \\
 &+ \frac{bd^3 + Hd^2 - 2dd'' + 3d'^2}{2d^2}u - \frac{H}{2u}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Согласно [5], уравнение (2.15) обладает свойством Пенлеве, если $d = M_1e^{M_2t}$, где M_1, M_2 – некоторые постоянные.

Если $d = 0$, то, выполняя в уравнении (2.14) замену переменной по формуле $y = \frac{1}{u}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$u'' = Hu + \frac{b}{2},$$

которое обладает свойством Пенлеве [4].

Рассмотрим второе уравнение

$$2y(y+d)y'' - (2y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(by^2 + Hd) = 0. \quad (2.16)$$

Пусть $d \neq 0$. Выполняя в уравнении (2.16) замену переменной по формуле $y = -\frac{du}{u-1}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1} \right) u'^2 + u(u-1) \times \left(\frac{H}{2u^2} - \frac{H}{2u} - \frac{bd}{2(u-1)} + \frac{d'^2}{2d^2}u + \frac{2dd'' - 3d'^2}{2d^2} \right). \quad (2.17)$$

Согласно [5], для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (2.17) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $b = M_3 e^{M_4 t}$, $d = M_5 e^{M_6 t}$, где M_i , $i = \overline{3, 6}$ – некоторые постоянные.

Если $d = 0$, то, выполняя в уравнении (2.16) замену переменной по формуле $y = \frac{1}{u}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка $u'' = \frac{u'^2}{u} + \frac{b}{2}$, которое обладает свойством Пенлеве [4], если $b = M_7 e^{M_8 t}$, M_7, M_8 – некоторые постоянные.

Объединяя результаты исследования системы (2.13) для компоненты y , и учитывая, что

$$x = -\frac{y'^2 + Hy^2 + 2Hdy + Hd^2}{y(y^2 + 2dy + d^2)},$$

заключаем, что справедлива

Теорема 2.2. Для того чтобы система (2.2) с ограничениями (2.3) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она

линейным преобразованием x и y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к виду (2.13) с ограничениями $b = Ke^{Lt}$, $d = Me^{Nt}$, где K, L, M, N – некоторые постоянные.

Заключение

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых система (2.2) с ограничениями (2.3) не имеет подвижных критических особых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парманчук, О.Н. Аналитические свойства решений одной перекрестной системы двух дифференциальных уравнений / О.Н. Парманчук // Вестник ГрГУ. Сер. 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2011. – № 2. – С. 35–41.
2. Березкина, Н.С. О системе двух дробно-линейных дифференциальных уравнений степени n со свойством Пенлеве / Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 1–6.
3. Cosgrove, C. Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 88. – P. 25–87.
4. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков : ГНТИ, 1939. – 719 с.
5. Bureau, F. Differential equations with fixed critical points / F. Bureau // Ann. di Math. Sci. – 1964. – Vol. 64. – P. 229–364.

Поступила в редакцию 03.06.13.

УДК 512.542

**ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМ БАЭРА О ГИПЕРЦЕНТРЕ
И НИЛЬПОТЕНТНОМ КОРАДИКАЛЕ**

В.И. Мурашко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**ON ONE GENERALIZATION OF BAER'S THEOREMS ABOUT HYPERCENTER
AND NILPOTENT RESIDUAL**

V.I. Murashka

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть \mathfrak{F} – класс конечных групп, представимых в виде прямого произведения своих холловых π_i -подгрупп относительно некоторого разбиения $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I, i \neq j \Rightarrow \pi_i \cap \pi_j = \emptyset\}$ непустого подмножества множества π простых чисел. Данный класс является локальной формацией. В работе изучаются свойства \mathfrak{F} -гиперцентра и \mathfrak{F} -корадикала конечной группы. В работе было показано, что для любой конечной π -группы G пересечение для всех i всех нормализаторов максимальных π_i -подгрупп является \mathfrak{F} -гиперцентром группы G . В качестве следствий получаются известные результаты о строении гиперцентра и нильпотентного корадикала конечной группы.

Ключевые слова: конечная группа, формация конечных групп, локальная формация, \mathfrak{F} -гиперцентр, \mathfrak{F} -корадикал.

Let \mathfrak{F} be a class of finite groups which are the direct products of their Hall π_i -subgroups corresponding to a given partition $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I, i \neq j \Rightarrow \pi_i \cap \pi_j = \emptyset\}$ of a nonempty subset π of the set of all primes. This class is a local formation. In this paper the properties of \mathfrak{F} -hypercenter and \mathfrak{F} -residual of a finite group are studied. It was shown that for a finite π -group G the intersection of all normalizers of all maximal π_i -subgroups for all i is the \mathfrak{F} -hypercenter of G . As corollaries were obtained well-known properties of hypercenter and nilpotent residual of finite groups.

Keywords: finite group, formation of finite groups, local formation, \mathfrak{F} -hypercenter, \mathfrak{F} -residual.

Introduction

All considered groups are finite.

One of the central group's classes is the class of all nilpotent groups. It is enjoying many interesting properties. In particular nilpotent groups are exactly the direct products of p -groups. This class defines special subgroups in every group such as hypercenter, nilpotent residual etc.

It is well known that nilpotent residual is generated by commutators of elements of coprime orders. Baer [1] studied properties of nilpotent residual and hypercenter. He showed:

If p is a prime then a p -element g of a group G belongs to the hypercenter of G if and only if it permutes with all elements of G whose orders are coprime to the order of g .

Another characterization of hypercenter was also obtained by Baer [1]:

The hypercenter of a group G is the intersection of normalizers of all Sylow subgroups of G .

The natural generalization of nilpotent groups is the class of groups whose members are the direct products of Hall subgroups corresponding to the given partition of nonempty subset of the set of all primes.

Definition 0.1. Let π be a non-empty set of

primes. Assume that $\{\pi_i \mid i \in I, i \neq j \Rightarrow \pi_i \cap \pi_j = \emptyset\}$ is a partition of π . Denote through $\times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$ the class of all groups which are the direct products of their Hall π_i -subgroups.

Many properties of nilpotent groups can be generalized on such class of groups. In fact, this class is a subgroup-closed saturated formation and is a particular case of lattice formations, i.e. formations \mathfrak{F} for which the set of all \mathfrak{F} -subnormal subgroups of every group G is a sublattice of the lattice of subgroups of G . This formations were studied in [2] and [3].

In this work we extend Baer's results on \mathfrak{F} and give the characterization of \mathfrak{F} -hypercenter and \mathfrak{F} -residual where $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$.

1 Preliminaries

Recall the following well known definitions and notations that can be if necessary found in [4].

\mathbb{P} is the set of all primes; $\pi(m)$ is the set of all prime divisors of m ; if $\pi \subseteq \mathbb{P}$ then $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$; if

$\pi \subseteq \mathbb{P}$ then π -group (element) is a group (element) whose order is divisible only by primes from π ; \mathfrak{N} (\mathfrak{N}_p , where p is a prime) is the class of all nilpotent groups (p -groups); \mathfrak{G} (\mathfrak{G}_π , where π is a subset of \mathbb{P}) is the class of all groups (π -groups).

Let \mathfrak{X} be a formation and G be a group. $G^{\mathfrak{X}}$ is the \mathfrak{X} -residual of a group G , i. e. the smallest normal subgroup of G such that $G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$.

By a well known Gashutz – Lubeseder – Shmid Theorem saturated formations are exactly local formations, i. e. formations $\mathfrak{F} = LF(f)$ defined by a formation function $f: LF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid \text{if } H/K \text{ is a chief factor of } G \text{ and } p \in \pi(H/K) \text{ then } G/C_G(H/K) \in f(p)\}$. Among all possible local definitions of a local formation \mathfrak{F} there is exactly one, denoted by F , such that F is integrated ($F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ for all $p \in \mathbb{P}$) and full ($\mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$ for all $p \in \mathbb{P}$). F is called the canonical local definition of \mathfrak{F} .

Recall the definition of \mathfrak{F} -hypercenter and some results about it [4, p. 386].

Definition 1.1. Let f be a formation function and A be an operator group for a group G . We say that A acts f -centrally on an A -composition factor H/K of G if $A/C_A(H/K) \in f(p)$ for all primes p dividing $|H/K|$. We say that A acts f -hypercentrally on G if A acts f -centrally on every A -composition factor of G .

Lemma 1.2. Let f be a formation function, G be a group, A be an operator group for G , M and N be normal A -invariant subgroups of G . If A acts f -hypercentrally on M and N then A acts f -hypercentrally on MN .

Let f be an integrated local definition of \mathfrak{F} . We can view G as a group of operators for G . By lemma 1.2 there is a unique maximal normal subgroup $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ such that G acts f -hypercentrally on it. This subgroup does not depend on the choice of f and is called a \mathfrak{F} -hypercenter.

Lemma 1.3. Let G be a group and \mathfrak{F} be S_n -closed local formation then $Z_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Lemma 1.4 [2]. Let π be a non-empty set of primes. Assume that $\{\pi_i \mid i \in I, i \neq j \Rightarrow \pi_i \cap \pi_j = \emptyset\}$ is a partition of π and $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$. Then:

- (1) \mathfrak{F} is a subgroup-closed saturated formation;
- (2) The canonical local definition of \mathfrak{F} is: $F(p) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$ when $p \in \pi_i$ for some i and $F(p) = \emptyset$ otherwise.

Proof. (1) It is straightforward to check that \mathfrak{F} is a subgroup-closed formation. Assume that \mathfrak{F} is not saturated and let a group G be a counterexample of minimal order, i. e. $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ and G is not in \mathfrak{F} . Let N be a minimal normal subgroup of G . From $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ and $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ we obtain that $(G/N)/\Phi(G/N) \in \mathfrak{F}$. Since G is a counterexample of minimal order, $G/N \in \mathfrak{F}$. If G has two minimal normal subgroups N_1 and N_2 then $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i=1,2$, and hence

$$G \cong G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F},$$

a contradiction. Thus G has only one minimal normal subgroup N . From $\Phi(G) \neq 1$ we obtain that $N \leq \Phi(G)$. So N is a p -group. Since $G/N \in \mathfrak{F}$, G/N is a direct product of its Hall π_i -subgroups. Let KN/N be a Hall π_j -subgroup of G/N for some j . Then $KN \triangleleft G$. We have two cases. First, $p \in \pi_j$. In this case KN is a normal Hall π_j -subgroup of G . Second, p is not in π_j . Hence $|KN:N|$ and $|N|$ are coprime. By Shur's theorem N has complements in KN and any two of them are conjugate in KN . We may assume that K is a Hall π_j -subgroup of G . Since $KN \triangleleft G$, all conjugates of K in G lie in KN . Note that any subgroup of KN has normal Sylow p -subgroup. Thus K and K^x are conjugate in $\langle K^x, K \rangle \leq KN$ by Shur's theorem. So K is pronormal in G . By generalized Frattini's Argument

$$G = KNN_G(K) = N_G(K)N = N_G(K)$$

because $N \leq \Phi(G)$. So G has a normal Hall π_i -subgroup for any i . Thus $G \in \mathfrak{F}$, is the final contradiction.

(2) It is clear that $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$ and $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ for all $p \in \mathbb{P}$. Let us show that $LF(F) = \mathfrak{F}$.

Note that $\mathfrak{G}_{\pi_i} \subseteq LF(F)$ for all i . Since $LF(F)$ is a formation, it is closed under direct products. Thus $\mathfrak{F} \subseteq LF(F)$.

Let us show that $LF(F) \subseteq \mathfrak{F}$. Assume that it is false and let G be a counterexample of minimal order ($G \in LF(F)$ and G is not in \mathfrak{F}). Since both $LF(F)$ and \mathfrak{F} are saturated formations we may assume that $\Phi(G) = 1$ and G has only one minimal normal subgroup N . We have two cases:

- 1) N is an elementary abelian p -group. Then $N = C_G(N)$ and $G/N = G/C_G(N) \in F(p)$. Thus $G \in F(p)$, a contradiction.

2) N is isomorphic to a direct product of simple non-abelian groups. Then $C_G(N) = 1$ and $G = G/C_G(N) \in F(p)$ for some prime dividing $|N|$. Thus G is either 1 or π_i -group for some i , a contradiction.

So, $LF(F) \subseteq \mathfrak{F}$ and, hence, $LF(F) = \mathfrak{F}$.

2 The Characterization of \mathfrak{F} -residual

The aim of this section is to give the characterization of \mathfrak{F} -residual (\mathfrak{F} is as defined below), i. e. we will find the set of its generators.

A lot of characterizations of nilpotent groups were obtained in terms of coprime numbers. First we need the following generalization of coprime numbers.

Definition 2.1. Let π be a non-empty set of primes and $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I \text{ and } \pi_i \cap \pi_j = \emptyset \text{ for all } i \neq j\}$ be a partition of π . We shall call numbers m and n σ -coprime if $\pi(m) \cap \pi_i \neq \emptyset$ for some $i \in I$ implies $\pi(n) \cap \pi_i = \emptyset$.

Theorem 2.2. Let $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I \text{ and } \pi_i \cap \pi_j = \emptyset \text{ for all } i \neq j\}$ be a partition of non-empty set of primes π and $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$. If G is a π -group then:

(1) $G \in \mathfrak{F}$ iff $ab = ba$ for all σ -coprime order elements a and b of G ;

(2) $G^\mathfrak{F} = \langle [x, y] \mid x, y \in G \text{ where orders of } x \text{ and } y \text{ are } \sigma\text{-coprime} \rangle$;

(3) $G^\mathfrak{F}$ is the intersection of $G^{\mathfrak{G}_{\pi_i}}$ for all i , i. e. it is the intersection of all normal subgroups N of G such that $|G/N| \in \pi_i$ for some i .

Proof. (1) If $G \in \mathfrak{F}$ then the statement is obvious. Assume that σ -coprime order elements in G permutes. Consider a π_i -element g of G . We see that g permutes with all π'_i -elements of G and all its conjugates permute with them. Hence $|G/C_G(\langle g \rangle^G)| \in \pi_i$. So $G^\mathfrak{F} \leq C_G(\langle g \rangle^G)$. We see that $G^\mathfrak{F} \leq C_G(g)$ for every π_i -element g of G for all i . Hence $G^\mathfrak{F} \leq Z(G)$. Thus every chief factor of G below $G^\mathfrak{F}$ is F -central, where F is the canonical local definition of \mathfrak{F} . Since \mathfrak{F} is local, every chief factor of G above $G^\mathfrak{F}$ is F -central. Thus $G \in \mathfrak{F}$.

(2) Let $N = \langle [x, y] \mid x, y \in G \text{ where orders of } x \text{ and } y \text{ are } \sigma\text{-coprime} \rangle$. Let x, y be elements of σ -coprime orders in G then $xyG^\mathfrak{F} = yxG^\mathfrak{F}$ by (1). But $xyG^\mathfrak{F} = yx[x, y]G^\mathfrak{F}$. Thus $[x, y] \in G^\mathfrak{F}$ and $N \leq G^\mathfrak{F}$. From the other hand any two elements of

σ -coprime orders permute in G/N . Hence by (1) $G/N \in \mathfrak{F}$. So $N \geq G^\mathfrak{F}$. Thus $N = G^\mathfrak{F}$.

(3) Let $K = \bigcap_{i \in I} G^{\mathfrak{G}_{\pi_i}}$. Since $\mathfrak{G}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$, $G^\mathfrak{F} \leq G^{\mathfrak{G}_{\pi_i}}$ for all i . Hence $G^\mathfrak{F} \leq K$. Let us show that $K = G^\mathfrak{F}$. Note that

$$(G/G^\mathfrak{F})^{\mathfrak{G}_{\pi_i}} = G^{\mathfrak{G}_{\pi_i}}G^\mathfrak{F}/G^\mathfrak{F} = G^{\mathfrak{G}_{\pi_i}}/G^\mathfrak{F}.$$

Since $G/G^\mathfrak{F} = \times_{i \in I} (H_i G^\mathfrak{F}/G^\mathfrak{F})$ where $H_i G^\mathfrak{F}/G^\mathfrak{F}$ is a Hall π_i -subgroup of $G/G^\mathfrak{F}$, we see

$$(G/G^\mathfrak{F})^{\mathfrak{G}_{\pi_i}} = \times_{i \in I, i \neq i} (H G^\mathfrak{F}/G^\mathfrak{F})_{\pi_i}.$$

Hence $K/G^\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} (G^{\mathfrak{G}_{\pi_i}}/G^\mathfrak{F}) = G^\mathfrak{F}/G^\mathfrak{F}$.

If we the set $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ then will obtain well known results about nilpotent groups.

Corollary 2.3. Let G be a group. Then:

(1) G is nilpotent iff $ab = ba$ for all coprime order elements a and b of G ;

(2) $G^{\mathfrak{N}} = \langle [x, y] \mid x, y \in G \text{ where orders of } x \text{ and } y \text{ are coprime} \rangle$.

3 The Characterization of \mathfrak{F} -hypercenter

In this section we will study properties of elements and subgroups which are contained in \mathfrak{F} -hypercenter (\mathfrak{F} is as in previous section). First we will show that if $g \in Z_{\mathfrak{F}}(G)$ then g permutes with all elements of G whose orders are σ -coprime to its order. Then we will show that a normal subgroup lies in \mathfrak{F} -hypercenter iff it lies in the intersection of all normalizer of maximal π_i -sub-groups for all i . As particular cases we will obtain some Baer's results as corollaries.

Theorem 3.1. Let π be a non-empty set of primes and G be a π -group. Assume that $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I, i \neq j \Rightarrow \pi_i \cap \pi_j = \emptyset\}$ is a partition of π and $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$. The following properties of a π_i -element g in G are equivalent:

(1) $g \in Z_{\mathfrak{F}}(G)$;

(2) $gx = xg$ for all π'_i -elements x of G ;

(3) $|G : C_G(\langle g \rangle^G)|$ is a π_i -number;

(4) $|G : C_G(g)|$ is a π_i -number and $G^\mathfrak{F} \leq C_G(g)$.

Proof. (1) \Rightarrow (2). Let F be the canonical local definition of \mathfrak{F} and G act F -centrally on G -composition series $1 = Z_0 < Z_1 < \dots < Z_n = Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Note that $Z_i \in \mathfrak{F}$ for $i = 1, \dots, n$. We see that $G/C_G(Z_1) \in F(p)$ for all p dividing $|Z_1|$ and $C_G(Z_1) \triangleleft G$. If two σ -coprime primes divide $|Z_1|$ then $G/C_G(Z_1) = 1$. So $G = C_G(Z_1)$. If $|Z_1|$ is

π_i -number for some i then $G/C_G(Z_1)$ is π_i -group by lemma 1.4, i. e. all π'_i -elements of G are contained in $C_G(Z_1)$. So if a π_i -element g belongs to Z_1 then it permutes with every π'_i -elements of G .

Assume that we show that every π_i -element g of Z_k permutes with every π'_i -element of G . Let us show that this statement is also valid for Z_{k+1} . If all π_i -elements of Z_{k+1} are in Z_k then the statement is true. So we may assume that a π_i -element $g \neq 1$ belongs to $Z_{k+1} \setminus Z_k$. Hence, $|Z_{k+1}/Z_k|$ is divisible by a prime from π_i and

$$G/C_G(Z_{k+1}/Z_k) \in F(p).$$

It means that $C_G(Z_{k+1}/Z_k)$ contains all π'_i -elements of G . Let x be a π'_i -element of G . We see that $[x, g] = (g^{-1})^x g \in Z_k$. Since $Z_{k+1} \in \mathfrak{F}$ and $Z_{k+1} \triangleleft G$, π_i -elements in Z_{k+1} form normal subgroup of G . Thus $[x, g]$ is a π_i -element of Z_k . By inductive hypothesis $x[x, g] = [x, g]x$. Note $g^x = g([x, g])^{-1}$. Therefore $g^{x^k} = g([x, g])^{-k}$ for every positive k . Let m be order of x . Then $g = g^{x^m} = g([x, g])^{-m}$ or $([x, g])^{-m} = 1$. Thus m is divisible by order of $[x, g]$. Since m and all primes from π_i are coprime in pairs, $[x, g] = 1$. Thus $xg = gx$. Since $Z_{\mathfrak{F}}(G) = Z_n$, we obtain that (1) \Rightarrow (2).

(2) \Rightarrow (3). Since g satisfies (2), all conjugates of g satisfies (2). Thus $\langle g \rangle^G$ permutes with all π'_i -elements of G . Hence (2) \Rightarrow (3).

(3) \Rightarrow (4). Since $|G/C_G(\langle g \rangle^G)|$ is a π_i -number, $G/C_G(\langle g \rangle^G) \in \mathfrak{F}$. Hence $C_G(\langle g \rangle^G) \geq G^{\mathfrak{F}}$. Since $C_G(\langle g \rangle^G) \leq C_G(g)$, $|G:C_G(g)|$ is a π_i -number. Thus (3) \Rightarrow (4).

(4) \Rightarrow (1). Since $G^{\mathfrak{F}} \leq C_G(g)$,

$$|G/G^{\mathfrak{F}}:C_G(g)/G^{\mathfrak{F}}| = |G:C_G(g)|$$

is a π_i -number. Since $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, $C_G(g)/G^{\mathfrak{F}}$ contains all π'_i -elements of $G/G^{\mathfrak{F}}$. This means that $C_G(g)$ contains every π'_i -element in G . Thus (2) is true. Let $\bar{G} = G/Z_{\mathfrak{F}}(G)$. It is clear that G does not act F -centrally (F is the canonical local definition of \mathfrak{F}) on every minimal normal subgroup of \bar{G} . Assume that $\bar{g} \neq \bar{1}$. Let $\bar{N} = \langle \bar{g} \rangle^{\bar{G}}$. We have that all π'_i -elements of G belong to $C_G(\bar{N})$. Note that $\bar{N} = \bar{A}\bar{B}$ where $\bar{A} \neq \bar{1}$ is a maximal π_i -subgroup of \bar{N} and $\bar{B} = \bar{N}^{\mathfrak{G}_n}$. We see that \bar{B} is generated by all

π'_i -elements of \bar{N} . Since every element of \bar{N} permutes with every π'_i -element of \bar{N} , $\bar{A} \triangleleft \bar{N}$. Thus \bar{A} is the normal Hall π_i -subgroup of \bar{N} and hence is a normal subgroup of \bar{G} . Let \bar{C} be a minimal normal subgroup of \bar{G} that lies in \bar{A} , also \bar{C} is a chief factor of G . We see that \bar{C} is a π_i -subgroup of \bar{G} and $C_G(\bar{N}) \leq C_G(\bar{C})$. Thus $G/C_G(\bar{C}) \in F(p)$ for some $p \in \pi_i$, i. e. G acts F -centrally on \bar{C} . So we have a contradiction. Thus $\bar{g} = \bar{1}$, i. e. $g \in Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Hence (4) \Rightarrow (1).

Corollary 3.2. Let G be a group, π be a subset of \mathbb{P} , x and y be π -elements of G such that they permute with all π' -elements of G then xy is a π -element of G .

Corollary 3.3 (Baer, [1]). The following properties for a p -element g of a group G are equivalent:

- (1) $g \in Z_{\infty}(G)$;
- (2) g permutes with every p' -element of G ;
- (3) $|G:C_G(g^{(G)})|$ is a power of p ;
- (4) $|G:C_G(g)|$ is a power of p and $G^{\mathfrak{M}} \leq C_G(g)$.

Now we begin to study normal subgroups in hypercenter:

Corollary 3.4. Let \mathfrak{F} be as in theorem 3.1. The normal π_i -subgroup H of a π -group G belongs to $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ iff H is a direct factor of every subgroup S of G such that $H < S$ and $|S:H|$ is coprime to any element of π_i .

Proof. Assume that $H \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ and S is subgroup with the following properties $H < S$ and $|S:H|$ is coprime to any element of π_i . Then H is a normal subgroup of S whose order and index in S are coprime. From Schur's theorem we may deduce the existence of a complement C of H in S . It is clear that orders of elements in C are π'_i -numbers. Thus by theorem 3.1 every element in C permutes with every element in H . Hence $S = H \times C$.

Assume now that H is a direct factor of every subgroup S of G such that $H < S$ and $|S:H|$ is a π'_i -number. Let T be the set of elements in G whose orders are coprime to any element of π_i . Let $g \in T$ and $g \neq 1$. It is clear that the order of g^j is coprime to any element of π_i for all j . Thus $S = H \langle g \rangle$ satisfies our condition, i. e. every element of H permutes with g . Thus every element of H permutes with every element with order coprime to any element of π_i . By theorem 3.1 $H \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Now we will study the connection between normal subgroups in hypercenter and normalizers of maximal π_i -subgroups.

Theorem 3.5. *Let π be a non-empty set of primes. Assume that*

$$\sigma = \{\pi_i \mid i \in I, i \neq j \Rightarrow \pi_i \cap \pi_j = \emptyset\}$$

is a partition of π and $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$. Let G be a π -group. Then the following statements for a normal subgroup N are equivalent.

- (1) $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$;
- (2) $NH \in \mathfrak{F}$ for all $H \in \mathfrak{F}$;
- (3) N belongs to a normalizer of every maximal π_i -subgroup H of G for all i .

Proof. (1) \Rightarrow (2). Since $N \triangleleft G$, $N \in \mathfrak{F}$ and its Hall π_i -subgroup $N_{\pi_i} \triangleleft G$ for all i . From $H \in \mathfrak{F}$ we see that H is a direct product of its π_i -subgroups H_{π_i} for all i . Consider $\pi_i \in \sigma$. We see that NH have Hall π_i -subgroup $(HN)_{\pi_i} = H_{\pi_i}N_{\pi_i}$. By theorem 3.1 every π_i -element of H permutes with every π'_i -element of N and every π'_i -element of H permutes with every π_i -element of N . It means that $(HN)_{\pi_i} \triangleleft NH$. So $(HN)_{\pi_i} \triangleleft NH$ for all i and $NH \in \mathfrak{F}$.

(2) \Rightarrow (3) Since H is maximal π_i -subgroup of G , $H \in \mathfrak{F}$ and H is maximal π_i -subgroup of $NH \in \mathfrak{F}$. Hence $H \triangleleft NH$ or $N \subseteq N_G(H)$. Thus N belongs to normalizer of every π_i -maximal subgroup H of G for all i .

(3) \Rightarrow (1). Let H be a maximal π_i -subgroup of G and x be a π_i -element of N . Then $H^x = H$. Thus $\langle x, H \rangle$ is a π_i -subgroup of G and hence $x \in H$. Thus all π_i -elements of N belong to H and hence form a π_i -subgroup N_{π_i} . It is obvious that N_{π_i} is normal in N (also in G) and is a π_i -group (for all i), so $N \in \mathfrak{F}$. Consider a maximal

π_j -subgroup K of G , $j \neq i$. We have $x^{-1}Kx = K$. Hence $[x, k] \in K$ for all $k \in K$. Since $N_{\pi_i} \triangleleft G$, $[x, k] \in N_{\pi_i}$ for all $k \in K$. But $N_{\pi_i} \cap K = 1$. Hence $xk = kx$ for all $k \in K$. Thus x permutes with all π'_i -elements of G . By theorem 3.1 $x \in Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Hence $N_{\pi_i} \in Z_{\mathfrak{F}}(G)$ for all i . Thus $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Corollary 3.6 (Baer, [1]). *The following statements for a normal subgroup N of a group G are equivalent.*

- (1) $N \leq Z_{\infty}(G)$;
- (2) $NH \in \mathfrak{N}$ for all $H \in \mathfrak{N}$;
- (3) N is the part of normalizer of every Sylow subgroup of G .

So as corollary we obtain the main result of this paper:

Corollary 3.7. *Let \mathfrak{F} be as in theorem 3.5. Let G be a π -group. Then the intersection of normalizers of all maximal π_i -subgroups of G , where i runs over all I , is $Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

REFERENCES

1. Baer, R. Group Elements of Prime Power Index / R. Baer // Trans. Amer. Math Soc. – 1953. – Vol. 75, № 1. – P. 20–47.
2. Vasil'ev, A.F. On lattices of subgroups of finite groups / A.F. Vasil'ev, S.F. Kamornikov, V.N. Semenchuk // Infinite groups and related algebraic structures. Kiev : Institut Matematiki AN Ukrainy. – 1993. – P. 27–54 (In Russian).
3. Vasil'ev, A.F. On the Kegel – Shemetkov problem on lattices of generalized subnormal subgroups of finite groups / A.F. Vasil'ev, S.F. Kamornikov // Algebra Logika. – 2002. – Vol. 41, № 4. – P. 411–428.
4. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

Поступила в редакцию 24.04.13.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ КРИТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FINITE GROUPS WITH GIVEN PROPERTIES OF CRITICAL SUBGROUPS

V.N. Semenchuk, V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена изучению конечных групп с заданными свойствами критических подгрупп.

Ключевые слова: группа, формация, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, группа Шмидта.

This work is devoted to the study of finite groups with given properties of critical subgroups.

Keywords: group, formation, coradical, generalized subnormal subgroup, Shmidt group.

Введение

Важнейшей задачей теории конечных групп является задача изучения строения конечных групп, которые не принадлежат некоторому классу групп \mathfrak{F} , а все собственные подгруппы которых принадлежат \mathfrak{F} . В настоящее время такие группы называются минимальными не \mathfrak{F} -группами (критическими группами).

Начало исследований критических групп восходит к работе Миллера и Морено [1], в которой были изучены минимальные неабелевы группы (группы Миллера-Морено). Следующий важный шаг в данном направлении сделал в 1924 году О.Ю. Шмидт в работе [2], в которой были изучены минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта). Хупперт в [3], а затем Дерк в [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В работе [5] В.Н. Семенчуком были изучены разрешимые минимальные не \mathfrak{F} -группы для произвольных насыщенных наследственных формаций \mathfrak{F} .

Важность изучения критических групп следует из того факта, что любая конечная группа, не принадлежащая некоторому классу групп \mathfrak{F} , содержит минимальную не \mathfrak{F} -группу. Как показали исследования многих ведущих математиков мира, минимальные не \mathfrak{F} -группы играют важную роль при изучении строения конечных групп.

В частности, в работе [6] В.Н. Семенчуком было начато исследование строения конечных групп, у которых группы Шмидта субнормальны. Следующий важный шаг в данном направлении был сделан В.С. Монаховым и В.Н. Княгиной в работе [7]. Полное описание таких групп было получено В.А. Ведерниковым в работе [8].

В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -достижимости (обобщенной субнормальности), предложенное Кегелем в работе [9]. Настоящая работа посвящена изучению строения конечных групп, у которых минимальные не \mathfrak{F} -группы (\mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация) обобщенно субнормальны. В частности, было получено детальное описание строения конечных групп, у которых группы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы (\mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством).

1 Предварительные сведения

Все группы в работе конечны. Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [10] Л.А. Шеметкова. Напомним лишь некоторые из них.

Если \mathfrak{F} – класс групп и G – группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Классом Фиттинга называется класс \mathfrak{X} , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{X} -подгрупп.

Гомоморф – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Формация \mathfrak{F} называется *наследственной*, если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \leq G$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p , для которых в \mathfrak{F} имеется неединичная p -группа.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -достижимости.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппу H называют \mathfrak{F} -субнормальной в смысле Кегеля или \mathfrak{F} -достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_{n-1} \supseteq H_n = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Очевидно, что любая \mathfrak{N} -достижимая (\mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп) группа является субнормальной и наоборот.

Напомним, что некоторое множество подгрупп \mathfrak{M} конечных групп G образует решетку, если $A \cap B \in \mathfrak{M}$, $\langle A, B \rangle \in \mathfrak{M}$ для любых двух подгрупп A и B из \mathfrak{M} .

Классический результат Виландта говорит о том, что множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку. О. Кегель [9] и Л.А. Шеметков [10] поставили задачу отыскания новых классов групп \mathfrak{F} , обладающих тем свойством, что множество всех \mathfrak{F} -достижимых подгрупп в любой конечной группе образует решетку. В настоящее время такие формации называются формациями с решеточным свойством. Полное решение данной задачи о нахождении насыщенных наследственных формаций с решеточным свойством было получено А.Ф. Васильевым, С.Ф. Каморниковым, В.Н. Семенчуком в работе [11]. В частности, из полученных результатов следует, что формации всех нильпотентных групп \mathfrak{N} , всех p -разложимых групп обладают решеточным свойством.

$G_{\mathfrak{X}}$ – \mathfrak{X} -радикал группы G , т. е. произведение всех нормальных \mathfrak{X} -подгрупп (\mathfrak{X} – некоторый класс групп) группы G .

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – непустые формации конечных групп. Напомним, что произведением формаций называется $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$.

Если \mathfrak{F} – класс групп, то группа G называется минимальной не \mathfrak{F} -группой (критической группой), если она не принадлежит \mathfrak{F} , а любая её собственная подгруппа принадлежит \mathfrak{F} . Множество всех таких минимальных не \mathfrak{F} -групп обозначается $M(\mathfrak{F})$.

Минимальная нильпотентная группа называется группой Шмидта.

Напомним, что группа G называется p -замкнутой (p -нильпотентной), если её силовская p -подгруппа (силовское p -дополнение) нормальна в G . Группа G называется p -разложимой,

если она одновременно p -замкнута и p -нильпотентна.

Если фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна, то группа G называется метанильпотентной.

В следующих леммах приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация, H и N – подгруппы группы G , причем N нормальна в G . Тогда:

- 1) если H \mathfrak{F} -достижима в G , то HN \mathfrak{F} -достижима в G и HN/N \mathfrak{F} -достижима в G/N ;
- 2) если $N \subseteq H$, то H \mathfrak{F} -достижима в G тогда и только тогда, когда H/N \mathfrak{F} -достижима в G/N .

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;
- 2) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;
- 3) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы K и K – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;
- 4) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G .

При доказательстве основных теорем важную роль сыграли следующие леммы.

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых чисел и любая минимальная не \mathfrak{F} -группа разрешима. Тогда в любой группе G произвольная минимальная нормальная подгруппа принадлежит \mathfrak{F} .

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – гомоморф, содержащий все нильпотентные группы, R – подгруппа группы G , порожденная всеми минимальными не \mathfrak{F} -подгруппами группы G . Тогда $G/R \in \mathfrak{F}$.

Напомним также некоторые свойства классов групп с решеточным свойством, которые были получены А.Ф. Васильевым, С.Ф. Каморниковым, В.Н. Семенчуком в работе [11]. Данные свойства сыграли ключевую роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 1.5. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) \mathfrak{F} обладает решеточным свойством для \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп;

2) группа $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ принадлежит \mathfrak{F} , если A_1, A_2 – \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы группы G ;

3) \mathfrak{F} – формация Фиттинга и всякая \mathfrak{F} -субнормальная \mathfrak{F} -подгруппа группы G содержится в \mathfrak{F} -радикале этой группы.

Лемма 1.6. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Тогда любая минимальная не \mathfrak{F} -группа G является группой одного из следующих типов:

1) $|G| = p$ – простое число, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) G – группа Шмидта;

3) $G/\Phi(G)$ – такая монолитическая группа с неабелевым монолитом $N/\Phi(G)$, что G/N – циклическая примарная группа и $N/\Phi(G) = (G/\Phi(G))^{\mathfrak{F}}$.

Далее приведем ряд вспомогательных результатов, полученных авторами при доказательстве основных теорем.

Лемма 1.7. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых чисел, и любая минимальная не \mathfrak{F} -группа разрешима. Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ нильпотентна.

Лемма 1.8. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если в группе G выполняется $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то для любых подгрупп H , содержащих $G_{\mathfrak{F}}$, следует $H_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 1.9. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация с решеточным свойством, \mathfrak{X} – насыщенная наследственная формация такая, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, а также в группе G все минимальные не \mathfrak{X} -подгруппы \mathfrak{F} -достижимы. Если N – нормальная подгруппа группы G , то в факторгруппе G/N все минимальные не \mathfrak{X} -подгруппы \mathfrak{F} -достижимы.

2 Основные результаты

В ходе исследования строения конечных групп с обобщенно субнормальными критическими подгруппами были получены следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{H} – наследственная насыщенная формация, \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация с решеточным свойством, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Если все минимальные не \mathfrak{H} -подгруппы группы G разрешимы и \mathfrak{F} -достижимы в G , то $G/F(G) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1.1. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых чисел.

Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/F(G) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1.2. Если в группе G все минимальные не \mathfrak{F} -подгруппы \mathfrak{F} -достижимы (\mathfrak{F} – класс всех p -разложимых групп), то $G/F(G)$ – p -разложима.

Следствие 2.1.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если все минимальные не \mathfrak{F} -подгруппы группы G разрешимы и \mathfrak{F} -достижимы в G , то $G \in \mathfrak{NF}$.

Из этой теоремы также следуют известные результаты В.Н. Семенчука, полученные в работе [6].

Следствие 2.1.4. Если в группе G все минимальные несверхразрешимые группы субнормальны, то $G/F(G)$ сверхразрешима.

Следствие 2.1.5. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то G – метанильпотентна.

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых чисел. Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ абелева.

Следствие 2.2.1. Пусть \mathfrak{F} – формация всех p -разложимых групп. Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ абелева.

Из данной теоремы следует известный результат В.С. Монахова и В.Н. Княгиной из работы [7].

Следствие 2.2.2. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то факторгруппа $G/F(G)$ абелева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miller, G.A. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H.C. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – Vol. 4. – P. 398–404.
2. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31, № 3. – С. 366–372.
3. Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlichen Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
4. Doerk, K. Minimal nicht Ubergreifbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – P. 198–205.
5. Семенчук, В.Н. Минимальные не \mathfrak{F} -группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.
6. Семенчук, В.Н. Конечные группы с системой минимальных не \mathfrak{F} -подгрупп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных

групп. – Минск : Наука и техника. – 1981. – С. 138–149.

7. Княгина, В.Н. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

8. Ведерников, В.А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.

9. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt

enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.

10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М. : Наука. – 1978. – 272 с.

11. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы / Ин-т математики Акад. Украины; редкол. : Н.С. Черников [и др.]. – Киев, 1993. – С. 27–54.

Поступила в редакцию 23.04.13.

УДК 616-71

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ВИДЕОРЕГИСТРАЦИИ ТРЕМОРА КОНЕЧНОСТЕЙ ЧЕЛОВЕКА

С.К. Дик, А.С. Терех, А.В. Смирнов, В.К. Конопелько

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

DESIGNING A SYSTEM FOR VIDEO RECORDING OF MAN'S EXTREMITIES TREMOR

S.K. Dick, A.S. Tereh, A.V. Smirnov, V.K. Konopelko

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Рассмотрены существующие приборы для регистрации тремора, проанализированы их недостатки. Разработана система и методика для видеорегистрации тремора конечностей человека. Были проведены лабораторные исследования лекарственной терапии. Был проведен спектральный анализ тремора при болезни Паркинсона и эссенциальном треморе.

Ключевые слова: тремор, колебания, болезнь Паркинсона, эссенциальный тремор, амплитудно-частотный анализ, неврология, видеорегистрация, видеокамера, видеоанализ.

The known devices for tremor recording are considered and their drawbacks are analyzed. A system and methods for video recording of man's extremities tremor are developed. The laboratory researches of medical therapy have been carried out. The tremor at Parkinson's disease and at essential tremor has been spectrally evaluated.

Keywords: tremor, oscillations, Parkinson's disease, essential tremor, amplitude-frequency analysis, neurology, video recording, video camera, video analysis.

Введение

Тремор (дрожание) – непроизвольные ритмичные колебательные движения всего тела или его частей в результате повторяющихся сокращений и расслаблений мышц.

Разделяют два вида тремора – доброкачественный (физиологический) и патологический. Физиологический тремор может появиться у человека в результате физической нагрузки, а также в результате переутомления. В свою очередь патологический тремор является одним из самых распространенных симптомов таких заболеваний, как болезнь Паркинсона, эссенциальный тремор, рассеянный склероз, алкоголизм, неврозы, и подразделяется на тремор покоя и тремор действия (постуральный и кинетический). Разновидностью кинетического тремора является интенционный тремор, проявляющийся в момент выполнения пациентом движения и усиливающийся, если требуется большая точность движения.

Кроме заболеваний нервной системы, причиной дрожания конечностей и головы человека могут служить травмы, сосудистые заболевания, опухоли головного и спинного мозга, осложнения инфекционных заболеваний, психическое и физическое перенапряжение. Поэтому информация о треморе может использоваться также в других областях, например, в спортивной медицине (выявление физических возможностей спортсменов, проведение реабилитации спортсменов после травм и больших физических нагрузок).

Амплитудно-частотный анализ тремора позволяет получить диагностическую информацию о функциональном состоянии пациента.

1 Методика измерения тремора

Сложности диагностики и дифференциальной диагностики различных видов тремора обусловлены относительной однотипностью его визуальных проявлений при различных уровнях и патогенетических механизмах повреждения нервной системы [1], [2].

Ошибочность клинического определения нозологической принадлежности тремора, по данным ретроспективного анализа, при первичном обращении достигает 20–30%. Диагностика тремора в клинической практике наряду с установлением нозологического диагноза требует проведения регистрации параметров тремора с целью количественной оценки выраженности гиперкинеза, что позволяет осуществлять мониторинг течения заболевания и контролировать эффективность лечения. Современные наиболее простые и надежные методы регистрации и анализа тремора основаны на преобразовании смещения объекта различного рода датчиками в выходной электрический сигнал [3], [4]. Последующая обработка и математический анализ позволяют получать частотно-амплитудные характеристики дрожательного гиперкинеза.

На сегодняшний день существует множество приборов, предназначенных для регистрации тремора человека.

Первые устройства для записи тремора были основаны на механическом восприятии дрожания пальцев руки с последующей записью на движущуюся ленту. В качестве записывающего устройства нередко использовались электрокардиографы, которые выводили на бумагу кривые дрожания пальцев во времени.

Однако выше описанный метод треморометрии имел ряд недостатков: характер записи зависит от давления пальцев на воспринимающий элемент (в нашем случае – на кольцо), смещается изолиния тремограмм и т. д.

Существует устройство, основанное на методе огибающей ЭМГ, которое позволяет оценить параметры не только физиологического, но и эссенциального и паркинсонического видов тремора.

Помимо одноканальных устройств для измерения параметров тремора, существуют и многоканальные тремографы.

Пример такого устройства содержит датчики движений, блоки для регистрации и представления данных о тремограмме. Недостаток подобного устройства состоит в отсутствии возможности непосредственного наблюдения за тремором конечностей. Такой прибор на выходе предоставляет исключительно математическую обработку результатов измерения гироскопов. При этом датчики могут быть неисправны и выдавать результат с погрешностью больше заявленной (0.5%) величины.

С целью устранения недостатков существующих устройств, предназначенных для регистрации тремора конечностей человека, в БГУИ-Ре был разработан программно-аппаратный комплекс для регистрации тремора конечностей человека – видеотремограф.

Структурная схема устройства представлена на рисунке 1.1 и включает в себя маркер, видеокамеру и ПЭВМ.



Рисунок 1.1 – Структурная схема системы видеорегистрации тремора

Маркер представляет собой квадрат со сторонами 10x10 мм, изготавливаемый из самоклеящейся бумаги черного цвета. Предпочтение было отдано квадратной форме перед круглой из-за специфики определения центра маркера. Размеры маркера подбирались таким образом, чтобы обеспечить удобство закрепления маркера на конечности и сделать его размеры достаточно большими для достоверного распознавания программным обеспечением. Маркер обладает незначительной массой и возможностью крепления

на любом участке тела человека. Цвет имеет хороший контраст с цветом кожи, что повышает качество распознавания.

В программно-аппаратном комплексе используется цветная USB камера с разрешением не менее 640x480 и скоростью съёмки не менее 60 кадров в секунду.

Методика измерения тремора заключается в следующем:

– Для измерения тремора покоя пациенту необходимо слегка сжать руку в кулак и положить её на твердую поверхность (стол или подлокотник кресла) таким образом, чтобы кисть находилась в горизонтальном положении пальцами вниз. Предплечье должно быть слегка прижато к твердой поверхности. При регистрации тремора покоя на исследуемую конечность пациента, поочередно ко всем пальцам к первой фаланге крепится маркер, затем производится съёмка колебания маркера в течение 60 секунд (для каждого пальца).

– При исследовании постурального тремора пациенту необходимо вытянуть руки перед собой параллельно полу ладонью вниз, а пальцы должны быть слегка согнуты. К первой фаланге всех пальцев поочередно крепится маркер, и производится съёмка колебаний маркера в течение 60 секунд.

– Для исследования кинетического тремора маркер закрепляется к ногтевой фаланге указательного пальца. Пациент должен нарисовать в пространстве квадрат. Для всех видов измерения видеокамера должна быть установлена на расстоянии 30 см, напротив исследуемой конечности.

Полученные видеофайлы обрабатываются с помощью программного обеспечения, в функции которого входит поиск маркера в кадре, вычисление координат центра маркера и его смещения.

После запуска программы пользователю необходимо либо запустить новое измерение, либо загрузить заранее сохраненный файл. Затем на первом кадре с помощью мыши необходимо указать любую точку, принадлежащую области маркера. Поскольку не всегда возможно закрепить маркер параллельно плоскости съёмки видеокамеры, то в некоторых случаях проекция квадратного маркера будет представлять собой параллелограмм или прямоугольник.

Последующая обработка первого кадра заключается в поиске всех точек, у которых зелёная составляющая отличается от указанной пользователем не более чем на 15%. Затем программное обеспечение осуществляет поиск центра маркера, который будет в точке пересечения диагоналей получившегося четырехугольника.

Следующим шагом программы является автоматический поиск маркера и координат его центра на следующем кадре.

На заключительной стадии программное обеспечение производит построение амплитудно-частотных характеристик.

Достоинством разработанной системы является прежде всего возможность проведения исследований тремора покоя, постурального и кинетического, а также интенционного тремора, что не позволяют сделать приборы на основе датчиков акселерометрического типа. Кроме того, применение маркера дает возможность исключить использование дополнительного крепежа.

2 Результаты исследований

Опытное использование разработанного макетного образца видеотремографа было проведено на базе неврологического отделения РНПЦ неврологии и нейрохирургии.

Проведено исследование параметров тремора у двух групп пациентов. Первую группу составили 30 больных ригидно-дрожательной формой болезни Паркинсона (БП) (15 мужчин и 15 женщин), вторая группа включала 10 пациентов с эссенциальным тремором Минора (ЭТ) (5 мужчин и 5 женщин). Все пациенты с паркинсоническим тремором принимали леводопа-содержащие препараты (мадопар, наком) в индивидуально подобранных дозировках, 24 пациента (80%) – прамирапексол, 18 (55%) больных принимали амидантадины. Среди пациентов с эссенциальным тремором Минора 8 (80%) принимали клоназепам, 4 (40%) – β -адреноблокаторы (пропранолол) [5]–[6].

Треморометрия проводилась следующим способом. На тыльной поверхности проксимальной фаланги 3-го пальца кисти фиксировался самоклеющийся маркер, имеющий определенный цвет и размеры (черный квадрат со стороной 1 см). Изображение положения маркера регистрировалось видеокамерой, электрический сигнал с выхода которой поступал в цифровом виде в персональный компьютер, где обрабатывался программой, позволяющей осуществлять построение спектральных характеристик тремора.

Изучение тремора проводилось дважды: первый раз – утром после 12-часового перерыва в приеме медикаментов, и второй раз – через 1 час после приема препаратов в индивидуально подобранных дозировках. С помощью разработанного программно-аппаратного комплекса производилась регистрация тремора покоя и постурального тремора рук до приема препаратов и на фоне лекарственной терапии. При регистрации тремора покоя пациент сидел на стуле перед столом, на котором свободно лежали руки. Постуральный тремор регистрировался при вытянутых вперед руках. Обследование каждого варианта тремора проводилось в течение 1 минуты.

Спектральный анализ тремора при БП выявлял наличие доминирующего пика в диапазоне 3–6 Гц. В 16 случаях (53,3%) было обнаружено присутствие нескольких пиков в спектре тремора покоя (рисунок 2.1). Дополнительные пики отмечались в диапазоне 8–11 Гц, и 13–15 Гц.

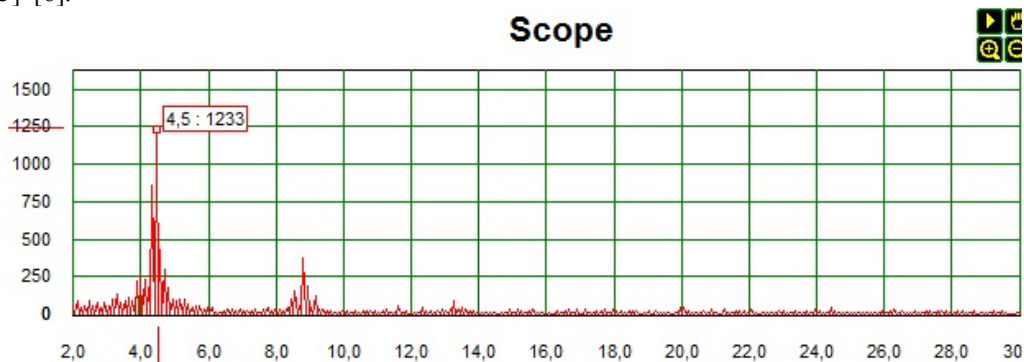


Рисунок 2.1 – Спектральная характеристика тремора покоя пациента с дрожательно-ригидной формой болезни Паркинсона

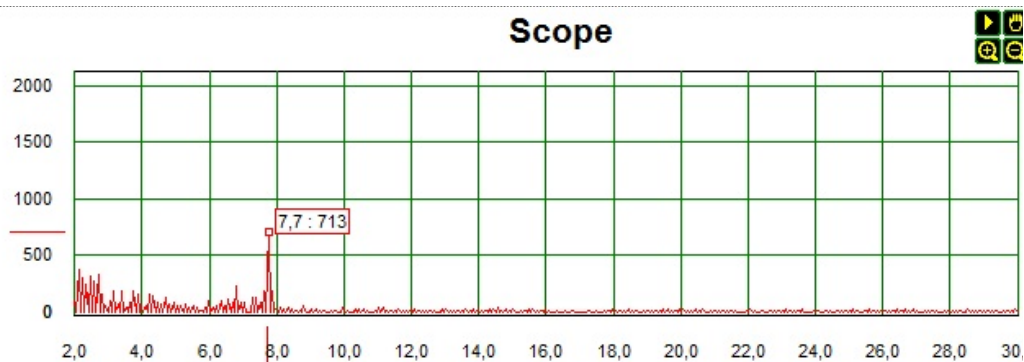


Рисунок 2.2 – Спектральная характеристика тремора пациента с эссенциальным тремором Минора

Таблица 2.1 – Амплитудно-частотные характеристики тремора при БП

| | Тремор покоя | | Постуральный тремор | |
|-----------|----------------|----------------|---------------------|----------------|
| | До лекарств | После лекарств | До лекарств | После лекарств |
| Частота | 4,96±0,68 Гц | 4,92±0,71 Гц | 4,87±0,81 Гц | 4,93±0,79 Гц |
| Амплитуда | 989,3±476,3 ед | 390,5±243,9 ед | 1042±723,7 ед | 498,6±289,4 ед |

Спектральный анализ эссенциального тремора Минора в большинстве случаев выявлял наличие единичного доминирующего пика в диапазоне 6–8 Гц (рисунок 2.2). Наличие дополнительных пиков не было характерно для больных с ЭТ.

Частотно-амплитудные характеристики тремора обследованных пациентов с болезнью Паркинсона представлены в таблице 2.1.

Амплитудно-частотные характеристики тремора обследованных пациентов с эссенциальным тремором представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Амплитудно-частотные характеристики тремора при ЭТ

| | Постуральный тремор | |
|-----------|---------------------|----------------|
| | До лекарств | После лекарств |
| Частота | 6,91±0,79 Гц | 6,92±0,92 Гц |
| Амплитуда | 1428±818,1 ед | 359,7±191 ед |

Анализ полученных результатов измерения параметров тремора показал, что средняя частота тремора покоя и постурального тремора при БП не имели достоверных отличий как до, так и после приема препаратов. Средняя частота постурального тремора при ЭТ составила 6,91 Гц и была достоверно больше постурального тремора пациентов с БП ($p < 0,01$).

Амплитуда тремора при БП как в покое, так и при постуральной нагрузке при измерении после приема лекарств стала значительно меньше ($p < 0,01$). Амплитуда тремора у пациентов с ЭТ также имела выраженную положительную динамику на фоне лекарственной терапии: 1428±818,1 ед, 359,7±191 ед соответственно до и после приема лекарств ($p < 0,01$).

Заключение

Была создана система и методика видеорегистрации тремора, которая позволяет проводить качественный анализ колебаний конечностей человека. Система на основе маркера, видеокамеры и ПЭВМ обладает высокой гибкостью и

широким потенциалом использования в учреждениях здравоохранения. Был проведен ряд исследований, показывающих, что разработанная система видеорегистрации тремора позволила достаточно успешно производить диагностику различных типов тремора и осуществлять контроль эффективности медикаментозного лечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев, В.Л. Спектральный анализ вариабельности частотно-амплитудных характеристик дрожания при эссенциальном треморе и дрожательной форме болезни Паркинсона / В.Л. Голубев, Р.К. Магомедова // Журн. неврологии и психиатрия. – 2006. – № 1. – С. 16.
2. Jancovic, J. Quantitative assessment of parkinsonian and essential tremor: clinical application of triaxial accelerometry / J. Jancovic, J.D. Frost // Neurology. – 1981. – № 31. – С. 1235–1240.
3. *Тремометр*: пат. 2102922 РФ, А61В5/11 Ю.Б. Власов, П.Б. Дергачев, И.В. Попова, В.С. Лабунец, О.А. Балуннов, К.В. Черенков; заявитель П.Б. Дергачев – № 95122711/14; заявл. 05.12.1995; опубл. 27.01.1998 // Офиц. бюллетень / Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – 1998. – № 3. – С. 100.
4. *Способ оценки функционального состояния центральной нервной системы человека и устройство для его реализации*: пат. 2195869 РФ, А61В5/16, А61В5/11 В.В. Манойлов; С.П. Романов; заявитель Институт аналитического приборостроения РАН – №2000128698/14; заявл. 08.11.2000; опубл. 10.01.2003 // Офиц. бюллетень / Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – 2003. – № 3. – С. 243.
5. Шток, В.Н. Экстрапирамидные расстройства / В.Н. Шток, И.А. Иванова-Смоленская, О.С. Левин. – М.: МЕДпресс-информ, 2002.
6. Tremor Investigation Group. Tremor: Basic mechanisms and clinical aspects // Mov. Dis. – 1998. – 13 (Suppl. 3). – 149 p.

Поступила в редакцию 29.05.12.

УДК 004.891.3+004.93.11

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ В ЭЛЕКТРОСЕТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Д.И. Кузнецов, А.И. Купин

Криворожский национальный университет, Кривой Рог, Украина

METHOD OF IDENTIFICATION OF ELECTRICAL MOTOR WITH THE USE OF NEURAL NETWORKS

D.I. Kuznetsov, A.I. Kupin

Krivoy Rog National University, Krivoy Rog, Ukraine

В процессе эксплуатации электрооборудования могут возникать различного рода неисправности или повреждения их деталей, поэтому очень важно выявлять дефекты на ранних стадиях. В статье рассмотрен метод идентификации электрооборудования на основе анализа потребляемого оборудованием тока. Приведены результаты экспериментальных испытаний.

Ключевые слова: идентификация, спектральный шум, высшая гармоника, нейронная сеть.

Different kinds of malfunction or damage of the parts may occur in the operation of electrical equipment. It is therefore very important to detect defects in the early stages. The paper presents the method of identification of electrical equipment on the basis of the analysis of the products current. The results of experimental tests are given.

Keywords: identification, spectral noise, high harmonic, neural network.

Введение

Основу парка электроприводов современных промышленных предприятий и других производственных объектов составляют многофазные асинхронные двигатели. Данный вид двигателей довольно распространен, о чем свидетельствует то, что они потребляют до 40% производимой электроэнергии в мире [1]. При этом, 90% данного вида оборудования представляет собой коротко замкнутые асинхронные электродвигатели [2]. По статистике на 2001 год [3] в общем производстве Украины использовалось не менее 50 млн единиц трехфазных АД напряжением 0,4 кВ.

В силу своей популярности, оптимальному использованию данных двигателей препятствует их высокая повреждаемость, потому что АД рассчитываются на срок службы 10–15 лет без капитального ремонта при условии их правильной эксплуатации, где под правильной эксплуатацией понимается их работа в соответствии с номинальными параметрами, указанными в паспорте двигателя [3]. Но, к сожалению, в реальной жизни АД всегда отступают от номинальных режимов работы: технологические перегрузки, неудовлетворительные условия окружающей среды (завышенная влажность и температура), некачественная сеть питания, снижение сопротивления изоляции, нарушение охлаждения.

Результатом неправильной работы электродвигателей являются аварийные режимы работы, в результате чего каждый год выходят из строя до 10% используемых электродвигателей [2].

Поэтому очень важной задачей в условиях современных предприятий является наличие интеллектуальной системы поддержки принятия решений с целью постоянного (в реальном времени) мониторинга текущего состояния электрооборудования и, в случае выявления технологического сбоя в его работе – диагностирования дефектов.

Наиболее распространенными методами диагностики электродвигателей являются:

а) вибрационный способ оценки технического состояния электродвигателя, при котором регистрируют и анализируют сигнал, который создает вибрация электродвигателя [4];

б) способ моделирования, который включает в себя этап разработки компьютерной модели двигателя, соединение с двигателем с помощью большого количества датчиков [4];

в) спектр-токовый анализ, способ диагностики двигателей и связанных с ним механических приборов, в котором в течение заданного интервала времени происходит запись значений токов, которые потребляет двигатель. Из полученных значений токов выделяют характерные частоты для данного электродвигателя, превращают полученный сигнал из аналоговой формы в цифровую, а затем осуществляют спектральный анализ с полученного сигнала и сравнения значений амплитуд на характерных частотах с уровнем сигнала на электросети [4].

Но, в свою очередь, главной задачей при диагностике электрооборудования является его идентификация на фоне помех, создаваемых

другим электрооборудованием или шумами самой электросети.

Целью данной статьи была разработка метода идентификации электродвигателя в электросети на основе использования спектр-токового анализа средствами нейронных сетей.

1 Идентификация электродвигателя в электросети

Задачи идентификации и диагностики электродвигателей относятся к задачам классификации, когда определяется принадлежность входного набора данных из нескольких ранее известных классов электродвигателей или типов неисправностей. Среди существующих средств классификации данных достаточно распространены нейронные сети, которые характеризуются хорошей устойчивостью к шумам, малым временем обучения, адаптированностью.

В общем случае процесс идентификации электродвигателя представлен на рисунке 1.1, где аналоговый сигнал от электродвигателя (значение токов), превращается в цифровой с помощью аналого-цифрового преобразователя (получение спектра тока с использованием преобразования Фурье), после чего происходит программный процесс идентификации.

Процесс идентификации с использованием аппарата нейросетей на примере работы программного комплекса можно представить функциональной схемой, показанной на рисунке 1.2.

Перед процессом идентификации любого объекта лежит обязательная процедура запоминания набора основных его характеристик, на основе которых происходит процедура идентификации. В данном методе основными характеристиками электродвигателя являются его максимальные значения амплитуд на соответствующих частотах (характерные частоты).

В процессе исследования спектрального шума электродвигателей было замечено, что максимальные значения амплитуд частот изменяются с течением времени в некотором диапазоне и имеют постоянную среднюю величину. Поэтому входными данными как при обучении, так и при идентификации являются диапазоны частот с максимальным значением амплитуды, т. е. из массива спектрального шума $U[m]$ можно найти диапазон частот $[m-p, m]$, в которых со

временем устанавливаются максимальные значения амплитуд.

$$Ser = \max(U[m]) / p,$$

где p – ширина (точность) диапазона, Ser – среднее значение амплитуд, m – очередная частота.

Таким образом, максимальные значения амплитуд для соответствующего двигателя находятся в диапазоне $[U_{\min}; U_{\max}]$, где U_{\min} и U_{\max} – минимальные и максимальные значения амплитуд, которые могут возникать на любой частоте диапазона $[m-p, m]$ двигателя и являются его основным свойством.

В процессе обучения нейронной сети входной выборкой является диапазон частот $[m-p, m]$, а обучающей выборкой является среднее значение амплитуд.

Таким образом, нейросеть запоминает характерный след электродвигателя, который он оставляет в электросети в процессе своей работы. Нейросеть в данной работе (рисунок 1.3) представляет собой элементарный перцептрон Розенблата с внутренним слоем нейронов количеством 100 и слоем входных нейронов, количество которых меняется в зависимости от диапазона изменения максимальных значений амплитуд. Но путем проведения экспериментов было установлено, что в среднем количество частот, на которых амплитуды принимают максимальные значения, составляет 4.

В процессе идентификации электродвигателя входной сигнал после преобразования Фурье подается в качестве входной тестовой выборки в нейронную сеть и сравнивается с результатом на выходе, т. е. если выполняется следующее условие, то двигатель идентифицирован:

$$U[m] = Ser.$$

2 Повышение качества распознавания электродвигателя в сети

С целью повышения показателя эффективности распознавания электродвигателя в электросети предложено использовать статистический корректирующий коэффициент θ , который учитывает физические особенности электрооборудования и рассчитывается следующим образом:

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) / n,$$



Рисунок 1.1 – Структурная схема процесса идентификации двигателя

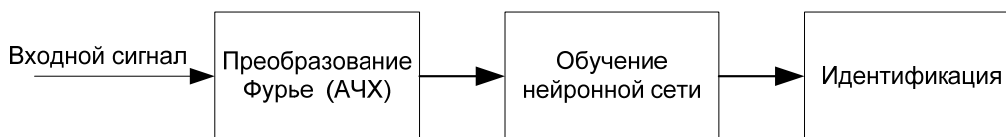


Рисунок 1.2 – Структурная схема работы программной части

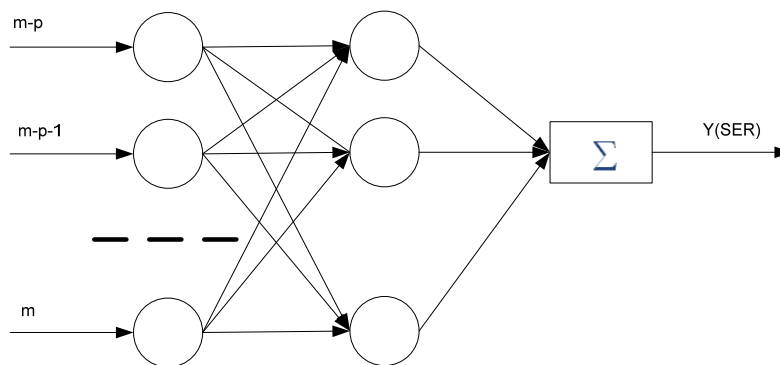


Рисунок 1.3 – Структура нейронной сети

где n – количество частот, которые идентифицируют электродвигатель, δ – дисперсия.

Таким образом, условие идентификации электродвигателя имеет следующий вид:

$$U[m] = Ser \pm \delta.$$

С целью практического подтверждения предложенного критерия был сделан ряд экспериментальных исследований, в результате чего получены реальные спектральные характеристики для трех одинаковых АД с КЗР переменного тока (рисунок 2.1), имеющие следующие характеристики: $U_n = 220$ В, $F_n = 50$ Hz, $n = 600$ об/мин.

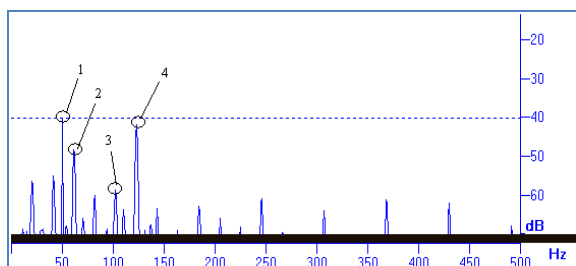


Рисунок 2.1 – Пример спектрального шума электродвигателя №1 (1 – частота питающей сети (50 Hz), 2, 3, 4 – характерные частоты, т. е. частоты которые идентифицируют электродвигатель)

В результате проведенных замеров были получены следующие значения характерных частот: частоты, которые характеризуют электродвигатель № 1 составляют: 53 Hz, 101 Hz, 124 Hz; частоты, которые характеризуют электродвигатель № 2: 75 Hz, 125 Hz, 151 Hz; частоты, которые характеризуют электродвигатель № 3: 55 Hz, 100 Hz, 122 Hz.

Итак, для данного случая статистический корректирующий коэффициент для характерных частот составил $\theta \approx 14$ Hz. В процессе идентификации предложенных электродвигателей процент

распознавания составил 95% из 20 попыток с корректирующим коэффициентом и 76% без него.

Заключение

На сегодняшний день самым распространенным методом идентификации и диагностики является спектр-токовый анализ на основе преобразования Фурье.

Метод спектр-токового анализа с использованием нейронных сетей позволяет достаточно хорошо идентифицировать электродвигатели мощностью до 1000 Вт при наличии входного сигнала, полученного с обычного осциллографа, звуковой карты и других АЦП.

Данный метод позволяет идентифицировать в электросети несколько электродвигателей. На основе полученных результатов целесообразно проводить исследования по идентификации электродвигателей больших мощностей и идентификации повреждений их деталей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравченко, В.М. Техническое диагностирование механического оборудования / В.М. Кравченко, В.А. Сидоров. – Донецк : 2006. – 330 с.
2. Остапенко, Д.А. Проблема качественного электроснабжения / Д.А. Остапенко // Новости электротехники. – 2007. – № 4 (46). – С. 17–18.
3. Петухов, В.С. Диагностика состояния электродвигателей на основе спектрального анализа потребляемого тока / В.С. Петухов, В.А. Соколов // Новости электротехники. – 2005. – № 1 (31). – С. 23–24.
4. Fault detection of broken rotor bars in induction motor using a global fault index / G. Didier [et al.] // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2006. – Vol. 42. – P. 79–88.

Поступила в редакцию 05.04.13.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25 % в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It pro-

vides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).

ПОПРАВКИ К СТАТЬЕ «О ПОЛУЦЕНТРАХ l -АРНЫХ ГРУППОИДОВ»

Кулаженко Ю.И.

В статье «О полуцентрах l -арных группоидов», опубликованной в журнале «Проблемы физики, математики и техники», № 2 (15) 2013, список ключевых слов на русском языке необходимо читать в следующей редакции: « n -арная группа, l -арный группоид, полуабелевость, l -арная операция».

Опечатка была устранена в электронной версии статьи, которая находится на сайте журнала.