



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 2 (15) 2013

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

*Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by*

Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

*F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>*

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (15) 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Варданын Р.С. Об одной задаче отражения излучения от стохастической среды	7
Кургузенкова И.И., Гузатов Д.В., Гайда Л.С. Световое давление на сферическую наночастицу с концентрической оболочкой в поле плоской электромагнитной волны	11
Стаськов Н.И., Ивашкевич И.В., Крехотень Н.А. Эллипсометрия переходных слоев полупроводник – диэлектрик	18
Хило П.А., Петрова Е.С., Хило Н.А. Генерация бесселевых световых пучков удвоенной частоты в квадратично-нелинейных кристаллах с радиально-поляризованной структурой доменов	25
Шалупаев С.В., Сердюков А.Н., Никитюк Ю.В., Серeda А.А. Моделирование процесса двулучевого лазерного термораскалывания силикатных стекол в рамках линейной механики разрушения	29

МАТЕМАТИКА

Васильев А.Ф., Васильев В.А., Васильева Т.И. Пермутируемые подгруппы и их приложения в конечных группах	35
Воробьев С.Н. О нормальных подклассах класса Фишера конечных групп	39
Гальмак А.М. Обобщенные полиадические операции	50
Губкина Е.В., Забелло К.В., Прохорович М.А., Радыно Е.М. Аппроксимация Лузина функций из классов Соболева на пространстве многомерного p -адического аргумента	58
Каморников С.Ф., Тютянов В.Н. Критические группы наследственной локальной сверхрадикальной формации	66
Кулаженко Ю.И. О полуцентрах l -арных группоидов	76
Тихоненко Т.В. Конечные группы, содержащие заданную систему перестановочных подгрупп	81

ИНФОРМАТИКА

Быховцев В.Е., Прокопенко Д.В., Торгонская С.В. Математическое и компьютерное моделирование несущей способности армированных грунтовых оснований фундаментов зданий	85
Листопад Н.И., Здоровцев С.В., Круглов И.Г., Петрович А.Г. Функциональные возможности аппаратно-программного комплекса для учебных лабораторных практикумов	92

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 07.06.13. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,9. Уч.-изд. л. 10,3. Тираж 100 экз. Заказ № 414.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2013
© Проблемы физики, математики и техники, 2013
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2013

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (15) 2013

CONTENTS

PHYSICS

Vardanian R.S. On the problem of radiation reflection of stochastic media	7
Kurhuzenkava I.I., Guzatov D.V., Gaida L.S. Radiation pressure on the spherical nanoparticle with a concentric shell in the field of a plane electromagnetic wave	11
Stas'kov N.I., Ivashkevich I.V., Krekoten N.A. Ellipsometry of the transitive layers semiconductor – dielectric	18
Khilo P.A., Petrova E.S., Khilo N.A. Generation of Bessel light beams frequency doubling in quadratic nonlinear crystals with radial structure of the domain polarized	25
Shalupaev S.V., Serdykov A.N., Nikitjuk Yu.V., Sereda A.A. Modelling of the process of the two-beam laser thermosplitting of silicate glasses within the limits of the linear fracture mechanics	29

MATHEMATICS

Vasil'ev A.F., Vasil'ev V.A., Vasil'eva T.I. Permuteral subgroups and their applications in finite groups	35
Vorob'ev S.N. On normal subclasses of Fischer class of finite groups	39
Gal'mak A.M. Generalizing poliadic operations	50
Gubkina E.V., Zabello K.V., Prokhorovich M.A., Radyna Ya.M. The Luzin approximation of functions from Sobolev classes on the space of a multidimensional p -adic argument	58
Kamornikov S.F., Tyutyaynov V.N. Critical groups of hereditary local super radical formation	66
Kulazhenko Yu.I. On semicenters of l -ary groupoids	76
Tihonenko T.V. Finite groups containing a given system of permutable subgroups	81

INFORMATION SCIENCE

Bykhoutsev V.E., Prokopenko D.V., Torgonskaya S.V. Mathematical and computer modelling of the bearing ability of the reinforced soil bases of the bases of buildings	85
Listopad N.I., Zdorovtsev S.V., Kruglov I.G., Petrovich A.G. Functionality of the hardware and software complex for laboratory work	92

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 533.9.01

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Р.С. Варданян

Белорусский государственный экономический университет, Бобруйский филиал, Бобруйск

ON THE PROBLEM OF RADIATION REFLECTION OF STOCHASTIC MEDIA

R.S. Vardanian

Belarusian State Economic University, Bobruisk Branch, Bobruisk

Выведено замкнутое уравнение относительно условной вероятности отражения излучения от стохастической среды в случае быстрых флуктуаций альbedo рассеяния кванта. Проведены численные расчеты.

Ключевые слова: перенос излучения, альbedo, случайное поле, инфинитезимальный оператор.

We derive a closed equation for the conditional probability of reflection of radiation from the stochastic environment in the case of rapid fluctuations in the quantum scattering albedo. Numerical calculations are given.

Keywords: radiation transfer, albedo, random field, infinitesimal operator.

Введение

Феноменологическая теория переноса излучения в однородных средах к настоящему времени достаточно хорошо разработана и является важным разделом математической физики [1]–[5].

Но среды, где рассматривается перенос излучения, никогда не являются строго однородными, скорее они являются случайно неоднородными (стохастическими). Поэтому теория переноса излучения в стохастических средах является актуальной проблемой. Но систематическое исследование в этой области началось в конце прошлого века [6]–[9]. Чрезвычайная сложность задач переноса излучения в стохастических средах диктует применение разных методов и приближений: метод диаграммной техники Фейнмана [10]–[12], метод вероятности выхода кванта из среды В.В. Соболева [13], принцип инвариантности В.А. Амбарцумяна [14]. Сравнение результатов, полученных разными методами, дает возможность более точного понимания процесса диффузии излучения в таких средах.

В данной статье рассматривается задача диффузного отражения от среды при предположении, что вероятность λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния (альbedo рассеяния) является случайным полем $\lambda = \Lambda(\tau)$, где τ – пространственная координата точки в единицах оптической толщины (τ – безразмерная величина). Цель работы – вывод замкнутого уравнения относительно плотности условной вероятности отражения кванта от среды оптической толщины τ_0 . В отличие от работы [14], предполагается, что за время диффузии кванта света в среде значение λ

на границе $\tau = 0$ меняется. Для выяснения, хотя бы качественно, влияния флуктуаций λ на отражательную способность среды проводятся численные расчеты с применением метода последовательных приближений. Рассматривается также частный случай полубесконечной среды.

1 Модель случайного поля

Флуктуации альbedo рассеяния λ могут быть вызваны флуктуациями концентрации свободных электронов, температуры и др. [3]. Исходя из вида λ удобно считать, что λ является регулярной функцией от некоторого параметра u : $\lambda = \lambda(u)$, причем $u = U(\tau)$ является случайным полем.

Относительно параметра u предполагается: а) в каждой точке τ задана плотность $\varphi(u)$ распределения вероятностей u ; б) задана плотность $g(\tau; \tau'; u; u')$ распределения условной вероятности u' в точке τ' при условии, что $U(\tau) = u$. Далее, предполагается, что вдоль траектории кванта выполняется условие марковости, кроме этого считается, что $U(\tau)$ является однородным полем. Тогда функция $g(\tau; \tau'; u; u') = g(|\tau - \tau'|; u; u')$ порождает полугруппу оператор-функций $G(\tau)$:

$$[G(\tau)f](u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau; u; u')f(u')du'. \quad (1.1)$$

Из условия марковости следует, что

$$G(\tau_1 + \tau_2) = G(\tau_1)G(\tau_2),$$

а из условия

$$g(0; u; u') = \delta(u - u') \text{ следует } G(0) = I, \quad (1.2)$$

где $\delta(u)$ – дельта-функция Дирака, а I – единичный оператор.

Обозначим через M инфинитезимальный оператор подгруппы $G(\tau)$:

$$M = \left(\frac{dG}{d\tau} \right)_{\tau=0^+}. \quad (1.3)$$

В случае гаусс-марковского экспоненциально-коррелированного поля $U(\tau)$, M является дифференциальным оператором

$$M = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial u^2}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma^2}{l}. \quad (1.4)$$

Здесь σ^2 – дисперсия поля u , l – радиус корреляции [13], [15].

2 Вывод основного уравнения

Пусть на среду с оптической толщиной τ_0 слева, на границу $\tau = 0$ падает квант света. Пусть $P(\tau_0; u; u') du'$ вероятность отражения кванта от среды при условии, что при входе кванта в среду $U(0) = u$, а при выходе значение u лежит в интервале $(u'; u'+du')$. В работе [14] была рассмотрена аналогичная задача, но при предположении, что как при входе, так и при выходе кванта из среды $U(0) = u$.

Для вывода уравнения относительно $P(\tau_0; u; u')$ применим метод сложения слоев [1]. Обозначим через $\Pi_1 = [0; \Delta\tau]$ подслой $[0; \tau_0]$, а через Π_2 оставшуюся часть $[\Delta\tau; \tau_0]$. Отметим, что $\Delta\tau$ – вероятность того, что квант поглотится в слое Π_1 , а $1 - \Delta\tau$ – вероятность того, что квант пройдет слой Π_1 . Тогда вероятность выхода кванта из среды складывается из вероятностей следующих процессов:

1. Квант проходит Π_1 , отражается от Π_2 , проходит обратно через Π_1 и выходит из среды.
2. Квант поглощается в Π_1 , переизлучается назад и выходит из среды.
3. Квант поглощается в Π_1 , переизлучается вперед, отражается от Π_2 , проходит Π_1 и выходит из среды.
4. Квант проходит Π_1 , отражается от Π_2 , поглощается в Π_1 , переизлучается и выходит из среды.
5. Квант проходит Π_1 , отражается из Π_2 , поглощается в Π_1 , переизлучается назад, повторно отражается от Π_2 , проходит Π_1 и выходит из среды.

С учетом того, что переизлучение кванта вперед или назад происходит с вероятностью $\frac{\lambda(u)}{2}$, для вероятностей перечисленных процессов получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_1(\tau_0; u; u') &= \\ &= (1 - \Delta\tau)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\tau; u; u') \cdot P(\tau_0 - \Delta\tau; u''; u''') \times \\ &\quad \times g(\Delta\tau; u'''; u') du'' du''', \\ P_2 &= \Delta\tau \frac{\lambda(u)}{2}; \\ P_3 &= \Delta\tau \frac{\lambda(u)}{2} P(\tau_0; u; u'); \end{aligned}$$

$$P_4 = \Delta\tau \frac{\lambda(u')}{2} P(\tau_0; u; u');$$

$$P_5 = \Delta\tau \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau_0; u; u'') \frac{\lambda(u'')}{2} P(\tau_0; u''; u') du''.$$

Так как предполагается в дальнейшем совершить предельный переход $\Delta\tau \rightarrow 0$, то в некоторых выражениях уже оставлены лишь слагаемые порядка $\Delta\tau$ с учетом свойства (1.2).

Складывая все P_i , исходя из определения (1.1) для вектор-функции $P(\tau_0) = \{P(\tau_0; u; u')\}$, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} P(\tau_0) &= (1 - \Delta\tau)^2 G(\Delta\tau) P(\tau_0 - \Delta\tau) G(\Delta\tau) + \\ &+ \Delta\tau \frac{1}{2} \Lambda + \Delta\tau \frac{1}{2} P \Lambda + \Delta\tau \frac{1}{2} \Lambda P + \Delta\tau P \Lambda P. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь Λ – оператор умножения на λ .

Совершив предельный переход $\Delta\tau \rightarrow 0$ в (2.1) с учетом определения (1.3), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\tau_0)}{\partial \tau_0} - (MP + PM) + 2P &= \\ &= \frac{1}{2} \Lambda + \frac{1}{2} (P\Lambda + \Lambda P) + \frac{1}{2} P\Lambda P, \end{aligned} \quad (2.2)$$

здесь Λ – оператор умножения на $\lambda(u)$.

В случае гауссовского поля с учетом (1.4) вместо (2.2) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_0} P(\tau_0; u; u') - \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial u'^2} \right) P + 2P &= \\ \frac{\lambda(u)}{2} + \frac{\lambda(u) + \lambda(u')}{2} P + & \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau_0; u; u'') \lambda(u'') P(\tau_0; u''; u') du'' &. \end{aligned} \quad (2.3)$$

К уравнениям (2.2) и (2.3) следует присоединить граничное условие:

$$P(0; u; u') = 0.$$

Следует отметить, что безусловная вероятность отражения кванта от слоя $[0; \tau_0]$ будет

$$P(\tau_0) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \varphi(u') P(\tau_0; u; u') du du'.$$

Итак, относительно $P(\tau_0; u; u')$ получается интегро-дифференциальное уравнение параболического типа. Уравнение (2.3) отличается от аналогичного уравнения работы [14] наличием дополнительного слагаемого $\varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial u'^2}$. Вопрос разре-

шимости полученного уравнения здесь затрагивать не будем. Отметим, что исследование (2.3) можно провести по методу, описанному в [14].

3 Численные расчеты

Рассмотрим случай медленных флуктуаций. Уравнение относительно условной вероятности $P(\tau_0; u)$ следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\tau_0; u)}{\partial \tau_0} - \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + 2P &= \\ &= \frac{\lambda(u)}{2} + \lambda(u)P + \frac{\lambda(u)}{2} P^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим далее случай, когда в среде происходят малые флуктуации λ , т. е. среда мало отличается от однородной. В этом случае ε малый параметр и решение (3.1) можно искать в виде разложения в ряд по степеням ε :

$$P(\tau_0; u) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k.$$

Относительно $P_0(\tau_0; u)$ получается известное в теории переноса излучения в однородной среде [2] уравнение типа Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(\tau_0; u)}{\partial \tau_0} &= \frac{\lambda}{2} P_0^2 - (2 - \lambda)P_0 + \frac{\lambda(u)}{2}; \\ P_0(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Явный вид P_0 не будем приводить из-за его громоздкости [2]. Уравнения относительно остальных коэффициентов линейные. Здесь приведем лишь выражения для P_1 и P_2 :

$$P_1(\tau_0; u) = \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau; \tau_0) \frac{\partial^2 P_0}{\partial u^2} d\tau;$$

$$P_2(\tau_0; u) = \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau; \tau_0) \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial u^2} + \frac{\lambda(u)}{2} P_1^2 \right) d\tau;$$

$$\Phi(\tau; \tau_0) = \exp \left\{ - \int_{\tau}^{\tau_0} (2 - \lambda(u) - \lambda(u)P_0(\tau; u)) d\tau \right\}.$$

Определенный интерес представляет отражение от полубесконечной среды $[0; \infty)$. В этом случае в уравнениях (3.1) и (3.2) отсутствует слагаемое $\frac{\partial P}{\partial \tau_0}$, а относительно коэффициентов P_i

разложения получаются алгебраические уравнения. Решение квадратного уравнения относительно $P_0(u)$ следующее:

$$P_0(u) = \frac{1 - \alpha(u)}{1 + \alpha(u)}; \quad \alpha(u) = \sqrt{1 - \lambda(u)}.$$

Это известное выражение коэффициента отражения от полубесконечной однородной среды с $\lambda = const$. Далее будем считать, что λ – гауссовское поле, т. е. $\lambda(u) = u$. Тогда для коэффициентов разложения P_1 и P_2 получим:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1 + 3\alpha}{4\alpha^4(1 + \alpha)^3}; \\ P_2 &= \frac{49 + 245\alpha + 435\alpha^2 + 279\alpha^3}{64\alpha^9(1 + \alpha)^5}. \end{aligned}$$

Для иллюстрации влияния флуктуаций ниже, в таблице 3.1, приведем лишь некоторые результаты численных расчетов коэффициента отражения:

Таблица 3.1 – Зависимость коэффициента отражения от λ и ε .

$\lambda \backslash \varepsilon$	0	$2 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$32 \cdot 10^{-6}$
λ	0,9996	0,9608	0,9612	0,963
$\lambda \backslash \varepsilon$	0	$0,25 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$4 \cdot 10^{-3}$
λ	0,99	0,8182	0,82	0,829
$\lambda \backslash \varepsilon$	0	$6,86 \cdot 10^{-4}$	$27,44 \cdot 10^{-4}$	$109,76 \cdot 10^{-4}$
λ	0,91	0,5385	0,7669	0,8931

Из приведенных результатов следует, что флуктуации λ приводят к существенному увеличению коэффициента отражения. Например, при $\lambda = 0,99$ и $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$, P увеличивается на 12,2 %, при $\lambda = 0,91$ и $\varepsilon = 0,686 \cdot 10^{-3}$, P увеличивается на 42 %.

Заключение

Выведено замкнутое уравнение относительно плотности условной вероятности отражения от стохастической среды. Можно сформулировать следующее правило учета быстрых флуктуаций в уравнение переноса, составленное методом сложения слоев: оператор $\frac{\partial}{\partial \tau_0}$ следует заменить оператором

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial u'^2} \right).$$

Численные расчеты показывают, что даже не слишком большие флуктуации λ могут привести к заметному увеличению коэффициента отражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян, В.А. Научные труды / В.А. Амбарцумян. – Т. 1. – Ереван, 1960.
2. Соболев, В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет / В.В. Соболев. – М.: Гостехиздат, 1956. – 332 с.
3. Иванов, В.В. Перенос излучения и спектры небесных тел / В.В. Иванов. – М.: Наука, 1969. – 472 с.
4. Михалас, Д. Звездные атмосферы / Д. Михалас. – М.: Мир, 1982.
5. Чандрасекар, С. Перенос лучистой энергии / С. Чандрасекар. – М.: ИЛ, 1953.
6. Енгибарян, Н.Б. Звезды туманности галактики / Н.Б. Енгибарян, А.Г. Никогосян. – Изд. АН Арм.ССР. – Ереван, 1969.
7. Варданян, Р.С. Об одной задаче переноса излучения в одномерной стохастической среде / Р.С. Варданян // Изв. АН Арм. ССР, физика. – 1986. – Т. 21, вып. 4. – С. 184–190.

8. Варданян, Р.С. Точечный источник в бесконечной стохастической среде / Р.С. Варданян // *Астрофизика*. – 1986. – Т. 24, вып. 3. – С. 549–559.
9. Варданян, Р.С. О некоторых новых приближениях к задачам переноса излучения в стохастических средах / Р.С. Варданян, Г.В. Папян // *Изв. АН Арм. ССР. Физика*. – 1987. – Т. 22, вып. 6. – С. 316–319.
10. Vardanian, R.S. Radiation Transfer in Stochastic Media / R.S. Vardanian // *Astrophysica and Spase Science*. – 1988. – Vol. 141. – P. 375–387.
11. Варданян, Р.С. Корреляционные характеристики поля излучения в стохастической среде / Р.С. Варданян // *Вестці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. – 2002. – № 1. – С. 90–94.
12. Варданян, Р.С. Характеристики поля излучения в полубесконечной стохастической среде / Р.С. Варданян // *Вестці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. – 2012. – № 1. – С. 55–61.
13. Варданян, Р.С. Применение вероятностного метода к задачам переноса в стохастических средах / Р.С. Варданян, Н.Б. Енгибарян // *Астрофизика*. – 1989. – Т. 31, вып. 1. – С. 162–176.
14. Варданян, Р.С. О задачах переноса в стохастических средах / Р.С. Варданян, Н.Б. Енгибарян // *Принцип инвариантности и его приложения*. – Труды симпозиума. – Бюракан. – Изд. АН Арм. ССР. Ереван. – 1989. – С. 203–209.
15. Вентцель, А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. – М. : Наука. – 1975. – 512 с.

Поступила в редакцию 15.03.13.

УДК 535.21; 535.36

СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ НА СФЕРИЧЕСКУЮ НАНОЧАСТИЦУ С КОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

И.И. Кургузенкова, Д.В. Гузатов, Л.С. Гайда

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

RADIATION PRESSURE ON THE SPHERICAL NANOPARTICLE WITH A CONCENTRIC SHELL IN THE FIELD OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE

I.I. Kurhuzenkava, D.V. Guzatov, L.S. Gaida

Y. Kupala Grodno State University, Grodno

В работе теоретически исследуется световое давление на сферическую наночастицу с концентрической оболочкой, находящуюся в поле плоской электромагнитной волны. Для расположенной в воде кварцевой наночастицы с золотой оболочкой исследована зависимость поперечных сечений светового давления и поглощения от длины волны падающего излучения для разной толщины оболочечки при заданном размере наночастицы, а также зависимость длины волны, соответствующей максимуму сечений, от толщины оболочечки. Рассмотрено максимальное смещение наночастицы от времени действия излучения и от толщины оболочечки.

Ключевые слова: световое давление, сферическая наночастица с оболочкой, сечение поглощения, смещение наночастицы.

In this paper we study theoretically the radiation pressure on a spherical nanoparticle with a concentric shell in the field of a plane electromagnetic wave. The dependencies of the radiation pressure and absorption cross sections on the wavelength of the incident radiation for different thickness of nanoshell at the fixed size of the silica nanoparticle with gold shell located in water are investigated. The authors also study the dependence of the wavelength corresponding to the maxima of the cross sections on the thickness of the shell. The dependencies of the maximal displacement of the nanoparticle on the time of the radiation acting and on the thickness of the nanoshells are considered.

Keywords: radiation pressure, spherical nanoshell, absorption cross section, nanoparticle displacement.

Введение

Движение малой частицы в электромагнитном поле становится возможным благодаря воздействию на частицу силы светового давления [1]. Особенно ярко этот эффект проявляется в сфокусированном лазерном пучке, что позволяет наблюдать левитацию прозрачных диэлектрических частиц [2], захватывать и удерживать их [3], а также перемещать живые клетки, вирусы и бактерии, не повреждая их [3]–[5].

Отдельного внимания заслуживает исследование силы светового давления, действующей на малые металлические частицы (наночастицы), поскольку, в отличие от диэлектрических частиц, в них могут возбуждаться плазмонные колебания [6], которые характеризуются увеличением поглощения электромагнитного излучения наночастицей на определенных (плазмонных) частотах. Сила светового давления, действующая на металлическую наночастицу, также возрастает вблизи плазмонного резонанса по сравнению со значениями вне резонанса [7].

Управление локализацией металлических наночастиц с помощью лазерного излучения является весьма важной задачей, которая может

найти практическое применение, прежде всего, в биомедицинских исследованиях. Имеющиеся в настоящее время нанотехнологии позволяют синтезировать металлические наночастицы различных форм [6]. Тем не менее, не все из них могут быть использованы в нанобиотехнологиях, что связано как с их возможным вредным воздействием на биокружение, так и с оптическими особенностями биоткани. Последнее является весьма существенным, поскольку, как известно, окно прозрачности биоткани находится в инфракрасной области спектра [8], поэтому для эффективного использования наночастиц в биомедицинских применениях необходимо, чтобы плазмонный резонанс был расположен в инфракрасной области спектра. Наиболее подходящими наночастицами для биокружения, по-видимому, являются золотые наностержни [9] и золотые сферические оболочечки (наночастицы с диэлектрическим ядром и концентрической оболочкой из золота) [10]. Заметим, что эффект светового давления в настоящее время успешно используется для доставки лекарств внутрь больных клеток [11]. Для этого на металлическую наночастицу, находящуюся вблизи клетки, воздействуют

интенсивным лазерным излучением, что приводит к нагреву частицы и ее движению вдоль лазерного пучка под действием силы светового давления. Разогретая наночастица проделывает отверстие в мембране клетки и, тем самым, облегчает доставку лекарств внутрь нее. Если воздействовать достаточно интенсивным лазерным излучением на металлические наночастицы, накапливаемые большой клеткой, то это может привести к сильному разогреву наночастицы и жидкости вокруг нее, что приводит к образованию пузырька пара и уничтожению большой клетки [12]. Последнее может использоваться в терапии рака. Золотые наноболочки широко применяются в целом ряде практических направлений, среди которых следует выделить их использование в качестве контрастных агентов при оптикоакустической томографии биотканей [13]. Управление локализацией наноболочек с помощью лазерного излучения может открыть новые направления их применения в нанобиотехнологиях.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование особенностей действия светового давления плоской электромагнитной волны на диэлектрическую наночастицу, покрытую concentрической металлической наноболочкой, расположенную в диэлектрической среде, без учета нагрева наночастицы.

1 Теоретические положения

Для того чтобы вычислить силу светового давления, действующую на сферическую наночастицу, находящуюся в поле плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, воспользуемся формализмом, связанным с тензором напряжений Максвелла. При этом мы не будем учитывать механических деформаций среды, возникающих под действием электромагнитного поля, и сопутствующих этому явлению эффектов [1]. Кроме того, при расчетах мы используем теорию Ми, что связано с тем, что более простая квазистатическая теория верна строго для наночастиц, размер которых не превышает ~5 нм.

Общее выражение для усредненной по времени силы светового давления, действующей на рассматриваемую частицу, имеет в рассматриваемом случае вид интеграла по некоторой замкнутой поверхности, окружающей частицу от тензора напряжений, скалярно умноженного на единичный вектор внешней нормали к поверхности. Если выбрать в качестве поверхности сферу бесконечно большого радиуса (S_∞) с наночастицей, расположенной в ее центре, тогда выражение для силы светового давления принимает вид [14]

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} (\varepsilon_m |\mathbf{E}_\tau|^2 + \mu_m |\mathbf{H}_\tau|^2) \mathbf{n} dS, \quad (1.1)$$

где ε_m и μ_m – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой расположена

наночастица; \mathbf{E}_τ и \mathbf{H}_τ – тангенциальные компоненты полного электрического и магнитного полей вблизи частицы; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к S_∞ . Производя интегрирование в (1.1), найдем, что сила светового давления имеет только одну отличную от нуля компоненту, ориентированную вдоль направления распространения падающей волны (вдоль оси z на рисунке 1.1). Нормируя получающееся выражение для силы светового давления на $P_0 = \varepsilon_m |E_0|^2 / (8\pi)$ – плотность потока импульса в падающей волне с амплитудой E_0 , получим следующее явное выражение для поперечного сечения светового давления [15]:

$$\sigma_{pr} = \frac{F_z}{P_0} = \frac{2\pi}{k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(\alpha_n + \beta_n) - \frac{4\pi}{k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2n+1}{n(n+1)} \alpha_n \beta_n^* + \frac{n(n+2)}{n+1} (\alpha_n \alpha_{n+1}^* + \beta_n \beta_{n+1}^*) \right\}, \quad (1.2)$$

где α_n и β_n – коэффициенты Ми для отраженного электромагнитного поля, которые в случае сферической наночастицы с оболочкой могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{k_2 \Psi'_n(k_2 a_2) \psi_n(k_m a_2) - \frac{k_m}{\mu_m} \Psi_n(k_2 a_2) \psi'_n(k_m a_2)}{\frac{k_2}{\mu_2} \Psi'_n(k_2 a_2) \zeta_n(k_m a_2) - \frac{k_m}{\mu_m} \Psi_n(k_2 a_2) \zeta'_n(k_m a_2)}, \\ \beta_n &= \frac{\frac{k_m}{\mu_m} \Phi'_n(k_2 a_2) \psi_n(k_m a_2) - \frac{k_2}{\mu_2} \Phi_n(k_2 a_2) \psi'_n(k_m a_2)}{\frac{k_m}{\mu_m} \Phi'_n(k_2 a_2) \zeta_n(k_m a_2) - \frac{k_2}{\mu_2} \Phi_n(k_2 a_2) \zeta'_n(k_m a_2)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где a_1 – радиус ядра частицы; a_2 – внешний радиус оболочки частицы (рисунок 1.1); ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 – диэлектрическая и магнитная проницаемости ядра частицы и ее оболочки, соответственно;

$$k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \quad \text{и} \quad k_m = k_0 \sqrt{\varepsilon_m \mu_m},$$

где k_0 – волновое число в вакууме; также введены обозначения для следующих функций: $\Psi_n(x) = x j_n(x)$, $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя [16]; $\zeta_n(x) = x h_n^{(1)}(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля первого рода [16];

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \psi_n(x) - \gamma_n \psi_{-n-1}(x), \\ \Phi_n(x) &= \psi_n(x) - \delta_n \psi_{-n-1}(x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_n = & \frac{k_1 \psi_n'(k_1 a_1) \psi_n(k_2 a_1) - \frac{k_2}{\mu_2} \psi_n(k_1 a_1) \psi_n'(k_2 a_1)}{\frac{k_1}{\mu_1} \psi_n'(k_1 a_1) \psi_{-n-1}(k_2 a_1) - \frac{k_2}{\mu_2} \psi_n(k_1 a_1) \psi_{-n-1}'(k_2 a_1)}, \\ \delta_n = & \frac{\frac{k_2}{\mu_2} \psi_n'(k_1 a_1) \psi_n(k_2 a_1) - \frac{k_1}{\mu_1} \psi_n(k_1 a_1) \psi_n'(k_2 a_1)}{\frac{k_2}{\mu_2} \psi_n'(k_1 a_1) \psi_{-n-1}(k_2 a_1) - \frac{k_1}{\mu_1} \psi_n(k_1 a_1) \psi_{-n-1}'(k_2 a_1)}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

штрих возле функции означает ее производную; звездочка в (1.2) означает комплексное сопряжение.

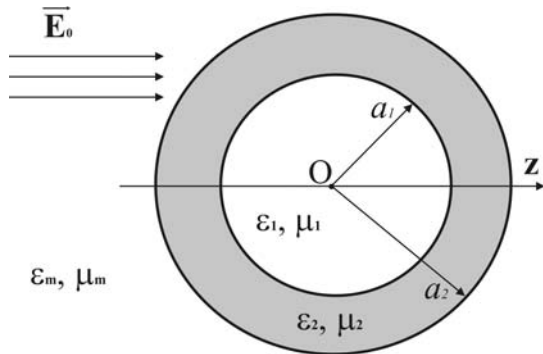


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи о сферической наночастице с концентрической оболочкой в поле плоской электромагнитной волны

Заметим, что выражение для поперечного сечения светового давления (1.2) можно представить в виде разности [15]

$$\sigma_{pr} = \sigma_{ext} - \langle \cos \theta \rangle \sigma_{scat}, \quad (1.6)$$

где σ_{ext} – поперечное сечение экстинкции (первый ряд в (1.2)); σ_{scat} – поперечное сечение рассеяния; $\langle \cos \theta \rangle$ – фактор асимметрии, который получается усреднением косинуса сферического угла θ (где $0 \leq \theta < \pi$) при использовании распределения интенсивности рассеянного излучения по θ в качестве весовой функции [15].

Поперечное сечение поглощения (σ_{abs}) может быть найдено как разность поперечных сечений экстинкции и рассеяния (оптическая теорема). В результате можно получить следующее выражение [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} = & \frac{2\pi}{k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(\alpha_n + \beta_n) - \\ & - \frac{2\pi}{k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Заметим, что выражения (1.2) и (1.7) имеют достаточно общий характер и могут быть использованы для наночастиц с произвольным числом концентрических оболочек, поскольку в

этом случае будут меняться только коэффициенты α_n и β_n .

Для анализа движения наночастицы под действием силы светового давления в вязкой среде следует решить уравнение Ланжевена для координат положения центра масс частицы \mathbf{r}_0 . Поскольку сила светового давления действует в направлении оси z (рисунок 1.1), то смещение наночастицы будет происходить также вдоль оси z (здесь и далее силы тяжести и Архимеда не учитываются). В результате, уравнение движения наночастицы принимает вид (полагаем, что наночастица имеет массу, распределенную равномерно по ее объему)

$$m \frac{d^2 z_0}{dt^2} + \gamma \frac{dz_0}{dt} = F_z, \quad (1.8)$$

где m – масса наночастицы; $\gamma = 6\pi\eta a_2$ – коэффициент трения сферической частицы в жидкой среде [16]; η – динамический коэффициент вязкости среды; $F_z = \sigma_{pr} P_0$ – сила светового давления, действующая на частицу, (см. (1.2)). Решение (1.8) при использовании граничных условий

$$z_0|_{t=0} = \left. \frac{dz_0}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ имеет вид}$$

$$z_0 = \frac{\sigma_{pr} P_0}{\gamma} \left\{ t - \frac{m}{\gamma} \left(1 - \exp \left[-\frac{\gamma}{m} t \right] \right) \right\}. \quad (1.9)$$

Как следует из (1.9), для наночастиц пренебрежимо малой массы получим $z_0 = \mathcal{Q}_0 t$, где $\mathcal{Q}_0 = \sigma_{pr} P_0 / \gamma$ – скорость движения наночастицы, которая не зависит от ее массы. Важным в (1.9) является также то, что смещение наночастицы обратно пропорционально вязкости среды η .

Заметим также, что уравнение (1.8) может быть использовано при расчетах движения наночастицы в лазерном пучке, поскольку возникающая в этом случае градиентная сила, действующая поперек пучка, заметно меньше, чем компонента силы светового давления, действующая вдоль пучка [7].

2 Численные результаты и их обсуждение

Рассмотрим сферическую частицу с ядром из кварца ($\epsilon_1 = 2,4$) и золотой оболочкой, находящуюся в воде ($\epsilon_m = 1,7$). Данные по зависимости диэлектрической проницаемости золота от длины волны $\epsilon_2(\lambda)$ были взяты из [18], а затем были стандартным образом интерполированы для обеспечения гладкости вычисляемых зависимостей. Заметим, что в случае наночастиц и наноболочек, размер которых меньше ~ 1 нм, диэлектрическая проницаемость металла должна быть пересчитана с учетом эффекта рассеяния электронов поверхностью наночастицы [9], [19].

В настоящей работе мы этот эффект не учитываем. Магнитная проницаемость наночастицы и окружающей среды положена равной единице ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_m = 1$).

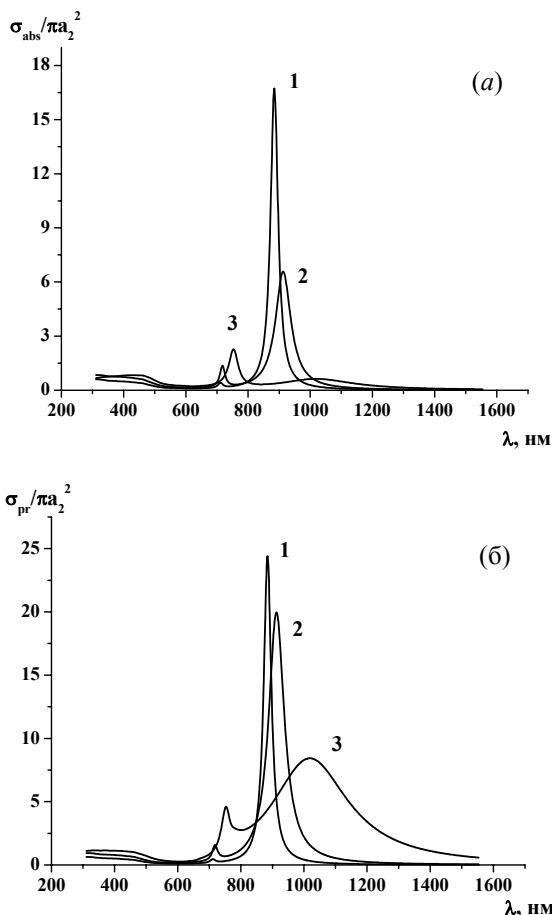


Рисунок 2.1– Зависимость нормированных поперечных сечений поглощения (а) и светового давления (б) от длины волны для частиц с внешним радиусом оболочки 1 – 30 нм, 2 – 50 нм, 3 – 100 нм. Отношение $a_1/a_2=0.9$

На рисунке 2.1, (а) показана зависимость нормированного сечения поглощения от длины волны падающего излучения. Данная зависимость характеризуется наличием максимумов при определенных значениях длины волны, соответствующих возбуждению плазмонных колебаний в золотой наноболочке. Из рисунка видно, что с увеличением размера наночастицы зависимость нормированного сечения поглощения существенно меняется, что связано как с постепенным возбуждением плазмонных колебаний более высокой мультипольности, так и с возрастанием роли рассеяния. Кроме того, при увеличении размера частицы (при фиксированной толщине оболочки) главный максимум смещается в область больших длин волн (зависимости 1 и 2 на рисунке 2.1, (а)). На рисунке заметен также относительно небольшой по величине максимум,

расположенный в области меньших длин волн, по сравнению с главным максимумом. Данный максимум соответствует плазмонным осцилляциям более высокой (квадрупольной) мультипольности. При увеличении размера частицы он возрастает и при достаточно большом размере начинает преобладать по величине над дипольным плазмонным максимумом (зависимость 3 на рисунке 2.1, (а)). Более детально образование плазмонных частот в металлической наноболочке может быть описано в рамках модели гибридизации плазмонных колебаний, возникающих на внутренней и на внешней поверхности оболочки [20].

Зависимость нормированного сечения светового давления от длины волны падающего излучения, представленная на рисунке 2.1, (б) для частиц малых размеров аналогична зависимости для нормированного сечения поглощения. Действительно, в этом случае основной вклад в сечение светового давления будет вносить сечение поглощения ($\sigma_{pr} \approx \sigma_{abs} \approx 4\pi k_m \text{Im}\Pi$, где Π – поляризуемость наночастицы) [7], поэтому зависимости 1 на рисунках 2.1, (а) и (б) очень похожи. Напротив, при возрастании размеров наночастицы сечение светового давления все более отличается от сечения поглощения, как это видно из сравнений зависимостей 3 на рисунках 2.1, (а) и (б). Заметно, что при увеличении размера наночастицы дипольный плазмонный максимум зависимости для сечения светового давления остается преобладающим по величине.

На рисунке 2.2, (а) представлена длина волны, соответствующая главному максимуму сечения поглощения, как функция отношения внутреннего радиуса оболочки к ее внешнему радиусу при фиксированном внешнем радиусе. Данная зависимость полностью соответствует модели гибридизации плазмонных колебаний в наноболочке [20], в соответствии с которой при уменьшении толщины золотой оболочки происходит сильное смещение положения частоты, соответствующей главному плазмонному резонансу, в инфракрасную область (зависимости 1 и 2 на рисунке 2.2, (а)).

Как уже было отмечено, в случае возрастания размера наночастицы преобладающим максимумом для сечения поглощения становится максимум, соответствующий более высокой (квадрупольной) мультипольности плазмонных осцилляций, чем дипольная, а в случае сечения поглощения главный максимум соответствует дипольной мультипольности. Это находит свое отражение в зависимостях 3 на рисунках 2.2, (а) и (б). Действительно, максимумы сечений поглощения и светового давления, соответствующие плазмонным осцилляциям более высокой (квадрупольной) мультипольности, расположены в области меньших длин волн, чем дипольный

максимум (зависимость 3 на рисунках 2.1, (а) и (б)). Это означает, что при фиксированной толщине оболочки длина волны, соответствующая квадрупольному максимуму, имеет меньшие значения, чем длина волны, соответствующая максимуму дипольных плазмонных осцилляций (зависимость 3 на рисунке 2.2, (а)).

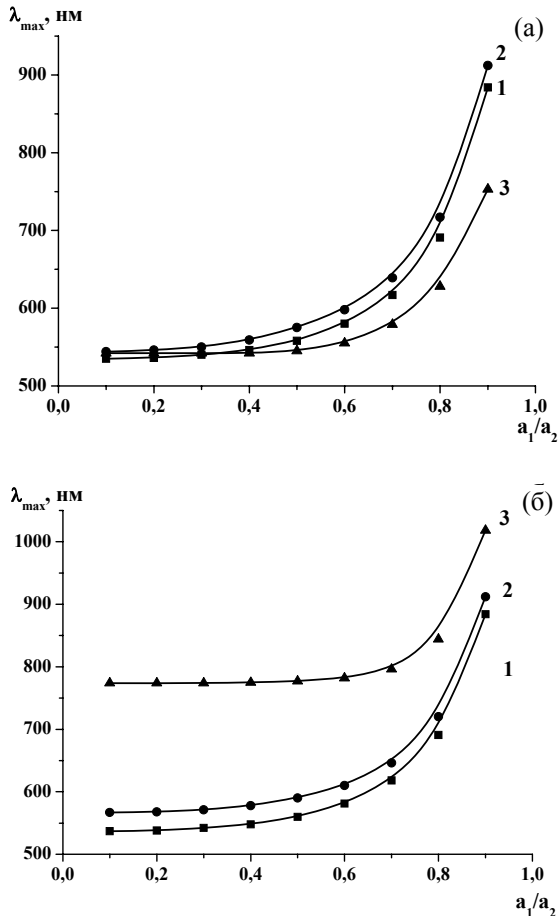


Рисунок 2.2 – Зависимость длины волны, соответствующей главному максимуму сечения поглощения (а) и сечения светового давления (б), от отношения радиусов ядра и оболочки для частиц с внешним радиусом оболочки: 1 – 30 нм, 2 – 50 нм, 3 – 100 нм

В случае же только дипольных плазмонных осцилляций с ростом размера частицы (при заданной толщине оболочки) длина волны, соответствующая максимуму, увеличивается (зависимости 1, 2 и 3 на рисунке 2.2, (б)).

Вопрос выбора оптимальной наночастицы в экспериментальных исследованиях наиболее важен. В случае сферических наночастиц с концентрической металлической оболочкой при фиксированной интенсивности падающего излучения наиболее существенными параметрами, влияющими на величину смещения наночастицы, являются относительная толщина ее оболочки и длина волны падающего излучения. Если

задать внешний радиус наночастицы и ее относительную толщину, то можно найти такую длину волны падающего излучения (рисунок 2.2, (б)), для которой смещение наночастицы будет максимальным.

Для иллюстрации действия силы светового давления на кварцевые сферические наночастицы с золотой оболочкой рассмотрим их смещение в воде при воздействии на них излучением с интенсивностью $1,0 \text{ кВт/см}^2$ (рисунок 2.3). Длина волны падающего излучения соответствует максимуму сечения светового давления для определенного отношения a_1/a_2 . Динамический коэффициент вязкости воды $\eta = 1.005 \text{ мПа}\cdot\text{с}$, что соответствует температуре $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

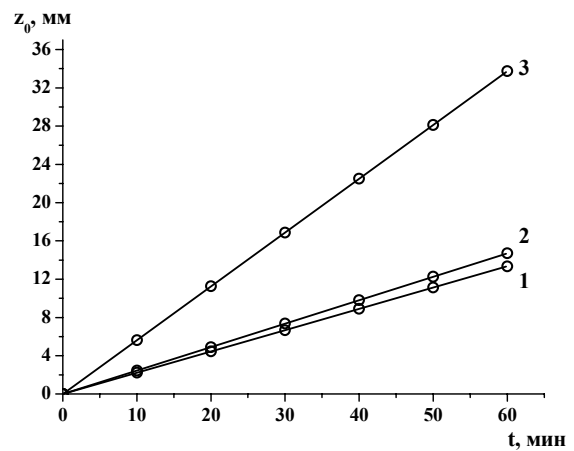


Рисунок 2.3 – Зависимость максимального смещения наночастицы с оболочкой от времени. Внешний радиус оболочки 50 нм; отношение a_1/a_2 : 1 – 0.1 ($\lambda_{\max}=567 \text{ нм}$), 2 – 0.5 ($\lambda_{\max}=590 \text{ нм}$), 3 – 0.9 ($\lambda_{\max}=912 \text{ нм}$). Кружками показано решение $z_0 = \sigma_{\text{пр}} P_0 t / \gamma$

Как следует из рисунка 2.3, представленные зависимости являются линейными, что обусловлено малой массой наночастиц, и поэтому для описания их смещения может быть использована простая формула $z_0 = \mathcal{G}_0 t$, где скорость смещения $\mathcal{G}_0 = \sigma_{\text{пр}} P_0 / \gamma$. Кроме того, на рисунке 2.3 видно, что частицы с оболочкой меньшей толщины (при фиксированном внешнем радиусе оболочки) смещаются за то же время на большее расстояние, чем частицы с оболочкой большей толщины. Это является следствием того, что максимальное значение сечения светового давления возрастает при уменьшении толщины оболочки (зависимость 2 на рисунке 2.4).

На рисунке 2.4 показана зависимость максимального смещения наночастицы с золотой наночастицей от отношения радиуса ядра к радиусу оболочки для наночастиц с разными внешними радиусами оболочки. Из данного рисунка следует, что смещение наночастиц может быстро возрастать

при уменьшении толщины оболочки, что является следствием возрастания сечения светового давления. При этом следует отметить, что увеличение размера частицы может не соответствовать увеличению максимального смещения для заданной относительной толщины оболочки (зависимости 2 и 3 на рисунке 2.4).

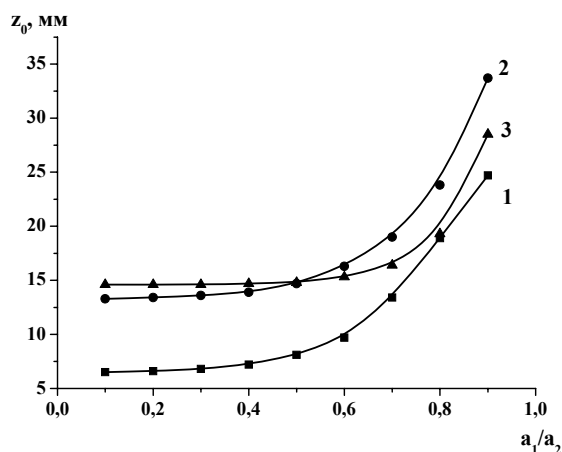


Рисунок 2.4 – Зависимость максимального смещения наночастицы от отношения радиуса ядра к радиусу оболочки. Внешний радиус оболочки: 1 – 30 нм, 2 – 50 нм, 3 – 100 нм. Длина волны падающего излучения соответствует λ_{\max} (рисунок 2.2, (б)). Время воздействия излучения 1 час

Таким образом, эффективное управление движением сферических наночастиц с металлической оболочкой с помощью электромагнитного излучения сводится к выбору наночастиц, имеющих оптимальный размер и толщину оболочки при заданной длине волны падающего излучения. Оба этих параметра существенно влияют на скорость смещения наночастицы. Кроме того, следует заметить, что оптимизация геометрических параметров наночастицы позволяет регулировать поглощение излучения наночастицей, т. е. ее нагрев в поле падающего излучения, что также может быть важным в практических применениях.

Заключение

В настоящей работе теоретически исследована задача о сферической наночастице с концентрической оболочкой, находящейся в поле плоской электромагнитной волны. Показано, что поглощение излучения наночастицей и ее смещение под действием силы светового давления существенно зависят от размера наночастицы, толщины ее оболочки и длины волны падающего излучения. Полученные зависимости в целом являются весьма не тривиальными и могут быть объяснены как смещением частоты, так и свойствами плазмонных колебаний различной мультипольности в наночастице при изменении геометрических параметров наночастицы.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для численных расчетов, для интерпретации экспериментальных данных и для оптимизации экспериментов по воздействию силы светового давления на диэлектрические наночастицы с металлической наночастицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – Москва: Наука, 1982. – 622 с.
2. Эшкин, А. Давление лазерного излучения / А. Эшкин // УФН. – 1973. – Т. 110, № 1. – С. 101–116.
3. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles / A. Ashkin [et al.] // Opt. Lett. – 1986. – Vol. 11. – P. 288–290.
4. Ashkin, A. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams / A. Ashkin, J.M. Dziedzic, T. Yamane // Nature. – 1987. – Vol. 330. – P. 769–771.
5. Ashkin, A. Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria / A. Ashkin, J.M. Dziedzic // Science. – 1987. – Vol. 235. – P. 1517–1520.
6. Климов, В.В. Наноплазмоника / В.В. Климов. – М.: Физматлит, 2009. – 480 с.
7. Guzatov, D.V. Theoretical investigation of the radiation pressure force acting on a spherical nanoparticle located in the laser radiation field / D.V. Guzatov, L.S. Gaida, A.A. Afanas'ev // Nonlin. Phenom. Comp. Syst. – 2011. – Vol. 14, № 4. – P. 391–398.
8. Handbook of optical biomedical diagnostics; ed. by V.V. Tuchin. – Bellingham, WA: SPIE Press, 2002. – 1110 p.
9. Хлебцов, Н.Г. Оптика и биофотоника наночастиц с плазмонным резонансом / Н.Г. Хлебцов // Квант. Электрон. – 2008. – Т. 38, № 6. – С. 504–529.
10. Averitt, R.D. Linear optical properties of gold nanoshells / R.D. Averitt, S.L. Westcott, N.J. Halas // J. Opt. Soc. Am. B. – 1999. – Vol. 16. – P. 1824–1832.
11. IPHT Jena annual report 2007 / ed. by J. Popp, F. Sondermann. – Zwickau: Color-Druck Zwickau GmbH & Co. KG, 2008. – 148 p.
12. Vapor bubble generation around gold nano-particles and its application to damaging of cells / M.Kitz [et al.] // Biomed. Opt. Express. – 2011. – Vol. 2, № 2. – P. 291–304.
13. Photoacoustic imaging of living mouse brain vasculature using hollow gold nanospheres / W. Lu [et al.] // Biomat. – 2010. – Vol. 31, № 9. – P. 2617–2626.
14. Гузатов, Д.В. Теоретическое исследование силы светового давления, действующей на сферическую диэлектрическую частицу произвольного размера в интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн / Д.В. Гузатов, Л.С. Гайда, А.А. Афанасьев //

Квант. Электрон. – 2008. – Т. 38, № 12. – С. 1155–1162.

15. Kerker, M. The scattering of light / М. Керкер. – New York : Academic Press, 1969. – 667 p.

16. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами; под ред. М. Абрамовитц, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.

17. Стрэттон, Дж.А. Теория электромагнетизма / Дж.А. Стрэттон. – Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1948. – 540 с.

18. Weber, M.J. Handbook of optical materials / M.J. Weber. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2003. – 512 p.

19. Kachan, S.M. Resonance absorption spectra of composites containing metal-coated nanoparticles / S.M. Kachan, A.N. Ponyavina // J. Mol. Struct. – 2001. – Vol. 563–564. – P. 267–272.

20. A hybridization model for the Plasmon response of complex nanostructures / E. Prodan [et al.] // Science. – 2003. – Vol. 302. – P. 419–422.

Поступила в редакцию 11.03.13.

УДК 535.51

ЭЛЛИПСОМЕТРИЯ ПЕРЕХОДНЫХ СЛОЕВ ПОЛУПРОВОДНИК – ДИЭЛЕКТРИК

Н.И. Стаськов¹, И.В. Ивашкевич¹, Н.А.Крекотень²

¹Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев

²НТЦ БМС ОАО «Интеграл», Минск

ELLIPSOMETRY OF THE TRANSITIVE LAYERS SEMICONDUCTOR – DIELECTRIC

N.I. Stas'kov¹, I.V. Ivashkevich¹, N.A. Krekoten²

¹A.A. Kuleshov Mogilev State University, Mogilev

²Belmicrosystems Reserch & Desing Center Branch of the JSC INTEGRAL, Minsk

Для тонких ($d < 0,1\lambda$) оксидных слоев на кремниевой подложке установлена связь поляризуемости слоя с его оптической толщиной. Показано, что структуру неоднородного поверхностного слоя при термообработке пластин кремния КДБ 12 можно интерпретировать комбинированной пятислойной моделью с одиннадцатью параметрами, которые учитывают поверхностный слой, прозрачный оксидный слой, первый промежуточный слой, эффективный переходный слой, второй промежуточный слой и подложку.

Ключевые слова: эллипсометрия, оптическая модель, переходный слой, шероховатые и оптически неоднородные слои, поляризуемость.

The polarizability bound of the layer with its optical thickness is established for thin oxide surfaces on a silicon substrate. It is revealed that the structure of the inhomogeneous surface layer can be interpreted by a five-layer model with 11 parameters at the heat treatment of the silicon plates.

Keywords: ellipsometry, optical model, transition layer, rough and optically inhomogeneous layers, polarizability.

Введение

Развитие интегральной микроэлектроники выдвигает задачи по определению параметров нанометровых (до 20 нм) диэлектрических слоев на полупроводниковых подложках, например, SiO₂ – Si [1], [2]. Особый интерес представляют возможности обнаружения неоднородных поверхностных и переходных областей, которые определяют эксплуатационные качества электронных и оптоэлектронных устройств. При этом результативность неразрушающих оптических исследований, среди которых особое место занимает эллипсометрия, определяется адекватностью теоретической электродинамической модели реальному образцу и соответствием дисперсионных характеристик слоев материалам структуры [3], [4]. Известно [5], что численное решение обратной эллипсометрической задачи напрямую связано с числом параметров электродинамической модели исследуемого образца. Поэтому в реальных ситуациях необходима модель с минимальным числом свободных параметров. В работе [6] при сравнении трех моделей слоев на подложке, которые использовались для исключения влияния параметров естественного поверхностного слоя ($d < 4$ нм) на определяемые методом спектральной эллипсометрии дисперсионные зависимости показателей преломления $n_2(\lambda)$ и поглощения $k_2(\lambda)$ ($N_2(\lambda) = n_2(\lambda) - ik_2(\lambda)$)

кремниевых пластин КДБ 12, продемонстрирована эффективность модели слоя с одной комплексной поляризуемостью α_z .

Для тонких переходных слоев между подложкой и внешней средой основное уравнение эллипсометрии можно представить как сумму

$$\operatorname{tg}\Psi_e(\varphi_0, \lambda, x_i) e^{i\Delta\alpha_e(\varphi_0, \lambda, x_i)} = \frac{\bar{R}_p}{R_s} + \delta \left(\frac{R_p}{R_s} \right), \quad (0.1)$$

в которой первое слагаемое является основным уравнением эллипсометрии для чистой подложки, а второе – поправка, вызванная наличием слоя. В случае однопараметрической модели слоя неизвестную величину α_z легко выразить из (0.1) в явном виде, не прибегая к трудоемким численным методам. Выражение (0.1) указывает, во-первых, на взаимосвязь параметров тонкого слоя в разных моделях одного и того же образца. И, во-вторых, в случае тонких неоднородных поверхностных слоев разделить методами эллипсометрии вклад в параметр $\delta \left(\frac{R_p}{R_s} \right)$ шероховатости поверхности и неоднородности физической структуры слоя можно только определенными математическими функциями, с помощью которых задается оптическая неоднородность слоя при некоторой среднеквадратичной высоте неровностей поверхности σ [4]. В качестве критерия

адекватности модели реальному образцу в этом случае выбирается значение целевой функции или функционала невязки:

$$I(x_j) = \sum_{k=1}^m \left\{ \left[\Psi_e(\varphi_0, \lambda_k) - \Psi(\varphi_0, \lambda_k, x_j) \right]^2 + \left[\Delta_e(\varphi_0, \lambda_k) - \Delta(\varphi_0, \lambda_k, x_j) \right]^2 \right\} \quad (0.2)$$

экспериментальных $\Psi_e(\varphi_0, \lambda_k)$, $\Delta_e(\varphi_0, \lambda_k)$ и соответствующих рассчитанных $\Psi(\varphi_0, \lambda_k, x_j)$, $\Delta(\varphi_0, \lambda_k, x_j)$ эллисометрических углов. В формуле (0.2) x_j ($j = \overline{1, n}$) – вещественные параметры электродинамической модели плоскостройной среды, m – число точек в спектре для фиксированного угла падения излучения φ_0 (спектральная эллисометрия) или число углов падения для фиксированной длины волны (многоугольная эллисометрия). Оптимальные значения x_j определяются из условия глобального минимума функции $I(x_j)$. Так как параметры $\Psi_e(\varphi_0, \lambda_k)$, $\Delta_e(\varphi_0, \lambda_k)$ измеряются обычно с неопределенностью $\pm 0,01^0$, то при толщине слоя значительно меньшей длины волны ($d \ll \lambda$) можно указать большое число математических функций электродинамических моделей, приводящих к одинаковым параметрам $\Psi(\varphi_0, \lambda_k, x_j)$, $\Delta(\varphi_0, \lambda_k, x_j)$, а в итоге – к одинаковым локальным минимумам функции (0.2). Если достижение минимального значения функции $I(x_j)$ при решении обратных оптических задач является необходимым условием, то для достаточного условия получения физически обоснованного решения потребуем определение параметров некоторого известного элемента структуры, например, подложки или ее оксидного слоя.

В данной работе по результатам эллисометрии окисленных кремниевых пластин КДБ 12 устанавливается связь поляризуемости поверхностного оксидного слоя с его макропараметрами (толщиной и показателем преломления) и рассматривается возможность учета шероховатости поверхности слоя SiO_2 при исследовании структурной неоднородности контактной зоны между оксидным слоем и кристаллической Si подложкой.

1 Численное моделирование слоев на пластинах КДБ 12

1.1. Многоугольная эллисометрия на фиксированной длине волны подложки со слоем

Предположим, что на подложке КДБ 12 находится однородный слой SiO_2 . По уравнению Друде для этого случая

$$\text{tg} \Psi e^{i\Delta} = \frac{R_p}{R_s}, \quad (1.1)$$

где

$$R_p = \frac{r_{01p} + r_{12p} e^{-2i\delta}}{1 + r_{01p} r_{12p} e^{-2i\delta}};$$

$$R_s = \frac{r_{01s} + r_{12s} e^{-2i\delta}}{1 + r_{01s} r_{12s} e^{-2i\delta}};$$

$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} N_1 \cos \varphi_1$ – фазовая толщина слоя; r_{01p} ,

r_{12p} , r_{01s} , r_{12s} – амплитудные коэффициенты Френеля для соответствующих границ раздела воздух – оксид (01) и оксид – кристаллический кремний (12):

$$r_{01p} = \frac{N_1 \cos \varphi_0 - N_0 \cos \varphi_1}{N_1 \cos \varphi_0 + N_0 \cos \varphi_1},$$

$$r_{01s} = \frac{N_0 \cos \varphi_0 - N_1 \cos \varphi_1}{N_0 \cos \varphi_0 + N_1 \cos \varphi_1},$$

$$r_{12p} = \frac{N_2 \cos \varphi_1 - N_1 \cos \varphi_2}{N_2 \cos \varphi_1 + N_1 \cos \varphi_2},$$

$$r_{12s} = \frac{N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2}{N_1 \cos \varphi_1 + N_2 \cos \varphi_2}.$$

Рассчитаем эллисометрические углы Δ и Ψ как функции толщины слоя ($0 \leq d \leq 0,1$ мкм; $\lambda = 0,6328$ мкм; $N_0 = 1$; $N_1 = 1,456$; $N_2 = 3,826 - i 0,02$) для углов падения 65° и 70° .

Затем, по основному уравнению эллисометрии для подложки со слоем диполей [6]:

$$\begin{aligned} \text{tg} \Psi e^{i\Delta} &= \\ &= \frac{(\cos \varphi_0 + N_2 \cos \varphi_2)(N_2 \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2)}{(\cos \varphi_0 - N_2 \cos \varphi_2)(N_2 \cos \varphi_0 + \cos \varphi_2)} + \\ &\quad + 2i\alpha_z \frac{\pi}{\lambda} N_2^2 \sin^2 \varphi_0 \times \\ &\quad \times \frac{\cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 + N_2 \cos \varphi_2)}{(\cos \varphi_0 - N_2 \cos \varphi_2)(N_2 \cos \varphi_0 + \cos \varphi_2)^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

при заданных φ_0 , N_0 , λ и рассчитанных по выражению (1.1) углах Ψ и Δ определим зависимость параметра α_z от толщины слоя d (рисунок 1.1). При этом, на основании закона преломления перейдем от углов преломления φ_1 и φ_2 к углу падения φ_0 .

По физическому смыслу (электростатическое приближение) $\alpha_z < 0$ и является действительным числом, имеющим размерность длины. Так как (1.2) – комплексное тождество, то в общем случае $\alpha_z = \text{Re}(\alpha_z) + i\text{Im}(\alpha_z)$. Величина мнимой части α_z указывает на соответствие сравниваемых моделей поверхностного слоя на подложке. Как и следовало ожидать, с увеличением d действительная часть параметра α_z увеличивается линейно. Однако, мнимая часть этого параметра при толщине слоя большей $0,08$ мкм начинает резко возрастать. Это указывает на несоответствие двух рассматриваемых моделей слоев на полупроводниковой подложке, т. е. однородные слои SiO_2 с $d > 0,1 \lambda$ нельзя рассматривать как тонкие двойные слои связанных зарядов

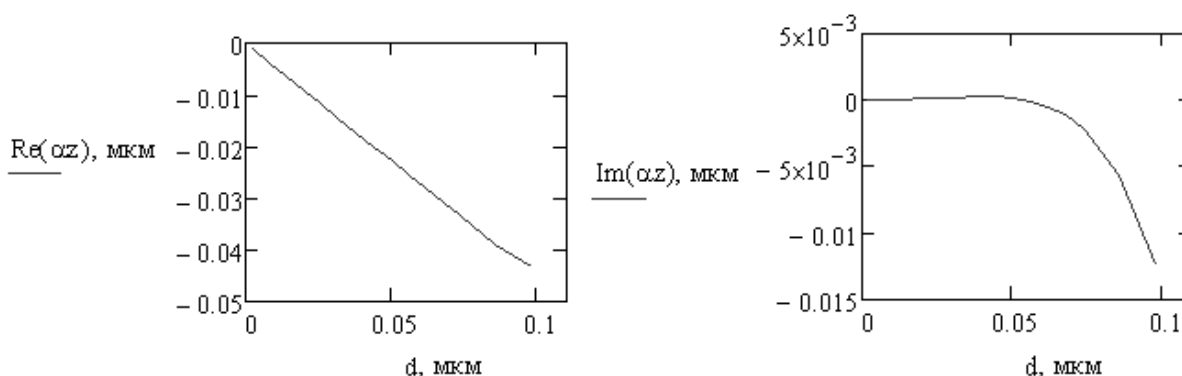


Рисунок 1.1 – Зависимости действительной ($\text{Re}(\alpha_z)$) и мнимой ($\text{Im}(\alpha_z)$) части поляризуемости α_z от толщины слоя SiO_2

вертикально поляризованных диполей. Данные рисунка 1.1 показывают, что действительную часть поляризуемости α_z можно представить как произведение некоторой постоянной безразмерной величины α_0 на оптическую толщину плоского слоя $N_1 d$, т. е. $\text{Re}(\alpha_z) = \alpha_0 N_1 d$. На рисунке 1.2 представлены отношения действительной части α_z к толщине слоя d , найденные из рисунка 1.1. Для толщин до $0,1 \lambda$ это отношение остается практически постоянным ($-0,452$).

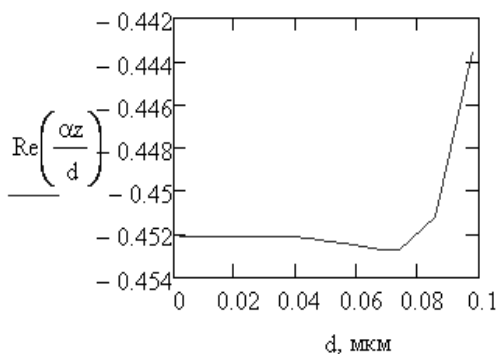


Рисунок 1.2 – Зависимость $\text{Re}(\alpha_z / d)$ от толщины слоя d

Таким образом, при эллипсометрическом контроле кремниевых пластин КДБ 12 с поверхностными слоями, толщина которых меньше $0,1 \lambda$, можно использовать трехпараметрическую модель: подложка (n_2, k_2) со слоем поляризованных диполей α_z . В таких случаях по величине α_z и отношению $\text{Re}(\alpha_z/d) = -0,452$ находится толщина поверхностного слоя, а при известной толщине слоя по величине α_z можно определить его показатель преломления N_1 .

1.2. Спектральная эллисометрия подложки со слоем

Для рассмотрения возможности перехода от трехпараметрической модели плоского слоя SiO_2 к слою с одним параметром $\alpha_z(\lambda)$ по выражениям

(1.1) были рассчитаны спектры поляризационных углов $\Psi(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ в интервале $0,480 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 1 \text{ мкм}$ с шагом $0,04 \text{ мкм}$ при $d = 0,008 \text{ мкм}$ и углах падения 65° и 70° . Для этого значения $n_2(\lambda)$ и $k_2(\lambda)$ КДБ 12 из работы [6] интерполировались функциями

$$n_2(\lambda) = a_1 + b_1 \lambda^2 + \frac{c_1}{\lambda^2} + \frac{d_1}{\lambda^4} + \frac{f_1}{\lambda^6}; \quad (1.3)$$

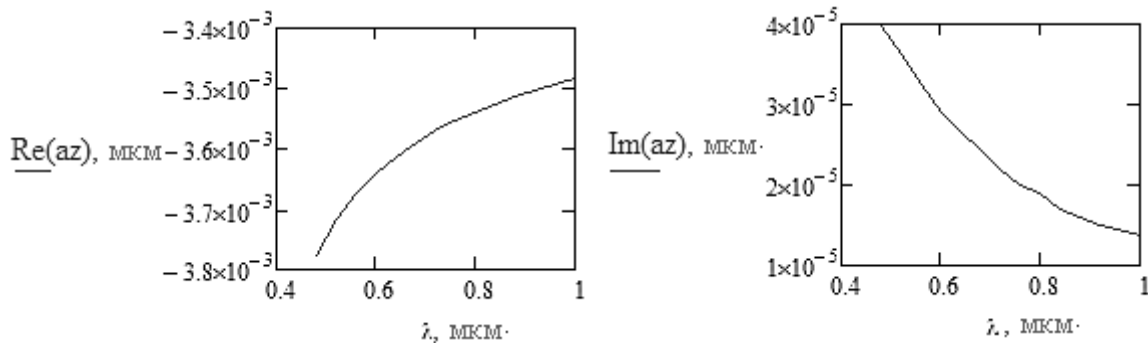
$$k_2(\lambda) = a_2 + b_2 \lambda^2 + \frac{c_2}{\lambda^2} + \frac{d_2}{\lambda^4} + \frac{f_2}{\lambda^6}; \quad (1.4)$$

где $a_1 = 3,3557$; $a_2 = -0,0520$; $b_1 = 0,0243 \text{ мкм}^{-2}$; $b_2 = 0,0233 \text{ мкм}^{-2}$; $c_1 = 0,1882 \text{ мкм}^2$; $c_2 = 0,0363 \text{ мкм}^2$; $d_1 = -0,0138 \text{ мкм}^4$; $d_2 = -0,0083 \text{ мкм}^4$; $f_1 = 0,0049 \text{ мкм}^6$; $f_2 = 0,0015 \text{ мкм}^6$; а значения $n_1(\lambda)$ оксида кремния из таблицы «OptiLayer» – функцией

$$n_1(\lambda) = A + B \lambda^2 + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4} + \frac{F_1}{\lambda^6}; \quad (1.5)$$

где $A = 1,4584$; $B = -0,0046 \text{ мкм}^{-2}$; $C = -0,0041 \text{ мкм}^2$; $D = 0,0022 \text{ мкм}^4$; $F = -0,0002 \text{ мкм}^6$. На рисунке 1.3 приведены спектры действительной и мнимой частей поляризуемости $\alpha_z(\lambda)$ слоя на подложке, рассчитанные по выражению (1.2). Для этого использовались вышеуказанные спектры углов $\Psi(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ однородного слоя и функции (1.3)–(1.5).

Расчеты $\alpha_z(\lambda)$ при углах $\varphi_0 65^\circ$ и 70° показывают, что соответствующие действительные и мнимые части поляризуемости от угла падения не зависят. Данные рисунка 1.3 подтверждают вывод в работе [6] о том, что в случае тонких поверхностных слоев при оценке их толщины дисперсией $\alpha_z(\lambda)$ можно пренебречь. И в этом случае отношение $\text{Re}(\alpha_z(\lambda)/d)$ близко к $-0,45$. Таким образом, по измеренным спектрам $\Psi_e(\lambda)$ и $\Delta_e(\lambda)$ полупроводниковых пластин можно найти $\alpha_z(\lambda)$ и, разделив эту величину на параметр $-0,45$, можно оценить толщину естественного слоя на их поверхности. Расчет показывает, что при $d = 0,008 \text{ мкм}$ погрешность в оценке толщины составляет $\pm 0,0003 \text{ мкм}$.


 Рисунок 1.3 – Спектры действительной и мнимой части поляризуемости $\alpha_2(\lambda)$

1.3. Многоугольная эллисометрия подложки с шероховатым неоднородным слоем

Рассмотрим возможность моделирования шероховатого слоя на полированном свинцовосиликатном стекле ($n_c = 1,632$, $k_c = 0$ при $\lambda = 632,8$ нм) тонким слоем поляризованных диполей. Для этого воспользуемся экспериментальными эллисометрическими углами $\Psi_e(\varphi_0)$ и $\Delta_e(\varphi_0)$, которые приведены в монографии [4] для углов падения 50° , 60° и 65° . Такое количество данных позволяет определить не более шести неизвестных параметров любой модели. Методом наименьших квадратов минимизировалась функция (0.2) при решении обратных задач эллисометрии для следующих пяти моделей полированного свинцовосиликатного стекла:

1) однородная подложка с $n_{eff} = 1,633$ и $k_{eff} = 0,033$ ($I_1(2) = 0,048$);

2) слой с $\alpha_{z1} = -0,997$ нм на известной подложке с $n_c = 1,632$, $k_c = 0$ ($I_2(1) = 0,0273$);

2*) слой с $\alpha_{z1} = -0,965$ нм на подложке с $n_2 = 1,634$ и $k_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ ($I_2(3) = 0,0094$);

3) плоский слой с $n_1 = 1,428$; $k_1 = 0,034$ и $d_1 = 8,1$ нм на известной подложке с $n_c = 1,632$, $k_c = 0$ ($I_3(3) = 0,0095$);

3*) плоский слой с $n_1 = 1,800$; $k_1 = 0,003$ и $d_1 = 7,8$ нм на подложке с $n_2 = 1,629$; $k_2 = 0,007$ ($I_3(5) = 0,0084$);

4) два плоских слоя соответственно с $n_1 = 1,007$; $k_1 = 0,042$; $d_1 = 1,83$ нм и $n_2 = 1,796$; $k_2 = 0,9 \cdot 10^{-4}$; $d_2 = 7,05$ нм на известной подложке с $n_c = 1,632$, $k_c = 0$ ($I_4(6) = 0,0096$);

4*) два прозрачных плоских слоя соответственно с $n_1 = 1,007$; $d_1 = 1,8$ нм и $n_2 = 1,798$; $d_2 = 6,8$ нм на подложке с $n_3 = 1,629$ и $k_3 = 0,0008$ ($I_4(6) = 0,0092$);

5) три слоя: слой с $\alpha_{z1} = -0,013$ нм на прозрачном подслое с $n_2 = 1,798$, $d_2 = 6,83$ нм и слой с $\alpha_{z3} = -0,031$ нм – на известной подложке с $n_c = 1,632$, $k_c = 0$ ($I_5(5) = 0,047$);

5*) три слоя: слой с $\alpha_{z1} = -0,021$ нм на прозрачном подслое с $n_2 = 1,797$, $d_2 = 7,4$ нм и слой с $\alpha_{z3} = -0,023$ нм – на подложке с $n_4 = 1,630$, $k_4 = 0,0002$ ($I_5(6) = 0,0088$).

Основное уравнение эллисометрии для пятой модели записывалось в рекуррентной форме, аналогичной (1.1). Такая модель использовалась при учете переходных слоев в структуре с Si – SiO₂ – pSi [7]. Эффективные параметры первой модели указывают на наличие тонкого ($n_{eff} \approx n_c$) поверхностного слоя с большим показателем преломления, чем у подложки. Модель 2* лучше характеризует стекло в сравнении с моделью 2 ($I_2(1) > I_2(3)$). Однако, при неопределенности $\pm 0,01^0$ экспериментальных углов $\Psi_e(\varphi_0)$ и $\Delta_e(\varphi_0)$ сравнительно большое значение целевой функции $I_2(3)$ требует уточнения модели поверхностного слоя. Последний вывод подтверждается данными, полученными при использовании модели 3*. В этом случае находились параметры плоского слоя и подложки. Толщина однородного слоя в этом случае удовлетворительно согласуется с толщиной неоднородного слоя на стекле $d_c = (7,3 \pm 0,3)$ нм, которая была определена в работе [4]. При не большом значении целевой функции $I_3(5)$ в этом случае параметры подложки не соответствуют свинцовосиликатному стеклу. Это можно объяснить тем, что модель 3* приближенно учитывает неоднородности слоя стекла и позволяет определить лишь толщину поверхностного слоя [6]. Если такой слой представить состоящим из двух подслоев (модель 4*), то суммарная толщина поверхностного слоя на стекле ($d_1 + d_2 = 8,6$ нм) оказывается больше, чем толщина, определенная с использованием модели 3*. Параметры подложки n_3 и k_3 оказались ближе к характеристикам стекла. Эти данные свидетельствуют о том, что параметры модели 4* позволяют оценить толщину шероховатого слоя по параметру d_1 и толщину неоднородного слоя по параметру d_2 . Пятая модель учитывает шероховатый поверхностный слой, промежуточный слой и переходный слой на подложке. Значение целевой функции $I_5(6)$ указывает на удовлетворительное совпадение рассчитанных и измеренных эллисометрических углов. Параметры $n_4 = 1,630$ и $k_4 = 0,0002$ этой модели позволяют сделать заключение не только о материале подложки (свинцовосиликатное стекло), но и о том,

что параметры трех слоев правдоподобно отражают структуру неоднородного поверхностного слоя стекла. Если параметр α_{z1} модели 2* соответствует толщине слоя 7,8 нм модели 3*, то параметрам α_{z1} и α_{z3} модели 5* соответствуют слои, толщина которых $d_1 = 0,17$ нм и $d_2 = 0,19$ нм. Суммарная толщина неоднородного слоя ($d = d_1 + d_2 + d_3$) по данным модели 5* оказывается равной 7,8 нм. Это значение удовлетворительно согласуется со значением, рассчитанным в работе [4].

Таким образом, в эллипсометрии стекла с тонким неоднородным поверхностным слоем, который включает шероховатости поверхности и неоднородности структуры, можно использовать модель: слой поляризованных диполей (α_{z1}) на подслое (n_2, k_2, d_2), который отделен от подложки (n_4, k_4) слоем поляризованных диполей (α_{z3}). Если при решении обратных задач задавать параметры подложки, то минимумы функции (0.2) являются локальными. Это особенно важно при определении дисперсионных характеристик и контроле качества поверхности материалов.

2 Экспериментальные результаты и их анализ

Эксперименты выполнены на промышленных пластинах КДБ 12, обработанных в буферном растворе после предварительной шлифовки и полировки. Затем эти пластины подвергались термической обработке (800 °С) в атмосфере газов O_2 , N_2 и H_2 в течение 15 (образец № 1), 10 (образец № 2) и 5 (образцы № 3, 4) минут. Шероховатость пластин, определенная на профилометре Talystep (фирма Taylor-Hobson) иглой с радиусом закругления $R = 2$ мкм, не превышала 1 нм. Распределение концентраций атомов O и Si по нормали z , направленной от поверхности вглубь образовавшихся пленок SiO_2 , исследовали на Оже-спектрометре РН1 660 (PerkinElmer) путем послойного распыления пленок с шагом 1 нм и онами Ag^+ . Измерения поляризационных углов $\Psi_e(\varphi_0, \lambda_k)$ и $\Delta_e(\varphi_0, \lambda_k)$ осуществляли на лазерном эллипсометре ЛЭФ 3М-1 ($\lambda = 632,8$ нм) при углах падения от 65° до 77° с шагом 1° и спектральном

эллипсометре ES 2 с бинарной модуляцией состояния поляризации [8] в диапазоне длин волн от 480 нм до 1000 нм при углах падения 65° и 70° . По $\Psi_e(\varphi_0, \lambda_k)$ и $\Delta_e(\varphi_0, \lambda_k)$ и уравнениям (1.1) и (1.2) методом наименьших квадратов рассчитывали спектры параметров поверхностного слоя и подложки. При этом предполагалось, что поверхностный слой является плоским с тремя макропараметрами (модель 3*) или это слой связанных зарядов вертикально поляризованных диполей (модель 2*). На рисунке 2.1 приведены рассчитанные спектры $\alpha_z(\lambda)$ естественного слоя на исходной пластине КДБ 12.

Анализ данных рисунка 2.1 показывает, что поляризуемость $\alpha_z(\lambda)$ слабо зависит от угла падения и длины волны. Величина $Re(\alpha_z)$ поверхностного слоя исходной пластины, определенная ранее методом многоугловой эллипсометрии на длине волны $\lambda = 632,8$ нм, составляет $-1,756$ нм [7]. Это значение хорошо согласуется с данными рисунка 2.1. Мнимая часть поляризуемости $\alpha_z(\lambda)$ близка к нулю. Это указывает на адекватность модели слоя вертикально поляризованных диполей на подложке реальной пластины с естественным поверхностным слоем. На рисунке 2.2 приведены спектры отношения $Re(\alpha_z(\lambda) / (-0,452))$, которое определяет толщину естественного поверхностного слоя на КДБ 12.

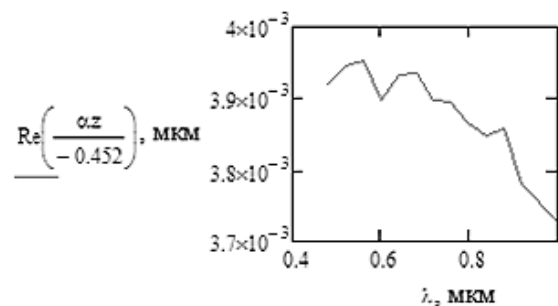


Рисунок 2.2 – Спектр отношения $Re(\alpha_z(\lambda) / (-0,452))$

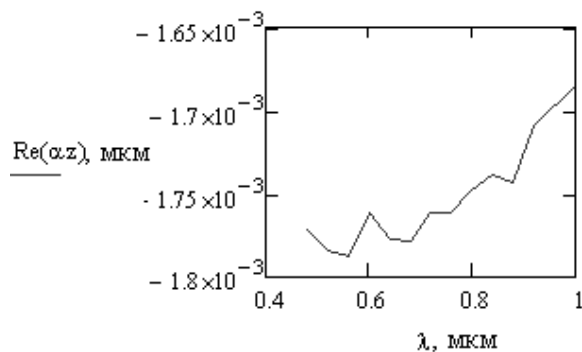
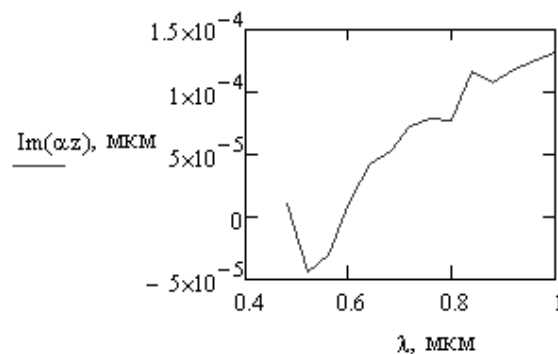


Рисунок 2.1 – Спектры действительной и мнимой части поляризуемости слоя на исходной пластине КДБ 12



Из рисунка 2.2 видно, что отношение $\text{Re}(\alpha_z(\lambda) / (-0,452))$ слабо зависит от длины волны. По данным двух сравниваемых моделей толщина слоя оказалась равной $(3,8 \pm 0,3)$ нм.

В области углов падения от 65° до 77° параметры Ψ_e и Δ_e наиболее чувствительны к характеристикам слоя и подложки КДБ 12. Для решения обратных эллисометрических задач методом наименьших квадратов число углов падения превышало число неизвестных электродинамических параметров в (0.2). В таблице 2.1 приведены средние значения толщин слоев четырех термообработанных образцов, найденные с использованием моделей 2* и 3*. Последняя строчка таблицы содержит параметры естественного слоя необработанной пластины.

Таблица 2.1 – Параметры поверхностных слоев пластин КДБ 12

№ образца	α_z , нм	$d = \text{Re}(\alpha_z(\lambda)) / (-0,452)$, нм	d , нм (Модель Друде)
1	$-3,590+0,260i$	7,9	8,1
2	$-2,661+0,0636i$	5,9	5,5
3	$-1,844-0,175i$	4,1	3,6
4	$-1,986-0,355i$	4,4	4,0
исходный	$-1,756-5,3 \cdot 10^{-5}i$	3,9	3,8

Как видно из данных таблицы 2.1, обе модели в рамках погрешностей ($\Delta d / d = 0,05$) приводят к одинаковым результатам относительно толщин слоев.

Для исследования структуры поверхностного слоя на Si подложке в модель 5* были добавлены слои с n_4, k_4, d_4 и слой с α_{z5} . Подложка в

этом случае имела параметры n_6, k_6 (модель б). Для решения обратной задачи многоугольной эллисометрии параметры Ψ_e и Δ_e использовались при всех вышеуказанных углах падения от 65° до 77° . Оказалось, что на образце № 1 находится неоднородный слой. Его удалось разделить на пять подслоев с параметрами ($\lambda = 632,8$ нм): шероховатый с $\alpha_{z1} = -0,012$ нм; оксидный (SiO_2) с $n_2 = 1,46, k_2 = 0, d_2 = 3,9$ нм; первый промежуточный $\alpha_{z1} = -0,102$ нм; переходный с $n_4 = 3,025, k_4 = 0,355, d_4 = 4,4$ нм; второй промежуточный с $\alpha_{z5} = -0,089$ нм и подложка с $n_6 = 3,825, k_6 = 0,034$. При увеличении числа измеряемых углов увеличивается суммарная экспериментальная погрешность. Это приводит к увеличению глобального минимума целевой функции $I_6(11) = 0,494$. Суммарная толщина поверхностного слоя на пластине КДБ 12, которая окислялась 15 мин., составляет около 8,8 нм. Этот результат удовлетворительно согласуется с данными оже-спектроскопии. На рисунке 2.3 приведены относительные концентрационные профили атомов O и Si в зависимости от времени шаговой ионно-плазменной обработки поверхности образца № 1. Его поверхностный слой толщиной 4 нм по стехиометрическому составу соответствует оксиду кремния SiO_2 . Между этим слоем и подложкой находится неоднородный переходной слой толщиной 5 нм.

Параметры переходного слоя между SiO_2 и Si по оптическим характеристикам не соответствует известным фазам кремния aSi, pSi и cSi. Увеличение концентрации атомов Si и соответствующее уменьшение концентрации атомов O (рисунок 2.3) в переходном слое можно объяснить уменьшением доли оксида и увеличением доли кристаллического кремния при увеличении z от 4 нм до 9 нм. Это приводит к зависимости показателя преломления переходного слоя n_2 от z .

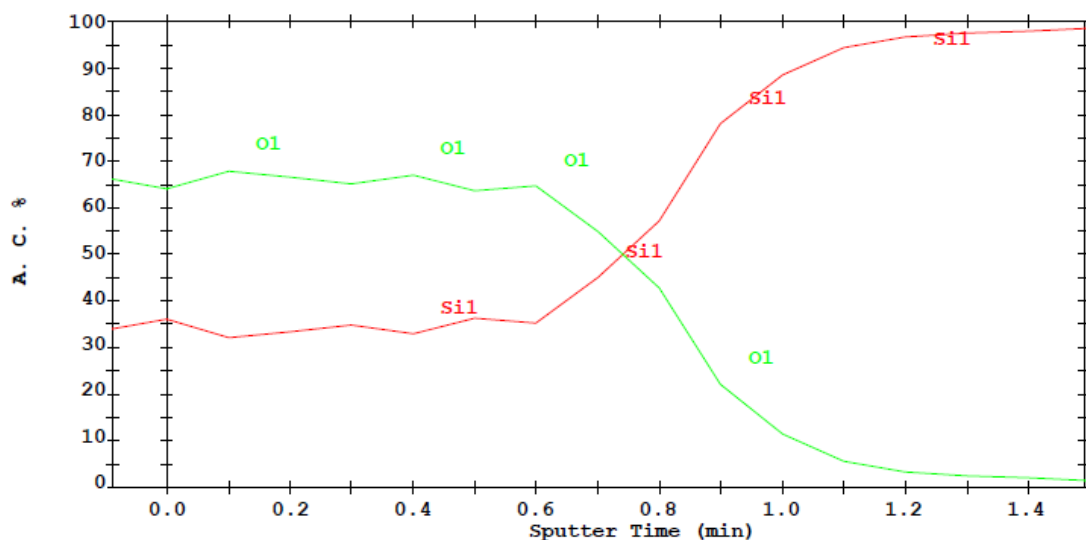


Рисунок 2.3 – Распределение атомов O и Si по толщине поверхностного слоя образца № 1

Таким образом, из-за структурной неоднородности переходного слоя его параметры $n_2 = 3,025$ и $k_2 = 0,355$ имеют смысл эффективных характеристик бинарной среды. На основании линейного приближения Бруггемана (ВЕМА) слой между двумя промежуточными слоями соответственно с α_{z3} и α_{z5} состоит из SiO_2 (33%) и КДБ 12 (67%). Если предположить распределение долей оксида и КДБ 12, вытекающее из рисунка 2.3, то $1,46 \leq n_2(z) \leq 3,825$. Электростатические приближения эффективных сред не учитывают дисперсионные зависимости диэлектрических проницаемостей компонент наполнителей и матрицы. Поэтому доли компонент в эффективной среде оказываются комплексными величинами, мнимая часть которых указывает на соответствие модели эффективной среды материалу слоя. Так, если предположить, что в переходном слое находится SiO_2 и aSi, и по эффективному показателю слоя найти соответствующие доли ($f_{\text{SiO}_2} = 45\%$, $f_{\text{aSi}} = 55\%$), то мнимая часть долей компонент уменьшается вдвое. Расчеты с использованием других моделей эффективных сред показывают, что содержание в переходном слое образца кремниевых фаз составляет aSi – 60% и cSi – 7%, т. е. больше, чем SiO_2 (33%). Более строго определить структуру переходного слоя можно методами спектральной эллипсометрии.

Заключение

Глобальный минимум, обеспечивающий устойчивое решение многопараметрических обратных задач эллипсометрии, достигается при определении всех параметров электродинамической модели исследуемой структуры.

Шероховатые ($\sigma < 1$ нм) и оптически неоднородные поверхностные слои можно учитывать тонкими двойными слоями связанных зарядов вертикально поляризованных диполей при эллипсометрических исследованиях полупроводниковых и диэлектрических подложек. Для слоев, толщина которых не превышает $0,1 \lambda$, поляризуемость является линейной функцией их оптической толщины.

Предложенная модель (6) для эллипсометрии ПД в отличие от обычной пятислойной модели с 17 параметрами включает пять слоев с 11 параметрами, по которым можно интерпретировать структуру неоднородного поверхностного

слоя на Si подложке. При термической обработке пластин КДБ 12 на поверхности увеличивается оксидный слой, который в образце № 1 отделен от подложки неоднородным переходным слоем с фазами кремния aSi (60%), cSi (7%) и диоксида SiO_2 (33%). Состав и толщина этого слоя зависят, главным образом, от времени окисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриценко, В.А. Структура границ раздела кремний/оксид и нитрид/оксид / В.А. Гриценко // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 9. – С. 921–930.
2. Беляева, А.И. Границы раздела слоев и шероховатость в многослойной кремниевой структуре / А.И. Беляева, А.А. Галуза, С.Н. Коломиец // Физика и техника полупроводников. – 2004. – Т. 38, вып. 9. – С. 1050–1055.
3. Аззам, Р. Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара: перевод с англ. под ред. А.В. Ржанова, К.К. Свиташева. – М.: Изд-во «Мир», 1981. – 582 с.
4. Пшеницын, В.И. Эллипсометрия в физико-химических исследованиях / В.И. Пшеницын, М.И. Абаев, Н.Ю. Лызлов // М.: Изд-во «Химия», 1986. – 152 с.
5. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин // М.: Наука, 1979. – 285 с.
6. Учет влияния естественного поверхностного слоя при исследовании кремниевых пластин методом спектральной эллипсометрии / Н.И. Стаськов [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 26–30.
7. Стаськов, Н.И. Моделирование переходных слоев в структуре полупроводник – диэлектрик – полупроводник / Н.И. Стаськов, И.В. Ивашкевич // Оптика неоднородных структур», матер. III междунар. научно-практ. конф. / редкол.: В.А. Карпенко (отв. ред.). – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2011. – С. 92–94.
8. Спектральная эллипсометрия многослойных гетероструктур ZnS/ZnSe / В.И. Ковалев [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 2002. – Т. 69, № 2. – С. 258–263.

Поступила в редакцию 04.04.13.

УДК 535.42

ГЕНЕРАЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ УДВОЕННОЙ ЧАСТОТЫ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ КРИСТАЛЛАХ С РАДИАЛЬНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ДОМЕНОВ

П.А. Хило¹, Е.С. Петрова¹, Н.А. Хило²

¹Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

GENERATION OF BESSEL LIGHT BEAMS FREQUENCY DOUBLING IN QUADRATIC NONLINEAR CRYSTALS WITH RADIAL STRUCTURE OF THE DOMAIN POLARIZED

P.A. Khilo¹, E.S. Petrova¹, N.A. Khilo²

¹P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

²B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk

Предложена и исследована схема генерации второй гармоники бesselевых световых пучков в квадратично-нелинейных кристаллах с радиально-периодической структурой доменов. Рассчитана нелинейная поляризация, найдена пространственная структура взаимодействующих полей. Численно исследованы интегралы перекрытия, характеризующие эффективность процесса удвоения частоты бesselевых световых пучков произвольных порядков.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, квадратично-нелинейные кристаллы с радиально-поляризованной структурой доменов, бesselев световой пучок.

In the paper the scheme of the second harmonic generation of Bessel light beams in quadratic nonlinear crystals with radial periodic structure of domains is described. Nonlinear polarization at the fundamental and double frequencies is calculated and spatial structure of interacting fields is founded. The overlap integrals that characterize the efficiency of the frequency doubling of Bessel light beams of arbitrary order are numerically investigated.

Keywords: second harmonic generation, quadratic nonlinear crystals with radial periodic structure of domains, Bessel light beams.

Введение

Разработка методов динамической трансформации бesselевых световых пучков (БСП), в том числе изменение их порядка, управление поляризацией и направлением распространения представляет как научный, так и практический интерес. В частности, манипуляция параметрами БСП актуальна в многообразных задачах, связанных с использованием оптических пинцетов [1].

Одним из важнейших направлений исследований в оптике бesselевых световых пучков является формирование бesselевых пучков ТН и ТЕ поляризаций и преобразование ТН ↔ ТЕ мод в анизотропных кристаллах. Использование азимутально ТЕ и радиально ТН поляризованных бesselевых пучков имеет преимущество перед линейно- или циркулярно- поляризованными пучками, т. к. позволяет получать более высокую концентрацию светового поля в приосевой области, что перспективно для использования в фотолитографии, конфокальной микроскопии, устройствах записи-считывания информации, оптической когерентной томографии [2], [3].

Периодическая модуляция нелинейной восприимчивости широко используется для квазисинхронного преобразования частоты световых

волн и, в частности, БСП [4]. При этом рассматривается геометрия взаимодействия, в которой световые пучки основной и удвоенной частоты распространяются вдоль (или под малым углом) к направлению вектора модуляции нелинейной восприимчивости. В работе [5] предложен новый тип периодической структуры с радиальной модуляцией нелинейной восприимчивости для квазисинхронного преобразования частоты световых волн, и в [6] была показана возможность генерации БСП первого порядка удвоенной частоты при падении на периодически-поляризованный нелинейный кристалл пучка гауссова типа.

В данной работе предложена и исследована схема генерации БСП удвоенной частоты в квадратично-нелинейных кристаллах с радиально-поляризованной структурой доменов при падении на кристалл бesselева светового пучка. Для достижения азимутально-симметричного режима генерации второй гармоники рассматривается геометрия взаимодействия, когда направление распространения БСП совпадает с оптической осью кристалла, и за счет поперечной модуляции тензора нелинейной восприимчивости достигается генерация второй гармоники в пределах всего конуса синхронизма.

1 Генерация второй гармоники в кристаллах класса 4mm с радиально-периодической структурой доменов

Рассмотрим наиболее симметричный тип взаимодействия, когда падающий БСП азимутально или радиально поляризован [7]. Ранее [8] нами было показано, что уравнения Максвелла в одноосном кристалле для бesselевых светового пучка нулевого порядка по продольной компоненте имеют два решения, соответствующие плоским волнам в теории одноосных кристаллов (бesselевы световые пучки *o*- и *e*- типа). Компоненты векторов напряженности электрического поля с точностью до фазового множителя $\exp[i(k_{o,e}z + m\phi)]$ выражаются через функции Бесселя первого рода *m*-го порядка $J_m(q\rho)$ и их производные следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{o\rho} &= ik_0 n_o \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho), \\ E_{o\phi} &= -k_0 n_o J'_m(q\rho), \\ E_{oz} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

для обыкновенного пучка и

$$\begin{aligned} E_{e\rho} &= ik_0 n_e J'_m(q\rho), \\ E_{e\phi} &= -k_0 n_e \cos(\gamma_e) \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho), \\ E_{ez} &= k_0 n_e \sin(\gamma_e) \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e} J_m(q\rho) \end{aligned} \quad (1.2)$$

для необыкновенного пучка.

Для БСП *o*- и *e*- типов продольные компоненты волновых векторов равны соответственно

$$\begin{aligned} k_{oz} &= k_0 n_o \cos(\gamma_o), \quad k_{ez} = k_0 n_e \cos(\gamma_e), \\ k_0 &= \omega/c, \end{aligned}$$

$\gamma_{o,e}$ – углы конусности БСП.

Рассчитаем нелинейную поляризацию для кристалла класса 4mm с радиально-периодической структурой доменов. Радиально-периодическая модуляция нелинейной восприимчивости *d* может быть представлена в виде

$$d(\rho) = d_0 g(\rho),$$

где $g(\rho) = \cos(2\pi\rho/\Lambda)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – поперечная радиальная координата, Λ - период структуры.

Ненулевая компонента вектора нелинейной поляризации на удвоенной частоте для данного класса кристаллов равна

$$P_{2z} = d_{31} [E_{ox}^2(\omega) + E_{oy}^2(\omega)], \quad (1.3)$$

или в цилиндрических координатах получаем

$$P_{2z} = d_{31} (E_{o\rho}^2(\omega) + E_{o\phi}^2(\omega)), \quad (1.4)$$

где d_{31} – компонента тензора нелинейной восприимчивости.

Запишем поле обыкновенной волны на основной частоте для БСП произвольного порядка в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^\omega(\rho, \phi, z) &= \\ &= k_0 n_o A_1 \left(i \frac{m}{q_1 \rho} J_m(q_1 \rho) \vec{e}_\rho - J'_m(q_1 \rho) \vec{e}_\phi \right) \times \\ &\times \exp[ik_{oz} z + im\phi - i\omega t], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где ρ, ϕ, z – цилиндрические координаты, *m*- порядок бesselевой функции, $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$ – цилиндрические орты.

Для вектора НЛ поляризации (1.4) в цилиндрических координатах имеем:

$$\begin{aligned} P_{2z}(\rho, \phi, z) &= \\ &= d_{31} k_0^2 n_o^2 A_1^2(z) \left(J_m'^2(q\rho) - \left(\frac{m}{q\rho} \right)^2 J_m^2(q\rho) \right) \times \\ &\times \exp[ik_{oz} z + 2im\phi]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Характерной особенностью (1.6) является то, что нелинейная поляризация на удвоенной частоте не зависит от азимутального угла, в то время как для падающего на кристалл БСП циркулярной поляризации азимутальная зависимость проявляется в компонентах поля.

Известная функция НЛ поляризации позволяет рассчитать продольную компоненту поля второй гармоники. Для этого используется уравнение Гельмгольца

$$\left[\nabla^2 + \frac{\varepsilon}{c^2} (2\omega)^2 \right] E_{2\omega,z} = \frac{-4\pi}{c^2} (2\omega)^2 P_{2z}. \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) представим в виде

$$E_{2z} \sim J_m(q_2 \rho) \exp[ik_{2z} z + 2im\phi].$$

В приближении медленно меняющейся амплитуды $A_2(z)$ данное решение трансформируется к виду

$$E_{2z} = A_2(z) J_m(q_2 \rho) \exp[ik_{2z} z + 2im\phi]. \quad (1.8)$$

Для удобства дальнейшего анализа в амплитуды полей (1.5) и (1.8) введены нормировочные структурные функции $b_{1,2}(q)$ вида

$$b_1(q) = \pi \int_0^R [J_{m+1}^2(q\rho) + J_{m-1}^2(q\rho)] \rho d\rho,$$

$$b_2(q) = 2\pi \int_0^R J_m^2(q_2 \rho) \rho d\rho,$$

где *R* – радиус БСП, q_2 – волновое число БСП на удвоенной частоте.

Используя формулы (1.5)–(1.8), получим укороченное уравнение для амплитуды поля второй гармоники

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = i\delta A_1^2(z) g(q_2, k_g), \quad (1.9)$$

$$\text{где } \delta = \frac{4\pi(2\omega)^2}{c^2 q_2 2k_{2z}} k_0^2 n_o^2 d_{31}, \quad k_g = \frac{2\pi}{\Lambda}.$$

Уравнение (1.9) не содержит волновой расстройки, т. к. обеспечение продольного синхронизма в данной схеме не представляет труда за счет волнового вектора периодической структуры.

Особенность данного уравнения состоит в структуре интеграла перекрытия

$$g(q_2, k_g) = \frac{2\pi}{b_1(q_1)\sqrt{b_2(q_2)}} \times \int_0^R J_{m-1}(q_1\rho)J_{m+1}(q_1\rho)J_m(q_2\rho)\cos(k_g\rho)\rho d\rho. \quad (1.10)$$

Интеграл перекрытия (1.10) определяет зависимость эффективности процесса ГВГ от поперечного волнового числа БСП на удвоенной частоте q_2 и волнового числа k_g периодической структуры при учете первой Фурье-компоненты радиально-периодической модуляции нелинейности. Поперечные компоненты поля $E_{x,y}^{2\omega}$ могут быть

получены из решений уравнений Максвелла с учетом (1.8).

Проведем расчет величины волнового числа k_g , необходимого для устранения геометрической расстройки поперечных волновых чисел взаимодействующих бesselевых пучков

$$k_g = 2k_0[n_{2e}(\gamma_e)\sin(\gamma_2) - n_{1o}\sin(\gamma_1)], \quad (1.11)$$

где $\text{tg}(\gamma_2) = n_{2e}\sqrt{n_{1o}^{-2}\cos(\gamma_1)^{-2} - n_{2o}^{-2}}$, $\gamma_{1,2}$ – угол конусности БСП на основной и удвоенной частоте. Далее в расчетах интегралов перекрытия величина k_g выбиралась в соответствии с уравнением (1.11). При этом автоматически обеспечивалось выполнение условия продольного синхронизма.

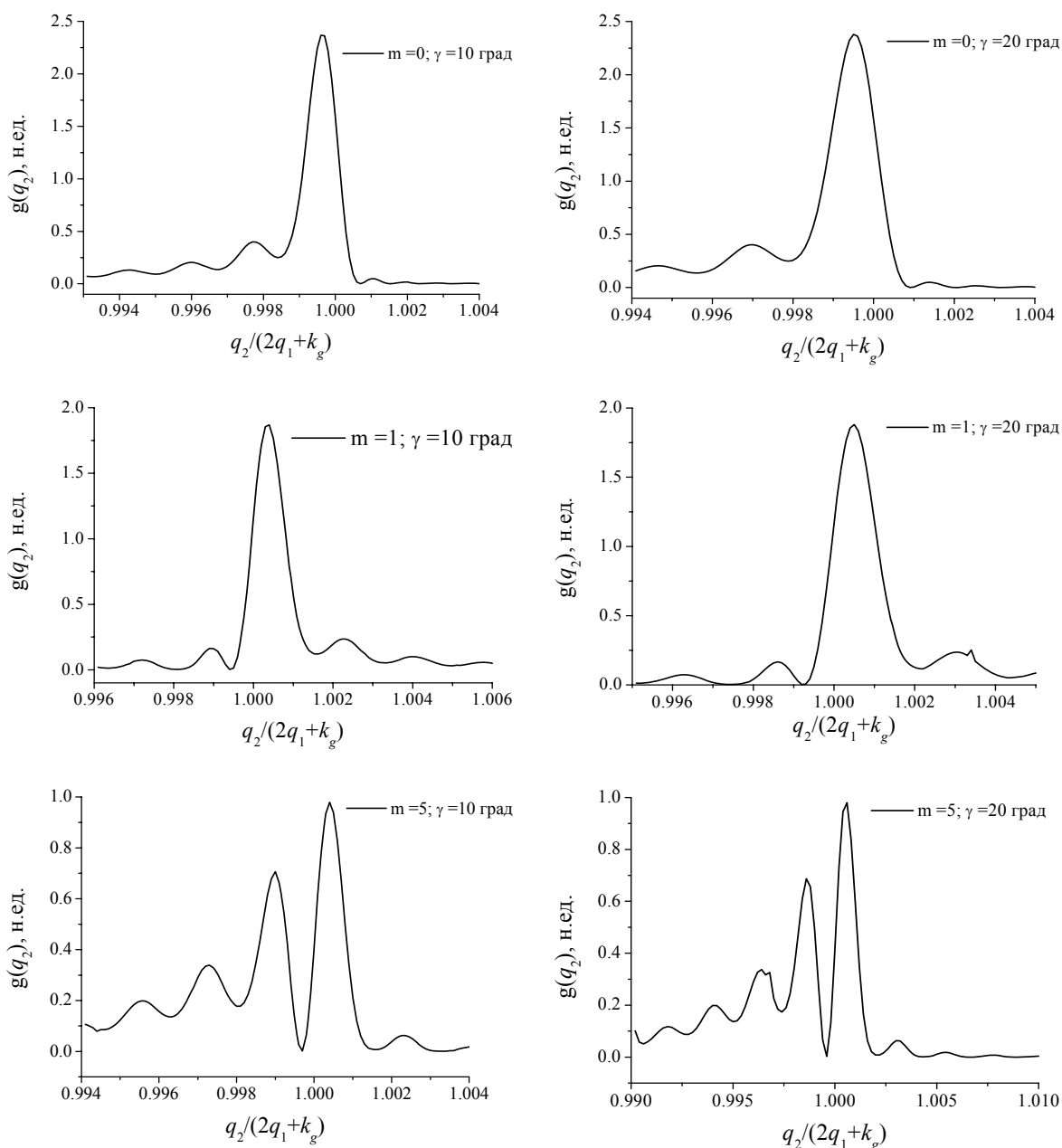


Рисунок 2.1 – Зависимость интеграла перекрытия от поперечного волнового числа q_2 для БСП различных порядков и углов конусности

2 Результаты расчетов

На рисунке 2.1 приведены графики зависимости интегралов перекрытия от поперечного волнового числа поля удвоенной частоты q_2 для произвольного порядка бесселевых пучков. Видно, что для БСП низших порядков интеграл перекрытия содержит четко выраженный максимум вблизи значения $q_2 = 2q_1 + k_g$, соответствующего выполнению поперечного синхронизма. Отметим, однако, что точное значение максимума несколько смещено от приведенной величины, причем знак смещения зависит от порядка БСП. При возрастании угла конусности γ_1 имеет место небольшое увеличение ширины максимума функции $g(q_2)$.

Это может быть связано с увеличением периода периодической структуры, требуемого для достижения поперечного синхронизма. При возрастании порядка бесселевых пучков наблюдается увеличение уровня боковых осцилляций функции $g(q_2)$ и последующая перестройка ее вида.

Заключение

Предложенная схема генерации бесселева светового пучка на удвоенной частоте в квадратично-нелинейных кристаллах с радиально-поляризованной структурой доменов эффективна для нелинейных кристаллов с отсутствующим или малым двулучепреломлением, в которых только за счет квазисинхронизма возможно обеспечение генерации второй гармоники в пределах всего конуса направлений синхронизма. Данная схема может быть использована для решения задач оптической интерферометрии, профилометрии и эллипсометрии с применением квазибездифракционных световых пучков высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arlt, J. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon / J. Arlt, K. Dholakia // Optics Comms. – 2000. – Vol. 177. – P. 297–301.
2. Краморева, Л.И. Оптическая когерентная томография (обзор) / Л.И. Краморева, Ю.И. Рожко // ЖПС. – 2010. – Т. 77, № 4. – С. 485–506.
3. Formation of TE-and TH polarized Bessel beams at acousto-optic diffraction in anisotropic crystals / P.A. Khilo [et al.] // Proc. of SPIE. – 2011. – Vol. 8073. – P. 807327-1–807327-9.
4. Хило, П.А. Генерация второй гармоники эллиптическими бесселевыми световыми пучками в периодически поляризованных нелинейных средах / П.А. Хило, Е.С. Петрова // ЖПС 2005. – Т. 72, № 6. – С. 752–755.
5. Annular symmetry nonlinear frequency converters / D. Kasimo [et al.] // Optics Express 2006. – Vol. 14, № 20. – P. 9371–9376.
6. Generation of Bessel beams by parametric frequency doubling in annular nonlinear periodic structures / S. Saltiel [et al.] // Optics Express 2007. – Vol. 15, № 7. – P. 4133–4138.
7. Experimental generation and analysis of first-order TE and TM Bessel modes in free space / A. Flores-Peres [et al.] // Optics Letters 2006. – Vol. 31, № 11. – P. 4133–4138.
8. Хило, Н.А. Преобразование порядка бесселевых световых пучков в одноосных кристаллах / Н.А. Хило, Е.С. Петрова, А.А. Рыжечев // Квантовая электроника. – 2001. – Т. 31, № 1. – С. 85–89.

Поступила в редакцию 15.03.13.

УДК 621.37/39:621.9.048.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВУЛУЧЕВОГО ЛАЗЕРНОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ СИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

С.В. Шалупаев, А.Н. Сердюков, Ю.В. Никитюк, А.А. Середя

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

MODELLING OF THE PROCESS OF THE TWO-BEAM LASER THERMOSPLITTING OF SILICATE GLASSES WITHIN THE LIMITS OF THE LINEAR FRACTURE MECHANICS

S.V. Shalupaev, A.N. Serdykov, Yu.V. Nikitjuk, A.A. Sereda

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В рамках теорий термоупругости и линейной механики разрушения на основе разработанного алгоритма выполнено конечно-элементное моделирование процесса развития лазерно-индуцированной трещины в силикатных стеклах при двухлучевом лазерном управляемом термораскалывании. Показано, что зарождение трещины происходит на поверхности материала в области подачи хладагента и при развитии ее в глубину форма трещины имеет характерный прогиб, что подтверждается результатами экспериментальных исследований.

Ключевые слова: трещина, лазерное раскалывание, механика разрушения.

Within the limits of the theories of thermoelasticity and linear fracture mechanics finite-element modelling of the laser-induced crack extension in silicate glasses at two-beam laser controllable thermosplitting is executed on the basis of the developed algorithm. It is shown that crack initiation takes place on a surface of material in the zone of a coolant feeding and at its extension in the depth the flaw shape has the characteristic deflection, which is verified by the results of experimental researches.

Keywords: crack, laser splitting, fracture mechanics.

Введение

Одним из наиболее эффективных методов высокоточного разделения хрупких неметаллических материалов является управляемое лазерное термораскалывание (УЛТ), отличительная особенность которого заключается в том, что разделение материала на части заданной формы происходит вследствие образования микротрещины, формируемой в результате поверхностного нагрева материала лазерным излучением и последующего охлаждения зоны нагрева хладагентом. К основным преимуществам управляемого лазерного термораскалывания относятся высокие точность разделения и скорость обработки, безотходность процесса [1], [2]. Ранее в работах [3]–[7] проведено в рамках теории термоупругости моделирование различных видов метода управляемого лазерного термораскалывания хрупких неметаллических материалов. В рамках квазистатической постановки задачи были выполнены расчеты температурных полей и полей упругих напряжений, формируемых в результате реализации различных видов термораскалывания, и определены механизмы формирования и развития разделяющей трещины. Было показано, что в результате воздействия излучения CO₂-лазера с длиной волны 10,6 мкм, энергия которого поглощается в тонком поверхностном слое силикатных стекол, на поверхности

формируется зона значительных по величине сжимающих напряжений, далее в момент воздействия следующего за лазерным пучком хладагента сжимающие напряжения переходят в растягивающие. Иницирование разделяющей трещины происходит в поверхностных слоях материала в зоне растягивающих напряжений, сформированных за счет подачи хладагента. Развитие трещины вглубь материала происходит в зоне растягивающих напряжений, обусловленных взаимным расположением движущегося лазерного пучка и хладагента.

Как было показано в работе [4], дополнительное воздействие YAG-лазера с длиной волны 1,06 мкм, энергия которого поглощается в объеме материала, приводит к увеличению глубины трещины и повышению стабильности ее зарождения.

Такой анализ проводился для однородного материала в рамках теории термоупругости и не учитывал наличие и процесс развития формируемой в процессе обработки микротрещины. Как показано в работе [8], [9], появление микротрещины существенно влияет на распределение полей напряжений в материале и поэтому моделирование процесса инициализации и развития трещины необходимо проводить не только в рамках теории термоупругости, но и линейной механики разрушения. Однако разработанный в

этих публикациях алгоритм моделирования позволяет проводить анализ инициализации и развития трещины только на поверхности материала при фиксированной глубине трещины.

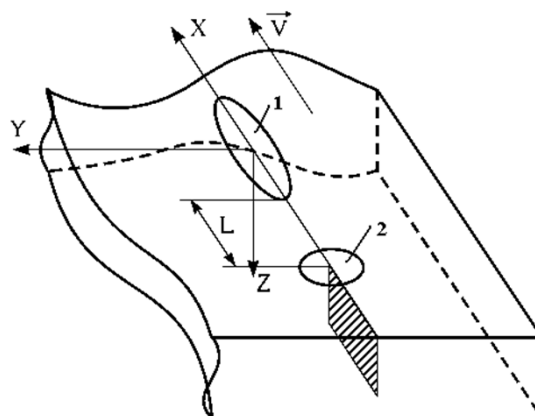
В работе [10] в рамках теорий термоупругости и линейной механики разрушения разработан алгоритм и проведено моделирование инициализации и развития трещины в хрупких неметаллических материалах в объеме образца. Однако в данной работе моделирование выполнено для процесса однолучевого лазерного термораскалывания с использованием в качестве источника излучения CO_2 -лазера. Положительные результаты, полученные при исследовании двулучевых способов разделения хрупких неметаллических материалов в работах [3]–[6], [11], делают актуальной задачу разработки алгоритма и моделирования в рамках теорий термоупругости и линейной механики разрушения процесса двулучевого управляемого лазерного термораскалывания.

1 Алгоритм моделирование процесса управляемого лазерного термораскалывания

Согласно [12] условия разрушения можно представить одним параметром, в качестве которого можно использовать коэффициент интенсивности напряжений K_I . При этом необходимыми условиями роста трещины являются следующие: напряжения в вершине трещины должны быть растягивающими; коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины должен превышать критический коэффициент интенсивности напряжений K_{IC} (для силикатного стекла $K_{IC}=0,5 \text{ МПа м}^{1/2}$). С учетом этих условий было выполнено моделирование процесса управляемого лазерного термораскалывания, при котором выполнялись расчеты коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершинах лазерноиндуцированной трещины для определения динамики ее развития. Расчеты были выполнены с использованием метода конечных элементов.

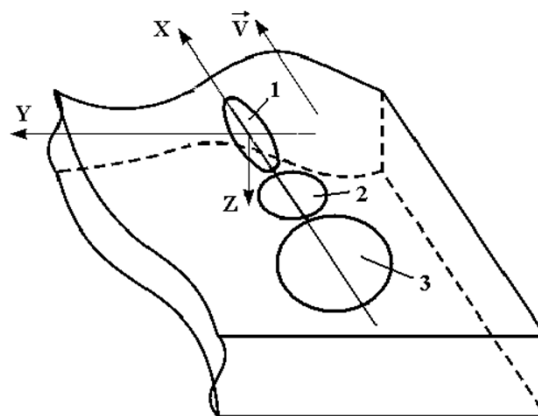
С целью сравнительного анализа моделирование выполнено для схем однолучевого и двулучевого управляемого лазерного термораскалывания, представленных на рисунке 1.1 и рисунке 1.2. В качестве материала образца выбрано силикатное стекло вертикальной вытяжки плотностью $\rho=2740 \text{ кг/м}^3$, модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения полагались соответственно равными $E=73,5 \text{ ГПа}$, $\nu=0,214$, $\alpha_m=90 \cdot 10^{-7} (1/^\circ\text{C})$. Излучение CO_2 -лазера формируется в пучок с поперечным сечением в виде эллипса с размерами большой и малой осей 7 и 2 мм соответственно. При этом пучок ориентируется большой осью вдоль линии обработки материала (вдоль оси X). Хладагент в виде мелкодисперсной воздушно-водяной смеси формируется на поверхности материала в виде круга диаметром 5 мм и подается непосредственно за лазерным пучком. При помощи

измерителя мощности ИМО-2М были выполнены замеры мощности излучения YAG -лазера до попадания на поверхность пластины и после прохождения пластин заданной толщины. Основываясь на том, что поглощение излучения внутри материала происходит по закону Бугера-Ламберта-Бера $I = I_0 \cdot e^{-\alpha z}$, где I_0 – значение интенсивности лазерного излучения до попадания на образец, α – коэффициент экстинкции, z – глубина проникновения излучения, был найден коэффициент экстинкции α , который оказался равным $86,129 \text{ м}^{-1}$.



1 – пучок CO_2 -лазера; 2 – хладагент

Рисунок 1.1 – Схема однолучевого управляемого лазерного термораскалывания



1 – пучок CO_2 -лазера;

2 – пучок YAG -лазера; 3 – хладагент

Рисунок 1.2 – Схема двулучевого управляемого лазерного термораскалывания

Излучение YAG -лазера моделировалось в виде объемного цилиндрического теплового источника (радиус в поперечном сечении 1 мм) с заданной объемной плотностью мощности. Значение объемной плотности мощности рассчитывается для каждого слоя конечных элементов с использованием закона Бугера-Ламберта-Бера и рассчитанного коэффициента экстинкции.

В качестве образца выбрана пластина толщиной 3 мм и геометрическими размерами $20 \times 30 \text{ мм}$.

Поскольку воздействие лазерного пучка осуществляется вдоль оси X посередине образца, то распределение температур и упругих напряжений относительно данной плоскости будет симметрично, поэтому моделирование было выполнено для половины образца. При этом учитывалось, что перемещения узлов, не принадлежащих трещине, в направлении оси Y в плоскости симметрии должны быть ограничены.

При моделировании была выбрана следующая последовательность действий. На первом шаге решения выполняется геометрическое построение поверхности образца размером 20×15 мм, который разбивался на конечные элементы. При этом, как показано на рисунке 1.3, на краю образца вдоль линии инициализации и развития трещины выполняется построение нескольких областей (на рисунке показано четыре области), в центре которых формируются изопараметрические элементы, необходимые для моделирования вершины и фронта трещины. Далее данная поверхность выдавливается вдоль оси Z на величину, равную толщине образца. При этом величину и пропорции разбиения вдоль оси Z можно варьировать. В результате вдоль оси Z формируется последовательность изопараметрических элементов, узлы которых могут быть использованы в дальнейшем как точки фронта развивающейся трещины. Излучение CO_2 -лазера моделируется как поверхностный тепловой источник заданной мощности, а YAG-лазера – как объемный источник. В области подачи хладагента

задается теплоотдача с коэффициентом равным $6800 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$. При этом движение пучков осуществляется дискретно, с постоянным смещением на каждом шаге решения с заданной скоростью. После разбиения образца выполняется расчет температурных полей в образце при воздействии на него лазерного пучка и хладагента, при этом значения температур в каждом узле образца записываются в отдельный файл для использования на следующем шаге решения.

На втором шаге решения заново осуществляется построение модели и считываются значения температур из первого шага решения как начальные условия для второго шага решения. Осуществляется смещение положения лазерных пучков и хладагента вдоль оси X и выполняется расчет температурных полей в образце с записью новых значений температур в отдельный файл для следующего шага решения. Далее решается структурная задача. Выбираем размер начальной трещины на краю образца длиной вдоль оси X равной $0,75$ мм (от правого края образца до вершины первой области изопараметрических элементов) и глубиной вдоль оси Z равной $0,8$ мм. Вследствие симметрии образца ограничиваем перемещения узлов, не принадлежащих трещине, в направлении оси Y в плоскости симметрии $Y=0$. Координаты узлов принадлежащих трещине записываем в отдельный файл для последующих шагов решения. Выполняется расчет полей упругих напряжений в квазистатической постановке.

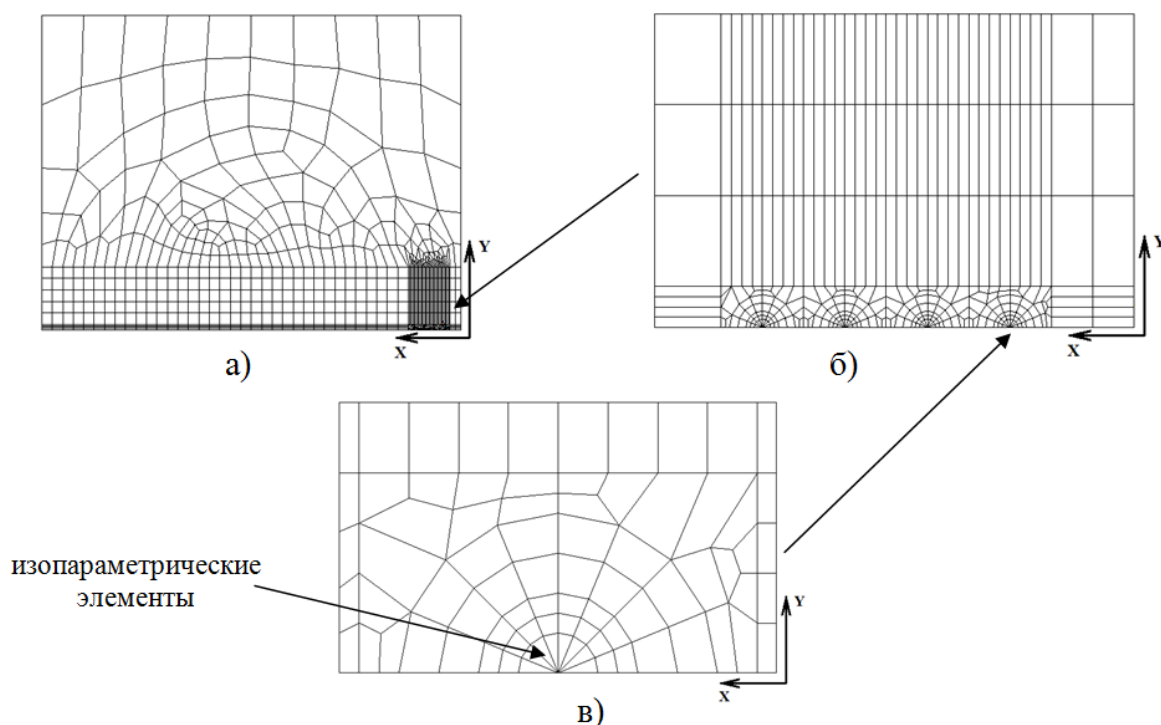


Рисунок 1.3 – Образец с нанесенной конечно-элементной сеткой

а) общий вид модели в плоскости XY , б) и в) увеличенная область с изопараметрическими элементами

По полученным распределениям упругих напряжений в образце, производится пересчет коэффициентов интенсивности напряжений K_I в точках фронта трещины на различных глубинах. Значения коэффициентов интенсивности напряжений, температур и напряжений в вершинах трещины записываем в отдельный файл для последующих шагов решения задачи.

На третьем и дальнейших шагах решения выполняется следующая последовательность действий. Вначале считываем данные о величинах напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в точках фронта трещины из предыдущего шага решения. Далее осуществляем проверку условий выполнения однопараметрического критерия разрушения. Если значение коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины на поверхности превышает критическое значение K_{IC} (для силикатного стекла $K_{IC}=0,5 \text{ МПа м}^{1/2}$) [8] и при этом напряжения в вершине трещины растягивающие, то координату вершины трещины увеличиваем в направлении движения лазерного пучка на величину, равную шагу перемещения, так, чтобы она совпала с вершиной соседней области изопараметрических элементов. В противном случае оставляем координату без изменений. Аналогичные действия выполняем в остальных точках фронта трещины вдоль оси Z . Если координата вдоль оси X вершины трещины на любом слое по глубине образца выходит за границы области изопараметрических элементов (далее чем вершина четвертой от правого края области изопараметрических элементов), то при построении модели смещаем эту область вдоль оси X на величину, равную шагу перемещения. Далее выполняем новую дискретизацию модели и интерполируем распределение температур с предыдущего шага решения на новую конечно-элементную сетку. Моделируем воздействие лазерных пучков и хладагента на поверхность материала. Считываем координаты узлов, принадлежащих трещине из предыдущего шага решения, добавляем новые узлы с учетом выполненной ранее проверки роста трещины на разных глубинах и пересохраняем их для последующих шагов решения. Ограничиваем перемещения узлов, не принадлежащих трещине, в направлении оси Y и осуществляем расчет упругих напряжений в образце и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины, попадающих в область с изопараметрическими элементами на различных глубинах. Значения коэффициентов интенсивности напряжений, температур и напряжений в вершинах трещины записываем в отдельный файл для последующих шагов решения задачи.

Таким образом, по рассчитанным значениям напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины на каждом шаге решения, а также по координатам узлов

можно определить не только глубину развития, но и форму разделяющей трещины.

2 Результаты моделирования

В соответствии с предложенным алгоритмом было выполнено моделирование процесса управляемого лазерного термораскалывания в рамках теорий термоупругости и линейной механики разрушения по схеме, представленной на рисунках 1.1 и 1.2. Скорость обработки выбрана равной 20 мм/с, мощность пучка CO_2 -лазера – 20 Вт, YAG-лазера – 140 Вт. На рисунке 2.1 представлены расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершинах трещины на различных глубинах Z образца от времени t для случая однолучевой обработки. Кривая 1 (сплошная линия) соответствует вершине разделяющей трещины на поверхности образца, кривая 2 (точечная линия) – на глубине $Z=0,08$ мм, кривая 3 (штриховая линия) – на глубине $Z=0,15$ мм.

На рисунках 2.2 и 2.3 представлены расчетные значения упругих напряжений σ_{yy} в вершинах трещины и координат X вершин трещины на тех же глубинах Z образца от времени t .

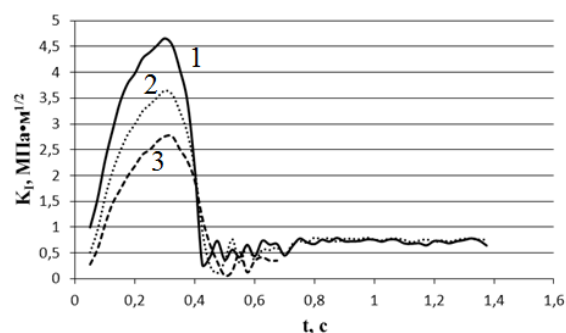


Рисунок 2.1 – Расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершинах трещины

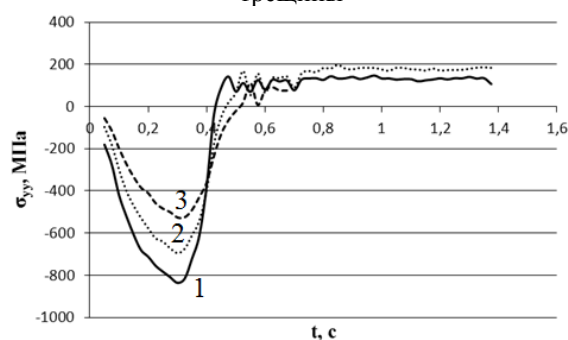


Рисунок 2.2 – Расчетные значения упругих напряжений σ_{yy} в вершинах трещины

В промежуток времени от 0 до 0,425 секунды движения лазерного пучка и хладагента вершина стартовой трещины на поверхности образца подвергается воздействию лазерного излучения и во всех узлах фронта трещины до глубины 0,5 мм формируются значительные по величине сжимающие напряжения. При этом роста трещины

не происходит. Далее вершина трещины попадает в область воздействия хладагента, происходит резкое охлаждение поверхности материала и напряжения становятся растягивающими, и уже в момент времени 0,5 секунды коэффициент интенсивности напряжений в этой вершине достигает критического значения. Трещина на поверхности образца начинает развитие вдоль оси X . В глубинных слоях образца также наблюдается рост по величине растягивающих напряжений и коэффициента интенсивности напряжений в узлах фронта трещины. Однако увеличение данных параметров происходит с задержкой во времени по отношению к поверхностному слою материала вследствие того, что нагрев глубинных слоев происходит за счет передачи тепла от поверхностных слоев материала вглубь материала. Величина коэффициента интенсивности напряжений достигает критического значения K_{IC} позже, нежели в поверхностных слоях материала, что приводит к росту трещины в глубинных слоях материала с отставанием вдоль направления развития трещины (вдоль оси X) по отношению к вершине трещины в поверхностном слое.

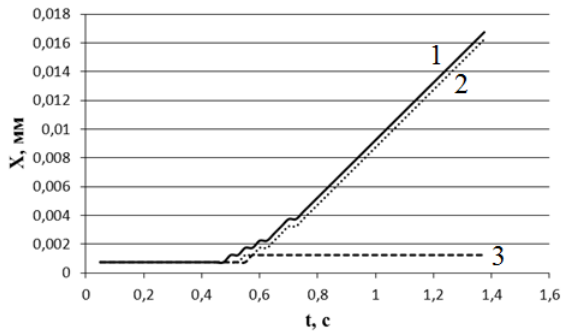


Рисунок 2.3 – Расчетные значения координат X вершин трещины

На рисунке 2.4 представлен расчетный профиль лазерно-индуцированной трещины.

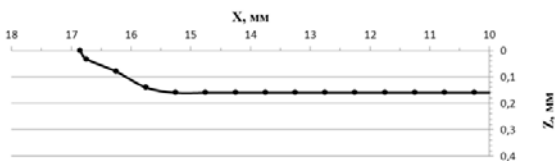


Рисунок 2.4 – Расчетные значения координат X вершин трещины на различных глубинах в образце

Как видно из представленного рисунка, профиль трещины имеет характерный прогиб. Именно такой профиль наблюдается визуально при разделении силикатных стекол методом управляемого лазерного термораскалывания в соответствии со схемой, приведенной на рисунке 1.1, что показывает адекватность разработанного алгоритма моделирования. При этом расчетная глубина трещины 0,15 мм оказывается чуть

меньше, чем экспериментальное значение 0,19 мм. Это обусловлено как погрешностью самого метода конечных элементов, так и плотностью выбранной конечно-элементной сетки.

На рисунке 2.5 представлены расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершинах трещины на различных глубинах Z образца от времени t для случая двулучевой обработки. Кривая 1 (сплошная линия) соответствует вершине разделяющей трещины на поверхности образца, кривая 2 (точечная линия) – на глубине $Z=0,08$ мм, кривая 3 (штриховая линия) – на глубине $Z=0,25$ мм, кривая 4 (штрих-пунктирная линия) – на глубине $Z=0,4$ мм.

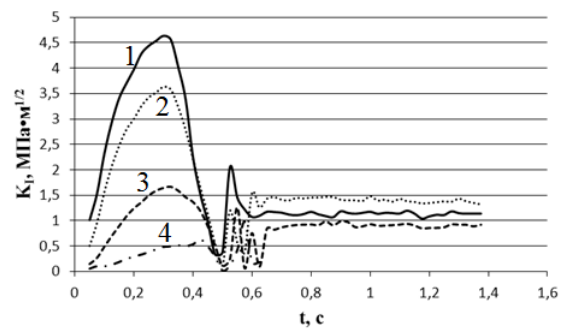


Рисунок 2.5 – Расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершинах трещины

На рисунках 2.6 и 2.7 представлены расчетные значения упругих напряжений σ_{yy} в вершинах трещины и координат X вершин трещины на тех же глубинах Z образца от времени t .

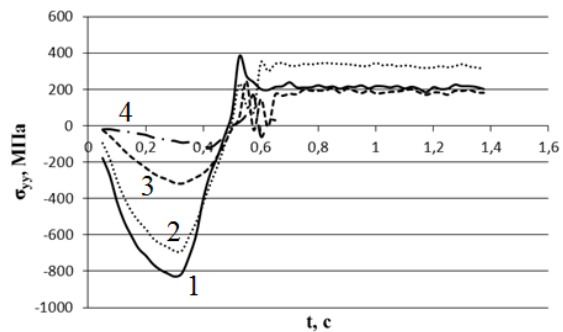


Рисунок 2.6 – Расчетные значения упругих напряжений σ_{yy} в вершинах трещины

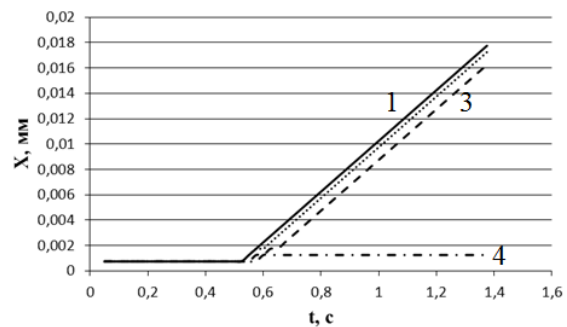


Рисунок 2.7 – Расчетные значения координат X вершин трещины

Как видно из представленных на рисунке расчетных данных, область растягивающих напряжений, формируемых в области воздействия хладагента, вследствие объемного прогрева располагается в более глубоких слоях материала, что приводит к развитию трещины на большую, нежели в случае однолучевой обработки, глубину.

На рисунке 2.8 представлен расчетный профиль разделяющей трещины, образующейся в процессе двухлучевого лазерного термораскалывания.

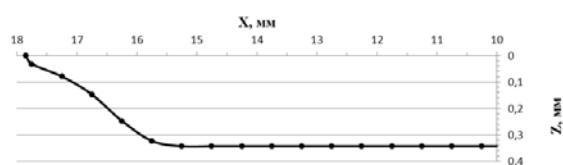


Рисунок 2.8 – Расчетные значения координат X вершин трещины на различных глубинах в образце

Как показывают результаты моделирования, расчетная глубина трещины составляет 0,34 мм, что почти в два раза выше, нежели в случае однолучевой обработки. Двукратное увеличение глубины трещины наблюдается на эксперименте.

Заключение

Таким образом, разработанный алгоритм моделирования позволяет моделировать процесс управляемого лазерного термораскалывания и, варьируя параметры лазерных пучков и хладагента, скорость обработки, геометрические размеры образца и вид конечно-элементной сетки, получать информацию о профиле и глубине возникающей разделяющей трещины для различных методов лазерного термораскалывания. Полученные данные можно использовать для оптимизации технологических режимов разделения хрупких неметаллических материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мачулка, Г.А. Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – М. : Сов. радио, 1979. – 136 с.
2. Кондратенко, В.С. Лазерное управляемое термораскалывание хрупких материалов : курс лекций / В.С. Кондратенко. – М. : МГАПИ, 2004. – 88 с.

3. Лазерный двухлучевой метод обработки высокопрочных керамических материалов / С.В. Шалупаев [и др.] // Ceramics. Polish ceramic bulletin – 2005. – Vol. 89. – P. 44–49.

4. Двухлучевое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов / С.В. Шалупаев [и др.] // Оптический журнал. – 2006. – Т. 73, № 5. – С. 62–66.

5. The analysis of laser thermosplitting of materials by using of special geometry beams / S.V. Shalupaev [et. al.] // Archives of metallurgy and materials. – 2011. – Vol. 56, Issue 4. – P. 1149–1155.

6. Моделирование процесса двухлучевого асимметричного термораскалывания хрупких неметаллических материалов / А.Н. Сердюков [и др.] // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 124–127.

7. Сердюков, А.Н. Особенности управляемого лазерного термораскалывания кристаллического кремния / А.Н. Сердюков, С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк // Кристаллография. – 2010. – Т. 55, № 6. – С. 1180–1184.

8. Shahani, A.R. Simulation of glass cutting with an impinging hot air jet / A.R. Shahani, M. Seyedian // International journal of solids and structures. – 2004. – Vol. 41, № 5–6. – P. 1313–1329.

9. Analysis of laser thermosplitting processes within the framework of the linear fracture mechanics / S.V. Shalupaev [et al.] // Ceramics. Polish Ceramic Bulletin. – 2008. – Vol. 101. – P. 275–284.

10. Шалупаев, С.В. Анализ процесса развития трещины в процессе управляемого лазерного термораскалывания силикатных стекол в рамках линейной механики разрушения / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Серета // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 99–104.

11. Концепция двухлазерного термораскалывания стеклянных элементов для космических аппаратов / В.К. Сысоев [и др.] // Вестник «ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина». – 2011. – № 1. – С. 38–44.

12. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения : пер. с японского / М. Сиратори, Т. Мисе, Х. Мацусита. – М. : Мир, 1986. – 334 с.

Поступила в редакцию 06.04.13.

УДК 512.542

ПЕРМУТИРУЕМЫЕ ПОДГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

А.Ф. Васильев¹, В.А. Васильев¹, Т.И. Васильева²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

PERMUTERAL SUBGROUPS AND THEIR APPLICATIONS IN FINITE GROUPS

A.F.Vasil'ev¹, V.A.Vasil'ev¹, T.I. Vasil'eva²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

Пусть H – подгруппа группы G . Пермутизатором H в G называется подгруппа $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle$. Будем называть H пермутируемой в G , если $P_G(H) = G$; сильно пермутируемой в G , если $P_U(H) = U$ всякий раз, как $H \leq U \leq G$. Изучены свойства конечных групп с заданными системами пермутируемых и сильно пермутируемых подгрупп. Найдены новые критерии w -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп.

Ключевые слова: конечная группа, пермутизатор подгруппы, пермутируемая подгруппа, сверхразрешимая группа, w -сверхразрешимая группа, P -субнормальная подгруппа.

Let H be a subgroup of a group G . The permutizer of H in G is the subgroup $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle$. The subgroup H of a group G is called permuteral in G , if $P_G(H) = G$; strongly permuteral in G , if $P_U(H) = U$ whenever $H \leq U \leq G$. The properties of finite groups with given systems of permuteral and strongly permuteral subgroups are obtained. New criteria of w -supersolubility and supersolubility of groups are received.

Keywords: finite group, permutizer of a subgroup, permuteral subgroup, supersoluble group, w -supersoluble group, P -subnormal subgroup.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие нормализатора подгруппы играет центральную роль при изучении групп. Например, хорошо известно, что группа нильпотентна, если нормализатор любой ее силовой подгруппы совпадает с группой, или группу можно представить в виде произведения ее нильпотентных подгрупп, нормализаторы которых совпадают с группой. Естественным обобщением нормализатора подгруппы является понятие пермутизатора подгруппы, введенное Дескинсом и Венчке в [1, с. 27]. Напомним, пермутизатором подгруппы H в группе G называется подгруппа

$$P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle.$$

В [1] начато исследование влияния свойств пермутизаторов для различных систем подгрупп на строение группы. Группы с пермутизаторным свойством, т. е. группы G , у которых $H < P_G(H)$ для любой собственной подгруппы H из G , изучались в [1, с. 27–29], в работах [2]–[4] и др. Группы с заданными системами подгрупп (максимальных, почти максимальных, свободных от четверной группы Клейна и др.), пермутизаторы которых совпадают с группой, исследовались в [1, с. 27–29], в работах [5]–[6] и др.

Введем следующее

Определение. Подгруппу H группы G будем называть:

- 1) пермутируемой в G , если $P_G(H) = G$;
- 2) сильно пермутируемой в G , если $P_U(H) = U$ для любой подгруппы U из G такой, что $H \leq U \leq G$.

Существуют группы, которые обладают пермутируемыми, но не сильно пермутируемыми подгруппами. Например, легко проверить, что в $G = PSL(2, 7)$ силовая 3-подгруппа Z_3 является пермутируемой в G . Так как $Z_3 \leq U \leq G$, где $U \cong A_4$ – знакопеременная группа степени 4, и $P_U(Z_3) = Z_3$, то Z_3 не сильно пермутируема в G .

В работе исследуются свойства групп с заданными системами пермутируемых и сильно пермутируемых подгрупп. Получены новые критерии w -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп.

1 Предварительные результаты

Обозначения и терминология стандартны, при необходимости см. [7], [8].

Пусть G – группа. Для подгруппы H из G используются обозначения $H \leq G$ и $H < G$, если $H \neq G$. Через $|G|$ обозначается порядок G ; $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп из G для некоторого простого числа p ; $\text{Core}_G(M)$ пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G ; $F(G)$

– подгруппа Фиттинга группы G ; \mathbf{P} – множество всех простых чисел; π – некоторое множество простых чисел; $\pi' = \mathbf{P} \setminus \pi$; Z_p – циклическая группа порядка p ; \mathcal{U} – класс всех сверхразрешимых групп.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, p_i – простое число, называется *дисперсивной по Оре* [7, с. 251], если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Подгруппа Картера – это самонормализуемая нильпотентная подгруппа группы. Группа p -замкнута, если она имеет нормальную силовскую p -подгруппу.

Лемма 1.1 [8, гл. А, теорема 2.7 (ii)]. Если G – разрешимая группа, то $F(G)/\Phi(G) = C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$.

Подгруппа H группы G называется \mathbf{P} -субнормальной в G [9], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Обозначается $H \mathbf{P}\text{-sn } G$.

Лемма 1.2 [10, лемма 3.1]. Пусть H – подгруппа группы G , $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \mathbf{P}\text{-sn } G$, то $(H \cap N) \mathbf{P}\text{-sn } N$ и $HN/N \mathbf{P}\text{-sn } G/N$;
- 2) если $N \leq H$ и $H/N \mathbf{P}\text{-sn } G/N$, то $H \mathbf{P}\text{-sn } G$;
- 3) если $HN_i \mathbf{P}\text{-sn } G$, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2) \mathbf{P}\text{-sn } G$;
- 4) если $H \mathbf{P}\text{-sn } K$ и $K \mathbf{P}\text{-sn } G$, то $H \mathbf{P}\text{-sn } G$;
- 5) если $H \mathbf{P}\text{-sn } G$, то $H^x \mathbf{P}\text{-sn } G$ для любого $x \in G$.

Лемма 1.3 [10, лемма 3.4]. Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \mathbf{P}\text{-sn } G$, K – подгруппа из G , то $(H \cap K) \mathbf{P}\text{-sn } K$;
- 2) если $H_i \mathbf{P}\text{-sn } G$, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2) \mathbf{P}\text{-sn } G$.

Группа G называется w -сверхразрешимой [9], если любая силовская подгруппа группы G является \mathbf{P} -субнормальной в G . Через $w\mathcal{U}$ обозначается класс всех w -сверхразрешимых групп. Заметим, что $\mathcal{U} \subseteq w\mathcal{U}$. Пример 1 [9] показывает, что $\mathcal{U} \neq w\mathcal{U}$.

Лемма 1.4 [9, предложение 2.8]. Любая w -сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной* в G , если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$;

Лемма 1.5 [7, лемма 17.5]. Пусть H – подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H пронормальна в G и $H \leq U \leq G$, то H пронормальна в U ;
- 2) если $N \trianglelefteq G$ и $N \trianglelefteq H$, то H пронормальна в G тогда и только тогда, когда H/N пронормальна в G/N ;

3) если $N \trianglelefteq G$ и H пронормальна в G , то HN/N пронормальна в G/N ;

4) если H пронормальна и субнормальна в G , то $H \trianglelefteq G$.

2 Свойства пермутируемых подгрупп

Лемма 2.1. Пусть H – подгруппа группы G . Тогда

- 1) $P_U(H) \leq P_G(H)$ для любой подгруппы U группы G такой, что $H \leq U$;
- 2) если $P_G(H) = R$, то $P_R(H) = R$;
- 3) $P_G(H)^g = P_G(H^g)$ для любого элемента $g \in G$;
- 4) $N_G(H) \leq P_G(H)$;
- 5) если $N \trianglelefteq G$, то $P_G(H)N/N \leq P_{G/N}(HN/N)$;
- 6) если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$, то $P_{G/N}(H/N) = P_G(H)/N$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из определения $P_G(H)$.

Утверждение 3). Пусть $g \in G$. Допустим, что $P_G(H) = \langle L \rangle$, где $L = \{x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle\}$, и $P_G(H^g) = \langle K \rangle$, где $K = \{y \in G \mid \langle y \rangle H^g = H^g \langle y \rangle\}$. Ясно, что $P_G(H)^g = \langle L^g \rangle$.

Возьмем любой $z \in L^g$. Тогда $z = x^g$ для некоторого $x \in L$. Из $\langle x \rangle H^g = \langle x \rangle^g H^g = (\langle x \rangle H)^g = (H \langle x \rangle)^g = H^g \langle x^g \rangle$ получаем, что $L^g \subseteq K$.

Рассмотрим любой $y \in K$. Из $y^{g^{-1}} \in K^{g^{-1}}$ получаем, что

$$\begin{aligned} \langle y^{g^{-1}} \rangle H &= \langle y \rangle^{g^{-1}} (H^g)^{g^{-1}} = \\ &= (\langle y \rangle H^g)^{g^{-1}} = (H^g \langle y \rangle)^{g^{-1}} = H \langle y^{g^{-1}} \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда $K \subseteq L^g$. Значит, $P_G(H)^g = \langle L^g \rangle = \langle K \rangle = P_G(H^g)$.

Утверждения 4)–6) – это лемма 2.4 из [6]. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть H – подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда

- 1) если H пермутируема в G , то HN/N пермутируема в G/N ;
- 2) если H пермутируема в G , то HN пермутируема в G ;
- 3) если $N \leq H$, то H пермутируема в G тогда и только тогда, когда H/N пермутируема в G/N ;
- 4) если H сильно пермутируема в G , то HN/N сильно пермутируема в G/N .

Доказательство. 1) следует из 5) леммы 2.1.

Утверждение 2). Если $P_G(H) = G$, то из 6) леммы 2.1 получаем, что $P_G(HN) = G$. Это означает пермутируемость HN в G .

3) следует из 1) леммы и 6) леммы 2.1.

4) следует из 1). Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть группа $G = HQ$, где $H \in \text{Syl}_p(G)$, p – наибольший простой делитель $|G|$, Q – циклическая подгруппа из G . Тогда G p -замкнута.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна.

Так как G – произведение нильпотентных подгрупп, по теореме Кегеля-Виландта [11], [12] G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда G/N p -замкнута. Так как класс всех p -замкнутых групп является насыщенной формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $M \cap N = 1$, $\text{Core}_G(M) = 1$ и $N = C_G(N)$. Из выбора G следует, что N – q -группа, $q \neq p$. Ввиду теоремы Силова $H^g \subseteq M$ для некоторого $g \in G$ и $N \subseteq Q$. Тогда $|N| = q$. Отсюда $M \cong G/C_G(N)$ изоморфно вкладывается в Z_{q-1} . Это противоречит тому, что $p > q$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть G группа, $H \in \text{Syl}_p(G)$, p – наибольший простой делитель $|G|$. Если H пермутируема в G , то G p -замкнута.

Доказательство. Пусть x – любой элемент группы G такой, что $\langle x \rangle H = H \langle x \rangle$. По лемме 2.3 H нормальна в $\langle x \rangle H$. Поэтому $\langle x \rangle \subseteq N_G(H)$ и $G = P_G(H) \subseteq N_G(H)$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Если любая силовская подгруппа группы G пермутируема в G , то G дисперсивна по Оре.

Доказательство. Проведем индукцией по $|G|$. Пусть $|G| = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $p_1 > \dots > p_k$, p_i – простое число, $i = 1, \dots, k$. Для $P_1 \in \text{Syl}_{p_1}(G)$ по лемме 2.4 $P_1 \trianglelefteq G$. Любая силовская p_i -подгруппа из G/P_1 имеет вид $P_i P_1 / P_1$, где $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 2, \dots, k$. Ввиду 1) леммы 2.2 $P_i P_1 / P_1$ пермутируема в G/P_1 . По индукции G/P_1 дисперсивна по Оре. Отсюда G дисперсивна по Оре. Лемма доказана.

Лемма 2.6. Если G – сверхразрешимая группа, то любая пронормальная подгруппа из G сильно пермутируема в G .

Доказательство. Ввиду наследственности \mathbb{U} и 1) леммы 1.5 достаточно доказать, что любая пронормальная подгруппа группы $G \in \mathbb{U}$ пермутируема в G .

Пусть G – сверхразрешимая группа наименьшего порядка такая, что $P_G(H) \neq G$ для некоторой пронормальной подгруппы H из G .

Допустим, что $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi \in \mathbb{U}$, по 3) леммы 1.5 $H\Phi/\Phi$ пронормальна в G/Φ . Ввиду выбора G и 4) леммы 1.5 $H\Phi/\Phi \neq 1$. Из $P_{G/\Phi}(H\Phi/\Phi) = G/\Phi$ ввиду 6) леммы 2.1 заключаем, что $P_G(H\Phi) = G$. Так как $P_G(H) \neq G$, найдется $x \in G$ такой, что $x \notin P_G(H)$ и $\langle x \rangle H\Phi = H\Phi \langle x \rangle$. Тогда $R = \langle x \rangle H\Phi$ – подгруппа группы G . Если $R \neq G$, то из выбора G следует, что $P_R(H) = R$. Поэтому $x \in R \leq P_G(H)$, что противоречит $x \notin P_G(H)$. Значит, $R = \langle x \rangle H\Phi = G = \langle x \rangle H$. Поэтому $x \in P_G(H)$. Получили противоречие с выбором x .

Значит, $\Phi(G) = 1$. Группа $G \in \mathbb{U}$, поэтому коммутант G' нильпотентен. Из $N_G(H) \neq G$ и абнормальности $N_G(H)$ в G получаем, что

$$G = G'N_G(H) = F(G)N_G(H).$$

По лемме 1.1 $F(G) = N_1 \dots N_k$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G для $i = 1, \dots, k$. Из $G \in \mathbb{U}$ следует, что N_i – циклическая подгруппа. Из $N_i H = H N_i$ получаем, что $N_i \leq P_G(H)$ для $i = 1, \dots, k$. Поэтому $G = F(G)N_G(H) \subseteq P_G(H)$. Получили противоречие с $P_G(H) \neq G$. Лемма доказана.

Следствие 2.6.1. Если G – сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G .

Следствие 2.6.2. Если G – сверхразрешимая группа, то любая подгруппа Картера из G сильно пермутируема в G .

Следствие 2.6.3. Если G – сверхразрешимая группа, то любая холлова подгруппа из G сильно пермутируема в G .

Сверхразрешимая группа может обладать не пермутируемыми в ней подгруппами.

Пример 2.7. Пусть $G = \langle a^4 = b^4 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = 1 \rangle$ – группа порядка 16. Тогда подгруппа $H = \langle ab \rangle$ не пермутируема в G , так как $\langle a \rangle H \neq H \langle a \rangle$ и $\langle b \rangle H \neq H \langle b \rangle$, причем $P_G(H)$ есть элементарная абелева 2-группа порядка 8.

Пример показывает также, что пересечение пермутируемых подгрупп в группе не всегда является пермутируемой подгруппой группы. Заметим, что подгруппы $H_1 = \langle a^2 \rangle \times \langle ab \rangle$ и $H_2 = \langle ab^{-1} \rangle \times \langle ab \rangle$ пермутируемы в G . Очевидно, что $H = \langle ab \rangle = H_1 \cap H_2$.

Лемма 2.8. Пусть G – разрешимая группа. Если H – \mathbf{P} -субнормальная холлова подгруппа из G , то H сильно пермутируема в G .

Доказательство. Ввиду наследственности формации всех разрешимых групп и 1) леммы 1.3 достаточно доказать, что любая \mathbf{P} -субнормальная холлова подгруппа разрешимой группы G пермутируема в G .

Пусть G – разрешимая группа наименьшего порядка такая, что $P_G(H) \neq G$ для некоторой \mathbf{P} -субнормальной холловой π -подгруппы H из G . Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда HN/N – холлова π -подгруппа из G/N . По 1) леммы 1.2 HN/N \mathbf{P} - sn G/N . По выбору G холлова π -подгруппа HN/N пермутируема в G/N . По 3) леммы 2.2 HN пермутируема в G . Поэтому N – q -группа для простого числа $q \notin \pi$.

Из H \mathbf{P} - sn G следует, что в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $H \leq M$ и $|G : M|$ – простое число. По 1) леммы 1.3 H \mathbf{P} - sn M . Из выбора G следует, что $M = P_M(H) \leq P_G(H) \neq G$. Поэтому $M = P_G(H)$. Так как $G = P_G(HN)$, в G найдется x такой, что $x \notin M$ и $\langle x \rangle HN = HN \langle x \rangle$. Отсюда и из $P_G(H) = M$ следует, что $G = \langle x \rangle HN$. Если $N \leq \Phi(G)$, то $G = \langle x \rangle H$. Значит, $x \in P_G(H) = M$, что противоречит $x \notin M$. Итак, $N \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа W такая, что $N \not\subseteq W$ и $G = NW$. Отсюда $|G : W|$ – q -число и $H \leq W^q$ для

некоторого $g \in G$. Тогда $W^g = P_{W^g}(H) \leq P_G(H) = M$ и $G = NM$. Допустим, что $NH \neq G$. Тогда из выбора G заключаем, что $NH = P_{NH}(H) \leq P_G(H) = M$. Получили противоречие $G = NM \leq M \neq G$.

Значит, $NH = G$. Из $N \cap M = 1$ следует, что $H = M$. Тогда $|N| = q$. Ввиду $NH = HN$ получаем, что $N \leq P_G(H) = M$. Откуда $G \leq M \neq G$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Следствие 2.8.1. Если G – w -сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G .

3 Критерии w -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп

Теорема 3.1. Группа w -сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа группы сильно пермутируема в группе.

Предложение 2.5 [9] показывает, что нильпотентную длину w -сверхразрешимой группы нельзя ограничить фиксированным натуральным числом. Так как у сверхразрешимой группы коммутант нильпотентен, то нильпотентная длина сверхразрешимой группы не превосходит 2, т. е. сверхразрешимая группа метанильпотентна.

Теорема 3.2 Пусть G – метанильпотентная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G сверхразрешима;
- 2) любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G ;
- 3) любая силовская подгруппа из G пермутируема в G .

Теорема 3.3. Пусть G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G сверхразрешима;
- 2) любая пронормальная подгруппа из G сильно пермутируема в G ;
- 3) любая пронормальная подгруппа из G пермутируема в G ;
- 4) любая холлова подгруппа из G сильно пермутируема в G ;
- 5) любая холлова подгруппа из G пермутируема в G .

Теорема 3.4. Пусть G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G сверхразрешима;
- 2) $G = AB$ – произведение сильно пермутируемых нильпотентных подгрупп A и B из G ;
- 3) $G = AB$ – произведение пермутируемых нильпотентных подгрупп A и B из G .

Заключение

Из теорем раздела 3 вытекают как известные, так и новые результаты. Например,

Следствие 1 [15]. Если любая холлова подгруппа группы G \mathbf{P} -субнормальна в G , то G сверхразрешима.

Доказательство. Так как любая силовская подгруппа группы G \mathbf{P} -субнормальна в G , G разрешима ввиду леммы 1.4. Из леммы 2.8 и теоремы 3.3 заключаем, что G сверхразрешима.

Следствие 2. Пусть $G = AB$ – произведение своих силовских подгрупп A и B . Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда A и B пермутируемы в G .

Следствие 3. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G = F(G)H$, где H – пермутируемая подгруппа Картера из G .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.
2. Zhang, J. A note on finite groups satisfying the permutizer condition / J. Zhang // Sci. Bull. – 1986. – Vol. 31. – P. 363–365.
3. Beidleman, J.C. On finite groups satisfying the permutizer condition / J.C. Beidleman, D.J.S. Robinson // J. Algebra. – 1997. – Vol. 191, № 2. – P. 686–703.
4. Ballester-Bolinches, A. On a question of Beidleman and Robinson / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero // Comm. Algebra. 2002. – Vol. 30, № 12. – P. 5757–5770.
5. Liu, X. Implications of permutizers of some subgroups in finite groups / X. Liu, Ya. Wang // Comm. Algebra. – 2005. – Vol. 33. – P. 559–565.
6. Qiao, Sh. Influence of permutizers of subgroups on the structure of finite groups / Sh. Qiao, G. Qian, Ya. Wang // J. Pure and Applied Algebra. – 2008. – Vol. 212, № 10. – P. 2307–2313.
7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
9. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
10. Васильев, А.Ф. О произведениях \mathbf{P} -субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.
11. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12, № 2. – P. 90–93.
12. Wielandt, H. Über Produkte von nilpotenten Gruppen. III / H. Wielandt // J. Math. – 1958. – Bd. 2, № 4B. – S. 611–618.
13. Kniahina, V. On supersolvability of finite groups with \mathbf{P} -subnormal subgroups / V. Kniahina, V. Monakhov // International J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

Поступила в редакцию 25.04.13.

УДК 512.544

О НОРМАЛЬНЫХ ПОДКЛАССАХ КЛАССА ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.Н. Воробьев

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

ON NORMAL SUBCLASSES OF FISCHER CLASS OF FINITE GROUPS

S.N. Vorob'ev

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

Пусть \mathfrak{X} – π -разрешимый класс Фишера. В работе изучаются π -насыщенные классы Фиттинга, нормальные в \mathfrak{X} . Доказано, что пересечение любого множества таких классов является π -насыщенным классом Фиттинга, нормальным в \mathfrak{X} .

Ключевые слова: класс Фиттинга, \mathfrak{F} -инъектор, класс Фишера, полулокальный класс Фиттинга.

Let \mathfrak{X} be a π -solvable Fischer class. In the paper we studied π -saturated Fitting classes, which are normal in \mathfrak{X} . It is proved, that intersection of any set of such classes is a π -saturated Fitting class, which is normal in \mathfrak{X} .

Keywords: Fitting class, \mathfrak{F} -injector, Fischer class, semilocal Fitting class.

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Классы Фиттинга, как объекты дуальных формаций групп, были впервые определены в работах Фишера [1] и Гашюца, Фишера, Хартли [2]. Напомним, что классом Фиттинга называют такой класс групп \mathfrak{F} , который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Основопологающим результатом для становления и развития теории классов Фиттинга является теорема Гашюца-Фишера-Хартли [2] (см. также [3], теорема VIII.2.13) о том, что для любого разрешимого класса Фиттинга \mathfrak{F} в каждой разрешимой группе G существует единственный класс сопряженных \mathfrak{F} -инъекторов G . При этом подгруппу V группы G называют \mathfrak{F} -инъектором G , если $V \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G . Заметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ классу всех разрешимых π -групп (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ классу всех p -групп), то \mathfrak{F} -инъектор G – это холлова π -подгруппа G (в частности, силовская p -подгруппа G), и поэтому следствиями указанной выше теоремы являются фундаментальная теорема Холла (теорема Силова в разрешимом случае) соответственно.

Существенное различие между теориями классов Фиттинга и формаций было установлено Блессенолем и Гашюцом в работе [4], где определены разрешимые нормальные классы Фиттинга и построена серия нетривиальных нормальных классов Фиттинга, которые не являются формациями. Кроме того, в [4] было доказано, что пересечение любого множества неединичных разрешимых нормальных классов Фиттинга снова является неединичным разрешимым нормальным

классом Фиттинга. Напомним, что класс Фиттинга \mathfrak{F} называется нормальным в классе \mathfrak{S} всех разрешимых групп или просто нормальным, если в любой группе $G \in \mathfrak{S}$ ее \mathfrak{F} -инъектор – нормальная подгруппа G .

Ориентиром для изучения нормальных классов Фиттинга и поиска аналогов теоремы Блессеноля-Гашюца для таких классов в неразрешимом случае служит теорема Л.А. Шеметкова [5] о том, что для любого класса Фиттинга \mathfrak{F} в π -разрешимой группе (π – множество всех простых делителей всех групп из \mathfrak{F}) существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены. В этом направлении исследований естественно расширить и само понятие нормальности классов Фиттинга следующим образом. Пусть класс \mathfrak{F} – Фиттинга, инъективный в классе групп \mathfrak{X} , т. е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ имеет \mathfrak{F} -инъекторы. Тогда \mathfrak{F} назовем нормальным в \mathfrak{X} или \mathfrak{X} -нормальным (см. также [6]), если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее \mathfrak{F} -инъекторы являются нормальными подгруппами G .

Основное содержание настоящей работы состоит из двух взаимосвязанных частей. В первой из них (теорема 3.3) найдены новые классы сопряженных \mathfrak{F} -инъекторов в любой π -разрешимой группе для классов Фиттинга, определяемых полулокально функциями Хартли с носителем π , т. е. π -насыщенных классов Фиттинга. (Класс Фиттинга \mathfrak{F} называется π -насыщенным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$).

Вторая часть работы содержит ее основной результат – теорему 4.7 о том, что пересечение любого множества π -насыщенных классов Фиттинга, нормальных в π -разрешимом классе

Фишера \mathfrak{X} , является π -насыщенным классом Фиттинга, нормальным в \mathfrak{X} .

Заметим, что если $\pi=P$ множеству всех простых чисел, то следствием теоремы 3.3 является теорема Гашюца-Фишера-Хартли [2], а в случае $\pi=P$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$ следствием теоремы 4.7 – теорема Блессеноля-Гашюца [5].

Определения и обозначения, которые мы не приводим, в случае необходимости можно найти в монографиях [3], [7].

1 Предварительные сведения

Напомним, что классом групп называется такое множество групп, которое наряду с каждой группой содержит ей изоморфную.

Класс групп \mathfrak{F} называется:

1) *классом Фиттинга*, если выполняются следующие условия: (i) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует, что $N \in \mathfrak{F}$, и (ii) если $G=MN$, $N \triangleleft G$, $M \triangleleft G$, $N \in \mathfrak{F}$ и $M \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$;

2) *формацией*, в случае выполнимости условий: (j) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$, и (jj) если $N \triangleleft G$, $M \triangleleft G$, $G/M \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G/M \cap N \in \mathfrak{F}$.

Заметим, из условия (ii) следует, что для каждого непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} в любой группе G существует наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -радикал G , а из условия (jj) вытекает, что для любой непустой формации \mathfrak{F} в каждой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корядикал группы G такая, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Символами \mathfrak{S} и \mathfrak{S}^{π} будем обозначать класс всех разрешимых групп и класс всех π -разрешимых групп. Если класс $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}^{\pi}$), то \mathfrak{F} будем называть разрешимым (π -разрешимым) классом.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга. Тогда их *произведение* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – класс групп $(G:G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Мы будем использовать следующее свойство произведений разрешимых нормальных классов Фиттинга.

Лемма 1.1 [8]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – разрешимые классы Фиттинга. Если класс \mathfrak{F} или \mathfrak{H} нормален, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – нормальный класс Фиттинга.

Для характеристики нормальных классов Фиттинга используют также операторы Локетта [9], которые обозначают «*» и «*»». Напомним, что оператор «*» сопоставляет каждому классу Фиттинга \mathfrak{F} наименьший из классов Фиттинга \mathfrak{F}^* , содержащий \mathfrak{F} , такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H , а оператор «*» сопоставляет \mathfrak{F} класс Фиттинга $\mathfrak{F}^* = \bigcap \{ \mathfrak{X} : \mathfrak{X} \text{ – класс Фиттинга и } \mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^* \}$.

Лемма 1.2 [9]. Разрешимый класс Фиттинга \mathfrak{F} нормален тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$.

Класс Фиттинга \mathfrak{F} называют классом Локетта, если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Лемма 1.3 [10]. Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Тогда *холловой π -подгруппой группы G* называют такую подгруппу H из G , что $|H|$ является π -числом, а ее индекс $|G:H|$ – π' -числом. В теории групп известна следующая теорема:

Теорема 1.4 (С.А. Чунихин [11]). Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) в G существуют холловы π -подгруппы;
- 2) любые две холловы π -подгруппы G сопряжены;
- 3) каждая π -подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π -подгруппе G .

Приведем также простейшие свойства \mathfrak{F} -инъектора группы, которые вытекают непосредственно из его определения.

Лемма 1.5. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и V является \mathfrak{F} -инъектором группы G . Тогда:

- 1) подгруппа $V \cap K$ является \mathfrak{F} -инъектором K для любой субнормальной подгруппы K группы G ;
- 2) $V \supseteq G_{\mathfrak{F}}$;
- 3) если V – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G и $V \cap M$ – \mathfrak{F} -инъектор M для каждой максимальной нормальной подгруппы M группы G , то V – \mathfrak{F} -инъектор группы G ;
- 4) V является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G .

Лемма 1.6 [5], [12]. Для любого класса Фиттинга \mathfrak{F} и любой группы $G \in \{ \mathfrak{F}\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{\pi} \}$, где $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$, в G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Напомним, что если G – группа, то символом $\sigma(G)$ будем обозначать множество всех простых делителей $|G|$. Тогда $\sigma(\mathfrak{X}) = \bigcup \{ \sigma(G) : G \in \mathfrak{X} \}$, т. е. множество всех простых делителей всех групп из класса \mathfrak{X} .

Теорема 1.7 (Фейта-Томпсона [13]). Каждая группа нечетного порядка разрешима.

Лемма 1.8 [3]. Если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G и ее субнормальной подгруппы K справедливо равенство $K_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap K$.

2 Классы Фиттинга, определяемые локально

Напомним, что всякое отображение f множества P всех простых чисел во множество (возможно, пустое) классов Фиттинга называют *функцией Хартли*, или *H -функцией* [14]. Если f – некоторая H -функция, то множество $\text{Supp}(f) = \{ p \in P : f(p) \neq \emptyset \}$ – носитель H -функции f . Пусть класс Фиттинга $\text{SLR}(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \mathfrak{S}_p$, где $\pi = \text{Supp}(f)$. Если $\pi = \emptyset$, то положим $\text{SLR}(f) = \emptyset$. Класс Фиттинга назовем

полулокальным, если $\mathfrak{F} = \text{SLR}(f)$ для некоторой H -функции f . В этом случае мы будем также говорить, что \mathfrak{F} определяется полулокально H -функцией f с носителем π .

Для характеристики классов Фиттинга, определяемых полулокально, предварительно установим некоторые простейшие свойства произведений классов Фиттинга, которые представляет

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $\{\mathfrak{X}_i; i \in I\}$ – некоторое множество классов Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}\mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)$;
- 2) если класс \mathfrak{F} является формацией, то $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}\mathfrak{X}_i = (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$.

Доказательство. Заметим, что если $\mathfrak{F} = \emptyset$ или $\mathfrak{X}_i = \emptyset$ для некоторого $i \in I$, то лемма очевидна. Предположим, что классы Фиттинга \mathfrak{F} и \mathfrak{X}_i для каждого $i \in I$ являются непустыми. Если группа $G \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}\mathfrak{X}_i$, это равносильно тому, что $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)$ и утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть G – группа из класса $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}\mathfrak{X}_i$. Тогда $G/G_{\mathfrak{X}_i} \in \mathfrak{F}$ для каждого $i \in I$. Но класс \mathfrak{F} – формация, и поэтому $G/\bigcap_{i \in I} G_{\mathfrak{X}_i} \in \mathfrak{F}$. Нетрудно заметить, что $\bigcap_{i \in I} G_{\mathfrak{X}_i} = G_{(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)}$. Следовательно, $G \in (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$ и справедливо включение $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}\mathfrak{X}_i \subseteq (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение. Пусть группа $G \in (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)} \in \mathfrak{F}$. Очевидно, $G_{(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)} \triangleleft G_{\mathfrak{X}_i}$ для всех $i \in I$. Так как \mathfrak{F} – формация и справедлив изоморфизм

$$G/G_{(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)} / G_{\mathfrak{X}_i} / G_{(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)} \cong G/G_{\mathfrak{X}_i},$$

то $G/G_{\mathfrak{X}_i}$ является \mathfrak{F} -группой. Отсюда следует, что $G \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}\mathfrak{X}_i$ и верно включение

$$(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i)\mathfrak{F} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}\mathfrak{X}_i.$$

Лемма доказана.

Обширность семейства полулокальных классов Фиттинга показывает

Лемма 2.2. Класс \mathfrak{F} определяется полулокально H -функцией f с носителем π тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \text{SLR}(f)$ для некоторой H -функции f с носителем π . Если $\pi = \emptyset$ или $\pi = P$, то лемма очевидна. Предположим, что $\emptyset \subset \pi \subset P$. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = (\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{C}_\pi)\mathfrak{C}_\pi$. Ввиду ассоциативности умножения классов Фиттинга и утверждения 2 леммы 2.1 получаем, что

$$\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{C}_\pi.$$

Следовательно, $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$.

Обратно, если $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{C}_\pi)$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 2.1 $\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi$ и $\mathfrak{F} = \text{SLR}(f)$ для H -функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi$. Лемма доказана.

Следствие 2.3. Класс $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{C}_\pi$ всех π -специальных групп и класс $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{C}_\pi$ всех π -замкнутых групп является полулокальными.

Пример 2.4. Пусть π – носитель H -функции f и класс Фиттинга $\text{LR}(f) = \mathfrak{C}_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{C}_p)$. Напомним, что класс Фиттинга \mathfrak{F} называют локальным [14], если $\mathfrak{F} = \text{LR}(f)$ для некоторой H -функции f . Покажем, что в общем случае полулокальный класс Фиттинга не является локальным. Пусть \mathfrak{H} – нетривиальный нормальный класс Фиттинга и $\emptyset \subset \pi \subset P$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{C}_\pi \neq \mathfrak{C}$. По лемме 2.2 класс \mathfrak{F} полулокален. Кроме того, по лемме 1.1 \mathfrak{F} – нормальный класс Фиттинга. Следовательно, по лемме 1.2 $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{C}$. Если предположить, что класс \mathfrak{F} локален, то по лемме 1.3 класс \mathfrak{F} является классом Локетта, т. е. $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$. Но тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}$, что противоречит тому, что \mathfrak{F} нетривиален. Следовательно, класс Фиттинга \mathfrak{F} не является локальным.

3 Инъекторы для полулокальных классов

Каждый класс Фиттинга \mathfrak{F} можно определить полулокально H -функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для всех $p \in P$. Ввиду теоремы 7.1.3 [15] найдется такая группа G , в которой не существует \mathfrak{F} -инъекторов, т. е. $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) = \emptyset$. Настоящий раздел работы посвящен нахождению тех условий, при которых \mathfrak{F} -инъекторы для полулокальных классов Фиттинга существуют и сопряжены в любой частично разрешимой (в частности, π -разрешимой) группе. Предварительно докажем лемму, которая для разрешимых групп была доказана Хартли (см. [3], лемма VIII.2.8).

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \text{SLR}(f)$ для некоторой H -функции f с носителем π . Пусть G – π -разрешимая группа и ее нормальная подгруппа K таковы, что G/K является либо нильпотентной π -группой, либо π' -группой. Тогда если F \mathfrak{F} -максимальная подгруппа K , а F_1 и F_2 – \mathfrak{F} -максимальные подгруппы G , содержащие F , то подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в G .

Доказательство. Вначале заметим, что если $\pi = P$, то G – разрешимая группа и по лемме VIII.2.8 [3] лемма верна. Предположим $\emptyset \subset \pi \subset P$. Для доказательства будем использовать индукцию по порядку группы G . Если $|G| = 1$, то лемма очевидна. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Так как $F_i \cap K \triangleleft F_i$ и $F_i \in \mathfrak{F}$, то $F_i \cap K$ – \mathfrak{F} -подгруппа K для $i \in \{1, 2\}$. По условию $F \leq F_i \cap K$ и F является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K . Следовательно, $F = F_i \cap K$. Теперь из $F_i \cap K \triangleleft F_i$ следует $N_{F_i}(F_i \cap K) = N_{F_i}(F) = F_i$. Значит, $F_i \leq N_G(F)$.

Предположим, что $N_G(F) < G$. В этом случае $|N_G(F)| < |G|$ и по индукции лемма верна для группы $N_G(F)$. Это означает, что подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в $N_G(F)$ и, очевидно, в группе G .

Получили противоречие. Следовательно, $N_G(F)=G$, т. е. F – нормальная подгруппа G . Значит, F является нормальной подгруппой в F_i для $i \in \{1,2\}$ и справедливо следующее изоморфное вложение групп F_i/F в группу G/K :

$$F_i/F = F_i/F_i \cap K \cong F_i K/K \leq G/K. \quad (3.1)$$

Рассмотрим теперь два возможных случая.

Случай 1. G/K – нильпотентная π -группа.

Так как по лемме 2.2 $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$ и F является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой группы K , то K/F является π -группой. Кроме того, в данном случае G/K нильпотентная π -группа. Итак, $K/F \in \mathfrak{C}_\pi \subseteq \mathfrak{S}$ и $G/K \in \mathfrak{S}$. Следовательно, ввиду изоморфизма $G/K \cong (G/F)/(K/F)$, группа $(G/F)/(K/F)$ – разрешима, и поэтому G/F является разрешимой группой. Теперь, следуя доказательству леммы VIII.2.8 из [2], получаем, что подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в G . Полученное противоречие доказывает лемму в случае 1.

Случай 2. Группа G/K является π' -группой.

В данном случае, учитывая (3.1), получаем, что группа F_i/F изоморфно вложена в некоторую π' -группу группы G/K для $i \in \{1,2\}$. Следовательно, F_i/F является π' -подгруппой группы G/F . Но по утверждению 3 теоремы 1.4 F_i/F содержится в некоторой холловой π' -подгруппе H_i/F группы G/F . Так как F нормальна в G и $F \leq F_i \leq H_i$, то F – нормальная подгруппа H_i . Следовательно, из $F \in \mathfrak{F}$ следует $F \leq (H_i)_\mathfrak{F}$. Тогда, ввиду изоморфизма

$$(H_i/F)/((H_i)_\mathfrak{F}/F) \cong H_i/(H_i)_\mathfrak{F},$$

заключаем, что $H_i/(H_i)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{C}_\pi$. Теперь, учитывая лемму 2.2, получаем, что $H_i \in \mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$. Так как $F_i \leq H_i$ и по условию F_i является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой группы G , то $F_i = H_i$ для $i \in \{1,2\}$. Отсюда по теореме 1.4 вытекает сопряженность холловых π' -подгрупп F_1/F и F_2/F группы G/F . Следовательно, подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в G . Полученное противоречие завершает доказательство леммы в случае 2. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{F} = \text{SLR}(f)$ для H -функции f с носителем π , группа $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$ и V – \mathfrak{F} -инъектор G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если K – нормальная подгруппа G , то $G = K \cdot N_G(V \cap K)$;

2) индекс $|G:V|$ является π -числом.

Доказательство. Докажем утверждение 1).

Если V – \mathfrak{F} -инъектор G , то по лемме 1.5 подгруппа $V \cap K$ является \mathfrak{F} -инъектором группы K . Так как K нормальна в G , то $K \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$ и по лемме 1.6 любые два \mathfrak{F} -инъектора K сопряжены в K . Следовательно, для любого элемента $x \in G$ подгруппы $V \cap K$ и $(V \cap K)^x$ сопряжены в K , т. е. существует такой элемент $k \in K$, что $xk \in N_G(V \cap K)$. Отсюда получаем, что $x \in K \cdot N_G(V \cap K)$. Итак,

$$G \leq K \cdot N_G(V \cap K) \leq G$$

и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) докажем индукцией по порядку группы G . Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, определяемый полулокально H -функцией f и $\pi = \text{Supp}(f)$. Тогда по лемме 2.2 $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой утверждение 2) неверно, и M – максимальная нормальная подгруппа G , содержащая $G_\mathfrak{F}$. Заметим, что такая подгруппа всегда существует, так как в случае $G \in \mathfrak{F}$ утверждение 2) тривиально. Если V – \mathfrak{F} -инъектор G , то по утверждению 1) леммы 1.5 $V \cap M$ – \mathfrak{F} -инъектор группы M и по индукции индекс $|M:V| = |M \cap (V \cap M)|$ является π -числом. Следовательно, если $G = VM$, то индекс $|G:V|$ – π -число и утверждение 2) верно. Предположим, что $VM < G$. Тогда для индексов выполняется неравенство:

$$|G:VM| < |G:M|. \quad (3.2)$$

Так как $M \supseteq G_\mathfrak{F}$ и $G/G_\mathfrak{F}$ – разрешимая группа, то, ввиду изоморфизма $(G/G_\mathfrak{F})/(M/G_\mathfrak{F}) \cong G/M$, порядок главного фактора G/M – простое число. Значит, неравенство (3.2) верно в случае, когда $V \leq M$. Но тогда по утверждению 1) $G = M \cdot N_G(V)$. Следовательно, $|G:N_G(V)| = |M:N_M(V)|$. Так как индекс $|M:V|$ – π -число и $V \leq N_M(V)$, то индекс $|G:N_G(V)|$ также является π -числом. Следовательно, существует такая холлова π' -подгруппа G_π группы G , что $G_\pi \leq N_G(V)$. Но тогда по лемме 2.2 $V G_\pi \in \mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$. Значит, ввиду \mathfrak{F} -максимальности V в G , имеем, что $V G_\pi = V$. Отсюда вытекает, что индекс $|G:V|$ является π -числом. Утверждение 2) доказано. Лемма доказана.

Основной результат данного раздела представляет следующая

Теорема 3.3. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, определяемый полулокально H -функцией f с носителем π , и G – некоторая группа. Тогда в G существует единственный класс сопряженных \mathfrak{F} -инъекторов и каждый из \mathfrak{F} -инъекторов G имеет в G π -индекс в любом из следующих случаев:

1) $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi$ для $\sigma(G_\mathfrak{F}) \subseteq \pi$;

2) G – π -разрешима;

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi$ и $\sigma(G_\mathfrak{F}) \subseteq \pi$.

Если G – единичная группа, то теорема очевидна. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. $2 \notin \pi$.

В этом случае $2 \notin \pi'$, и поэтому все факторы главного ряда π -разрешимой группы $G/G_\mathfrak{F}$ являются, ввиду π -разрешимости группы $G/G_\mathfrak{F}$ и теоремы Фейта-Томпсона, разрешимыми группами. Следовательно, G – $\mathfrak{F}\mathfrak{S}$ -группа и по лемме 1.6 в G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены. Заметим также, что по лемме 3.2 каждый \mathfrak{F} -инъектор G имеет в G индекс, который является π -числом. Получили противоречие. Остаётся принять.

Случай 2. $2 \notin \pi$.

В данном случае из $\sigma(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi$ следует, что $G_{\mathfrak{F}}$ является π -группой. Следовательно, применяя теорему Фейта-Томпсона, заключаем, что подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ разрешима, и поэтому группа G π -разрешима.

Итак, для доказательства теоремы достаточно установить существование и сопряженность \mathfrak{F} -инъекторов в группе G в случае, когда G – π -разрешимая группа. Для доказательства существования \mathfrak{F} -инъекторов рассмотрим две следующие логически возможных ситуации.

2.1) *Группа G не является π' -группой.*

Вначале заметим, что из условия $G \notin \mathfrak{C}_{\pi}$ следует, что \mathfrak{C}_{π} -корадикал группы G – неединичная группа. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа группы G . Так как $|M| < |G|$ и по лемме 1.8 $\sigma(M_{\mathfrak{F}}) = \sigma(M \cap G_{\mathfrak{F}}) \subseteq \sigma(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi$, то по индукции в группе M существует \mathfrak{F} -инъектор F . В дальнейшем доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

2.1.1) *Покажем, что существует такая \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G , содержащая F , что ее индекс в G является π -числом.*

Если F – \mathfrak{F} -инъектор M , то $F \leq X$, где X – некоторая \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G . Тогда $F \leq X \cap M$. Так как $X \cap M \triangleleft X$, то $X \cap M \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что F – \mathfrak{F} -инъектор M , по утверждению 4 леммы 1.5, F является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в M . Следовательно, $F = X \cap M$. Теперь, применяя индукцию для группы M , заключаем, что индекс $|M:F| = |M:(X \cap M)|$ является π -числом. Так как группа G является π -разрешимой, то ее главный фактор G/M является либо элементарной абелевой p -группой для некоторого простого $p \in \pi$, либо π' -группой.

Предположим, что G/M – p -группа, где $p \in \pi$. Тогда индекс $|G:M|$ является π -числом. Покажем, что в этом случае индекс $|G:F|$ также π -число. По теореме Лагранжа индекс $|G:F| = |M:F| \cdot |G:M|$. Так как по индукции индекс $|M:F|$ – π -число и по условию индекс $|G:M|$ также является π -числом, то индекс $|G:F|$ – π -число. Далее из $F \leq X$ следует, что индекс $|G:X|$ является π -числом и утверждение 2.1.1) в данном случае верно.

Предположим теперь, что главный фактор G/M является π' -группой. Заметим, что по индукции в группе M существует \mathfrak{F} -инъектор $F = X \cap M$ и любые два \mathfrak{F} -инъектора M сопряжены в M . Ввиду утверждения 1) леммы 1.5 подгруппы $X \cap M$ и $(X \cap M)^x$ являются \mathfrak{F} -инъекторами в группе M для произвольного элемента $x \in G$. Следовательно, существует такой элемент $m \in M$, что $X \cap M = ((X \cap M)^x)^m$. Это означает, что $xm \in N_G(X \cap M)$. Но тогда $x \in M \cdot N_G(X \cap M)$, и поэтому $G \leq M \cdot N_G(X \cap M)$. Следовательно, справедливо равенство:

$$G = M \cdot N_G(X \cap M). \quad (3.3)$$

Так как по индукции индекс $|M:(N_G(X \cap M))|$ является π -числом и $M \cap X \leq M \cap N_G(X \cap M)$, то индекс $|M:(M \cap N_G(X \cap M))|$ – π -число. Теперь, учитывая равенство (3.3), получаем

$$G = \frac{|M| \cdot |N_G(X \cap M)|}{|M \cap N_G(X \cap M)|}.$$

Следовательно, индекс

$$|G:N_G(X \cap M)| = |M:(M \cap N_G(X \cap M))|.$$

Значит, индекс $|G:N_G(X \cap M)|$ – π -число. Отсюда, ввиду π -разрешимости группы, вытекает существование холловой π' -подгруппы $G_{\pi'}$ группы G такой, что $G_{\pi'} \leq N_G(X \cap M)$. Теперь мы можем построить подгруппу $X_1 = G_{\pi'}(X \cap M)$. Заметим, что индекс $|G:X_1|$ является π -числом и $F \leq X_1$. Остается показать, что подгруппа X_1 \mathfrak{F} -максимальна в группе G . Для этого вначале выясним, что X_1 является \mathfrak{F} -подгруппой G . Покажем вначале, что F – нормальная подгруппа X_1 . Пусть y – произвольный элемент X_1 . Тогда $y = mn$, где $m \in G_{\pi'}$ и $n \in F$. Так как $G_{\pi'} \leq N_G(F)$, то $y^{-1}Fy = n^{-1}m^{-1}Fmn = F$ и $F \triangleleft X_1$. Так как $F \in \mathfrak{F}$, то $F \leq (X_1)_{\mathfrak{F}}$. Кроме того, $X_1 = G_{\pi'}F$, и поэтому $|X_1:F| = |G_{\pi'}:G_{\pi'} \cap F|$. Следовательно, $X_1/F \in \mathfrak{C}_{\pi'}$. Отсюда, ввиду изоморфизма $X_1/(X_1)_{\mathfrak{F}} \cong (X_1/F)/((X_1)_{\mathfrak{F}}/F)$, следует, что $X/(X_1)_{\mathfrak{F}}$ является π' -группой. Значит, $X_1 \in \mathfrak{F}\mathfrak{C}_{\pi'}$ и по лемме 2.2 X_1 является \mathfrak{F} -группой. Докажем теперь, что X_1 является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой группы G . Пусть L – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G , содержащая X_1 . Так как главный фактор G/M является π' -группой, то $G = G_{\pi'}M$. Следовательно, $L = L \cap G_{\pi'}M = L \cap (X \cap M)G_{\pi'}M = L \cap X_1M$. Применяя тождество Дедекинда, получаем $L = X_1(L \cap M)$. Но по лемме 1.5 подгруппа $X \cap M$ является \mathfrak{F} -инъектором группы M , и поэтому $X \cap M$ \mathfrak{F} -максимальна в M . Теперь из $L \in \mathfrak{F}$ и нормальности подгруппы $L \cap M$ в L вытекает по лемме 1.5, что $L \cap M$ – \mathfrak{F} -подгруппа M , содержащая $X \cap M$. Отсюда, ввиду \mathfrak{F} -максимальности $X \cap M$ в M , получаем равенство $X \cap M = L \cap M$. Значит,

$$L = X_1(L \cap M) = X_1(X \cap M) = X_1$$

и подгруппа X_1 \mathfrak{F} -максимальна в G . Итак, X_1 – в данном случае искомая \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G и утверждение 2.1.2) доказано.

Так как, ввиду предположения 2.1), группа G не является π' -группой, то ее \mathfrak{C}_{π} -корадикал $G^{\mathfrak{C}_{\pi}} \neq 1$. Следовательно, либо $G^{\mathfrak{C}_{\pi}} < G$, либо $G^{\mathfrak{C}_{\pi}} = G$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

2.1.2) $G^{\mathfrak{C}_{\pi}} < G$.

В этом случае существует такая максимальная нормальная подгруппа M_1 , что выполняется $G^{\mathfrak{C}_{\pi}} < M_1$. Следовательно, главный фактор $G/M_1 \cong G/G^{\mathfrak{C}_{\pi}}/M_1/G^{\mathfrak{C}_{\pi}}$ является π' -группой. Так как $M_1 \in \mathfrak{F}\mathfrak{C}_{\pi}$ для $\pi \supseteq \sigma((M_1)_{\mathfrak{F}})$, то по индукции в M_1

существует \mathfrak{F} -инъектор V_1 . Тогда, учитывая 2.1.2), заключаем, что существует такая \mathfrak{F} -максимальная подгруппа F_1 группы G , содержащая V_1 , индекс которой в G является π -числом. Для доказательства существования \mathfrak{F} -инъекторов в группе G , ввиду утверждения 3 леммы 1.5, достаточно выяснить, что $F_1 \cap R$ является \mathfrak{F} -инъектором в R для любой максимальной нормальной подгруппы R группы G . Так как $R \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi$ для $\pi \supseteq \sigma(R_\mathfrak{F})$, то по индукции в R существует \mathfrak{F} -инъектор V_2 . Пусть F_2 – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G такая, что $V_2 \leq F_2$. Заметим, что по индукции, в группах M_1 и $M_1 \cap R$ существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены. По утверждению 1 леммы 1.5 подгруппа $L_1 = V_1 \cap (M_1 \cap R)$ является \mathfrak{F} -инъектором в группе $M_1 \cap R$ и, следовательно, \mathfrak{F} -максимальна в $M_1 \cap R$. Так как $V_1 \cap (M_1 \cap R) \leq F_1 \cap (M_1 \cap R)$ и $F_1 \cap (M_1 \cap R)$ является \mathfrak{F} -подгруппой, то справедливо равенство

$$L_1 = F_1 \cap (M_1 \cap R) = V_1 \cap R. \quad (3.4)$$

Аналогично, заключаем, что

$$L_2 = V_2 \cap (M_1 \cap R) = F_2 \cap (M_1 \cap R) = V_2 \cap R.$$

Так как по индукции подгруппы L_1 и L_2 сопряжены в $M_1 \cap R$, то без ограничения общности, можно положить, что справедливо равенство $V_1 \cap R = V_2 \cap R$.

Ввиду π -разрешимости группы G , главный фактор G/R является либо элементарной абелевой p -группой для некоторого $p \in \pi$, либо π' -группой. Предположим, что G/R – p -группа. Так как G/M_1 – π' -группа, то $G = G_\pi M_1$ для некоторой холловой π' -подгруппы группы G . Кроме того, индекс $|G:F_1|$ является π -числом. Следовательно, $G_\pi^x \leq F$ для некоторого $x \in G$. Отсюда следует $G = G_\pi^x M_1 \leq F_1 M_1 \leq G$, и поэтому $G = F_1 M_1$. Кроме того, ввиду максимальной нормальных подгрупп M_1 и R , имеем, что $G = M_1 R$. Итак, $G = F_1 M_1 = M_1 R$, и поэтому, ввиду изоморфизмов $M_1 R / R \cong M_1 / M_1 \cap R$ и $R M_1 / M_1 \cong R / R \cap M_1$, подгруппы $M_1 / M_1 \cap R$ и $R / R \cap M_1$ являются π -группой и π' -группой соответственно. Покажем, что индекс $|R:(F_1 \cap R)|$ является π -числом. Действительно, по лемме А.1.5 [3] имеем равенство:

$$|R F_1 : F_1| = |R : (F_1 \cap R)|.$$

Согласно выбору подгруппы F_1 , индекс $|G:F_1|$ – π -число, и поэтому $|R:(F_1 \cap R)|$ является π -делителем $|G:F_1|$. Теперь из того, что $R/R \cap M_1$ – π' -группа, следует равенство $R = R_\pi (R_1 \cap M_1)$ для некоторой холловой π' -подгруппы R_π группы R . Так как индекс $|R:(F_1 \cap R)|$ является π -числом, то $R_\pi \leq F_1 \cap R$, и поэтому справедливо равенство

$$R = (M_1 \cap R)(F_1 \cap R).$$

Докажем, что подгруппа $F_1 \cap R$ является \mathfrak{F} -инъектором группы R . Вначале выясним \mathfrak{F} -максимальность подгруппы $F_1 \cap R$ в R . Пусть \bar{F} является

такой \mathfrak{F} -подгруппой группы G , что выполняется $F_1 \cap R \leq \bar{F} \leq R$. Тогда

$$\bar{F} = \bar{F} \cap R = \bar{F} \cap (M_1 \cap R)(F_1 \cap R). \quad (3.5)$$

Так как подгруппа $F_1 \cap (M_1 \cap R)$ является \mathfrak{F} -инъектором группы $M_1 \cap R$, то

$$F_1 \cap (M_1 \cap R) = \bar{F} \cap (M_1 \cap R).$$

Теперь, используя тождество Дедекинда, получаем, что выполняется равенство

$$\bar{F} = (M_1 \cap R \cap \bar{F}) \cdot (F_1 \cap R) = (M_1 \cap R \cap F_1) (F_1 \cap R) = F_1 \cap R.$$

Следовательно, $F_1 \cap R$ – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы R . Так как подгруппа V_2 является \mathfrak{F} -инъектором R , то по утверждению 4 леммы 1.5 подгруппа V_2 также \mathfrak{F} -максимальна в R . Кроме того, подгруппа $F_1 \cap (M_1 \cap R)$ является \mathfrak{F} -инъектором группы $R \cap M_1$, ввиду равенства (3.4), и поэтому \mathfrak{F} -максимальна в $R \cap M_1$. Теперь, учитывая (3.5), получаем, что $F_1 \cap (R \cap M_1) \leq (F_1 \cap R) \cap V_2$. Следовательно, по лемме 3.1 подгруппы V_2 и $F_1 \cap R$ сопряжены в R , и поэтому $F_1 \cap R$ является \mathfrak{F} -инъектором в R для любой максимальной нормальной подгруппы R группы G . По утверждению 3 леммы 1.5 это означает, что подгруппа F_1 – \mathfrak{F} -инъектор группы G и существование \mathfrak{F} -инъекторов для случая, когда G/R является π -группой, доказано.

Предположим, что G/R – π' -группа. Так как G/M_1 – π' -группа, то группа $G/R \cap M_1$ также является π' -группой. Ввиду равенств (3.4) и (3.5), подгруппа $F_1 \cap (R \cap M_1) \leq F_1 \cap V_2$ и $F_1 \cap (R \cap M_1)$, как \mathfrak{F} -инъектор группы $R \cap M_1$, является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в $R \cap M_1$. Тогда по лемме 3.1 получаем, что подгруппы F_1 и V_2 сопряжены в G . Так как по индукции все \mathfrak{F} -инъекторы R сопряжены в R , то $F_1 \cap R = V_2^x \cap R$ является \mathfrak{F} -инъектором в R для любой максимальной нормальной подгруппы R группы G . Отсюда по утверждению 3 леммы 1.5 подгруппа F_1 является \mathfrak{F} -инъектором G и теорема существования \mathfrak{F} -инъекторов в случае 2.1.2) доказана. Рассмотрим случай

$$2.1.3) \quad G^{\mathfrak{E}^*} = G.$$

Предположим, что в группе G существует такая максимальная подгруппа K , что G/K является π' -группой. Тогда $G^{\mathfrak{E}^*} = G \leq K$, что невозможно. Итак, для любой максимальной нормальной подгруппы K главный фактор G/K является нильпотентной π -группой. Пусть K_1 – некоторая максимальная нормальная подгруппа G . Тогда по индукции в K_1 существует \mathfrak{F} -инъектор E_1 . Пусть \bar{E}_1 – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G , содержащая E_1 . Тогда, ввиду утверждения 3 леммы 1.5, подгруппа \bar{E}_1 будет \mathfrak{F} -инъектором G , если $\bar{E}_1 \cap K_2$ – \mathfrak{F} -инъектор K_2 для любой максимальной нормальной подгруппы K_2 группы G . Так как K_2 – π -разрешимая группа, то по индукции в K_2 существует \mathfrak{F} -инъектор E_2 . Пусть \bar{E}_2 – \mathfrak{F} -максимальная

подгруппа G такая, что $E_2 \leq \bar{E}_2$. Заметим, что по утверждению 1 леммы 1.5 подгруппы $E_1 \cap (K_1 \cap K_2)$ и $E_2 \cap (K_1 \cap K_2)$ являются \mathfrak{F} -инъекторами группы $K_1 \cap K_2$. Следовательно, по индукции они сопряжены в $K_1 \cap K_2$, и поэтому можно считать, что $E_1 \cap (K_1 \cap K_2) = E_2 \cap (K_1 \cap K_2) = E$. Итак, $E \leq \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$. Кроме того, так как класс всех нильпотентных π -групп – формация, то группа $G/K_1 \cap K_2$ – нильпотентная π -группа. Следовательно, по лемме 3.1 подгруппы \bar{E}_1 и \bar{E}_2 сопряжены в G , т. е. $\bar{E}_1^x = \bar{E}_2$ для некоторого $x \in G$. Так как E_2 – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в K_2 , то

$$\bar{E}_1 \cap K_2 = \bar{E}_1^x \cap K_2 = \bar{E}_2 \cap K_2 = E_2.$$

Это доказывает существование \mathfrak{F} -инъекторов в группе G в случае 2.1.3) и завершает доказательство теоремы существования в случае 2.1.

2.2) Группа G является π' -группой.

Так как класс \mathfrak{F} – полулокален, то в этом случае по лемме 2.2 группа $G \in \mathfrak{C}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{F}$ и теорема очевидна.

Для завершения доказательства теоремы установим сопряженность \mathfrak{F} -инъекторов группы G . Пусть I_1 и I_2 – \mathfrak{F} -инъекторы группы G и \bar{M} – максимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда ввиду того, что G – π -разрешимая группа, G/\bar{M} является либо нильпотентной π -группой, либо π' -группой.

Так как по утверждению 1 леммы 1.5 подгруппы $I_1 \cap \bar{M}$ и $I_2 \cap \bar{M}$ являются \mathfrak{F} -инъекторами \bar{M} , то по индукции $(I_1 \cap \bar{M})^x = I_2 \cap \bar{M} = I$. Кроме того, подгруппы I_1^x и I_2 – \mathfrak{F} -максимальные в G такие, что $I \leq I_1^x \cap I_2$. Следовательно, по лемме 3.1 подгруппы I_1^x и I_2 сопряжены в G и являются \mathfrak{F} -инъекторами G . Теорема в случае, когда $G \in \mathfrak{F} \mathfrak{C}_\pi$ и $\pi(G/\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, доказана.

Справедливость теоремы для π -разрешимой группы G уже установлена в случае 1). Теорема доказана.

Напомним, что группу G называют π -замкнутой, если она имеет нормальную холлову π -подгруппу, и G называют π -специальной, если G имеет нормальную нильпотентную холлову π -подгруппу. Так как, ввиду следствия 2.3, классы всех π -замкнутых и π -специальных групп являются полулокальными, то теорема 3.3 позволяет выделить два новых класса сопряженных инъекторов в любой π -разрешимой группе.

Следствие 3.4. *Каждая π -разрешимая группа имеет π -замкнутые инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Следствие 3.5. *Каждая π -разрешимая группа имеет π -специальные инъекторы и любые два из них сопряжены.*

В случае $\pi = P$ из утверждения 1 теоремы вытекает

Следствие 3.6 [12]. *Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и G – такая группа, что $G/G_\mathfrak{F}$ – разрешимая группа. Тогда в G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Если $\pi = P$, то из утверждения 2 теоремы 3.3 следует известная в теории классов теорема Гашиоца-Фишера-Хартли [2], которую приведем как

Следствие 3.7. *Для любого разрешимого класса Фиттинга \mathfrak{F} в любой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных \mathfrak{F} -инъекторов.*

Заметим, что теорема 3.3, в частности, является в точности дуальной теореме Брюстера [16] в теории формаций о том, что в любой π -разрешимой группе для π -насыщенной локальной формации \mathfrak{F} существуют \mathfrak{F} -проекторы и любые два из них сопряжены. Однако в отличие от теоремы в теории формаций, в теории классов Фиттинга в теореме 3.2 мы не требуем локальности классов Фиттинга.

4 Нормальные подклассы в классе Фишера

Пусть \mathfrak{X} – класс групп. Напомним, что класс Фиттинга \mathfrak{F} называют нормальным в \mathfrak{X} , или \mathfrak{X} -нормальным [6], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее \mathfrak{F} -радикал является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G . Заметим, что если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, то \mathfrak{S} -нормальный класс Фиттинга \mathfrak{F} называют нормальным. Основная цель настоящего раздела – нахождение тех условий, при которых для класса Фишера \mathfrak{X} пересечение любого множества \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга является снова \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга. Тот факт, что класс Фиттинга \mathfrak{F} нормален в \mathfrak{X} , будем обозначать как $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{X}$.

Пример 4.1. (а) Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \mathfrak{N}_\pi$, где $\pi \subseteq P$. Ввиду следствия 3.6, из $\mathfrak{F} \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{S}$ следует, что каждая группа из класса \mathfrak{X} имеет \mathfrak{F} -инъектор и любые два из них сопряжены. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и V – \mathfrak{F} -инъектор группы G . Тогда фактор-группа $G/G_\mathfrak{F}$ нильпотентна, и поэтому ее подгруппа $V/G_\mathfrak{F}$ субнормальна в $G/G_\mathfrak{F}$. Следовательно, V – субнормальная подгруппа в G и, значит, $V \subseteq G_\mathfrak{F}$. Итак, ввиду утверждения 2 леммы 1.5, $V = G_\mathfrak{F}$ и $G_\mathfrak{F}$ – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа для всех групп $G \in \mathfrak{X}$. Это означает, что $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{X}$.

(б) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{C}_\pi$. Тогда по теореме 1.4 любая группа из \mathfrak{X} обладает \mathfrak{S}_π -инъектором, т. е. холловой π -подгруппой и любые две ее холловы π -подгруппы сопряжены. Тогда если $G \in \mathfrak{X}$ и G_π – холлова π -подгруппа G , то $G/O_\pi(G) \in \mathfrak{C}_\pi$ и $G_\pi = O_\pi(G)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{X}$.

Для доказательства основного результата раздела мы будем использовать некоторые простейшие свойства полулокальных классов Фиттинга, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 4.2. Пересечение любого множества классов Фиттинга, определяемых полулокально H -функцией с носителем π , является полулокальным классом Фиттинга, определяемым H -функцией с носителем π .

Доказательство. Пусть для $i \in I$
 $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{F}_i: \mathfrak{F}_i = \text{SLR}(f_i), \text{Supp}(f_i) = \pi\}$ и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$.

Обозначим через f такую H -функцию, что $f(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p)$ для каждого $p \in \pi$. Докажем, $\mathfrak{F} = \text{SLR}(f)$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{F} \subseteq \bigcap_{p \in \pi} \left(\bigcap_{i \in I} f_i(p) \right) \mathfrak{C}_{p'} = \text{SLR}(f).$$

Пусть теперь группа $G \in \text{SLR}(f)$. Тогда $G/G_{\bigcap_{i \in I} f_i(p)} \in \mathfrak{C}_{p'}$ для каждого $p \in \pi$.

Так как $G_{\bigcap_{i \in I} f_i(p)} = \bigcap_{i \in I} G_{f_i(p)} \subseteq G_{f_i(p)}$, то, ввиду изоморфизма

$$G/G_{f(p)} / G_{f_i(p)} / G_{f(p)} \cong G/G_{f_i(p)},$$

группа $G \in \text{SLR}(f_i) = \mathfrak{F}_i$ для каждого $i \in I$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$ и справедливо включение $\text{SLR}(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Следствие 4.3. Пусть $\{\mathfrak{F}_i: i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, определяемых полулокально H -функциями с носителем π и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Тогда $\mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\pi} = \mathfrak{F}$.

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 4.2 с учетом леммы 2.2.

Лемма 4.4. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, определяемый полулокально H -функцией f с носителем π , и G – π -разрешимая группа, V – \mathfrak{F} -инъектор G . Тогда если K такая нормальная подгруппа G , что $G/K \in \mathfrak{C}_{\pi}$, то $G = VR$.

Доказательство. Так как группа G является π -разрешимой и G/R – π' -группа, то $G = G_{\pi}R$ для некоторой холловой π' -подгруппы G_{π} группы G . Теперь по утверждению 2 теоремы 3.4 индекс $|G:V|$ является π -числом, и поэтому $V \supseteq G_{\pi}$. Следовательно, $VR \supseteq G_{\pi}R = G$ и $G = VR$. Лемма доказана.

Далее мы представим короткое альтернативное доказательство результата работы [12] (см. также теорему 2.5.3 [17]) о существовании и сопряженности \mathfrak{F} -инъекторов в частично разрешимых группах для любого класса Фиттинга \mathfrak{F} .

Лемма 4.5. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда любая группа G такая, что $G/G_{\mathfrak{F}}$ – π -разрешимая группа, имеет \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Доказательство. Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда очевидно, все π' -факторы группы $G/G_{\mathfrak{F}}$ имеют нечетный порядок и по теореме Фейта-Томпсона являются разрешимыми группами. Следовательно, группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ разрешима и по лемме 1.6 в G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Предположим теперь, что множество π состоит из нечетных чисел. В этом случае, ввиду $\sigma(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi$ по теореме Фейта-Томпсона, заключаем, что $G_{\mathfrak{F}}$ – разрешимая группа. Следовательно, группа G – π -разрешимая группа и по лемме 1.6 в G существует единственный класс сопряженных \mathfrak{F} -инъекторов. Лемма доказана.

Лемма 4.6. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, G – группа с \mathfrak{F} -инъектором V и $V \leq A \leq G$. Тогда V является \mathfrak{F} -инъектором A в каждом из следующих случаев:

(1) $\mathfrak{F} = \text{SLR}(f)$, $\pi = \text{Supp}(f)$ и G π -разрешимая группа;

(2) $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\pi}$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай (1), когда класс Фиттинга \mathfrak{F} определяется полулокально H -функцией с носителем π . В этом случае по утверждению 2 теоремы 3.3 в группе G существует \mathfrak{F} -инъектор V . В дальнейшем доказательство разобьем на несколько шагов.

(а) Если K такая нормальная подгруппа группы G , что G/K является либо π' -группой, либо нильпотентной π -группой, и F – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G , содержащая \mathfrak{F} -инъектор V_1 группы K , то F является \mathfrak{F} -инъектором группы G .

Так как V – \mathfrak{F} -инъектор G , то по утверждению 3 леммы 1.5 подгруппа $V \cap K$ является \mathfrak{F} -инъектором группы K . Следовательно,

$$V_1 = F \cap K = V \cap K.$$

Итак, $V_1 \leq F \cap V$ и подгруппы F и V являются \mathfrak{F} -максимальными в G . Значит, по лемме 3.1 подгруппы F и V сопряжены в G , и поэтому подгруппа F – \mathfrak{F} -инъектор G .

(б) Если $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_t = G$ – нормальный ряд группы G , в котором каждый фактор G_i/G_{i-1} является либо нильпотентной π -группой, либо π' -группой, то \mathfrak{F} -максимальная подгруппа W группы G является \mathfrak{F} -инъектором G в точности тогда, когда $W \cap G_i$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G для всех $i \in \{0, \dots, t\}$.

По условию группа G π -разрешима и указанный нормальный ряд существует. Если W – \mathfrak{F} -инъектор G , то подгруппа $W \cap G_i$ является \mathfrak{F} -максимальной в G_i по определению \mathfrak{F} -инъектора группы G . Обратное утверждение докажем индукцией по длине ряда t . Если $t = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $t \geq 1$. Тогда по индукции подгруппа $W \cap G_{t-1}$ является \mathfrak{F} -инъектором группы G_{t-1} . Без ограничения общности мы можем считать, что фактор G_i/G_{i-1} является либо нильпотентной π -группой, либо π' -группой. Теперь, применяя утверждение (а), мы заключаем, что подгруппа W является \mathfrak{F} -инъектором группы G .

(в) *Заключительный шаг.*

Пусть $\{G_i\}$ – нормальный ряд группы G из (б). Положим, $A_i = A \cap G_i$ для всех $i \in \{0, \dots, t\}$. Тогда получаем нормальный ряд $1 = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft \dots \triangleleft A_t = A$

группы A . Так как $A_i/A_{i+1} \cong (A \cap G_{i+1})G_i/G_i$, то каждый фактор A_i/A_{i+1} является либо нильпотентной π -группой, либо π' -группой. Кроме того, так как V является \mathfrak{F} -инъектором G , то по утверждению 4 леммы 1.5 следует, что $V \cap A_i = V \cap A \cap G_i = V \cap G_i$ и подгруппа $V \cap A_i$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в A_i для каждого $i \in \{0, \dots, t\}$. Следовательно, ввиду (б), подгруппа V – \mathfrak{F} -инъектор группы A и лемма в случае (1) доказана.

Доказательство леммы в случае (2) вытекает непосредственно из теоремы 2.5.11 [16]. Лемма доказана.

Напомним, что класс Фиттинга \mathfrak{X} называют классом Фишера [17], если из $G \in \mathfrak{X}$, $K \triangleleft G$, $K \leq H \leq G$ и H/K – p -группа, следует $H \in \mathfrak{X}$.

Используя теорему 3.3 и лемму 4.5, докажем основной результат работы, который представляет

Теорема 4.7. Пусть \mathfrak{X} – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i; i \in I\}$ – множество классов Фиттинга нормальных в \mathfrak{X} и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если для любого $i \in I$ класс Фиттинга \mathfrak{F}_i определяется полулокально H -функцией f_i с носителем π и каждая группа из \mathfrak{X} является π -разрешимой, то класс Фиттинга \mathfrak{F} нормален в \mathfrak{X} ;

2) если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ такова, что $G/G_{\mathfrak{F}}$ – $\sigma(\mathfrak{F})$ -разрешимая группа, то \mathfrak{F} – нормальный подкласс Фиттинга в \mathfrak{X} .

Доказательство. 1) Докажем утверждение теоремы индукцией по порядку групп в \mathfrak{X} . Если G – единичная группа, то теорема очевидна. Предположим, что группа $G \in \mathfrak{X}$ имеет наименьший порядок и ее \mathfrak{F} -радикал не является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в G . Так как G – π -разрешимая группа и по лемме 4.2 класс Фиттинга \mathfrak{F} определяется полулокально H -функцией $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ с носителем π , то по теореме 3.3 в G существует такой \mathfrak{F} -инъектор V , который не является нормальной подгруппой G , т. е. $G_{\mathfrak{F}} < V$. Ввиду того, что для каждого $i \in I$ класс Фиттинга \mathfrak{F}_i определяется полулокально H -функцией f_i с носителем π , и группа G является π -разрешимой, по теореме 3.3 G имеет \mathfrak{F}_i -инъектор V_i для каждого $i \in I$. В дальнейшем доказательство утверждения 1) разобьем на несколько шагов.

(а) Для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G справедливо равенство: $V \cap M = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M$.

Так как по условию для каждого $i \in I$ класс Фиттинга \mathfrak{F}_i нормален в \mathfrak{X} и V_i является \mathfrak{F}_i -максимальной подгруппой в G , то $V_i = G_{\mathfrak{F}_i}$ для всех $i \in I$. Но тогда $\bigcap_{i \in I} V_i = \bigcap_{i \in I} G_{\mathfrak{F}_i} = G_{\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i} = G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\bigcap_{i \in I} V_i < V$.

Пусть теперь M – произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда по утверждению 1 леммы 1.5 подгруппа $V \cap M$ является \mathfrak{F} -инъектором группы M . Так как $M \in \mathfrak{X}$, то по индукции $V \cap M$ нормальна в M . Следовательно, $V \cap M = M_{\mathfrak{F}}$, и поэтому по лемме 1.8 $V \cap M = G_{\mathfrak{F}} \cap M$. Итак, $V \cap M = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M$ и утверждение (а) доказано.

(б) Подгруппа V не содержится ни в одной собственной субнормальной подгруппе группы G .

Предположим, что существует субнормальная подгруппа G из N такая, что $V < N$. Тогда по утверждению 1 леммы 1.5 $V \cap N = V$ – \mathfrak{F} -инъектор группы N . Следовательно, по индукции V – нормальная подгруппа N . Тогда V – субнормальна в G и, учитывая утверждение 2 леммы 1.5, заключаем, что $V = G_{\mathfrak{F}}$. Последнее противоречит тому, что V не является нормальной подгруппой группы G .

(в) $G = RV$ для любой нормальной подгруппы R группы G такой, что G/R является либо π' -группой, либо G/R – нильпотентная π -группа.

Если R – такая нормальная подгруппа G , что G/R – π' -группа, то утверждение (в) справедливо по лемме 4.4. Предположим, что G/R является нильпотентной π -группой. Пусть $RV < G$. Так как G/R нильпотентная группа, то подгруппа RV/R субнормальна в G/R , и поэтому RV – субнормальная подгруппа G . Следовательно, V содержится в собственной субнормальной RV из G , что противоречит утверждению (б), и утверждение (в) доказано.

(г) Группа G комонолитична.

Предположим, что группа G не является комонолитичной. Пусть M_1 и M_2 – максимальные нормальные подгруппы группы G . Тогда, ввиду утверждения (в) и π -разрешимости группы G , получаем, что $G = VM_1 = VM_2$. Следовательно, справедливы изоморфизмы $G/M_1 = VM_1/M_1 \cong V/V \cap M_1$ и $G/M_2 = VM_2/M_2 \cong V/V \cap M_2$, и поэтому подгруппы $V \cap M_1$ и $V \cap M_2$ являются максимальными нормальными подгруппами группы V .

Предположим, что G/M_1 – нильпотентная π -группа, а G/M_2 – π' -группа. Если в этом случае $V \cap M_1 = V \cap M_2$, то $G/M_1 \cong V/V \cap M_1 = V/V \cap M_2 \cong G/M_2$. Следовательно, $G/M_1 \in \mathfrak{N}_{\pi} \cap \mathfrak{E}_{\pi} = (1)$, где (1) – класс единичных групп, и $G = M_1$, что невозможно.

Значит, $V \cap M_1 \neq V \cap M_2$, и поэтому

$$V = (V \cap M_1)(V \cap M_2).$$

Отсюда, учитывая утверждение (а), получаем, что $V = ((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M_1) \cdot ((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M_2)$. Следовательно, ввиду того, что $\bigcap_{i \in I} V_i = G_{\mathfrak{F}}$, имеем $V \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и получаем противоречие с утверждением (б).

Таким образом, остается признать, что группы G/M_1 и G/M_2 являются одновременно либо π' -группами, либо нильпотентными π -группами. Так как классы \mathfrak{E}_{π} и \mathfrak{N}_{π} являются формациями, то

группа $G/M_1 \cap M_2$ является либо π' -группой, либо нильпотентной π -группой. В каждом из этих случаев, ввиду утверждения (в), $G=V(M_1 \cap M_2)$. Следовательно, $VM_1 \cap VM_2=V(M_1 \cap M_2)$. Отсюда по лемме А.1.2 [3] получаем равенство:

$$V=V \cap M_1 M_2=(V \cap M_1)(V \cap M_2).$$

Теперь, если $V \cap M_1=V \cap M_2$, то $V \subseteq M_1$, что противоречит утверждению (б). Значит, $V \cap M_1 \neq V \cap M_2$. Но тогда с учетом утверждения (а) получаем аналогично, как и выше, что $V \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, что снова противоречит (б). Следовательно, $M_1=M_2=M$ и группа G комонолитична. Так как V_i – нормальная подгруппа G для любого $i \in I$, то $\bigcap_{i \in I} V_i \subseteq M$. Следовательно, из утверждения (а) вытекает равенство

$$V \cap M = \bigcap_{i \in I} V_i. \quad (4.1)$$

(д) $V_i V < G$ для некоторого $i \in I$.

Предположим, что для любого $i \in I$ справедливо равенство $V_i V = G$. Если для всех $j \in I$ подгруппа $V_j = G$, то $G = \bigcap_{j \in I} V_j$ и $G = V$ нормальна в G .

Получаем противоречие с тем, что подгруппа V ненормальна в G . Следовательно, $V_j \neq G$ для некоторого $j \in I$. Так как по условию $V_j V = G$ и V_j нормальная подгруппа G , то $G/V_j \cong V/V \cap V_j$. Но ввиду (4.1), $V \cap V_j \subseteq V \cap M = \bigcap_{i \in I} V_i \subseteq V \cap V_j$. Следовательно, $V \cap V_j = \bigcap_{i \in I} V_i$. Тогда из $G = VM$, применяя снова (4.1), получаем, что

$$G/M \cong V/V \cap M = V/(\bigcap_{i \in I} V_i) = V/V \cap V_j \cong G/V_j.$$

Следовательно, V_j – максимальная нормальная подгруппа G , т. е. $V_j = M$.

Покажем, что $V_j \in \mathfrak{F}$. Действительно, для $i \neq j$ ($i \in I$), если $V_i \neq G$, то рассуждая аналогично, как и выше, имеем $V_i = M = V_j$ и $V_j \in \mathfrak{F}_i$. Если же $V_i = G$, то V_j – нормальная подгруппа V_i и снова $V_j \in \mathfrak{F}_i$. Следовательно, $V_j \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \neq j$, и поэтому $V_j \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Значит, $V_j \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$. Но по предположению $V_j V = G$, и поэтому $V = G \in \mathfrak{F}$, что противоречит тому, что подгруппа V не нормальна в G . Итак, существует такое $i \in I$, что $V_i V < G$, и утверждение (д) доказано.

(е) *Заключительный шаг.*

Ввиду (4.1) заключаем, что группа $V \cap V_i / (\bigcap_{i \in I} V_i)$ является либо единичной, либо совпадает с самой группой. Предположим, что $V \cap V_i = \bigcap_{i \in I} V_i$. В этом случае, учитывая (4.1), $V_i V / V_i \cong V / \bigcap_{i \in I} V_i \cong G/M$. Следовательно, $V_i V / V_i$ является либо элементарной абелевой p -группой для некоторого $p \in \pi$, либо π' -группой. Пусть $V_i V / V_i$ – p -группа. Тогда из того, что \mathfrak{X} – класс Фишера, $G \in \mathfrak{X}$, V_i нормальна в G и $V_i \leq V_i V \leq G$, следует, что $V_i V \in \mathfrak{X}$. Так как V – \mathfrak{F} -инъектор G , то по лемме 4.6 подгруппа V является \mathfrak{F} -инъектором $V_i V$. Но $|V_i V| < |G|$, и поэтому по

индукции V – нормальная подгруппа в $V_i V$. Следовательно, из $V \in \mathfrak{F}_i$ имеем $V \leq (V_i V)_{\mathfrak{F}_i}$. Так как по лемме 4.6 V_i – \mathfrak{F}_i -инъектор $V_i V$, то $(V_i V)_{\mathfrak{F}_i} = V_i$. Итак, $V \subseteq V_i$ и V_i нормальна в G , что противоречит утверждению (б).

Предположим, что $V_i V / V_i$ является π' -группой. Тогда по лемме 2.2 $V_i V \in \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\pi} = \mathfrak{F}$. Но по утверждению 1 леммы 4.6 V_i является \mathfrak{F} -инъектором $V_i V$. Следовательно, ввиду того, что V_i – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа $V_i V$, имеем $V_i V = V_i$, и поэтому $V \leq V_i$. Снова получили противоречие утверждению (б).

Итак, случай, когда $(V \cap V_i) / (\bigcap_{i \in I} V_i)$ – единичная группа, невозможен.

Остается принять случай, когда $(V \cap V_i) / (\bigcap_{i \in I} V_i) = V / (\bigcap_{i \in I} V_i)$. В этом случае $V \cap V_i = V$ и $V \leq V_i$, что противоречит (б).

Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (е). Первое утверждение теоремы доказано.

2) Второе утверждение теоремы докажем также индукцией по порядку групп в классе \mathfrak{X} . Предположим, что группа $G \in \mathfrak{X}$ – контрпример минимального порядка. Пусть $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Так как группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ является π -разрешимой, то в G по лемме 4.5 существует \mathfrak{F} -инъектор V такой, что V не является нормальной подгруппой G . Заметим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_i$ для каждого $i \in I$, и поэтому, ввиду изоморфизма $G/G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \cong G/G_{\mathfrak{F}}$, следует, что $G/G_{\mathfrak{F}}$ – π -разрешимая группа для всех $i \in I$. Тогда по лемме 4.5 в G существует \mathfrak{F} -инъектор V_i , который нормален в G для каждого $i \in I$. Далее, следуя доказательству утверждения 1), мы получаем, что справедливы следующие факты.

(а₁) $V \cap M = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M$ для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G .

(б₁) V не является подгруппой группы N , где $N \triangleleft \triangleleft G$.

(в₁) $G = RV$ для каждой нормальной подгруппы R такой, что либо G/R – нильпотентная π -группа, либо G/R – π' -группа.

Как и при доказательстве (в), при доказательстве (в₁) предположим, что $RV < G$. Если G/R – нильпотентная группа, аналогично, как и в случае (в), приходим к противоречию с утверждением (б₁). Предположим, что $G/R \in \mathfrak{C}_{\pi}$. Тогда очевидно, подгруппа $VR/R \cong V/V \cap R \in \mathfrak{C}_{\pi} \cap \mathfrak{C}_{\pi} = (1)$. Следовательно, $V = V \cap R$ и $V \subseteq R$, что снова противоречит (б₁). Это доказывает утверждение (в₁).

(г₁) *Группа G комонолитична.*

Пусть M_1 и M_2 – максимальные нормальные подгруппы G . Заметим, что если группа G/M_i является π' -группой для некоторого $i \in \{1, 2\}$, то с учетом (в₁) $G/M_i \cong V/V \cap M_i \in \mathfrak{C}_{\pi} \cap \mathfrak{C}_{\pi} = (1)$. Следовательно, $V = V \cap M_i$ и $V \leq M_i$, что противоречит (б₁).

Значит, группы G/M_1 и G/M_2 являются нильпотентными π -группами и доказательство (Γ_1) аналогично доказательству утверждения (г) из 1). Итак, $M_1=M_2=M$ и, ввиду (a_1) , $G/M \cong V/(\bigcap_{i \in I} V_i)$, где $V/(\bigcap_{i \in I} V_i)$ – p -группа для некоторого $p \in \pi$. Далее доказательство утверждения 2) теоремы проводится аналогично доказательству утверждению 1) с учетом (a_1) – (Γ_1) и утверждения (2) леммы 4.6. Теорема доказана.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ классу всех разрешимых групп, то из теоремы вытекает известный результат Блессеноля-Гашюца [4].

Следствие 4.8. Пересечение любого множества неединичных разрешимых нормальных классов Фиттинга является неединичным разрешимым нормальным классом Фиттинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M), 1966.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbaren Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Bleszenohl D. Über normale Schunk und Fittingklassen / D. Bleszenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.
5. Шеметков, Л.А. О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. Мн.: Наука и техника. 1975. – С. 207–212.
6. Laue, H. Über nichtauflösbarer normalen Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45, № 2. – P. 274–283.
7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 272 с.
8. Cossey, J. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 3. – S. 289–295.
9. Lockett, F.P. The Fitting class \mathfrak{F}^* / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Vol. 137. – P. 131–136.
10. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
11. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Мн.: Наука и техника, 1964.
12. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // В кн.: Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн.: Наука и техника. 1984. – С. 166–170.
13. Feit, W. Solvability of groups of odd order / W. Feit, J. Thompson // Pacif. J. Math. – 1963. – Vol. 13, № 3 – P. 775–1029.
14. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. ж. – 1996. – Т. 37, № 6 – С. 1296–1302.
15. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro – Springer, 2006. – 385 p.
16. Wenbin, Guo. Theory of Classes of Groups / Guo Wenbin. – Science Press / Kluwer Acad. Publ. Dordrecht-Boston-London, 1997. – 258 p.
17. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

Поступила в редакцию 13.05.13.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

GENERALIZING POLIADIC OPERATIONS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

Для любых целых $l \geq 2, k \geq 2$, подмножества T симметрической группы S_k и полугруппы A на декартовом произведении $T \times A^k$ определяется l -арная операция $[]_{l, T, k}$. Эта l -арная операция является аналогом полиадической операции Э. Поста, которую он определил на множестве полиадических подстановок. В работе изучаются свойства операции $[]_{l, T, k}$.

Ключевые слова: операция, полугруппа, группа, l -арная полугруппа, l -арная группа, косой элемент, идемпотент.

For any integers $l \geq 2, k \geq 2$, of a subset T of the symmetric group S_k and semi-group A on the Cartesian product $T \times A^k$ an l -ary operation $[]_{l, T, k}$ is determined. This l -ary operation is similar to the Post poliadic operations, which he defined on the set of poliadic permutations. In the paper the properties of the operation $[]_{l, T, k}$ are studied.

Keywords: operation, semigroup, group, l -ary semigroup, l -ary group, skew element, idempotent.

Введение

Основным объектом изучения в данной работе является l -арная операция $[]_{l, T, k}$, которая определяется для любых целых $l \geq 2, k \geq 2$ на подмножестве $T \times A^k$ декартова произведения

$$S_k \times A^k = S_k \times \underbrace{A \dots A}_k =$$

$= \{(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \mid \sigma \in S_k, a_1, \dots, a_k \in A\}$, где S_k – симметрическая группа всех подстановок множества $\{1, \dots, k\}$, A – произвольная полугруппа. Если $T = \{\sigma\}$, $\sigma^l = \sigma$, то, как будет показано в заключительном разделе работы, операцию $[]_{l, \{\sigma\}, k}$ можно отождествить с определенной на декартовой степени A^k l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая была определена в [1] и подробно изучена в [2]. Указанное отождествление позволяет рассматривать операцию $[]_{l, T, k}$ как обобщение операции $[]_{l, \sigma, k}$. В свою очередь, если $l = k + 1$, $\sigma = (12 \dots k)$, $A = S_M$ – симметрическая группа всех биекций множества M , то $k + 1$ -арная операция $[]_{k+1, (12 \dots k), k}$ совпадает с полиадической операцией, которую Э. Пост определил в [3] на множестве S_M^k . Таким образом, l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, а значит и l -арная операция $[]_{l, T, k}$, являются обобщениями отмеченной выше полиадической операции Э. Поста.

Мы предполагаем известными определения n -арной полугруппы, n -арной группы, единицы n -арной полугруппы, косого элемента n -арной группы, абелевой n -арной операции. В случае необходимости можно обратиться к [3], [4] или к главе 1 книги [2]. В работе символом A_k обозначается знакопеременная группа всех четных подстановок из S_k , а символом T_k – множество всех нечетных подстановок из S_k .

1 Операция $[]_{m, S_k, k}$

Для любого целого $m \geq 2$ и любой полугруппы A определим на множестве $S_k \times A^k$ m -арную операцию $[]_{m, S_k, k}$ следующим образом: для любых

$$(\sigma_i, \mathbf{a}_i) = (\sigma_i, (a_{i1}, \dots, a_{ik})) \in S_k \times A^k, \quad (1.1)$$

где $i = 1, \dots, m$, положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{a}_m)]_{m, S_k, k} =$$

$$= (\sigma, (b_1, \dots, b_k)) = (\sigma, \mathbf{b}), \quad (1.2)$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m, \quad (1.3)$$

$$b_j = a_{1j} a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots a_{m\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)} \quad (1.4)$$

для любого $j = 1, \dots, k$.

В (1.3) и далее полагаем

$$\sigma_s(\dots \sigma_2(\sigma_1(j)) \dots) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_s(j).$$

Заметим, что в определении операции $[]_{m, S_k, k}$ подстановки $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ не обязательно все различные.

В определении операции $[]_{m, S_k, k}$ можно считать $m = 1$. В этом случае имеем один набор

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1) = (\sigma_1, (a_{11}, \dots, a_{1k})),$$

а также $\sigma = \sigma_1, b_j = a_{1j}, (\sigma, \mathbf{b}) = (\sigma_1, \mathbf{a}_1)$.

Таким образом, $[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)]_{1, S_k, k} = (\sigma_1, \mathbf{a}_1)$.

Предложение 1.1. Для всех i и l , таких, что $1 \leq i + 1 \leq i + l \leq m$, и любых

$$\mathbf{u}_1 = (\sigma_1, \mathbf{a}_1), \dots, \mathbf{u}_m = (\sigma_m, \mathbf{a}_m) \in S_k \times A^k$$

имеет место равенство

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]_{m, S_k, k} =$$

$$= [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{m, S_k, k} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, S_k, k}.$$

Доказательство. Положим

$$\mathbf{u}_i = (\sigma_i, \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik})), i = 1, \dots, m,$$

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]_{m, S_k, k} = (\alpha, (b_1, \dots, b_k)) = \mathbf{p},$$

$$[\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, S_k, k} = (\beta, (c_1, \dots, c_k)) = \mathbf{q},$$

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, S_k, k} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, S_k, k} = (\gamma, (d_1, \dots, d_k)) = \mathbf{r}.$$

Так как

$$\alpha = \sigma_1 \dots \sigma_m, \beta = \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l},$$

$$\gamma = \sigma_1 \dots \sigma_i \beta \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_m =$$

$$= \sigma_1 \dots \sigma_i (\sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l}) \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_m = \sigma_1 \dots \sigma_m,$$

то

$$\alpha = \gamma. \quad (1.5)$$

Ясно, что

$$b_j = a_{1j} a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots a_{m\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)}, \quad (1.6)$$

$$c_t = a_{(i+1)t} a_{(i+2)\sigma_{i+1}(t)} a_{(i+3)\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}(t)} \dots a_{(i+l)\sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l-1}(t)} \quad (1.7)$$

для любого $t = 1, \dots, k$.

Полагая в (1.7) $t = \sigma_1 \dots \sigma_i(j)$ и учитывая равенство $\beta = \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+l}$, получим

$$d_j = a_{1j} a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots a_{i\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)} c_{\sigma_1 \dots \sigma_i(j)}$$

$$a_{(i+l+1)\sigma_1 \dots \sigma_i \beta(j)} \dots a_{m\sigma_1 \dots \sigma_i \beta \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_{m-1}(j)} =$$

$$= a_{1j} a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots a_{i\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)} a_{(i+1)\sigma_1 \dots \sigma_i(j)}$$

$$a_{(i+2)\sigma_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_i(j))} \dots a_{(i+l)\sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_i(j))}$$

$$a_{(i+l+1)\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l}(j)} \dots a_{m\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l} \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_{m-1}(j)} =$$

$$= a_{ij} a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots a_{i\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)} a_{(i+1)\sigma_1 \dots \sigma_i(j)}$$

$$a_{(i+2)\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+1}(j)} \dots a_{(i+l)\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l-1}(j)}$$

$$a_{(i+l+1)\sigma_1 \dots \sigma_{i+l}(j)} \dots a_{m\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)} =$$

$$= a_{1j} a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots a_{m\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)},$$

то есть

$$d_j = a_{1j} a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots a_{m\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)} \quad (1.8)$$

для любого $j = 1, \dots, k$.

Из (1.5), (1.6) и (1.8) вытекает $\mathbf{p} = \mathbf{r}$. Следовательно, равенство из формулировки предложения верно. Предложение доказано.

Теорема 1.1. Для любого $l \geq 2$ операция $[\]_{l, S_k, k}$ ассоциативна, то есть универсальная алгебра $\langle S_k \times A^k, [\]_{l, S_k, k} \rangle$ является l -арной полугруппой.

Доказательство. Полагая в предложении 1.1

$$m = 2l - 1, i = 0, 1, \dots, l - 1,$$

получим

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{2l-1, S_k, k} =$$

$$= [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, S_k, k} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, S_k, k},$$

для любых $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{2l-1} \in S_k \times A^k$, то есть

$$[[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i]_{l, S_k, k} \mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, S_k, k} =$$

$$= [\mathbf{u}_1 [\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_{i+1}]_{l, S_k, k} \mathbf{u}_{i+2} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, S_k, k} = \dots$$

$$\dots = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{l-1} [\mathbf{u}_l \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, S_k, k}]_{l, S_k, k}.$$

Следовательно, $\langle S_k \times A^k, [\]_{l, S_k, k} \rangle$ l -арная полугруппа. Теорема доказана.

2 Операция $[\]_{l, T, k}$

Определим на множестве S_k l -арную операцию

$$(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l,$$

которая, как не сложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $\langle S_k, (\)_l \rangle$ – l -арная полугруппа. Более того, $\langle S_k, (\)_l \rangle$ – l -арная группа, производная от симметрической группы S_k .

Ясно, что если $T \subseteq S_k$, то $T \times A^k \subseteq S_k \times A^k$, где

$$T \times A^k = \{(\sigma, \mathbf{a}) =$$

$$= (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \mid \sigma \in T, a_1, \dots, a_k \in A\}.$$

Предложение 2.1. Если подмножество $T \subseteq S_k$ замкнуто относительно l -арной операции $(\)_l$, то множество $T \times A^k$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, S_k, k}$, то есть $\langle T \times A^k, [\]_{l, S_k, k} \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной полугруппы $\langle S_k \times A^k, [\]_{l, S_k, k} \rangle$.

Доказательство. Если

$$(\sigma_i, \mathbf{a}_i) \in T \times A^k, i = 1, \dots, l,$$

то из (1.2)–(1.4) и замкнутости T относительно l -арной операции $(\)_l$ вытекает

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, S_k, k} \in T \times A^k.$$

Ассоциативность операции $[\]_{l, S_k, k}$ доказана в теореме 1.1. Предложение доказано.

Так как S_k – конечное множество, то любое подмножество $T \subseteq S_k$, замкнутое относительно l -арной операции $(\)_l$, является l -арной подгруппой l -арной группы $\langle S_k, (\)_l \rangle$. В частности, в группе S_k любая её подполугруппа является подгруппой.

Замечание 2.1. Если T – подгруппа группы S_k , то множество T замкнуто относительно l -арной операции $(\)_l$, то есть $\langle T, (\)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_k, (\)_l \rangle$.

Из предложения 2.1, ввиду замечания 2.1, вытекает

Следствие 2.1. Если T – подгруппа группы S_k , то множество $T \times A^k$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, S_k, k}$, то есть $\langle T \times A^k, [\]_{l, S_k, k} \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной полугруппы $\langle S_k \times A^k, [\]_{l, S_k, k} \rangle$.

Для фиксированного $l \geq 2$ и фиксированного подмножества $T \subseteq S_k$ определим на $S_k \times A^k$ частичную l -арную операцию $[\]_{l, T, k}$ следующим образом: для любых l элементов вида (1.1) положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, k} =$$

$$= [(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, S_k, k},$$

если $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l \in T$; если же по крайней мере

одна из подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ не принадлежит T , то элемент

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, k}$$

считается неопределенным.

Ясно, что при $T = \mathbf{S}_k$ операция $[\]_{l, T, k}$ определена на всем множестве $\mathbf{S}_k \times A^k$ и совпадает с операцией $[\]_{l, \mathbf{S}_k, k}$.

Если $\sigma_1, \dots, \sigma_l \in T$, то, согласно определению операции $[\]_{l, T, k}$,

$$\begin{aligned} &[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, k} = \\ &= (\sigma, (b_1, \dots, b_k)) = (\sigma, \mathbf{b}), \end{aligned}$$

где σ и b_j определяются с помощью (1.3) и (1.4) соответственно.

Замечание 2.2. Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_k$ замкнуто относительно l -арной операции $(\)_l$, то, согласно определению операции $[\]_{l, T, k}$, она определена для любых l элементов множества $T \times A^k$, а её результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции $[\]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ и $[\]_{l, T, k}$ определены на всем указанном множестве и совпадают на нём.

В связи с этим предложение 2.1 и следствие 2.1 позволяют обобщить теорему 1.1.

Теорема 2.1. Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_k$ замкнуто относительно l -арной операции $(\)_l$, в частности, T – подгруппа группы \mathbf{S}_k , то $\langle T \times A^k, [\]_{l, T, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Замечание 2.3. l -Арную полугруппу $\langle T \times A^k, [\]_{l, T, k} \rangle$ из теоремы 2.1 можно рассматривать как l -арную подполугруппу l -арной полугруппы $\langle T \times A^k, [\]_{l, \mathbf{S}_k, k} \rangle$, так как, согласно замечанию 2.2, операции $[\]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ и $[\]_{l, T, k}$ на множестве $T \times A^k$ совпадают.

Полагая в теореме 2.1 $T = \mathbf{A}_k$, получим

Следствие 2.2. Для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{A}_k \times A^k, [\]_{l, \mathbf{A}_k, k} \rangle$ является l -арной полугруппой.

Следствие 2.3. Для любого нечетного $l \geq 3$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{T}_k \times A^k, [\]_{l, \mathbf{T}_k, k} \rangle$ является l -арной полугруппой. В частности, $\langle \mathbf{T}_k \times A^k, [\]_{3, \mathbf{T}_k, k} \rangle$ – тернарная полугруппа.

3 l -Арная группа $\langle \mathbf{S}_k \times A^k, [\]_{l, \mathbf{S}_k, k} \rangle$

Теорема 3.1. Пусть A – группа, $\langle T, (\)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle \mathbf{S}_k, (\)_l \rangle$. Тогда $\langle T \times A^k, [\]_{l, T, k} \rangle$ – l -арная группа. В частности, $\langle \mathbf{S}_k \times A^k, [\]_{l, \mathbf{S}_k, k} \rangle$ – l -арная группа.

Доказательство. Согласно теореме 2.1, $\langle T \times A^k, [\]_{l, T, k} \rangle$ – l -арная полугруппа. Осталось доказать разрешимость в $T \times A^k$ уравнений

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, T, k} = \mathbf{a}, [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{y}]_{l, T, k} = \mathbf{a}, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{a}_i = (\sigma_i, a_i) = (\sigma_i, (a_{i1}, \dots, a_{ik})) \in T \times A^k, i = 1, \dots, l,$$

$$\mathbf{a} = (\sigma, \mathbf{b}) = (\sigma, (b_1, \dots, b_k)) \in T \times A^k.$$

В l -арной группе $\langle T, (\)_l \rangle$ существуют такие $\delta, \rho \in T$, что

$$(\delta\sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma, (\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}\rho)_l = \sigma. \quad (3.2)$$

Для любого $j = 1, \dots, k$ положим

$$u_j = b_j a_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)}^{-1} \dots a_{3\delta\sigma_2(j)}^{-1} a_{2\delta(j)}^{-1} \quad (3.3)$$

и покажем, что

$$\mathbf{u} = (\delta, (u_1, \dots, u_k)) \in T \times A^k$$

является решением первого уравнения (3.1). Для этого положим

$$[\mathbf{ua}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, T, k} = (\mu, (d_1, \dots, d_k)). \quad (3.4)$$

Согласно замечанию 2.2, операции $[\]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ и $[\]_{l, T, k}$ на множестве $T \times A^k$ совпадают. Поэтому

$$[\mathbf{ua}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, T, k} = [\mathbf{ua}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, \mathbf{S}_k, k},$$

то есть

$$[\mathbf{ua}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, \mathbf{S}_k, k} = (\mu, (d_1, \dots, d_k)).$$

Согласно определению операции $[\]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ и ввиду первого равенства из (3.2), а также равенства (3.3), имеем

$$\mu = \delta\sigma_2 \dots \sigma_l = \sigma,$$

$$\begin{aligned} d_j &= u_j a_{2\delta(j)} a_{3\delta\sigma_2(j)} \dots a_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)} = \\ &= b_j a_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)}^{-1} \dots a_{3\delta\sigma_2(j)}^{-1} a_{2\delta(j)}^{-1} \end{aligned}$$

$$a_{2\delta(j)} a_{3\delta\sigma_2(j)} \dots a_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)} = b_j, j = 1, \dots, k.$$

Следовательно,

$$(\mu, (d_1, \dots, d_k)) = (\sigma, (b_1, \dots, b_k)) = \mathbf{a},$$

откуда и из (3.4) вытекает

$$[\mathbf{ua}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, T, k} = \mathbf{a},$$

то есть первое уравнение из (3.1) разрешимо в $T \times A^k$.

Для любого $s = 1, \dots, k$ положим

$$\begin{aligned} v_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)} &= \\ &= a_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)}^{-1} a_{(l-2)\sigma_1 \dots \sigma_{l-3}(s)}^{-1} \dots a_{2\sigma_1(s)}^{-1} a_{1s}^{-1} b_s. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как A – группа, $\rho \in T$, то

$$\mathbf{v} = \{\rho, (v_1, \dots, v_k)\} \in T \times A^k.$$

Покажем, что \mathbf{v} является решением второго уравнения из (3.1). Для этого положим

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{v}]_{l, T, k} = (\eta, (c_1, \dots, c_k)). \quad (3.6)$$

Снова, используя совпадение операций $[\]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ и $[\]_{l, T, k}$ на множестве $T \times A^k$, получим

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{v}]_{l, \mathbf{S}_k, k} = (\eta, (c_1, \dots, c_k)).$$

Согласно определению операции $[\]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ и ввиду второго равенства из (3.2), а также равенства (3.5), имеем

$$\eta = \sigma_1 \dots \sigma_{l-1}\rho = \sigma,$$

$$\begin{aligned} c_s &= a_{1s} a_{2\sigma_1(s)} \dots a_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)} v_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)} = \\ &= a_{1s} a_{2\sigma_1(s)} \dots a_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)} \end{aligned}$$

$$a_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{j-2}(s)}^{-1} \dots a_{2\sigma_1(s)}^{-1} a_{1s}^{-1} b_s = b_s$$

для любого $s = 1, \dots, k$. Следовательно,

$$(\eta, (c_1, \dots, c_k)) = (\sigma, (b_1, \dots, b_k)) = \mathbf{a},$$

откуда и из (3.6) вытекает

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{v}]_{l, T, k} = \mathbf{a},$$

то есть второе уравнение из (3.1) также разрешимо в $T \times A^k$. Таким образом, доказано, что $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ – l -арная группа.

Полагая $T = \mathbf{S}_k$, получим утверждение теоремы для множества $\mathbf{S}_k \times A^k$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Ввиду замечания 2.2, l -арную группу $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ из теоремы 3.1 можно рассматривать как l -арную подгруппу l -арной группы $\langle T \times A^k, []_{l, \mathbf{S}_k, k} \rangle$. В дальнейшем мы не будем оговаривать эту ситуацию для различных конкретных множеств T .

Следствие 3.1. Если A – группа, T – подгруппа группы \mathbf{S}_k , то $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ – l -арная группа.

Полагая в следствии 3.1 $T = \mathbf{A}_k$, получим

Следствие 3.2. Если A – группа, то для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{A}_k \times A^k, []_{l, \mathbf{A}_k, k} \rangle$ является l -арной группой.

Следствие 3.3. Для любой группы A и любого нечетного $l \geq 3$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{T}_k \times A^k, []_{l, \mathbf{T}_k, k} \rangle$ является l -арной группой. В частности, $\langle \mathbf{T}_k \times A^k, []_{3, \mathbf{T}_k, k} \rangle$ – тернарная группа.

В следующем предложении указывается явный вид косых элементов в l -арной группе $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$.

Предложение 3.1. Пусть A – группа, $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle \mathbf{S}_k, ()_l \rangle$. Тогда для любого элемента

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \in T \times A^k$$

элемент

$$(\gamma, \mathbf{b}) = (\gamma, (b_1, \dots, b_k)), \quad (3.7)$$

где

$$\gamma = \sigma^{2-l}, b_j = a_{\sigma^{-1}(j)}^{-1} a_{\sigma^2(j)}^{-1} \dots a_{\sigma^{-(l-2)}(j)}^{-1} \quad (3.8)$$

для любого $j = 1, \dots, k$, является косым элементом в l -арной группе $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$.

Доказательство. Так как $\gamma = \sigma^{2-l}$, то

$$(\underbrace{\gamma \sigma \dots \sigma}_{l-1})_l = \sigma^{2-l} \sigma^{l-1} = \sigma \in T,$$

то есть $(\underbrace{\gamma \sigma \dots \sigma}_{l-1})_l = \sigma \in T$. А так как $\langle T, ()_l \rangle$ –

l -арная группа, то $\gamma = \bar{\sigma} \in T$. Ясно, что $(\gamma, \mathbf{b}) \in T \times A^k$.

Согласно теореме 3.1, $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ – l -арная группа. Применяя определение операции $[]_{l, T, k}$, будет иметь

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \dots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-1} (\gamma, \mathbf{b})]_{l, T, k} = (\delta, (c_1, \dots, c_k)), \quad (3.9)$$

где

$$\delta = \sigma^{l-1} \gamma = \sigma^{l-1} \sigma^{2-l} = \sigma,$$

$$c_j = a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_{\sigma^{l-1}(j)} =$$

$$= a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{-1}(\sigma^{l-1}(j))}^{-1}$$

$$a_{\sigma^{-2}(\sigma^{l-1}(j))}^{-1} \dots a_{\sigma^{-(l-2)}(\sigma^{l-1}(j))}^{-1} =$$

$$= a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{-2}(j)}^{-1} a_{\sigma^{-3}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1} = a_j.$$

Таким образом, $\delta = \sigma$, $c_1 = a_1, \dots, c_k = a_k$, а равенство (3.9) принимает вид

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \dots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-1} (\gamma, \mathbf{b})]_{l, T, k} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, элемент (3.7) с компонентами (3.8) является косым элементом для элемента (σ, \mathbf{a}) . Предложение доказано.

Замечание 3.2. Косой элемент для элемента (σ, \mathbf{a}) из предложения 3.1 может быть записан в следующем виде

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\bar{\sigma}, (b_1, \dots, b_k)),$$

где $\bar{\sigma}$ – косой элемент для элемента σ в l -арной группе $\langle T, ()_l \rangle$, а компоненты b_1, \dots, b_k определяются, как в (3.8).

4 Перестановочность элементов в

$\langle \mathbf{S}_k \times A^k, []_{l, \mathbf{S}_k, k} \rangle$

Теорема 4.1. Пусть l -арная подгруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle \mathbf{S}_k, ()_l \rangle$ содержит нетождественную подстановку σ , полугруппа A содержит единицу 1 и элемент a , отличный от 1. Тогда l -арная полугруппа $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ не является абелевой.

Доказательство. Так как σ не является тождественной подстановкой, то существует $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием $\sigma(j) \neq j$. Положим

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})) =$$

$$= (\sigma, (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_k)),$$

$$(\sigma, \mathbf{e}) = (\sigma, (\underbrace{1, \dots, 1}_k)),$$

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) (\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-1}]_{l, T, k} = (\sigma^l, (y_1, \dots, y_k)),$$

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}) (\sigma, \mathbf{a}) (\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-2}]_{l, T, k} =$$

$$= (\sigma^l, (z_1, \dots, z_k)).$$

Тогда, согласно определению операции $[]_{l, T, k}$,

$$y_j = a_j \underbrace{1 \dots 1}_{l-1} = a_j = a,$$

то есть $y_j = a$. Согласно тому же определению,

$$z_j = 1 a_{\sigma(j)} \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} = a_{\sigma(j)},$$

откуда, ввиду $\sigma(j) \neq j$, следует $z_j = 1 \neq a_j = a$. А так как $y_j = a$, $z_j = 1$, $a \neq 1$, то $y_j \neq z_j$, откуда

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) (\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-1}]_{l, T, k} \neq$$

$$\neq [(\sigma, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})]_{l, T, k}$$

Следовательно, l -арная полугруппа $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ неабелева. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Если $T = \{\sigma\}$, где σ – тождественная подстановка, то l -арная полугруппа $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ может быть абелевой. Для этого достаточно абелевости полугруппы A .

Так как при $k \geq 2$ группа S_k содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то для любого $k \geq 2$ l -арная полугруппа $\langle S_k \times A^k, []_{l, S_k, k} \rangle$ не является абелевой.

Так как при $k \geq 3$ группа A_k содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.2. Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то для любого $k \geq 3$ l -арная полугруппа $\langle A_k \times A^k, []_{l, A_k, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 4.3. Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то для любых $k \geq 2$ и нечетного $l \geq 3$ l -арная полугруппа $\langle T_k \times A^k, []_{l, T_k, k} \rangle$ не является абелевой. В частности, тернарная полугруппа $\langle T_3 \times A^3, []_{3, T_3, 3} \rangle$ не является абелевой.

Из теоремы 4.1 извлекается

Теорема 4.2. Пусть l -арная подгруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$ содержит нетождественную подстановку, группа A содержит более одного элемента. Тогда l -арная группа $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 4.4. Если группа A содержит более одного элемента, то для любого $k \geq 2$ l -арная группа $\langle S_k \times A^k, []_{l, S_k, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 4.5. Если группа A содержит более одного элемента, то для любого $k \geq 3$ l -арная группа $\langle A_k \times A^k, []_{l, A_k, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 4.6. Если группа A содержит более одного элемента, то для любых $k \geq 2$ и нечетного $l \geq 3$ l -арная группа $\langle T_k \times A^k, []_{l, T_k, k} \rangle$ не является абелевой.

5 Идемпотенты в $\langle S_k \times A^k, []_{l, S_k, k} \rangle$

Лемма 5.1. Пусть $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$, A – полугруппа. Если $(\varepsilon, \mathbf{e})$ – единица l -арной полугруппы $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$, то ε – единица в $\langle T, ()_l \rangle$.

Доказательство. Так как $(\varepsilon, \mathbf{e})$ – единица в $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$, то

$$[(\varepsilon, \mathbf{e}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})(\varepsilon, \mathbf{e}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{e})]_{l, T, k} = (\sigma, \mathbf{a})$$

для любого $(\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^k$ и любого $i = 1, \dots, l$, откуда, ввиду определения операции $[]_{l, T, k}$, следует

$$(\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{i-1} \sigma \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{l-i})_l = \sigma$$

для любого $\sigma \in T$. Следовательно, ε – единица в $\langle T, ()_l \rangle$. Лемма доказана.

Следствие 5.1. Если в l -арной подгруппе $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$ нет единиц, то в l -арной полугруппе $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$ также нет единиц.

Лемма 5.2. Пусть $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента. Тогда для любой нетождественной подстановки $\sigma \in T$ и любого $\mathbf{a} \in A^k$ элемент $(\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^k$ не является единицей в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$.

Доказательство. По условию $\sigma(j) \neq j$ для некоторого индекса $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Предположим, что $(\sigma, \mathbf{a} = (e_1, \dots, e_k))$ – единица в $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$, и пусть a – произвольный элемент из A . Тогда

$$\begin{aligned} & [(\sigma, (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k)) \\ & \quad \underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \dots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-1}]_{l, T, k} = \\ & = (\sigma, (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k)). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Обозначив левую часть в (5.1) через $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ и используя определение l -арной операции $[]_{l, T, k}$, а также лемму 5.1, получим

$$\rho = \sigma^l = \sigma, u_j = a e_{\sigma(j)} e_{\sigma^2(j)} \dots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

А так как, ввиду (5.1), $u_j = a$, то

$$a = a e_{\sigma(j)} e_{\sigma^2(j)} \dots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

В частности, если $a = e_j$, то

$$e_j = e_j e_{\sigma(j)} e_{\sigma^2(j)} \dots e_{\sigma^{l-1}(j)}. \quad (5.2)$$

Так как по предположению $(\sigma, \mathbf{a} = (e_1, \dots, e_k))$ – единица в $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle$, то

$$\begin{aligned} & [(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k)) \\ & \quad \underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \dots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-2}]_{l, T, k} = \\ & = (\sigma, (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Положив

$$(e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k) = (b_1, \dots, b_k),$$

обозначим левую часть в (5.3) через $(\delta, (v_1, \dots, v_k))$ и, используя определение l -арной операции $[]_{l, T, k}$, а также лемму 5.1, получим

$$\delta = \sigma^l = \sigma, v_j = e_j b_{\sigma(j)} e_{\sigma^2(j)} \dots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

А так как, ввиду (5.3), $v_j = a$, то

$$a = e_j b_{\sigma(j)} e_{\sigma^2(j)} \dots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

Так как при $t \neq j$ верно $b_t = e_t$, то для $\sigma(j) \neq j$ имеем $b_{\sigma(j)} = e_{\sigma(j)}$. Поэтому

$$a = e_j e_{\sigma(j)} e_{\sigma^2(j)} \dots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

Из последнего равенства и из (5.2) следует $a = e_j$ для любого a из A , что невозможно, так как в A имеются элементы, отличные от e_j . Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 5.2 является следующая

Теорема 5.1. Пусть l -арная подгруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$ не содержит тождественную подстановку, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента. Тогда в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$ нет единиц.

Следствие 5.2. Если полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то для любых $k \geq 2$ и нечетного $l \geq 3$ в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle T_k \times A^k, []_{l,T_k,k} \rangle$ нет единиц. В частности, в тернарной полугруппе (тернарной группе) $\langle T_3 \times A^k, []_{3,T_3,k} \rangle$ нет единиц.

Из леммы 5.2 вытекает

Следствие 5.3. Пусть $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$, полугруппа A содержит более одного элемента. Если (σ, \mathbf{a}) – единица в l -арной полугруппе $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$, то σ – тождественная подстановка.

Возникает естественный вопрос: существуют ли l -арные полугруппы вида $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$, обладающие единицами?

Если существует положительный ответ на этот вопрос, то ввиду теоремы 5.1, множество T должно содержать тождественную подстановку.

Предложение 5.1. Пусть l -арная подгруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$ содержит тождественную подстановку ε , полугруппа A содержит единицу 1. Тогда элемент

$$(\varepsilon, \mathbf{1}) = (\varepsilon, \underbrace{(1, \dots, 1)}_k)$$

является единицей в l -арной полугруппе $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$.

Доказательство. Для любого

$$(\sigma, \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)) \in T \times A^k$$

и любого $i = 1, \dots, l$ имеем

$$\begin{aligned} & \underbrace{[(\varepsilon, \mathbf{1}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{1})]}_{i-1} (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \\ & \underbrace{(\varepsilon, \mathbf{1}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{1})}_{l-i}]_{l,T,k} = \\ & = (\varepsilon^{i-1} \sigma \varepsilon^{l-i}, (\underbrace{1 \dots 1}_{i-1} a_{\varepsilon^{i-1}(1)} \underbrace{1 \dots 1}_{l-i}, \dots, \\ & \dots, \underbrace{1 \dots 1}_{i-1} a_{\varepsilon^{i-1}(k)} \underbrace{1 \dots 1}_{l-i})) = \\ & = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) = (\sigma, \mathbf{a}), \end{aligned}$$

то есть

$$\underbrace{[(\varepsilon, \mathbf{1}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{1})]}_{i-1} (\sigma, \mathbf{a}) \underbrace{(\varepsilon, \mathbf{1}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{1})}_{l-i}]_{l,T,k} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, $(\varepsilon, \mathbf{1})$ – единица в $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$. Предложение доказано.

Следующий вопрос: существуют ли в $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$ единицы, отличные от $(\varepsilon, \mathbf{1})$?

Предложение 5.2. Пусть l -арная подгруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$ содержит тождественную подстановку ε , в центре группы A имеется элемент u , порядок которого делит $l-1$. Тогда элемент

$$(\varepsilon, \mathbf{u}) = (\varepsilon, \underbrace{(u, \dots, u)}_k)$$

является единицей в l -арной группе $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$.

Доказательство. Для любого

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \in T \times A^k$$

и любого $i = 1, \dots, l$ имеем

$$\begin{aligned} & \underbrace{[(\varepsilon, \mathbf{u}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{u})]}_{i-1} (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \\ & \underbrace{(\varepsilon, \mathbf{u}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{u})}_{l-i}]_{l,T,k} = \\ & = (\varepsilon^{i-1} \sigma \varepsilon^{l-i}, (u^{i-1} a_{\varepsilon^{i-1}(1)} u^{l-i}, \dots, u^{i-1} a_{\varepsilon^{i-1}(k)} u^{l-i})) = \\ & = (\sigma, (a_1 u^{l-1}, \dots, a_l u^{l-1})) = \\ & = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) = (\sigma, \mathbf{a}), \end{aligned}$$

то есть

$$\underbrace{[(\varepsilon, \mathbf{u}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{u})]}_{i-1} (\sigma, \mathbf{a}) \underbrace{(\varepsilon, \mathbf{u}), \dots, (\varepsilon, \mathbf{u})}_{l-i}]_{l,T,k} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, $(\varepsilon, \mathbf{u})$ – единица в $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$. Предложение доказано.

Следствие 5.4. Пусть l -арная подгруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$ содержит тождественную подстановку ε , период абелевой группы A делит $l-1$. Тогда для любого $u \in A$ элемент $(\varepsilon, \mathbf{u}) = (\varepsilon, \underbrace{(u, \dots, u)}_k)$ является единицей

в l -арной группе $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$.

6 Операция $[]_{l, \{\sigma\}, k}$

Если для подстановки $\sigma \in S_k$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\}, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$. Поэтому, полагая в теореме 2.1 $T = \{\sigma\}$, получим следующий результат.

Теорема 6.1. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{l, \{\sigma\}, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Следствие 6.1. Если σ – цикл длины k из S_k , то $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{k+1, \{\sigma\}, k} \rangle$ – $(k+1)$ -арная полугруппа.

Полагая в следствии 6.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 6.2. Универсальная алгебра $\langle \{(12 \dots k)\} \times A^k, []_{k+1, \{(12 \dots k)\}, k} \rangle$ является $(k+1)$ -арной полугруппой.

Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\gamma = \sigma^{2-l} = \sigma$. Поэтому, полагая в теореме 3.1 и предложении 3.1 A – группа, $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma \in S_k$, получим следующий результат

Теорема 6.2. Если A – группа, $\sigma^l = \sigma \in S_k$, то $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{l, \{\sigma\}, k} \rangle$ – l -арная группа. Для любого

$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \in \{\sigma\} \times A^k$
элемент

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (b_1, \dots, b_k)),$$

где

$$b_j = a_{\sigma^{-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}, j = 1, \dots, k,$$

является косым элементом в $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{l, \{\sigma\}, k} \rangle$.

Следствие 6.3. Если A – группа, σ – цикл длины k из S_k , то $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{k+1, \{\sigma\}, k} \rangle - (k+1)$ -арная группа. Для любого

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \in \{\sigma\} \times A^k$$

элемент

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (b_1, \dots, b_k)),$$

где

$$b_j = a_{\sigma^{-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}, j = 1, \dots, k,$$

является косым элементом в $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{k+1, \{\sigma\}, k} \rangle$.

Следствие 6.4. Если A – группа, то универсальная алгебра

$$\langle \{(12 \dots k)\} \times A^k, []_{k+1, \{(12 \dots k)\}, k} \rangle$$

является $(k+1)$ -арной группой. Для любого элемента

$$((12 \dots k), \mathbf{a}) = ((12 \dots k), (a_1, \dots, a_k))$$

из $\{(12 \dots k)\} \times A^k$ элемент

$$\overline{((12 \dots k), \mathbf{a})} = ((12 \dots k), (b_1, \dots, b_k)),$$

где

$$b_j = a_{j-1}^{-1} \dots a_1^{-1} a_k^{-1} \dots a_{j+1}^{-1}$$

для любого $j = 1, \dots, k$, является косым элементом в $\langle \{(12 \dots k)\} \times A^k, []_{k+1, \{(12 \dots k)\}, k} \rangle$.

Полагая в теореме 4.1 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma$, получим следующий результат.

Теорема 6.3. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то l -арная полугруппа $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{l, \{\sigma\}, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 6.5. Если σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то l -арная полугруппа $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{k+1, \{\sigma\}, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 6.6. Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то l -арная полугруппа

$$\langle \{(12 \dots k)\} \times A^k, []_{k+1, \{(12 \dots k)\}, k} \rangle$$

не является абелевой.

Полагая в теореме 4.2 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma$, получим следующий результат.

Теорема 6.4. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, группа A содержит более одного элемента, то l -арная группа $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{l, \{\sigma\}, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 6.7. Если σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , группа A содержит более одного элемента, то l -арная группа $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{k+1, \{\sigma\}, k} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 6.8. Если группа A содержит более одного элемента, то l -арная группа $\langle \{(12 \dots k)\} \times A^k, []_{k+1, \{(12 \dots k)\}, k} \rangle$ не является абелевой.

Полагая в теореме 5.1 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma$, получим следующий результат.

Теорема 6.5. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{l, \{\sigma\}, k} \rangle$ нет единиц.

Следствие 6.9. Если σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{k+1, \{\sigma\}, k} \rangle$ нет единиц.

Следствие 6.10. Если полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то в l -арной полугруппе (l -арной группе)

$$\langle \{(12 \dots k)\} \times A^k, []_{k+1, \{(12 \dots k)\}, k} \rangle$$

нет единиц.

7 Операция $[]_{l, \sigma, k}$

В [1], [2] для подстановки $\sigma \in S_k$ и полугруппы A на декартовой степени A^k была определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ по правилу

$$[a_1 \dots a_l]_{l, \sigma, k} =$$

$$= [(a_{11}, \dots, a_{1k}) \dots (a_{l1}, \dots, a_{lk})]_{l, \sigma, k} = (b_1 \dots b_k),$$

где

$$b_j = a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Ясно, что отображение

$$\varphi : (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \rightarrow (a_1, \dots, a_k)$$

является биекцией $\{\sigma\} \times A^k$ на A^k .

Лемма 7.1. Если $\sigma^l = \sigma \in S_k$, то φ – изоморфизм l -арной полугруппы $\langle \{\sigma\} \times A^k, []_{l, \{\sigma\}, k} \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство. Так как

$$\varphi([(\sigma, (a_{11}, \dots, a_{1k})) \dots (\sigma, (a_{l1}, \dots, a_{lk}))]_{l, \{\sigma\}, k}) =$$

$$= \varphi((\sigma^l, (a_{11} a_{2\sigma(1)} \dots$$

$$a_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, a_{1k} a_{2\sigma(k)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(k)})) =$$

$$= (a_{11} a_{2\sigma(1)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, a_{1k} a_{2\sigma(k)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(k)}) =$$

$$= [(a_{11}, \dots, a_{1k}) \dots (a_{l1}, \dots, a_{lk})]_{l, \sigma, k} =$$

$$= [\varphi((\sigma, (a_{11}, \dots, a_{1k}))) \dots \varphi((\sigma, (a_{l1}, \dots, a_{lk})))]_{l, \sigma, k},$$

то φ – искомый изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 7.1 позволяет использовать результаты об операции $[]_{l, \sigma, k}$ из книги [2] для изучения операции $[]_{l, \{\sigma\}, k}$, и наоборот, некоторые результаты из [2] могут быть получены как следствия результатов данной работы.

Теорема 3.1 и лемма 7.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 7.2 [1], [2]. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle - l$ -арная полугруппа.

Теорема 4.2 и лемма 7.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 7.3 [1], [2]. Если A – группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Теорема 6.3 и лемма 7.1 позволяют сформулировать

Следствие 7.1. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевой.

Замечание 7.1. Если в следствии 7.1 убрать условие $\sigma^l = \sigma$, то l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ останется неабелевым [2].

Теорема 6.4 и лемма 7.1 позволяют сформулировать

Следствие 7.2. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, группа A содержит более одного элемента, то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевой.

Теорема 6.5 и лемма 7.1 позволяют сформулировать

Следствие 7.3. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – №3. – С. 28 – 34.
2. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208 – 350.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

Поступила в редакцию 05.07.12.

УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ПРОСТРАНСТВЕ МНОГОМЕРНОГО p -АДИЧЕСКОГО АРГУМЕНТА

Е.В. Губкина¹, К.В. Забелло², М.А. Прохорович², Е.М. Радыно²

¹Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия

²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

THE LUZIN APPROXIMATION OF FUNCTIONS FROM SOBOLEV CLASSES ON THE SPACE OF A MULTIDIMENSIONAL p -ADIC ARGUMENT

E.V. Gubkina¹, K.V. Zabello², M.A. Prokhorovich², Ya.M. Radyna²

¹Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russia

²Belarusian State University, Minsk, Belarus

В работе доказывается аналог теоремы Лузина об исправлении для пространств соболевского типа на p -адических векторах. Результаты были анонсированы в журнале «Доклады национальной академии наук Беларуси».

Ключевые слова: пространства p -адических векторов, пространства Соболева, аппроксимация Лузина.

In this paper we will prove an analog of the Luzin theorem on correction for spaces of Sobolev type over p -adic vectors. The results were announced in «Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus».

Keywords: space of p -adic vectors, Sobolev spaces, Luzin approximation.

Введение

Классическая теорема Н.Н. Лузина утверждает, что любая измеримая на \mathbb{R}^n функция f обладает C -свойством: она является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры. Точнее, для любой измеримой на \mathbb{R}^n функции и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие функции $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и открытое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, для которых

$$f(x) = \varphi(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon,$$

$$\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon \quad (\mu - \text{мера Лебега на } \mathbb{R}^n).$$

Какие дополнительные свойства гладкости может иметь аппроксимирующая функция φ , если функция f является более регулярной в том или ином смысле, например, принадлежит некоторому функциональному пространству? Можно ли утверждать, что φ является глобально близкой к f ?

Эти вопросы исследовались во многих работах, которые в основном были посвящены изучению точечных свойств функций из пространств Соболева $W_\alpha^q(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ – более или менее регулярная область. История этих результатов подробно изложена во введении к статье [1], где рассматривались функции из соболевских классов на произвольных метрических пространствах.

В работе [2] было анонсировано усиление результата из [1] в случае пространств p -адических

векторов \mathbb{Q}_p^n . Приведение полного доказательства и является основной целью нашей работы.

Отметим, что в работе [2] авторы оставили без изменений основную схему рассуждений, приведенную для общих метрических пространств в [1]. В данной работе приведено доказательство, использующее специфику пространств \mathbb{Q}_p^n , что в ряде случаев позволило упростить приведенное в [1] доказательство для общего случая.

Перейдем к точным формулировкам.

1 Метрические пространства с мерой

1.1 Пространства однородного типа

Пусть X – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ . Всюду ниже предполагаем, что мера μ и метрика d связаны условием удвоения: существует постоянная c_μ такая, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq c_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X, r > 0, \quad (1.1)$$

где $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ – шар с центром в точке x радиуса r . В таком случае тройку (X, d, μ) обычно называют пространством однородного типа [3].

Условие удвоения (1.1) допускает количественную переформулировку: существуют числа $c > 0$ и $\delta > 0$, для которых

$$\mu(B(x, R)) \leq c \left[\frac{R}{r} \right]^\delta \mu(B(x, r)), \quad (1.2)$$

где $x \in X, 0 < r \leq R$. Здесь и всюду дальше через c обозначаем различные положительные постоянные, значения которых не играют роли.

Параметр δ из неравенства (1.2) обычно называют показателем удвоения меры или doubling-размерностью – он является адекватной заменой размерности пространства X .

1.2 Максимальные функции Кальдерона–Скотта

Через $L^q = L^q(X)$, $1 \leq q < \infty$, обозначаем обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ . Рассмотрим максимальные функции (на пространстве \mathbb{R}^n они появились в работах А. Кальдерона [4] и А. Кальдерона–Р. Скотта [5]):

$$S_\alpha u(x) = \sup_{B \ni x} [r(B)]^{-\alpha} \int_B |u - u_B| d\mu, \quad (1.3)$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам B радиуса $r(B) \in (0, 1)$, содержащим точку $x \in X$. Здесь и ниже мы используем следующее стандартное обозначение для среднего значения u по шару $B \subset X$:

$$u_B = \int_B u d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B u d\mu.$$

1.3 Классы Кальдерона–Соболева $C_\alpha^q(X)$ и $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -емкости

Для $\alpha > 0$ и $1 < q < \infty$ с помощью максимальных функций (1.3) определим классы

$$C_\alpha^q(X) = \{u \in L^q : \|u\|_{C_\alpha^q} = \|u\|_{L^q} + \|S_\alpha u\|_{L^q} < \infty\}. \quad (1.4)$$

Для \mathbb{R}^n эти классы были введены в [4], а в общем случае в [6], [7]. Класс $C_1^p(X)$ совпадает с классом Хайлаша–Соболева (см. определение (1.7) ниже), а при $X = \mathbb{R}^n$ – с классическим пространством Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ [4].

Рассмотрим емкости, соответствующие классам $C_\alpha^q(X)$:

$$\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = \inf \left\{ \|u\|_{C_\alpha^q(X)}^q : u \in C_\alpha^q(X), \right. \\ \left. u \geq 1 \text{ в окрестности } E \right\}. \quad (1.5)$$

При $\alpha = 1$ они были введены и изучены в [8], а в случае $0 < \alpha \leq 1$ – в [9] (см. также [10]).

1.4 Классы Хайлаша–Соболева $W_\alpha^q(X)$

В дальнейшем нам также потребуется эквивалентное определение классов $C_\alpha^q(X)$.

Приведенные ниже классы $W_1^p(X)$ были введены П. Хайлашем в работе [11]. Как уже отмечалось, в случае $X = \mathbb{R}^n$ они совпадают с классическим пространством Соболева первого порядка [11]. Позже классы $W_\alpha^p(X)$ рассматривались при всех $\alpha > 0$ [6], [7]. В настоящее время есть целый

ряд эквивалентных описаний этих пространств [7], [12].

Пусть $\alpha > 0$ и $1 < q < \infty$. Для функции $u \in L^q$ рассмотрим класс $D_\alpha(u)$, состоящий из всех неотрицательных μ -измеримых функций g на X , для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что при $x, y \in X \setminus E$ выполнено неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)]. \quad (1.6)$$

Введем шкалу пространств Соболева следующим образом:

$$W_\alpha^q(X) = \{u \in L^q : D_\alpha(u) \cap L^q \neq \emptyset\}, \\ \|u\|_{W_\alpha^q(X)} = \left[\|u\|_{L^q}^q + \inf_g \|g\|_{L^q}^q \right]^{1/q}, \quad (1.7)$$

где точная нижняя граница берется по всем функциям $g \in D_\alpha(u) \cap L^q$.

Классы $C_\alpha^q(X)$ и $W_\alpha^q(X)$ совпадают [7], [12]. Мы будем пользоваться обоими определениями (1.4) и (1.7) (в зависимости от того, какое из них удобнее в том или ином рассуждении).

1.5 s -Вместимость Хаусдорфа и классы Гельдера

Напомним определение s -вместимости Хаусдорфа множества $E \subset X$

$$H_\infty^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i) \right\}.$$

Классы Гельдера вводятся обычным способом: если $E \subset X$, то

$$H^\beta(E) = \left\{ \varphi : \|\varphi\|_{H^\beta(E)} = \right. \\ \left. = \sup_{x \neq y, x, y \in E} [d(x, y)]^{-\beta} |\varphi(x) - \varphi(y)| < +\infty \right\}.$$

1.6 Аппроксимация Лузина на пространствах однородного типа

Следуя [1], [13], будем считать, что все локально суммируемые функции на X определяются всюду равенством

$$u(x) = \limsup_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} u d\mu.$$

В работах [1], [11], [13] изучался вопрос об аппроксимации Лузина функций из классов C_α^q на пространствах однородного типа. Итоговый результат выглядит следующим образом:

Теорема 1.1. Пусть $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$,

$1 < q < \delta / \alpha$ и задана функция $u \in C_\alpha^q(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция w и открытое множество $O \subset X$, такие, что

- 1) $\text{Cap}_{\alpha-\beta,q}(O) < \varepsilon$, $H_\infty^{\beta-(\alpha-\beta)q}(O) < \varepsilon$,
- 2) $u = w$ на $X \setminus O$,

3) $w \in C_\alpha^q(X)$ и $w \in H^\beta(B)$ для любого шара $B \subset X$,

$$4) \|u - w\|_{C_\alpha^q(X)} < \varepsilon.$$

При $\beta = \alpha = 1$ подобный результат был получен в [11], где вместо 1) утверждалось, что $\mu(O) < \varepsilon$, а в 3) было $w \in H^1(X)$. Случай $\beta \leq \alpha = 1$ существенно сложнее, он был изучен в [13]. Общий случай рассмотрен в [1].

Однако существуют ситуации, когда классы Гельдера $H^\alpha(X)$ нетривиальны при некоторых значениях $\alpha > 1$ (см., напр. [14]), поэтому условие $\alpha \leq 1$ существенно снижает множество рассматриваемых ситуаций.

В работе [2] показано, как избавиться от ограничения $\alpha \leq 1$ в случае пространств p -адических векторов. Перейдем к рассмотрению соответствующих пространств.

2 Пространства p -адических векторов \mathbb{Q}_p^n

2.1 Определение пространства \mathbb{Q}_p^n

Далее мы будем иметь дело с пространством p -адических векторов. Прежде всего напомним определение (см., например, [15]).

Пусть p – простое число. В поле \mathbb{Q} можно ввести нормирование $|x|_p$ по правилу $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\sigma(x)}$, где число $\sigma(x) \in \mathbb{Z}$ определяется из представления $x = p^\sigma k/l$, в котором $k \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{Z}$ взаимно просты с p .

Пополнение поля \mathbb{Q} по p -адическому нормированию называется полем p -адических чисел и обозначается \mathbb{Q}_p . Пространство \mathbb{Q}_p^n состоит из наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{Q}_p$, $i = 1, 2, \dots, n$, снабжено неархимедовой нормой $\|x\|_{\mathbb{Q}_p^n} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_p$ и расстоянием

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^n}.$$

Отметим, что пространство p -адических векторов \mathbb{Q}_p^n является пространством однородного типа с doubling-размерностью n относительно стандартной меры Хаара μ . Далее на \mathbb{Q}_p^n будем рассматривать лишь эту меру. Классы C_α^q , W_α^q и емкости на \mathbb{Q}_p^n определим так же, как и в общем случае (см. (1.4), (1.7) и (1.5)).

2.2 Аппроксимация Лузина на пространстве \mathbb{Q}_p^n

Доказательство приведенной ниже теоремы 2.1 является основным результатом нашей работы. Ее формулировка имеет в [2] без полного

доказательства, а лишь с указанием, как избавиться от ограничения $\alpha \leq 1$.

Теорема 2.1. Пусть $0 < \beta \leq \alpha$, $1 < q < n/\alpha$, и задана функция $u \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция w и открытое множество $O \subset \mathbb{Q}_p^n$ такие, что

$$1) \text{Cap}_{\alpha-\beta, q}(O) < \varepsilon, H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}(O) < \varepsilon,$$

$$2) u = w \text{ на } \mathbb{Q}_p^n \setminus O,$$

3) $w \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ и $w \in H^\beta(B)$ для любого шара $B \subset X$,

$$4) \|u - w\|_{C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)} < \varepsilon.$$

Еще раз подчеркнем, что при доказательстве теоремы 2.1 мы существенно используем специфику пространства \mathbb{Q}_p^n , что позволяет в ряде случаев заметно упростить рассуждения из [1].

Перейдем к строгим рассуждениям. Прежде всего нам понадобится ряд утверждений, которые являются специфическими для пространства \mathbb{Q}_p^n : в случае общих метрических пространств с мерой некоторые из них верны лишь при $0 < \alpha \leq 1$.

3 Вспомогательные утверждения

Шар радиуса p^γ с центром в точке $x \in \mathbb{Q}_p^n$ будем далее обозначать

$$B_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p^n : \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^n} \leq p^\gamma\}.$$

В случае, когда центр шара не важен для наших рассуждений, мы будем его опускать и писать просто B_γ .

3.1 Массивность множества точек Лебега для функций из классов $u \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$

Напомним, что $x \in \mathbb{Q}_p^n$ называется точкой Лебега для функции $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{Q}_p^n)$, если

$$u(x) = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu. \quad (3.1)$$

Классическая теорема Лебега утверждает, что для любой локально интегрируемой на \mathbb{R}^n функции почти все точки являются точками Лебега относительно обычной меры Лебега. Для функций из классов $C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ можно утверждать большее.

Лемма 3.1. Пусть $\alpha > 0$, $1 < q < n/\alpha$, и функция $u \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$. Тогда существует такое множество $E \subset \mathbb{Q}_p^n$, что для любого $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus E$ существует предел (3.1) и справедливы следующие оценки массивности множества E :

$$1) \text{Cap}_{\alpha, q}(E) = 0,$$

$$2) H_\infty^s(E) = 0 \text{ для всех } s > n - \alpha q.$$

В общем случае пространств однородного типа при $\alpha = 1$ утверждение 1) доказано в [16], а утверждение 2) – в [13]. Случай $0 < \alpha \leq 1$ рассмотрен в [9] и [17] соответственно.

Утверждение 1) верно в общем случае только для $0 < \alpha \leq 1$, однако в случае пространства \mathbb{Q}_p^n оно остается в силе при любом $\alpha > 0$ [18]. Утверждение 2) остается в силе для любых $\alpha > 0$ и для общего случая [19].

3.2 Неравенства для средних Стеклова

При доказательстве основного результата нам понадобятся следующие вспомогательные неравенства, в которых фигурируют средние Стеклова. В общем случае доказательство неравенств приведено в [1, лемма 4].

Лемма 3.2. Пусть $\beta > 0$ и функция $u \in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$.

Тогда

1) Если $B_\gamma(x) \subset B_{\gamma+1}(y)$, то

$$|u_{B_{\gamma+1}(y)} - u_{B_\gamma(x)}| \leq c p^{\beta(\gamma+1)} S_\beta u(y).$$

2) Если x – точка Лебега функции u , то

$$|u_{B_\gamma(x)} - u(x)| \leq c p^{\beta\gamma} S_\beta u(x).$$

3.3 Весовое L^q -неравенство

Нам также понадобится весовое L^q -неравенство для $S_\beta u$ [1, лемма 5].

Лемма 3.3. Пусть $p > 0$, $0 < \beta < \alpha$, а мера μ и внешняя мера ν связаны условием

$$\nu(B_\gamma(x)) \leq c(p^\gamma)^{-(\alpha-\beta)q} \mu(B_\gamma(x)), \quad (3.2)$$

$$x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad \gamma < 0.$$

Тогда для $u \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p^n)$ справедливо неравенство

$$\|S_\beta u\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \leq c \|S_\alpha u\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Здесь для борелевской функции u и внешней меры ν на \mathbb{Q}_p^n использовано обозначение

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}^q = q \int_0^\infty \lambda^{q-1} \nu\{|u| > \lambda\} d\lambda, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Конечно, если ν является мерой, то $\|u\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}$ совпадает с обычной нормой

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} = \left[\int_{\mathbb{Q}_p^n} |u|^q d\nu \right]^{1/q}.$$

3.4 Свойства $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -емкостей

Необходимые нам свойства $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -емкостей собраны в следующей лемме.

Лемма 3.4. Пусть $E \subset \mathbb{Q}_p^n$, $\alpha > 0$ и $n > \alpha q$, тогда:

1) Емкость $\text{Cap}_{\alpha,q}$ является внешней мерой и

$$\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = \inf \left\{ \text{Cap}_{\alpha,q}(O) : E \subset O, O \text{ – открыто} \right\}.$$

2) $\text{Cap}_{\alpha,q}(B_\gamma(x)) \leq c p^{-\alpha q \gamma} \mu(B_\gamma(x))$,

$$x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad \gamma < 0.$$

3) При $0 < \beta \leq \alpha$ из $\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ следует

$$\text{Cap}_{\beta,q}(E) = 0.$$

Доказательство свойства 1) для метрических пространств приведено в [8, теорема 3.2 и замечание 3.3] для $\alpha = 1$. Оно остается в силе для любых $\alpha > 0$, что отмечалось в [10].

Утверждение 2) на пространствах однородного типа верно, по-видимому, лишь для $0 < \alpha \leq 1$ [10, теорема 1]. Однако, в случае пространств \mathbb{Q}_p^n оно сохраняется для любых $\alpha > 0$ (см. [20, лемма 5.4]).

Свойство 3) следует из очевидного неравенства $\text{Cap}_{\beta,p}(E) \leq c \text{Cap}_{\alpha,p}(E)$, которое легко получить из определений (1.3), (1.4) и (1.5).

3.5 Лемма о покрытиях

В общем случае произвольных пространств однородного типа обычно используются более сложные покрытия, в отличие от приведенного в лемме 3.5 (см., например, [1, лемма 7]).

Лемма 3.5. Пусть $O \subset \mathbb{Q}_p^n$ – открытое множество, $O \neq \mathbb{Q}_p^n$ и $\mu(O) < \infty$. Тогда существует набор шаров $\mathcal{B} = \{B_{\gamma_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$, такой, что:

1) шары $B_{\gamma_i}(x_i)$ попарно не пересекаются,

2) $\bigcup_{i=1}^\infty B_{\gamma_i}(x_i) = O$,

3) $B_{\gamma_i}(x_i) \subset O$ для любого $i = 1, 2, \dots$,

4) $B_{\gamma_{i+1}}(x_{i+1}) \cap (\mathbb{Q}_p^n \setminus O) \neq \emptyset$ для любого i .

Доказательство. Множество \mathcal{B} будем строить по индукции. Прежде всего отметим, что так как $\mu(O) < \infty$, то существует число γ_0 , такое, что $\mu(B_{\gamma_0}) \leq \mu(O) < \mu(B_{\gamma_0+1})$.

На первом шаге индукции построим разбиение $\{B_{\gamma_0}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ пространства \mathbb{Q}_p^n непересекающимися шарами радиуса p^{γ_0} и выберем из него шары, целиком лежащие в O . Из них составим множество

$$\mathcal{B}_0 = \{B_{\gamma_0}(x_i) : B_{\gamma_0}(x_i) \subset O\}.$$

На втором шаге построим новое разбиение $\{B_{\gamma_0-1}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ пространства \mathbb{Q}_p^n непересекающимися шарами радиуса p^{γ_0-1} . (Отметим, что набор $\{x_i\}$ центров шаров свой для каждого шага.) Из разбиения $\{B_{\gamma_0-1}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ выберем шары, целиком лежащие в $O \setminus \mathcal{B}_0$ (здесь под разностью $O \setminus \mathcal{B}_0$ понимаем разность множества O и объединения

всех шаров, входящих в \mathcal{B}_0), и составим из них множество

$$\mathcal{B}_1 = \{B_{\gamma_0-1}(x_i) : B_{\gamma_0-1}(x_i) \subset O \setminus \mathcal{B}_0\}.$$

На $(k+1)$ -м шаге пространство \mathbb{Q}_p^n разбивается шарами радиуса p^{γ_0-k} и строится множество

$$\mathcal{B}_k = \left\{ B_{\gamma_0-k}(x_i) : B_{\gamma_0-k}(x_i) \subset O \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}_j \right) \right\},$$

где разность множества O и семейства шаров понимается, как и на втором шаге.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что шары из множества $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.5.

Теперь мы готовы перейти к доказательству теоремы 2.1.

4 Доказательство теоремы 2.1

Сначала докажем теорему в предположении, что для некоторого $x_0 \in \mathbb{Q}_p^n$

$$\text{supp } u \subset B_0(x_0) = B_0. \quad (4.1)$$

4.1 Оценка исключительного множества

Пусть Λ – множество точек, в которых не выполнено условие (3.1).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу леммы 3.1 $H_{\infty}^{n-(\alpha-\beta)q}(\Lambda) = 0$, а в силу лемм 3.1 и 3.4 $\text{Cap}_{\alpha-\beta,q}(\Lambda) = 0$. Следовательно, существует такое открытое множество $L \supset \Lambda$, что

$$\begin{aligned} \text{Cap}_{\alpha-\beta,q}(L) &< \varepsilon / 2, \\ H_{\infty}^{n-(\alpha-\beta)q}(L) &< \varepsilon / 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Заметим далее, что $\mathcal{S}_{\beta}u(x) = 0$ для любой точки $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus B_0$ (так как $\text{dist}(x, B_0) > 1$), следовательно,

$$E_{\lambda} = \{x \in \mathbb{Q}_p^n : \mathcal{S}_{\beta}u(x) > \lambda\} \subset B_0.$$

Легко видеть, что множество $O = E_{\lambda} \cup L$ открыто и $O \subset B_0$. Покажем, что для достаточно больших λ множество O удовлетворяет требованиям нашей теоремы.

В силу части 2) леммы 3.4 выполнено условие (3.2) леммы 3.3. Поэтому, применяя лемму 3.3 к $\nu = \text{Cap}_{\alpha-\beta,q}$ получаем

$$\text{Cap}_{\alpha-\beta,q}(E_{\lambda}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Вместимость $H_{\infty}^{n-(\alpha-\beta)q}(O)$ также оцениваем с помощью леммы 3.3, но применяем мы ее уже к $\nu = H_{\infty}^{n-(\alpha-\beta)q}$. Условие (3.2) сейчас выполнено, так как

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{n-(\alpha-\beta)q}(B_{\gamma}(x)) &\leq (p^{\gamma})^{n-(\alpha-\beta)q} \leq \\ &\leq c(p^{\gamma})^{-(\alpha-\beta)q} \mu(B_{\gamma}(x)). \end{aligned}$$

Итак, в силу леммы 3.3

$$H_{\infty}^{n-(\alpha-\beta)q}(E_{\lambda}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Из (4.2) и (4.3), (4.4) следует, что при достаточно большом $\lambda > 0$ для множества O утверждение 1) теоремы 2.1 выполнено.

Для дальнейшего нам понадобится также выбрать $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\int_O |u|^q d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.5)$$

Это возможно в силу уже доказанного утверждения 1) теоремы 2.1, очевидного неравенства $\mu(E) \leq \text{Cap}_{\alpha-\beta,q}(E)$ и абсолютной непрерывности интеграла.

4.2 Построение аппроксимирующей функции w

Пусть $\mathcal{B} = \{B_{\gamma_i}(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ – покрытие множества O из леммы 3.5. Определим функцию w следующим образом:

$$w(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O, \\ u_{B_{\gamma_i}(x_i)}, & x \in B_{\gamma_i}(x_i). \end{cases} \quad (4.6)$$

Утверждение 2) теоремы 2.1 следует непосредственно из определения w .

4.3 Оценка гладкости функции w

4.3.1 Вспомогательное рассуждение

Пусть $x \in O$, тогда найдется k , такое, что $x \in B_{\gamma_k}(x_k) \in \mathcal{B}$. В силу утверждения 4) леммы 3.5 существует такая точка $x^* \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$, что $d(x, x^*) = p^{\gamma_k+1}$.

Заметим, что $x^* \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ – точка Лебега, $B_{\gamma_k}(x_k) \subset B_{\gamma_{k+1}}(x^*)$ и $\mathcal{S}_{\beta}u(x^*) \leq \lambda$. Далее воспользуемся определением функции w (4.6) и леммой 3.2

$$\begin{aligned} |w(x^*) - w(x)| &= |u(x^*) - u_{B_{\gamma_k}(x_k)}| \leq \\ &\leq |u(x^*) - u_{B_{\gamma_{k+1}}(x^*)}| + |u_{B_{\gamma_{k+1}}(x^*)} - u_{B_{\gamma_k}(x_k)}| \leq \\ &\leq cp^{\beta(\gamma_k+1)} \mathcal{S}_{\beta}u(x^*) = \\ &= c[d(x, x^*)]^{\beta} \mathcal{S}_{\beta}u(x^*) \leq c\lambda [d(x, x^*)]^{\beta}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.3.2 Принадлежность функции w классу Гельдера

Покажем, что $w \in H^{\beta}(\mathbb{Q}_p^n)$. Для этого рассмотрим все возможные случаи расположения точек $x, y \in \mathbb{Q}_p^n$.

i) Пусть $x, y \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ и $d(x, y) = p^{\gamma}$, тогда $B_{\gamma^*}(x) = B_{\gamma^*}(y)$. Так как x, y – точки Лебега и для любой точки $z \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ выполнено $\mathcal{S}_{\beta}u(z) \leq \lambda$, то по лемме 3.2

$$|w(y) - w(x)| \leq$$

$$\leq |u(y) - u_{B_{\gamma^*}(y)}| + |u(x) - u_{B_{\gamma^*}(x)}| \leq cp^{\beta\gamma^*} \mathcal{S}_\beta u(y) + cp^{\beta\gamma^*} \mathcal{S}_\beta u(x) \leq c\lambda[d(x, y)]^\beta. \quad (4.8)$$

ii) Пусть $x, y \in O$. Обозначим

$$d_0 = \max\{\text{dist}(x, \mathbb{Q}_p^n \setminus O), \text{dist}(y, \mathbb{Q}_p^n \setminus O)\}. \quad (4.9)$$

Если $d(x, y) \geq d_0$, то подберем $x^*, y^* \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ так, чтобы

$$d(x, x^*) = \text{dist}(x, \mathbb{Q}_p^n \setminus O)$$

и

$$d(y, y^*) = \text{dist}(y, \mathbb{Q}_p^n \setminus O).$$

Тогда из (4.7) и (4.8)

$$\begin{aligned} & |w(y) - w(x)| \leq \\ & \leq |w(x) - w(x^*)| + |w(x^*) - w(y^*)| + \\ & + |w(y^*) - w(y)| \leq c\lambda[d(x, y)]^\beta. \end{aligned}$$

Если $d(x, y) < d_0$, то в силу утверждения 4) леммы 3.5 нетрудно показать, что существует k , такое, что $x, y \in B_{\gamma^k}(x_k) \in \mathcal{B}$. Следовательно, $w(y) = w(x)$ и необходимое неравенство выполнено автоматически.

iii) Пусть $x \in O$, а $y \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$. Выберем $x^* \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ так, чтобы $d(x, x^*) = \text{dist}(x, \mathbb{Q}_p^n \setminus O)$. Тогда в силу (4.7) и (4.8)

$$\begin{aligned} & |w(y) - w(x)| \leq \\ & \leq |w(y) - w(x^*)| + |w(x^*) - w(x)| \leq \\ & \leq c\lambda[d(x, y)]^\beta. \end{aligned}$$

Таким образом, $w \in H^\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ в силу i)–iii).

4.3.3 Принадлежность функции w классу Соболева

Учитывая определение классов $C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ (1.4), нам достаточно показать, что $w \in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\mathcal{S}_\alpha w \in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

Принадлежность функции w классу $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$. Учитывая определение функции w (4.6), условия 1)–2) леммы 3.5 и применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} \int_O |w|^q d\mu &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} |u_{B_{\gamma^i}(x_i)}|^q d\mu \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} |u|^q d\mu = \int_O |u|^q d\mu. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Так как $w = u$ на $\mathbb{Q}_p^n \setminus O$, то $w \in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

Принадлежность функции $\mathcal{S}_\alpha w$ классу $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$. Покажем, что $\mathcal{S}_\alpha w \leq \mathcal{S}_\alpha u$. Из определения (1.3) следует, что достаточно показать лишь

$$\int_B |w - w_B| d\mu \leq \int_B |u - u_B| d\mu \quad (4.11)$$

для любого шара $B \subset \mathbb{Q}_p^n$. Рассмотрим три случая:

i) Если $B \subset \mathbb{Q}_p^n \setminus O$, то в силу (4.6) $u = w$ на шаре B и (4.11) выполнено.

ii) Пусть $B \subset O$. Тогда из леммы 3.5 следует, что найдется k , такое что $B \subset B_{\gamma^k}(x_k) \in \mathcal{B}$. Тогда в силу (4.6) $w(x) = u_{B_{\gamma^k}(x_k)} = w_B$ и на шаре B выполнено $|w - w_B| = 0$, что влечет (4.11).

iii) Если $B \cap O \neq \emptyset$ и $(B \setminus O) \neq \emptyset$, то из леммы 3.5 следует, что найдется множество индексов I_B таких, что $B \cap O = \bigcup_{i \in I_B} B_{\gamma^i}(x_i)$, где $B_{\gamma^i}(x_i) \in \mathcal{B}$.

Сначала воспользуемся (4.6) и оценим интеграл от функции w по шару B

$$\begin{aligned} \int_B w d\mu &= \int_{B \setminus O} u d\mu + \sum_{i \in I_B} \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} u_{B_{\gamma^i}(x_i)} d\mu = \\ &= \int_{B \setminus O} u d\mu + \sum_{i \in I_B} \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} u d\mu = \int_B u d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно, $w_B = u_B$.

Переходим к оценке левой части неравенства (4.11):

$$\begin{aligned} \int_B |w - w_B| d\mu &= \int_B |w - u_B| d\mu = \\ &= \sum_{i \in I_B} \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} |w - u_B| d\mu + \int_{B \setminus O} |w - u_B| d\mu. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Заметим, что в силу (4.6)

$$\int_{B \setminus O} |w - u_B| d\mu = \int_{B \setminus O} |u - u_B| d\mu. \quad (4.13)$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} |w - u_B| d\mu &= \\ &= \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} |u_{B_{\gamma^i}(x_i)} - u_B| d\mu \leq \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} |u - u_B| d\mu. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Продолжим (4.12) с учетом (4.13) и (4.14):

$$\begin{aligned} \int_B |w - w_B| d\mu &\leq \\ &\leq \sum_{i \in I_B} \int_{B_{\gamma^i}(x_i)} |u - u_B| d\mu + \int_{B \setminus O} |u - u_B| d\mu = \\ &= \int_B |u - u_B| d\mu, \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{S}_\alpha w(x) \leq \mathcal{S}_\alpha u(x)$ и, так как $u \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$, то $w \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

4.4 Оценка нормы отклонения $\|u - w\|_{C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)}$

В этом разделе нам потребуется эквивалентное определение классов (1.7) и максимальная функция (4.15).

4.4.1 Максимальная функция Харди–Литтлвуда

Максимальная функция Харди–Литтлвуда вводится обычным способом

$$Mu(x) = \sup_B \int_B |u| d\mu, \quad (4.15)$$

где супремум берется по всем шарам B , содержащим точку $x \in \mathbb{Q}_p^n$. Она удовлетворяет стандартному неравенству

$$\|Mu\|_{L^q} \leq c \|u\|_{L^q}, \quad u \in L^q, \quad q > 1$$

(см., например, [3]).

4.4.2 Основная оценка

Для начала выберем функцию $g \in D_\alpha(u) \cap L^q$ и покажем, что для некоторой постоянной c верно $cMg \in D_\alpha(w) \cap L^q$.

Снова рассмотрим возможные случаи расположения точек $x, y \in \mathbb{Q}_p^n$.

i) Если $x, y \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$, то $w = u$ и, в силу того, что $g(x) \leq Mg(x)$ для μ -почти всех x , μ -почти всюду на $\mathbb{Q}_p^n \setminus O$ выполнено

$$\begin{aligned} |w(x) - w(y)| &= |u(x) - u(y)| \leq \\ &\leq [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)] \leq \\ &\leq [d(x, y)]^\alpha [Mg(x) + Mg(y)]. \end{aligned}$$

ii) Если $x, y \in O$, то сначала предположим, что $d(x, y) \leq d_0$ (см. (4.9)). Это значит, что обе точки лежат в одном шаре B_{γ_i} из покрытия $\mathcal{B} = \{B_{\gamma_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$. А тогда $w(x) = w(y)$ и необходимое неравенство выполнено автоматически.

Пусть $d(x, y) > d_0$. Отметим, что для любого шара $B \subset \mathbb{Q}_p^n$, любой функции $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ и $g \in D_\alpha(u) \cap L^q$ справедливо (для доказательства достаточно дважды проинтегрировать (1.6) по шару B)

$$\int_{B_\gamma} |u - u_{B_\gamma}| d\mu \leq c(p^\gamma)^\alpha \int_{B_\gamma} g d\mu,$$

откуда легко следует, что

$$|u(x) - u_{B_{\gamma_k}(x_k)}| \leq cp^{\gamma_k \alpha} Mg(x). \quad (4.16)$$

Существует такие k и l , что $x \in B_{\gamma_k}(x_k)$, $y \in B_{\gamma_l}(x_l)$. Тогда из (4.16)

$$\begin{aligned} |w(y) - w(x)| &\leq |u_{B_{\gamma_k}(x_k)} - u(x)| + \\ &+ |u_{B_{\gamma_l}(x_l)} - u(y)| + |u(x) - u(y)| \leq \\ &\leq cp^{\gamma_k \alpha} Mg(x) + cp^{\gamma_l \alpha} Mg(y) + \\ &+ [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)]. \end{aligned}$$

Так как $d(x, y) \geq d_0$ и $g(x) \leq Mg(x)$ для μ -почти всех x , то

$$\begin{aligned} |w(y) - w(x)| &\leq \\ &\leq c[d(x, y)]^\alpha [Mg(x) + Mg(y)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

iii) Пусть $x \in O$ и $y \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$. Тогда в силу (4.6)

$$\begin{aligned} |w(y) - w(x)| &= |u(y) - u_{B_{\gamma_l}(x_l)}| \leq \\ &\leq \int_{B_{\gamma_l}(x_l)} |u(x) - u(y)| d\mu(y) \leq \\ &\leq c[d(x, y)]^\alpha [Mg(x) + Mg(y)]. \end{aligned}$$

Пусть $g \in D_\alpha(u) \cap L^q$. Заметим, что

$$c(Mg)\chi_O \in D_\alpha(u - w) \cap L^q,$$

где χ_O – характеристическая функция множества O . Отсюда $\|c(Mg)\chi_O\|_{L^q} \leq \varepsilon/2$ и

$$\|u - w\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)} \leq \|u - w\|_{L^q} + \|c(Mg)\chi_O\|_{L^q} \leq c\varepsilon$$

(неравенство $\|u - w\|_{L^q} < c\varepsilon$ справедливо в силу (4.6), (4.5) и (4.10)).

Основная оценка справедлива в силу эквивалентности норм классов W_α^q и C_α^q .

4.5 Переход к глобальной форме теоремы

Теперь нужно избавиться от ограничения (4.1). Построим разбиение множества \mathbb{Q}_p^n единичными шарами. Обозначим через ψ_i характеристические функции этих шаров, через x_i – их центры.

Так как ψ_i – гельдеровские функции, то $u\psi_i \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ для любой $u \in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$. (Это утверждение доказано в [13] для $\alpha=1$, для других α доказательство такое же.) Тогда по доказанному выше для любого $i=1, 2, 3, \dots$, существует функция w_i такая, что

$$\begin{aligned} H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q} \left(\{x \in \mathbb{Q}_p^n : w_i(x) \neq u\psi_i(x)\} \right) &\leq 2^{-i} \varepsilon, \\ \text{supp } w_i &\subset B_0(x_i), \\ \text{Cap}_{\alpha-\beta, q} \left(\{x \in \mathbb{Q}_p^n : w_i(x) \neq u\psi_i(x)\} \right) &\leq 2^{-i} \varepsilon, \\ w_i &\in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n) \cap H^\beta(\mathbb{Q}_p^n), \\ \|w_i - u\psi_i\|_{C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)} &\leq 2^{-i} \varepsilon. \end{aligned}$$

Функция $w = \sum_{i=1}^\infty w_i$ удовлетворяет необходимым условиям. Свойства 1), 2) и 4) очевидны, ясно также, что $w \in C_\alpha^p(\mathbb{Q}_p^n)$.

Покажем, что w принадлежит классу Гельдера $H^\beta(B)$ для любого шара $B \subset \mathbb{Q}_p^n$. Пусть

$$I_B = \{i : B_0(x_i) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Число элементов множества I_B конечно, следовательно, при всех $x, y \in B$

$$\begin{aligned} |w(x) - w(y)| &= \left| \sum_{i \in I_B} [w_i(x) - w_i(y)] \right| \leq \\ &\leq d^\beta(x, y) \sum_{i \in I_B} \|w_i\|_{H^\beta(\mathbb{Q}_p^n)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов, В.Г. Аппроксимация Лузина функций из классов W_α^p на метрических пространствах с мерой / В.Г. Кротов, М.А. Прохорович // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 5. – С. 55–66.
 2. Аппроксимация Лузина функций из классов Соболева на пространстве p -адических векторов / Е.В. Губкина [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 16–18.
 3. Coifman, R.R. Lecture Notes in Mathematics: Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenes / R.R. Coifman, G. Weiss. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971. – 160 p.
 4. Calderón, A.P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions / A.P. Calderón // Studia Mathematica. – 1972. – Vol. 44. – P. 561–582.
 5. Calderón, A.P. Sobolev type inequalities for $p > 0$ / A.P. Calderón, R. Scott // Studia Mathematica. – 1978. – Vol. 62. – P. 75–92.
 6. Hu, J. A note on Hajlasz–Sobolev spaces on fractals / J. Hu // Journal of mathematical analysis and applications. – 2003. – Vol. 280, 1. – P. 91–101.
 7. Yang, D. New characterization of Hajlasz–Sobolev spaces on metric spaces / D. Yang // Science in China (series A). – 2003. – Vol. 46, № 5. – P. 675–689.
 8. Kinnunen, J. The Sobolev capacity on metric spaces / J. Kinnunen, O. Martio // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica. – 1996. – Vol. 21. – P. 367–382.
 9. Прохорович, М.А. Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша–Соболева на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2006. – № 1. – С. 19–23.
 10. Прохорович, М.А. Соболевские емкости на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Вестник БГУ. Серия 1: Физика, Математика, Информатика. – 2007. – № 3. – С. 106–111.
 11. Hajlasz, P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces / P. Hajlasz // Potential Analysis. – 1996. – Vol. 5, № 4. – P. 403–415.
 12. Иванишко, И.А. Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой / И.А. Иванишко // Математические заметки. – 2005. – Т. 77, № 6. – С. 937–940.
 13. Hajlasz, P. Hölder qasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces / P. Hajlasz, J. Kinnunen // Revista Matemática Iberoamericana. – 1998. – Vol. 14, № 3. – P. 601–622.
 14. Jonsson, A. Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions / A. Jonsson // Journal of mathematical analysis and applications. – 2004. – Vol. 290, № 1. – P. 86–104.
 15. Schikhof, W. Ultrametric calculus. An introduction to p -adic analysis / W. Schikhof. – Cambridge: Cambridge University Press, 1984. – 306 p.
 16. Kinnunen, J. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces / J. Kinnunen, V. Latvala // Revista Matemática Iberoamericana. – 2002. – Vol. 18, № 3. – P. 685–700.
 17. Прохорович, М.А. Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W_α^p на метрических пространствах / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 1. – С. 99–107.
 18. Олешкевич, Д.Н. Точки Лебега для функций из классов Соболева на пространстве p -адических чисел / Д.Н. Олешкевич, М.А. Прохорович // Вестник БрГУ. Серия 4: Физика, Математика. – 2010. – № 2. – С. 103–110.
 19. Прохорович, М.А. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W_α^p , $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 4. – С. 616–621.
 20. Олешкевич, Д.Н. Пространства функций экспоненциального типа и соболевские пространства функций p -адического аргумента : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. / Д.Н. Олешкевич. – Минск, 2011. – 102 с.
- М.А. Прохорович выполнял работу при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М – 036).*

Поступила в редакцию 30.03.13.

УДК 512.542

КРИТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ЛОКАЛЬНОЙ СВЕРХРАДИКАЛЬНОЙ ФОРМАЦИИ

С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

CRITICAL GROUPS OF HEREDITARY LOCAL SUPERRADICAL FORMATION

S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyaynov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel

В работе для наследственной локальной сверхрадикальной формации описаны все критические группы с единичной подгруппой Фраттини. Построены новые примеры наследственных локальных сверхрадикальных формаций.

Ключевые слова: *формация, сверхрадикальная формация, критическая группа, простая неабелева группа.*

In this paper all critical groups with an identity Frattini subgroup for hereditary local superradical formation are described. New examples of hereditary local superradical formations are obtained.

Keywords: *formation, superradical formation, critical group, simple non-abelian group.*

Введение

В Коуровской тетради [1] под номером 14.99 сформулирована задача описания локальных сверхрадикальных формаций. Частные аспекты ее решения приведены в работах [2]–[4].

Как показывает практика рассмотрения частных случаев отмеченной задачи, при ее решении центральную роль играют критические группы формаций. В работах [2]–[4] в качестве нетривиальных критических групп авторами выбирались группы Шмидта. Такое ограничение позволяет достаточно оперативно установить структуру значений локальных экранов рассматриваемых формаций и описать их.

Однако нетривиальные критические группы локальной сверхрадикальной формации далеко не исчерпываются только группами Шмидта. Полное описание минимальных не \mathfrak{F} -групп в случае, когда локальная сверхрадикальная формация \mathfrak{F} является наследственной, приводится в настоящей работе. Реальность таких минимальных не \mathfrak{F} -групп подтверждается в примерах и предложениях раздела 3 построением локальных сверхрадикальных формаций, отличных от тех, которые описаны в [2]–[4].

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [5]–[8].

1 Основные определения

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется \mathfrak{F} -корадикалом группы G).

Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Формация \mathfrak{F} называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) \mathfrak{F} – нормально наследственная формация;
- 2) любая группа $G = AB$, где A и B – \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы из G , принадлежит \mathfrak{F} .

Критической группой (минимальной не \mathfrak{F} -группой) формации \mathfrak{F} называется группа, не принадлежащая \mathfrak{F} , все собственные подгруппы которой принадлежат \mathfrak{F} . Критическая группа формации всех нильпотентных групп – это *группа Шмидта*.

Конечную группу G , которая не имеет факторизаций $G = AB$, где A и B – собственные подгруппы группы G , будем называть *нефакторизуемой группой*.

2 Описание критических групп

Основная цель работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная локальная сверхрадикальная формация и G – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) группа G имеет простой порядок p , причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) группа G является группой Шмидта;

- 3) G – простая неабелева группа;
 4) G – примитивная группа с абелевым цоколем N и $G = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M / \Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} ;
 5) G – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и G / N – циклическая q -группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$;
 6) G – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $(G / N) / \Phi(G / N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Доказательство.

Шаг 1. Группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N .

Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$. Поэтому из $M \in \mathfrak{F}$ и $G / N \cong M / M \cap N$ следует, что $G / N \in \mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G , отличная от N , то аналогично показывается, что $G / L \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \cong G / N \cap L \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$. Значит, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Шаг 2. Справедливо включение $C_G(N) \subseteq N$, причем $C_G(N) = N$, если N – абелева группа, и $C_G(N) = 1$, если N – неабелева группа.

Утверждение следует из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$.

Шаг 3. Подгруппа N является \mathfrak{F} -корадикалом группы G .

Утверждение следует из определения минимальной не \mathfrak{F} -группы и того, что $G / N \in \mathfrak{F}$.

Шаг 4. Если $G^{\mathfrak{F}} = G$, то либо G – группа простого порядка p , где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, либо G – простая неабелева группа.

Если $G^{\mathfrak{F}} = G$, то из равенства $G^{\mathfrak{F}} = N$ следует, что G – простая группа. При этом если G – абелева группа порядка p , то из $G \notin \mathfrak{F}$ следует $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Шаг 5. Если N – собственная подгруппа группы G , то либо G / N – циклическая q -группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$, либо $(G / N) / \Phi(G / N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Предположим, что в G / N имеются две максимальные подгруппы M_1 / N и M_2 / N такие, что $M_1 M_2 = G$. Тогда из определения минимальной не \mathfrak{F} -группы и равенства $G^{\mathfrak{F}} = N$ следует, что M_1 и M_2 – \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы

группы G . Так как формация \mathfrak{F} является сверхрадикальной, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$.

Значит, G / N – нефакторизуемая группа. Если группа G / N разрешима, то, очевидно, она является циклической q -группой для некоторого простого числа q . Так как $G / N \in \mathfrak{F}$, то $q \in \pi(\mathfrak{F})$.

Если группа G / N не является разрешимой, то из того, что она не является факторизуемой группой, следует, что в ее главном ряду имеется только один нефраттиниев главный фактор, который является неабелевым и имеет вид $(G / N) / \Phi(G / N)$. Очевидно, $(G / N) / \Phi(G / N)$ – нефакторизуемая группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Шаг 6. Если G – разрешимая группа непростого порядка, то она является группой Шмидта.

Из предыдущего пункта следует, что G / N является циклической q -группой для некоторого простого q и принадлежит формации \mathfrak{F} . Если N является q -группой, то и G будет q -группой. Но тогда из локальности формации \mathfrak{F} следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$.

Следовательно, N является p -группой и $p \neq q$. Пусть M – силовская q -подгруппа группы G . Покажем, что $|M| = q$.

Предположим, что $|M| = q^n$ и $n > 1$. Пусть E и L – циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q . Обозначим через T регулярное сплетение $EwrL$. Если K – база сплетения, то $T = [K]L$.

Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . На основании теоремы 4.7 из [5] формация $f(p)$ является наследственной для любого простого p . Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $M \cong G / N = G / C_G(N) \notin f(p)$. Предположим, что $T \in f(p)$. Так как ввиду утверждения А.18.9 из [6] подгруппа M изоморфна некоторой подгруппе группы T , то из наследственности формации $f(p)$ имеем, что $M \in f(p)$. Пришли к противоречию с тем, что $M \notin f(p)$. Значит, $T \notin f(p)$. Отметим, что T – q -группа и $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому из локальности формации \mathfrak{F} следует, что $T \in \mathfrak{F}$.

Пусть $R = PwrT$, где P – циклическая группа порядка p . Обозначим через C базу сплетения R . Тогда $R = [C]T = [C]([K]L)$. Так как $R / C \cong T \in \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. Следовательно, подгруппы CK и CL \mathfrak{F} -субнормальны в R . Кроме того, из локальности формации \mathfrak{F} следует, что

$CK \in \mathfrak{F}$ и $CL \in \mathfrak{F}$. Поскольку формация \mathfrak{F} является сверхрадикальной, то $R \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из равенства $F_p(R) = C$ имеем, что $T \cong R/C \in f(p)$. Получили противоречие. Значит, $n = 1$.

Теперь простая проверка показывает, что в группе G все максимальные подгруппы нильпотентны. Так как сама группа не является нильпотентной, то G – группа Шмидта.

Шаг 7. Если G – неразрешимая группа с абелевым цоколем N и $(|N|, |G/N|) \neq 1$, то $G = [N]M$, где M – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Из утверждения 5 следует, что $(G/N)/\Phi(G/N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} . Пусть M – максимальная подгруппа группы G , не содержащая N . Так как подгруппа N абелева, то M дополняет N в группе G . Значит, $M \cong G/N$, а потому $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} . Обозначим группу $M/\Phi(M)$ через A .

Предположим, что $\Phi(M) \neq 1$. Обозначим через T регулярное сплетение $\Phi(M)wrA$. Если K – база сплетения, то $T = [K]A$.

Пусть $|N| = p^k$. Предположим, что $T \in f(p)$. Так как ввиду А.18.9 из [6] подгруппа M изоморфна некоторой подгруппе группы T , то из наследственности формации $f(p)$ имеем, что $M \in f(p)$. Но так как группа G не входит в формацию \mathfrak{F} , то $M \cong G/N = G/C_G(N) \notin f(p)$. Пришли к противоречию. Значит, $T \notin f(p)$.

Рассмотрим группу $R = PwrT$, где P – группа порядка p . Обозначим через C базу сплетения R . Тогда $R = [C]T = [C]([K]A)$.

Так как $A \in \mathfrak{F}$, то из того, что A – простая неабелева группа, следует $A \in f(q)$ для любого $q \in \pi(A)$. Кроме того, из свойств подгруппы Фраттини имеем, что $\pi(\Phi(M)) \subseteq \pi(A)$ и K – нильпотентная группа. Поэтому для любого T -главного фактора L/S группы K справедливо включение $K \subseteq C_T(L/S)$. Это означает, что группа $T/C_T(L/S)$ принадлежит формации $f(q)$ как гомоморфный образ группы $T/K \cong A$. Таким образом, все главные факторы группы T являются f -центральными. Поэтому из определения локальной формации следует, что $T \in \mathfrak{F}$.

Так как $R/C \cong T \in \mathfrak{F}$, то $R^\delta \subseteq C$. Следовательно, подгруппы CK и CA \mathfrak{F} -субнормальны в R .

Так как $N\Phi(M)$ – собственная подгруппа группы G , то $N\Phi(M)$ принадлежит формации \mathfrak{F} . Кроме того, из $N = C_G(N)$ имеем $N = F_p(N\Phi(M))$. Поэтому

$$N\Phi(M)/F_p(N\Phi(M)) \cong \Phi(M) \in f(p).$$

Так как K – прямое произведение нескольких изоморфных копий группы $\Phi(M)$, то $K \in f(p)$. Теперь из того, что C является p -группой и $C \subseteq F_p(CK)$, имеем $CK \in \mathfrak{F}$.

Так как $p \in \pi(A)$, то $A \in f(p)$. Значит, $CA/F_p(CA) \in f(p)$. Отсюда и из определения локальной формации следует, что $CA \in \mathfrak{F}$.

Поскольку формация \mathfrak{F} является сверхрадикальной, то $R \in \mathfrak{F}$. Так как $F_p(R) = C$, то $T \in f(p)$. Пришли к противоречию, которое и показывает, что $\Phi(M) = 1$. Но тогда $M \cong A$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Шаг 8. Если G – неразрешимая группа с абелевым цоколем N , то $G = [N]M$, где $(|N|, |G/N|) = 1$ и $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Пусть $|N| = p^k$. Предположим, что p делит $|G/N|$. Тогда из утверждения шага 7 следует, что $G = [N]M$, где M – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Так как $M \in \mathfrak{F}$, то из того, что M – простая неабелева группа, следует $M \in f(p)$. Поэтому $G/C_G(N) \cong M \in f(p)$. Отсюда и из определения локальной формации следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что G – минимальная не \mathfrak{F} -группа. Следовательно, p не делит $|G/N|$.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная локальная сверхрадикальная формация и G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа G имеет простой порядок p , причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) группа G является группой Шмидта.

Следствие 2.2. Пусть \mathfrak{F} – наследственная локальная сверхрадикальная формация и G – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини. Если \mathfrak{F} -корадикал группы G разрешим, то справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа G имеет простой порядок p , причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

- 2) группа G является группой Шмидта;
 3) G – примитивная группа с абелевым цоколем N и $G = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M / \Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

3 Примеры сверхрадикальных формаций

Следующие примеры и предложения показывают, что в теореме 2.1 все классы 1)–6) критических групп являются непустыми.

Отметим, что максимальные факторизации почти простых групп получены в работе [9]. Отсюда, в частности, получается перечень всех простых неабелевых нефакторизуемых групп. Таким свойством обладают, в частности, группы $Sz(2^n)$, $PSU_{2n+1}(q)$ и ряд других простых неабелевых групп.

Пример 3.1. Формация \mathfrak{F} всех нильпотентных групп является сверхрадикальной, а минимальные не \mathfrak{F} -группы являются группами Шмидта.

Пример 3.2. Формация \mathfrak{F} всех нильпотентных π -групп является сверхрадикальной, а минимальные не \mathfrak{F} -группы являются либо группами Шмидта, либо группами простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Пример 3.3. Формация \mathfrak{F} всех разрешимых групп является сверхрадикальной, а все минимальные не \mathfrak{F} -группы с единичной подгруппой Фраттини являются минимальными неразрешимыми простыми группами.

Предложение 3.1. Пусть $G \cong PSL_2(7)$. Если $\pi = \{2, 3, 7\}$, а \mathfrak{F} – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых π -групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных G , то:

- 1) \mathfrak{F} является наследственной локальной сверхрадикальной формацией;
- 2) если H – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:
 - а) группа H имеет простой порядок p , причем $p \notin \pi$;
 - б) H – простая неабелева группа, изоморфная $PSL_2(8)$ либо $PSU_3(3)$;
 - в) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и H/N – группа простого порядка $q \in \pi$.

Доказательство.

Простая проверка показывает, что класс \mathfrak{F} является локальной формацией, обладающей локальным экраном f таким, что $f(p) = \mathfrak{S}_\pi \text{form} G$ (\mathfrak{S}_π – формация всех разрешимых π -групп) для всех $p \in \pi$ и $f(p)$ – пустая формация для всех $p \notin \pi$.

Наследственность формации \mathfrak{F} следует из того, что в группе $PSL_2(7)$ все подгруппы разрешимы.

Покажем, что формация \mathfrak{F} является сверхрадикальной. Предположим противное. Пусть R – группа наименьшего порядка, обладающая такими \mathfrak{F} -субнормальными \mathfrak{F} -подгруппами A и B , что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B – максимальные подгруппы группы R . Тогда из определения \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы следует, что $R^\delta \subseteq A \cap B$. Так как $R \notin \mathfrak{F}$, то $R^\delta \neq 1$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы R , содержащаяся в R^δ . Ввиду выбора группы R имеем, что $R/L \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R . Так как формация \mathfrak{F} локальна, то $\Phi(R) = 1$. Поэтому $C_R(L) \subseteq L$.

Из определения формации \mathfrak{F} и условия $L \subseteq R^\delta \subseteq A \cap B \in \mathfrak{F}$ следует, что либо L – p -группа, где $p \in \pi$, либо L – прямое произведение групп, изоморфных $PSL_2(7)$.

Если L – p -группа, где $p \in \pi$, то из определения формации \mathfrak{F} и $R/L \in \mathfrak{F}$ следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с выбором группы R .

Значит, L – прямое произведение групп, изоморфных $PSL_2(7)$. Так как $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и $C_R(L) = 1$, то $A \in \text{form} G$ и $B \in \text{form} G$, т. е. подгруппы A и B являются прямыми произведениями групп, изоморфных $PSL_2(7)$. Теперь из $L \subseteq A$, $L \subseteq B$ и $C_R(L) = 1$ имеем, что $L = A$, $L = B$, а значит, $R \cong PSL_2(7) \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию, которое и доказывает, что формация \mathfrak{F} сверхрадикальна.

Из теоремы 2.1 следует, что если H – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) группа H имеет простой порядок p , причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) группа H является группой Шмидта;
- 3) H – простая неабелева группа;
- 4) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M / \Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} ;
- 5) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и H/N – циклическая q -группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$;
- 6) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $(H/N) / \Phi(H/N)$ –

нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Из указанного перечня непустыми являются только классы минимальных не \mathfrak{F} -групп из пунктов 1), 3) и 5).

Очевидно, что класс 1) не является пустым.

Простыми неабелевыми группами, у которых множество простых делителей совпадает с множеством π , являются группы $PSL_2(7)$, $PSL_2(2^3)$ и $PSU_3(3)$ [9, с. 20]. Поскольку в $PSL_2(2^3)$ все собственные подгруппы разрешимы, а в $PSU_3(3)$ все собственные подгруппы разрешимы или изоморфны $PSL_2(7)$, то к классу пункта 3) относятся в точности группы $PSL_2(2^3)$ и $PSU_3(3)$.

К классу 5) относится, например, группа $H \cong PGL_2(7) = [PSL_2(7)] \langle \alpha \rangle$, где α – диагональный автоморфизм второго порядка.

Отметим, что для любой группы H из класса 5) имеет место равенство $|H/N| = q$. Это следует из определения формации \mathfrak{F} .

Очевидно, формация \mathfrak{F} не имеет критических групп, являющихся группами Шмидта, поэтому класс 2) будет пустым.

Формации \mathfrak{F} принадлежат группы, у которых все простые неабелевы секции изоморфны факторизуемой группе $PSL_2(7)$. Поэтому классы минимальных не \mathfrak{F} -групп из пунктов 4) и 6) пусты. Предложение доказано.

Предложение 3.2. Пусть $G \cong Sz(2^3)$ и $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$. Пусть \mathfrak{F} – формация, обладающая таким локальным экраном f , что $f(q)$ – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных G , если $q \in \pi$, и $f(q)$ – класс всех разрешимых групп, если $q \notin \pi$.

Тогда:

1) \mathfrak{F} является наследственной локальной сверхрадикальной формацией;

2) если H – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а) H – простая неабелева группа из следующего списка: $PSL_2(2^p)$, p – простое число; $PSL_2(3^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_2(p)$, p – простое число, большее 3, для которого $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$; $Sz(2^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_3(3)$; $Sz(2^9)$;

б) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – простое

произведение групп, изоморфных G) и H/N – группа простого порядка $q \in \pi(G)$;

в) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M/\Phi(M) \cong G$.

Доказательство.

Из определения локальной формации следует, что группа D принадлежит классу \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда для каждого главного qd -фактора A/B группы D выполняются условия:

1) $D/C_D(A/B) \in \mathfrak{E}$ (\mathfrak{E} – формация всех разрешимых групп), если $q \notin \pi$;

2) $D/C_D(A/B) \in \mathfrak{E}formG$, если $q \in \pi$.

Таким образом, группа D принадлежит формации \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда одновременно $D/O_\pi(D) \in \mathfrak{E}$ и $D/O_\pi(D) \in \mathfrak{E}formG$.

Отсюда, в частности, следует, что $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим, что формация \mathfrak{F} не является наследственной. Пусть D – группа наименьшего порядка, принадлежащая формации \mathfrak{F} и обладающая подгруппами, не принадлежащими формации \mathfrak{F} . Пусть U – одна из таких подгрупп. Если K – минимальная нормальная подгруппа группы D , то ввиду выбора группы D имеем, что $UK/K \cong U/U \cap K \in \mathfrak{F}$. Если K_1 – минимальная нормальная подгруппа группы D , отличная от K , то аналогично показывается, что $U/U \cap K_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$U \cong U/(U \cap K) \cap (U \cap K_1) \in \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$.

Значит, K – единственная минимальная нормальная подгруппа группы D . Отсюда следует, что либо $O_\pi(D) = 1$, либо $O_\pi(D) = 1$.

Так как $D \in \mathfrak{F}$, то при $O_\pi(D) = 1$ имеем $D/O_\pi(D) \in \mathfrak{E}$ и $D \in \mathfrak{E}formG$. Отсюда по аналогии со следствием 3.1.24 из [7] показывается, что $U \in \mathfrak{E}formG$. Значит, $U/O_\pi(U) \in \mathfrak{E}formG$. Кроме того, из $D/O_\pi(D) \in \mathfrak{E}$ имеем, что $UO_\pi(D)/O_\pi(D) \cong U/U \cap O_\pi(D) \in \mathfrak{E}$. Значит, $U/O_\pi(U) \in \mathfrak{E}$. Теперь из $U/O_\pi(U) \in \mathfrak{E}$ и $U/O_\pi(U) \in \mathfrak{E}formG$ имеем $U \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$.

Если $O_\pi(D) = 1$, то из того, что $D \in \mathfrak{F}$, имеем $D \in \mathfrak{E}$. Тогда U – разрешимая группа. Так как $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{F}$, то $U \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию.

Итак, формация \mathfrak{F} является наследственной.

Покажем, что формация \mathfrak{F} является сверхрадикальной. Предположим противное. Пусть R – группа наименьшего порядка, обладающая такими

\mathfrak{F} -субнормальными \mathfrak{F} -подгруппами A и B , что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B – максимальные подгруппы группы R . Тогда из определения \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы следует, что $R^\delta \subseteq A \cap B$. Так как $R \notin \mathfrak{F}$, то $R^\delta \neq 1$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы R . Ввиду выбора группы R имеем, что $R/L \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^\delta$. Так как формация \mathfrak{F} локальна, то $\Phi(R) = 1$. Поэтому $C_R(L) \subseteq L$.

Из определения формации \mathfrak{F} и условия $L \subseteq R^\delta \subseteq A \cap B \in \mathfrak{F}$ следует, что либо L – p -группа для некоторого простого p , либо L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Рассмотрим три случая:

1. Пусть L – p -группа и $p \notin \pi$.

Тогда из $L \subseteq A \cap B$ и $C_R(L) = L$ следует, что $O_\pi(A) = 1$ и $O_\pi(B) = 1$. Значит, ввиду того, что $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, подгруппы A и B разрешимы.

Так как $R/L \in \mathfrak{F}$, то

$$(R/L)/O_\pi(R/L) \cong R/O_\pi(R) \in \mathfrak{E}formG.$$

Поэтому из разрешимости подгруппы $O_\pi(R)$ следует, что $R/R_\mathfrak{E} \in formG$. Предположим, что подгруппа A не содержит $R_\mathfrak{E}$. Тогда из максимальной и разрешимости подгруппы A имеем $R = AR_\mathfrak{E} \in \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $R_\mathfrak{E} \subseteq A$. Аналогично показывается, что $R_\mathfrak{E} \subseteq B$.

Так как $R/R_\mathfrak{E} \in formG$, то

$$R/R_\mathfrak{E} = (R_1/R_\mathfrak{E}) \times \dots \times (R_t/R_\mathfrak{E}),$$

где $R_i/R_\mathfrak{E} \cong G$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Так как A – разрешимая максимальная подгруппа группы R , то $R_i A = R$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Следовательно, $t = 1$ и $R/R_\mathfrak{E} \cong G$. Теперь из $R_\mathfrak{E} \subseteq A$, $R_\mathfrak{E} \subseteq B$ и $R = AB$ имеем, что группа $G \cong Sz(2^3)$ факторизуема. Пришли к противоречию. Следовательно, если L – p -группа и $p \notin \pi$, то $R \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть L – p -группа и $p \in \pi$.

В этом случае разрешимый радикал $R_\mathfrak{E}$ группы R отличен от единицы. Поэтому ввиду выбора группы R имеем $R/R_\mathfrak{E} \in \mathfrak{F}$. Отметим, что из $R/L \in \mathfrak{F}$ следует, что композиционные факторы группы R либо абелевы, либо изоморфны группе $Sz(2^3)$. Поэтому в цоколе группы $R/R_\mathfrak{E}$ все минимальные нормальные подгруппы группы $R/R_\mathfrak{E}$ неабелевы и их композиционные факторы изоморфны $Sz(2^3)$.

Пусть $Soc(R/R_\mathfrak{E}) = (K_1/R_\mathfrak{E}) \times \dots \times (K_n/R_\mathfrak{E})$.

Так как $R/R_\mathfrak{E} \in \mathfrak{F}$, то для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется условие $R/C_R(K_i/R_\mathfrak{E}) \in \mathfrak{E}formG$. Значит, $R/\prod_{i=1}^n C_R(K_i/R_\mathfrak{E}) \in \mathfrak{E}formG$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы $R/R_\mathfrak{E}$ неабелевы, то

$$Soc(R/R_\mathfrak{E}) \cap \left(\prod_{i=1}^n C_R(K_i/R_\mathfrak{E})\right) = 1.$$

Отсюда и из определения цоколя следует, что $\prod_{i=1}^n C_R(K_i/R_\mathfrak{E}) = R_\mathfrak{E}$. Значит, $R/R_\mathfrak{E} \in \mathfrak{E}formG$. Теперь из определения разрешимого радикала получаем, что $R/R_\mathfrak{E} \in formG$ и $R \in \mathfrak{E}formG$. Но тогда $R/C_R(L) \in \mathfrak{E}formG$, т. е. минимальная нормальная подгруппа L группы R f -центральна в R . Отсюда и из того, что $R/L \in \mathfrak{F}$ следует $R \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $R \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, если L – p -группа и $p \in \pi$, то $R \in \mathfrak{F}$.

3. Пусть L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Как отмечено выше, $L \subseteq A$ и $C_R(L) = 1$.

Так как $A \in \mathfrak{F}$, то $A/O_\pi(A) \cong A \in \mathfrak{E}formG$. Отсюда и из $C_R(L) = 1$ следует, что $A_\mathfrak{E} = 1$ и $A \in formG$. А так как $L \subseteq A$ и $C_R(L) = 1$, то $A = L$.

Аналогично показывается, что $B \in formG$ и $B = L$.

Отсюда имеем, что $R = AB = L \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию. Значит, и в случае, когда L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$, группа R принадлежит формации \mathfrak{F} .

Итак, формация \mathfrak{F} является сверхрадикальной.

Из теоремы 2.1 следует, что если H – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) группа H имеет простой порядок p , причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) группа H является группой Шмидта;
- 3) H – простая неабелева группа;
- 4) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} ;
- 5) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и H/N – циклическая q -группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$;
- 6) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $H/N/\Phi(H/N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Так как $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне классы минимальных не \mathfrak{F} -групп из пунктов 1) и 2) являются пустыми.

Как отмечено выше, композиционные факторы любой группы из \mathfrak{F} либо абелевы, либо изоморфны группе $Sz(2^3)$. Поэтому если класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта б) не является пустым и H – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини, то $(H/N)/\Phi(H/N) \cong Sz(2^3)$ и все композиционные факторы цоколя N изоморфны $Sz(2^3)$. Но тогда из того, что H – минимальная не \mathfrak{F} -группа, формация \mathfrak{F} содержит группу из класса $formG\mathfrak{E}$, имеющую неабелев цоколь и хотя бы один абелев композиционный фактор. Однако это не так. Следовательно, в указанном перечне класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта б) также является пустым.

Из указанного перечня непустыми являются только классы минимальных не \mathfrak{F} -групп из пунктов 3), 4) и 5).

Приведем полное описание групп класса 3).

Пусть H – простая неабелева группа, которая является минимальной не \mathfrak{F} -группой. В этом случае H не принадлежит формации \mathfrak{F} и всякая собственная подгруппа группы H имеет композиционные факторы, которые изоморфны либо циклической группе Z_r для некоторого простого r , либо группе $Sz(2^3)$. Если $Sz(2^3)$ не вплетена в H , то H – простая неабелева группа, у которой все собственные подгруппы разрешимы. Из цикла работ Дж. Томпсона, приведенных, например, в [8], следует, что H – группа из следующего списка: $PSL_2(2^p)$, p – простое число; $PSL_2(3^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_2(p)$, p – простое число, большее 3, для которого $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$; $Sz(2^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_3(3)$.

Далее будем считать, что $Sz(2^3)$ вплетена в H . Последовательно рассмотрим следующие возможные случаи.

(1) $H \cong A_n$, $n \geq 5$. При $n = 5$ группа A_5 , изоморфная $PSL_2(2^2)$, является минимальной неразрешимой группой. При $n \geq 6$ группа A_n содержит простую неабелеву подгруппу A_{n-1} и $3 \in \pi(A_{n-1})$, что невозможно.

(2) H – простая спорадическая группа. Из [10] следует, что в H вплетена простая неабелева группа, порядок которой делится на 3. Последнее невозможно.

(3) H – простая группа лиевского типа над полем $F_q = F_{p^n}$. Пусть сначала H – группа Ли

нормального типа. Если лиевский ранг H равен 1, то $H \cong PSL_2(q)$ и $Sz(2^3)$ не вплетена в H . Поэтому будем считать, что лиевский ранг H не меньше 2. Пусть α – положительный корень в соответствующей системе положительных корней Φ^+ . Тогда корневые подгруппы X_α и $X_{-\alpha}$ порождают собственную подгруппу $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$, которая является гомоморфным образом группы $SL_2(q)$ с ядром гомоморфизма порядка 2 или 1. При $q \neq 2$ и $q \neq 3$ группа $SL_2(q)$ неразрешима и $3 \in \pi(SL_2(q))$, что невозможно. Пусть $q = 2$. В этом случае либо H имеет неразрешимую собственную параболическую подгруппу P , для которой $3 \in \pi(P)$, что невозможно, либо $H \cong PSL_3(2)$ и $Sz(2^3)$ не вплетена в H , что также невозможно. Если $q = 3$, то либо $H \cong PSL_3(3)$ и $Sz(2^3)$ не вплетена в H , что невозможно, либо H обладает неразрешимой параболической подгруппой P и $3 \in \pi(P)$, что также невозможно.

Следовательно, H – группа Ли скрученного типа.

(а) $H \cong PSO_{2l}^-(q)$, $l \geq 4$. В этом случае максимальная параболическая подгруппа P_1 неразрешима и $3 \in \pi(P_1)$, что невозможно.

(б) $H \cong PSU_l(q)$, $l \geq 3$. Если $l > 3$, то максимальная параболическая подгруппа P_1 неразрешима и $3 \in \pi(P_1)$, что невозможно. Поэтому $l = 3$. Максимальные подгруппы $PSU_3(q)$ описаны в [11]–[12]. Из данного описания следует, что $Sz(2^3)$ не вплетена в H . Последнее невозможно.

(с) $H \cong Sz(2^n)$, где $n \geq 3$ – нечетное число. Максимальные подгруппы групп Судзуки описаны в [13]. Из описания следует, что $H \cong Sz(2^9)$ и H имеет максимальные подгруппы, которые либо разрешимы, либо изоморфны $Sz(2^3)$. Поэтому группа $Sz(2^9)$ содержится в классе 3).

(д) $H \cong {}^3D_4(q)$. Группа ${}^3D_4(q)$ содержит собственную простую неабелеву подгруппу $G_2(q)$ (таблица 1 [14]) и $3 \in \pi(G_2(q))$, что невозможно.

(е) $H \cong {}^2F_4(q)'$. Из таблицы 1 [14] следует, что H содержит простую подгруппу $PSL_2(25)$ и $3 \in \pi(PSL_2(25))$, что невозможно.

(ф) $H \cong {}^2G_2(q)$. Максимальные подгруппы в ${}^2G_2(q)$ описаны в [15]. Из описания следует, что $Sz(2^3)$ не вплетена в H .

(г) $H \cong {}^2E_6(q)$. В этом случае H имеет максимальную неразрешимую параболическую подгруппу P , для которой $3 \in \pi(P)$.

Таким образом, простыми минимальными не \mathfrak{F} -группами являются простые минимальные неразрешимые группы и $Sz(2^9)$.

Пусть $q \notin \pi(Sz(2^3))$ и V – точный и неприводимый $F_q[Sz(2^3)]$ -модуль над полем из q элементов. Тогда группа $H = [V]Sz(2^3)$ является минимальной не \mathfrak{F} -группой, относящейся к классу групп из пункта 4).

Группа $Sz(2^3)$ имеет полевой автоморфизм α порядка 3. Поэтому к классу 5) относится группа H , являющаяся расширением группы $Sz(2^3)$ с помощью $\langle \alpha \rangle$. Предложение доказано.

Предложение 3.3. Пусть $G \cong Sz(2^3)$ и $\pi = \pi(G)$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \text{form} G \mathfrak{S}_\pi$, то:

1) \mathfrak{F} является наследственной локальной сверхрадикальной формацией;

2) если H – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а) группа H имеет простой порядок q , причем $q \notin \pi(\mathfrak{F})$;

б) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и $(H/N)/\Phi(H/N)$ – группа, изоморфная G .

Доказательство. Простая проверка показывает, что формация \mathfrak{F} обладает таким локальным экраном f , что $f(q) = \mathfrak{S}_\pi \text{form} G \mathfrak{S}_\pi$ (\mathfrak{S}_π – формация всех разрешимых π -групп) для всех $q \in \pi$ и $f(q)$ – пустая формация для всех $q \notin \pi$.

Предположим, что формация \mathfrak{F} не является наследственной. Пусть D – группа наименьшего порядка, принадлежащая формации \mathfrak{F} и обладающая подгруппами, не принадлежащими формации \mathfrak{F} . Пусть U – одна из таких подгрупп. Если K – минимальная нормальная подгруппа группы D , то ввиду выбора группы D имеем, что $UK/K \cong U/U \cap K \in \mathfrak{F}$. Если K_1 – минимальная нормальная подгруппа группы D , отличная от K , то аналогично показывается, что $U/U \cap K_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда $U \cong U/(U \cap K) \cap (U \cap K_1) \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$.

Значит, K – единственная минимальная нормальная подгруппа группы D . Возможны два случая:

1. Пусть K – разрешимая группа. Тогда из условия $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ получаем $U \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению $U \notin \mathfrak{F}$.

2. Пусть K – неразрешимая группа. Тогда из $D \in \mathfrak{F}$ и $C_D(K) = 1$ следует, что $D \in \text{form} G \mathfrak{S}_\pi$ и $D/K \in \mathfrak{S}_\pi$. Значит, $U/U \cap K \in \mathfrak{S}_\pi$. Так как

$|K| < |D|$ и $K \in \mathfrak{F}$, то $U \cap K \in \mathfrak{F}$. Теперь из $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ снова получаем $U \in \mathfrak{F}$.

Итак, формация \mathfrak{F} является наследственной.

Покажем, что формация \mathfrak{F} является сверхрадикальной. Предположим противное. Пусть R – группа наименьшего порядка, обладающая такими \mathfrak{F} -субнормальными \mathfrak{F} -подгруппами A и B , что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B – максимальные подгруппы группы R . Тогда из определения \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы следует, что $R^\mathfrak{F} \subseteq A \cap B$. Так как $R \notin \mathfrak{F}$, то $R^\mathfrak{F} \neq 1$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы R . Ввиду выбора группы имеем, что $R/L \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^\mathfrak{F}$. Так как формация \mathfrak{F} локальна, то $\Phi(R) = 1$. Поэтому $C_R(L) \subseteq L$.

Из определения формации \mathfrak{F} и условия $L \subseteq R^\mathfrak{F} \subseteq A \cap B \in \mathfrak{F}$ следует, что либо L – q -группа для некоторого простого $q \in \pi(\mathfrak{F})$, либо L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть L – q -группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда из условия $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ получаем $R \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению $R \notin \mathfrak{F}$.

2. Пусть L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$. Так как $A \supseteq L$, $B \supseteq L$ и $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то из $C_R(L) = 1$ имеем $A_\mathfrak{E} = B_\mathfrak{E} = 1$ и $A^\mathfrak{E} = B^\mathfrak{E} = L$. Значит, $R/L = (A/L)(B/L)$ и $A/L \in \mathfrak{E}$, $B/L \in \mathfrak{E}$. По теореме С.А. Сыскина из [16] группа R/L разрешима и $R \in \text{form} G \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию, которое и доказывает, что формация \mathfrak{F} сверхрадикальна.

Из теоремы следует, что если H – минимальная не \mathfrak{F} -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа H имеет простой порядок q , причем $q \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) группа H является группой Шмидта;

3) H – простая неабелева группа;

4) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} ;

5) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и H/N – циклическая q -группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$;

б) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $H/N/\Phi(H/N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации \mathfrak{F} .

Так как $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта 2) является пустым. Так как $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта 4) является пустым. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта 5) также является пустым.

Очевидно, в указанном списке класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта 1) не пустой.

Предположим, что класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта 3) не является пустым. Пусть H – простая неабелева группа, которая является минимальной не \mathfrak{F} -группой. В этом случае H не принадлежит формации \mathfrak{F} и всякая собственная подгруппа группы H имеет композиционные факторы, которые изоморфны либо циклической группе Z_r для $r \in \pi$, либо группе $Sz(2^3)$. Следовательно, H – $3'$ -группа и $H \cong Sz(2^{2m+1})$, где $m \geq 1$, причем $\pi(H) \subseteq \pi$. Если $m = 1$, то $H \cong Sz(2^3)$ и H не является минимальной не \mathfrak{F} -группой. Поэтому $m \geq 2$. Порядок группы H делится на $2^{2m+1} - 1$. Поскольку $2m + 1$ является нечетным числом, то из [17] следует, что найдется простое число r , которое делит $2^{2m+1} - 1$ и не делит $2^i - 1$ для всех $1 \leq i < 2m + 1$. При этом из малой теоремы Ферма следует, что $r \geq (2m + 1) + 1 = 2m + 2$, а значит, $r \geq 2m + 3$. Непосредственный подсчет показывает, что $\pi(H)$ не содержится в π для $m \in \{2, 3, 4, 5\}$. При $m \geq 6$ получаем, что $r > 13$ и $\pi(H)$ не содержится в π . Полученное противоречие показывает, что в указанном перечне класс минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта 3) является пустым.

Пусть A и B – группы, изоморфные $Sz(2^3)$. Очевидно, регулярное сплетение V групп A и B не принадлежит формации \mathfrak{F} . Тогда либо группа V является минимальной не \mathfrak{F} -группой, либо содержит подгруппу W , являющуюся минимальной не \mathfrak{F} -группой.

Так как $\pi(W) \subseteq \pi$, то W не может относиться к классам минимальных не \mathfrak{F} -групп из пункта 1). Следовательно, W является группой из класса б). Предложение доказано.

Пример 3.4. Пусть $G \cong Sz(2^3)$. Тогда мультипликатор Шура группы G имеет вид $M(G) \cong Z_2 \times Z_2$ [8, с. 316]. Так как всякая накрывающая группа простой неабелевой группы является гомоморфным образом универсальной накрывающей этой группы, то имеется центральное

фраттиниево расширение D группы G , для которого $F(D) = \Phi(D) = Z(D)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы D , изоморфная циклической группе Z_2 , и $D/\Phi(D) \cong G$. Пусть $q \notin \pi(Sz(2^3))$. Тогда по следствию В.10.7 из [6] существует точный и неприводимый $F_q[D]$ -модуль V над полем F_q . Если \mathfrak{F} – формация из предложения 3.2, то группа $H = [V]D$ является минимальной не \mathfrak{F} -группой, относящейся к классу критических групп из пункта 4) теоремы 2.1.

Пример 3.4 показывает, что в пункте 4) теоремы 2.1 подгруппа $\Phi(M)$ может быть неединичной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные вопросы теории групп: Коваровская тетрадь*. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006. – 194 с.
2. Семенчук, В.Н. Разрешимые \mathfrak{F} -радикальные формации / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 261–266.
3. Семенчук, В.Н. Сверхрадикальные формации / В.Н. Семенчук, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, №5. – С. 24–26.
4. Семенчук, В.Н. О проблеме классификации сверхрадикальных формаций / В.Н. Семенчук, О.А. Мокеева // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 12. – С. 70–75.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
6. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
7. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.
8. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
9. Liebeck, M.W. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J. Saxl // Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1–150.
10. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
11. Mitchell, H.H. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12. – P. 207–242.
12. Hartley, R.W. Determination of the ternary collineation groups whose coefficient lie in $GF(2^n)$ / R.W. Hartley // Ann. Math. – 1925. – Vol. 25, № 2. – P. 140–158.
13. Suzuki, M. On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. – Vol. 75, № 1. – P. 105–145.

14. *Liebeck, M.W.* On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type / M.W. Liebeck, J. Saxl // Proc. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 55. – P. 299–330.

15. *Kleidman, P.* The maximal subgroups of the Chevalley group $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$ and their automorphism groups / P. Kleidman // J. Algebra. – 1988. – Vol. 117. – P. 30–71.

16. *Сыскин, С.А.* Об одном вопросе Р. Бэра / С.А. Сыскин // Сиб. мат. журнал. – 1979. – Т. 20, № 3. – С. 679–681.

17. *Zsigmondy, K.* Zur Theorie der Potenzreste / K. Zsigmondy // Monath. Math. Phis. – 1892. – Bd. 3. – S. 265–284.

Поступила в редакцию 22.02.13.

О ПОЛУЦЕНТРАХ l -АРНЫХ ГРУППОИДОВ

Ю.И. Кулаженко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON SEMICENTERS OF l -ARY GROUPOIDS

Yu.I. Kulazhenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В статье продолжаются исследования автора, посвящённые изучению свойств l -арного группоида $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$, где A^J – множество всех отображений произвольного множества J в произвольный группоид A , а l -арная операция $[]_{l, \sigma, J}$ определяется для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества J . В частности, найдены критерии полуабелевости этого l -арного группоида.

Ключевые слова: n -арная группа, l -арный группоид, полуабелевость, l -арная операция.

In the paper the author continues to describe his research dedicated to the study of the properties of the l -ary groupoid $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ where A^J is a set of all mappings of an arbitrary set J in an arbitrary groupoid A , and the l -ary operation $[]_{l, \sigma, J}$ is defined for any integer $l \geq 2$ and for any permutation σ of the set J . In particular, some semiabelian criteria of this l -ary groupoid are found.

Keywords: n -ary group, l -ary groupoid, semiabelity, l -ary operation.

Введение

В [1] для любого целого $l \geq 2$, произвольного множества J , любой подстановки σ множества J и любого группоида A на множестве A^J всех отображений множества J в группоид A была определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, J}$. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, J}$ совпадает с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая была определена в [2] и подробному изучению свойств которой посвящена книга [3].

В [4] автор определил шесть l -арных аналогов центра группоида и нашел достаточные условия пустоты этих аналогов для l -арного группоида $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. В [5] автор обобщил эти результаты для l -арного группоида $[]_{l, \sigma, J}$. В данной работе продолжается изучение перестановочности элементов в l -арном группоиде $[]_{l, \sigma, J}$, начатое в [4], [5].

Будем использовать стандартные обозначения: S_J – множество всех биекций множества J на себя; A^J – множество всех отображений множества J во множество A . Элементы множества S_J называют подстановками. Необходимую информацию о подстановках множеств произвольной мощности можно найти в [6], [7]. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то полагают $S_J = S_k$. Если множество J совпадает с одним из множеств

$$\{1, 2, \dots, k\}, N = \{1, 2, \dots\}, \\ Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

то значение функции $\mathbf{x} \in A^J$ в точке $j \in J$ удобно обозначать символом x_j : $\mathbf{x}(j) = x_j$. В связи с этим, если \mathbf{x} принадлежит одному из множеств $A^{\{1, 2, \dots, k\}}$, A^N или A^Z , то соответственно полагают

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots), \\ \mathbf{x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Определения большинства понятий, используемых в данной работе, можно найти в [3]. Напомним только, что l -арным группоидом называют универсальную алгебру с одной основной l -арной операцией, и приведём определения абелевого, полуабелевого и слабо полуабелевого l -арного группоида.

l -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором для любой подстановки τ множества $\{1, 2, \dots, l\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_l] = [a_{\tau(1)} a_{\tau(2)} \dots a_{\tau(l)}],$$

называют абелевым. l -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором выполняется тождество

$$[a a_1 \dots a_{l-2} b] = [b a_1 \dots a_{l-2} a],$$

называют полуабелевым. l -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$ называют слабо полуабелевым, если в нём выполняется тождество

$$[\underbrace{a b \dots b}_{l-1}] = [\underbrace{b \dots b a}_{l-1}].$$

При $l = 2$ понятия абелевости, полуабелевости и слабой полуабелевости совпадают, так как в этом случае все три упомянутые выше тождества принимают вид $ab = ba$.

1 Предварительные результаты

Определение 1.1 [1]. Пусть A – группоид, $l \geq 2$, J – произвольное множество, σ – подстановка из S_J . Определим на A^J вначале бинарную операцию $\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}$, полагая

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)), j = 1, 2, \dots, k, \quad (1.1)$$

а затем l -арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, J} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (1.2)$$

Понятно, что операция $[]_{l, \sigma, J}$ совпадает с операцией \circ .

Замечание 1.1. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то операции \circ и $[]_{l, \sigma, J} = []_{l, \sigma, k}$ определены на k -ой декартовой степени A^k [2], [3]. При этом (1.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Теорема 1.1. [1]. Пусть A – группоид, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l \in A^J$, $\sigma \in S_J$. Тогда для любого $j \in J$ верно

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, J}(j) = \mathbf{x}_1(j) \mathbf{x}_2(\sigma(j)) (\dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j))) \dots).$$

Заменяя в теореме 1.1 группоид полугруппой, получим

Следствие 1.1 [1]. Пусть A – полугруппа, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l \in A^J$, $\sigma \in S_J$. Тогда для любого $j \in J$ верно

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, J}(j) = \mathbf{x}_1(j) \mathbf{x}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)).$$

Полагая в следствии 1.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 1.2 [3]. Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Теорема 1.2. [1]. Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_J , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ – l -арная полугруппа.

2 Основные результаты

Сформулируем критерий полуабелевости l -арной полугруппы $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$.

Теорема 2.1. Если полугруппа A содержит единицу, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A – коммутативна.

Доказательство. Согласно следствию 1.1, имеем

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, J}(j) &= \mathbf{x}_1(j) \mathbf{x}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)), \\ [\mathbf{x}_l \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_1]_{l, \sigma, J}(j) &= \mathbf{x}_l(j) \mathbf{x}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{x}_1(\sigma^{l-1}(j)) \end{aligned}$$

для любых

$$j \in J, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l \in A^J.$$

Достаточность. Из коммутативности полугруппы A , в силу условия $\sigma^{l-1}(j) = j$, следует равенство правых частей записанных равенств, откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, J}(j) &= [\mathbf{x}_l \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_1]_{l, \sigma, J}(j), \quad j \in J, \\ [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, J} &= [\mathbf{x}_l \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_1]_{l, \sigma, J}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

что означает полуабелевость l -арной полугруппы $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$.

Необходимость. Для фиксированного $j \in J$, любых элементов a и b полугруппы A и ее единицы 1 определим функции

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l \in A^J$$

так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(j) = a, \mathbf{x}_2(\sigma(j)) = \dots = \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) = 1, \\ \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}_l(j) = b. \end{aligned}$$

Тогда из полуабелевости $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ следует (2.1), откуда, рассуждая в обратном порядке и учитывая условие $\sigma^{l-1}(j) = j$, а также определение функций $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(j) \mathbf{x}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) &= \\ = \mathbf{x}_l(j) \mathbf{x}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{x}_1(\sigma^{l-1}(j)), \\ \mathbf{x}_1(j) \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{x}_1(j), & \\ ab = ba, & \end{aligned}$$

что, ввиду произвольного выбора $a, b \in A$, означает абелевость полугруппы A . Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 2.1. [3]. Если полугруппа A содержит единицу, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A – коммутативна.

Всякая полуабелева l -арная полугруппа является и слабо полуабелевой. Как показывает следующая теорема, для цикла длины $l-1$ из слабой полуабелевости l -арной полугруппы $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ следует ее полуабелевость.

Теорема 2.2. Если полугруппа A содержит единицу, σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из S_J , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) l -арная полугруппа $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ полуабелева;
- 2) l -арная полугруппа $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ слабо полуабелева;
- 3) полугруппа A – коммутативна.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) Следует из определений полуабелевости и слабой полуабелевости.

2) \Rightarrow 3) Для фиксированного $j \in J$, любых элементов a и b полугруппы A и ее единицы 1 определим функции $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A^J$ так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j) = a, \mathbf{x}(\sigma(j)) = \dots = \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j)) = 1, \\ \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j) = b. \end{aligned}$$

Так как σ – цикл длины $l-1$, то такое определение функции \mathbf{x} возможно. Тогда из слабой полуабелевости $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ следует равенство

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, J} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{z}}_{l-1}]_{l, \sigma, J},$$

откуда для любого $j \in J$ получаем

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, J(j)} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{z}}_{l-1}]_{l, \sigma, J(j)}.$$

Применяя следствие 1.1 и учитывая условие $\sigma^{l-1}(j) = j$, а также определение функций \mathbf{x} и \mathbf{z} , последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ & = \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), \\ & \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), \\ & ab = ba, \end{aligned}$$

что, ввиду произвольного выбора $a, b \in A$, означает абелевость полугруппы A .

3) \Rightarrow 1) Следует из теоремы 2.1. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.2 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 2.2. Если полугруппа A содержит единицу, σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из S_k , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ полуабелева;
- 2) l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ слабо полуабелева;
- 3) полугруппа A – коммутативна.

Для каждого из множеств N и Z справедливы утверждения, аналогичные следствиям 2.1 и 2.2.

Замечание 2.1. Из доказательства теоремы 2.1 (теоремы 2.2) видно, что для полуабелевости (слабой полуабелевости) l -арной полугруппы $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ необязательно наличие в коммутативной полугруппе A единицы.

В [4], [5] были определены и изучались различные полиадические аналоги центра группоида. Определим для l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ еще три таких аналога: *полуцентр*

$$\mathbf{HZ}(A, []) = \{z \in A \mid [z y_1 \dots y_{l-2} x] = [x y_1 \dots y_{l-2} z], x, y_i \in A\};$$

малый полуцентр

$$\begin{aligned} \mathbf{KHZ}(A, []) &= \{z \in A \mid [z \underbrace{y \dots y}_{l-2} x] = \\ &= [x \underbrace{y \dots y}_{l-2} z], x, y \in A\}; \end{aligned}$$

большой полуцентр

$$\begin{aligned} \mathbf{GHZ}(A, []) &= \{z \in A \mid [z \underbrace{x \dots x}_{l-1}] = \\ &= [x \dots x z], x \in A\}. \end{aligned}$$

При $l = 2$ все три аналога совпадают с центром $\mathbf{Z}(A)$ группоида A .

Ясно, что

$$\mathbf{HZ}(A) \subseteq \mathbf{KHZ}(A) \subseteq \mathbf{GHZ}(A).$$

Так как l -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ полуабелев тогда и только тогда, когда его полуцентр $\mathbf{HZ}(A)$ совпадает с A , то для полуабелевого l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ из включений

$$\mathbf{HZ}(A) \subseteq \mathbf{KHZ}(A) \subseteq \mathbf{GHZ}(A) \subseteq A = \mathbf{HZ}(A)$$

следуют равенства

$$\mathbf{HZ}(A) = \mathbf{KHZ}(A) = \mathbf{GHZ}(A) = A,$$

а из теоремы 2.1 и замечания 2.1 вытекает

Следствие 2.3. Если полугруппа A коммутативна, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) &= \mathbf{KHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \\ &= \mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = A^J. \end{aligned}$$

Замечание 2.2. Для l -арной группы различные типы центров и полуцентров, централизаторов и полуцентрализаторов подробно изучены в [8]. В этой книге большой полуцентр l -арной группы называется *слабым полуцентром* или *полуцентром типа D*. Там же для l -арной группы $\langle A, [] \rangle$ определено множество

$$\begin{aligned} \mathbf{HTZ}(A, []) &= \{z \in A \mid [z x_1 \dots x_{l-1}] = \\ &= [x_1 \dots x_{l-1} z], x_i \in A\}, \end{aligned}$$

которое называется *полуцентром типа T*.

Для полугруппы A с центром $\mathbf{Z}(A)$ множество $\{z \in A^J \mid \mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A), j \in J\}$ совпадает с центром $\mathbf{Z}(A^J)$ группоида A^J с операцией, которая определяется покомпонентно:

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j), j \in J.$$

Предложение 2.1. Пусть полугруппа A содержит единицу. Тогда:

- 1) если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\mathbf{KHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) \subseteq \mathbf{Z}(A^J);$$

- 2) если σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из S_J , то

$$\mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) \subseteq \mathbf{Z}(A^J).$$

Доказательство. 1) Если

$$\mathbf{z} \in \mathbf{KHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}),$$

то для любого элемента a полугруппы A и ее единицы 1 определим постоянные функции $\mathbf{e}, \mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(j) = 1, \mathbf{x}(j) = a$ для любого $j \in J$. Так как

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{x}}_{l-2}]_{l, \sigma, J} = [\underbrace{\mathbf{x} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{z}}_{l-2}]_{l, \sigma, J},$$

то для любого $j \in J$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{x}}_{l-2}]_{l, \sigma, J(j)} = [\underbrace{\mathbf{x} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{z}}_{l-2}]_{l, \sigma, J(j)},$$

откуда, используя равенства

$$\sigma^{l-1}(j) = j, \mathbf{e}(j) = 1, \mathbf{x}(j) = a, j \in J,$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}(j)\mathbf{e}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ & = \mathbf{x}(j)\mathbf{e}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), \\ & \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), \\ & \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(j), \\ & \mathbf{z}(j)a = a\mathbf{z}(j). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$ для любого $j \in J$, откуда $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}(A^J)$. Таким образом, доказано включение из 1).

- 2) Если $\mathbf{z} \in \mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J})$, то для любого элемента a полугруппы A и ее единицы 1 определим функции $\mathbf{e}, \mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(j) = 1,$

$$\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = a,$$

$$\mathbf{x}(\sigma(j)) = \mathbf{x}(\sigma^2(j)) = \dots = \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j)) = 1$$

для любого $j \in J$. Такое определение функции \mathbf{x} возможно, так как все значения

$$j = \sigma^{l-1}(j), \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^{l-2}(j)$$

различны. Так как

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, J} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{z}}_{l-1}]_{l, \sigma, J},$$

то для любого $j \in J$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, J(j)} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{z}}_{l-1}]_{l, \sigma, J(j)},$$

откуда, учитывая определение функций \mathbf{e} и \mathbf{x} , последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) &= \\ = \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), & \\ \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), & \\ \mathbf{z}(j)a = a\mathbf{z}(j). & \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$ для любого $j \in J$, откуда $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}(A^J)$. Таким образом, доказано включение из 2). Предложение доказано.

Лемма 2.1. Пусть неабелева полугруппа A содержит единицу 1 , $l \geq 3$, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, функция $\mathbf{z} \in A^J$ такова, что $\mathbf{z}(j) = 1$ для некоторого $j \in J$. Тогда $\mathbf{z} \notin \mathbf{HZ}(A^J)$.

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{z} \in \mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J})$.

Для единицы 1 полугруппы A и любых ее элементов a и b таких, что $ab \neq ba$, определим функции $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{l-2}, \mathbf{x} \in A^J$ так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(\sigma(j)) = a, \mathbf{y}_2(\sigma^2(j)) = \dots = \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-2}(j)) = 1, \\ \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j) = b. \end{aligned}$$

Так как

$$[\mathbf{z} \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{x}]_{l, \sigma, J} = [\mathbf{x} \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{z}]_{l, \sigma, J},$$

то для любого $j \in J$ верно

$$[\mathbf{z} \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{x}]_{l, \sigma, J(j)} = [\mathbf{x} \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{z}]_{l, \sigma, J(j)},$$

откуда, используя равенство $\sigma^{l-1}(j) = j$ и определение функций $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{l-2}, \mathbf{x}$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j)\mathbf{y}_1(\sigma(j))\mathbf{y}_2(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) &= \\ = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}_1(\sigma(j))\mathbf{y}_2(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), & \\ \mathbf{z}(j)a\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(j)a\mathbf{z}(j), & \\ \mathbf{z}(j)ab = ba\mathbf{z}(j). & \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как по условию $\mathbf{z}(j) = 1$, то из последнего равенства следует $ab = ba$, что противоречит выбору элементов a и b . Следовательно,

$$\mathbf{z} \notin \mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}).$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3. Пусть неабелева полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, $l \geq 3$, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J})$.

Тогда, согласно лемме 2.1, для любого $j \in J$ значение $\mathbf{z}(j)$ отлично от единицы полугруппы A .

Зафиксируем $j \in J$ и для любых элементов $a, b \in A$ таких, что $ab \neq ba$, определим функции $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{l-2}, \mathbf{x} \in A^J$ так же, как в лемме 2.1. Так как

$$[\mathbf{z} \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{x}]_{l, \sigma, J} = [\mathbf{x} \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{z}]_{l, \sigma, J},$$

то, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 2.1, получим (2.2). Из включения $\mathbf{HZ}(A) \subseteq \mathbf{KHZ}(A)$ и утверждения 1) предложения 2.1 вытекает $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$, откуда и из (2.2) следует

$$\mathbf{z}(j)ab = \mathbf{z}(j)ba, ab\mathbf{z}(j) = ba\mathbf{z}(j).$$

Применяя к полученным равенствам соответственно левое, правое сокращение в полугруппе A , получим $ab = ba$, что противоречит выбору элементов a и b . Следовательно, $\mathbf{z} \notin \mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J})$. Таким образом, $\mathbf{HZ}(A^J) = \emptyset$. Теорема доказана.

Теорема 2.3 и следствие 2.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.4. Пусть полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, $l \geq 3$, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

- 1) если полугруппа A абелева, то $\mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = A^J$.
- 2) если полугруппа A неабелева, то $\mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset$.

Лемма 2.2. Пусть неабелева полугруппа A содержит единицу 1 , σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из S_J , функция $\mathbf{z} \in A^J$ такова, что $\mathbf{z}(j) = 1$ для некоторого $j \in J$. Тогда $\mathbf{z} \notin \mathbf{GHZ}(A^J)$.

Доказательство. Предположим, что

$$\mathbf{z} \in \mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}).$$

Для единицы 1 полугруппы A и любых ее элементов a и b таких, что $ab \neq ba$, определим функцию $\mathbf{x} \in A^J$ так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = b, \mathbf{x}(\sigma(j)) = a, \\ \mathbf{x}(\sigma^2(j)) = \dots = \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j)) = 1. \end{aligned}$$

Такое определение функции \mathbf{x} возможно, так как все значения

$$j = \sigma^{l-1}(j), \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^{l-2}(j)$$

различны. Так как

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, J} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{z}}_{l-1}]_{l, \sigma, J},$$

то для любого $j \in J$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, J(j)} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{z}}_{l-1}]_{l, \sigma, J(j)}$$

и далее

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) &= \\ = \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)), & \end{aligned}$$

откуда, в силу равенства $\sigma^{l-1}(j) = j$, следует

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(j) &= \\ = \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(j). & \end{aligned}$$

Подставляя в полученное равенство соответствующие значения функции \mathbf{x} , получим (2.2). Так как по условию $\mathbf{z}(j) = 1$, то из (2.2) следует $ab = ba$, что противоречит выбору элементов a и b . Следовательно, $\mathbf{z} \notin \mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J})$. Лемма доказана.

Теорема 2.5. Пусть неабелева полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из S_J . Тогда $\mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J})$. Тогда, согласно лемме 2.2, для любого $j \in J$ значение $\mathbf{z}(j)$ отлично от единицы полугруппы A .

Зафиксируем $j \in J$ и для любых элементов $a, b \in A$ таких, что $ab \neq ba$, определим функцию $\mathbf{x} \in A^J$ так же, как в лемме 2.2. Так как

$$[\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, J} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{z}}_{l-1}]_{l, \sigma, J},$$

то, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 2.2, получим (2.2). Согласно утверждению 2) предложения 2.1, имеем $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$. Поэтому из (2.2) следует

$$\mathbf{z}(j)ab = \mathbf{z}(j)ba, \mathbf{abz}(j) = \mathbf{baz}(j).$$

Применяя к полученным равенствам соответственно левое, правое сокращение в полугруппе A , получим равенство $ab = ba$, противоречащее выбору элементов a и b . Следовательно,

$$\mathbf{z} \notin \mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}).$$

Таким образом, $\mathbf{GHZ}(A^J) = \emptyset$. Теорема доказана.

Теорема 2.5 и следствие 2.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.6. Пусть полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из \mathbf{S}_J . Тогда:

- 1) если полугруппа A абелева, то $\mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = A^J$.
- 2) если полугруппа A неабелева, то $\mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset$.

Из теорем 2.4 и 2.6 вытекает

Следствие 2.4. Если полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из \mathbf{S}_J , то в l -арной полугруппе $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ ее полуцентр и большой полуцентр совпадают:

$$\mathbf{HZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \mathbf{GHZ}(A^J, []_{l, \sigma, J}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Об операции $[]_{l, \sigma, J}$ / А.М. Гальмак // Материалы междунар. научн.-практ. конф., посвящённой 100-летию МГУ им. А.А. Кулешова. – Могилёв, 2013. – С. 34–38.
2. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Кулаженко, Ю.И. О центрах l -арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Материалы междунар. научн.-практ. конф., посвящённой 100-летию МГУ им. А.А. Кулешова. – Могилёв, 2013. – С. 34–38.
5. Кулаженко, Ю.И. О центрах l -арных группоидов / Ю.И. Кулаженко / Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2013. – № 3. – С. 28–34.
6. Супруненко Д.А. Группы подстановок / Д.А. Супруненко. – Мн. : Навука і тэхніка, 1996. – 366 с.
7. Wielandt, H. Unendliche Permutationsgruppen / H. Wielandt. – Vorlesungen an der Universität Tübingen WS 1959–1960. – Tübingen, 1960. – S. 1–45.
8. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

Поступила в редакцию 26.12.12.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗАДАННУЮ СИСТЕМУ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

Т.В. Тихоненко

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

FINITE GROUPS CONTAINING A GIVEN SYSTEM OF PERMUTABLE SUBGROUPS

T.V. Tihonenko

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Получены признаки нетривиальности разрешимого радикала и критерии простоты конечной группы, которая содержит заданную систему перестановочных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, перестановочные подгруппы, разрешимый радикал, простая неабелева группа.

Signs of non-simplicity of a solvable radical and criteria of non-simplicity of a finite group, which contains the given system of permutable subgroups were obtained in this paper.

Keywords: finite group, permutable subgroups, solvable radical, nonabelian simple group.

Введение

Строение конечной группы в значительной степени зависит от наличия в ней заданной системы перестановочных подгрупп. Напомним, что подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если выполнено равенство $AB = BA$. Подгруппа A группы G называется *перестановочной* или *квазинормальной* в G , если A перестановочна со всеми подгруппами из G . В теории групп важность этого понятия связана прежде всего с тем, что для перестановочных подгрупп A и B их произведение AB само является группой.

В середине прошлого столетия появился ряд работ по теории перестановочных подгрупп, которые определили основные направления развития теории перестановочных подгрупп в последующие годы. Отметим работы О. Оре [1], Н. Ито [2], Р. Майера [3], О. Кегеля [4].

В настоящее время интерес к данной тематике значительно возрос, о чем свидетельствует значительное увеличение числа публикаций. Отметим статью Дж. Бейдлемана и Х. Хайнекена [5]. В серии публикаций А.Н. Скибы рассматривались X -перестановочные подгруппы, где X – некоторое множество элементов группы G . В частности, им было получено обобщение теоремы Шура-Цассенхауза, а также ряд критериев сверхразрешимости конечных групп. Достаточно полную информацию о конечных группах с перестановочными подгруппами можно найти в обзоре [6].

Настоящая работа относится к данному направлению.

1 Обозначения и предварительные результаты

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [7]–[8]. Приведем некоторые из них для удобства чтения:

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G ;

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G ;

$O_2(G) = O(G)$ – наибольшая нормальная 2'-подгруппа группы G ;

$S(G)$ – разрешимый радикал группы G , т. е. подгруппа, порожденная всеми разрешимыми нормальными подгруппами группы G ;

$Syl_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп группы G ;

$L(G)$ – слой группы G , т. е. наибольшая нормальная полупростая подгруппа группы G ;

$F^*(G)$ – обобщенная подгруппа Фиттинга группы G , $F^*(G) = F(G)L(G)$;

$[R]S$ – полупрямое произведение подгрупп R и S , где R является нормальной подгруппой в $[R]S$;

$I(G)$ – множество всех инволюций группы G ;

$\langle T^G \rangle$ – нормальное замыкание подгруппы T в группе G , $\langle T^G \rangle \trianglelefteq G$.

Лемма 1.1 [7, предложение 1.27].
 $C_G(F^*(G)) \subseteq F^*(G)$ для любой группы G . Кроме того, если $F(G) \subseteq H \triangleleft G$ и $C_G(H) \subseteq H$, то $F^*(G) \subseteq H$.

Лемма 1.2. Пусть собственная подгруппа H группы G имеет четный порядок. Если H перестановочная со всеми инволюциями группы G , то G не является простой неабелевой группой.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к лемме 1.2. Тогда G – простая неабелева группа. Если все инволюции $I(G)$ содержатся в H , то $H = G$, что невозможно. Следовательно, существует такая инволюция $\tau \in I(G)$, что $\tau \notin H$. Так как $H\langle \tau^g \rangle = \langle \tau^g \rangle H$, для всех $g \in G$, то $H \triangleleft \langle \tau^G \rangle = G$. Последнее невозможно. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть собственная подгруппа H группы G имеет нечетный порядок. Если H перестановочна со всеми инволюциями группы G , то $S(G) \neq 1$.

Доказательство. Пусть группа G – минимальный контрпример к лемме 1.3. Так как H нормализуется любой инволюцией группы G , то группа G не простая. В силу минимальности контрпримера $S(G) = 1$.

Рассмотрим обобщенную подгруппу Фиттинга $F^*(G) = F(G)L(G) = L(G)$ – прямое произведение простых неабелевых подгрупп в группе G . Очевидно, что для всякой инволюции $\tau \in I(F^*(G))$ выполняется включение $\tau \in N_G(H)$. Так как множество всех инволюций из $F^*(G)$ порождает $F^*(G)$, то $F^*(G) \subseteq N_G(H)$. Если $F^*(G) \cap H \neq 1$, то, поскольку H – разрешимая подгруппа, получим, что $S(F^*(G)) \neq 1$, что невозможно. Поэтому $F^*(G) \cap H = 1$ и $H \subseteq C_G(F^*(G))$. Так как $H \not\subseteq F^*(G)$, то $C_G(F^*(G)) \not\subseteq F^*(G)$. Последнее невозможно по лемме 1.1. Полученное противоречие показывает, что $S(G) \neq 1$. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4 [8, теорема 1.5.12]. Пусть $H \subseteq K \subseteq G$. Тогда:

- 1) если $H \text{ char } K \text{ char } G$, то $H \text{ char } G$;
- 2) если $H \text{ char } K \triangleleft G$, то $H \triangleleft G$.

Лемма 1.5 [4, теорема 1]. Пусть A и B – собственные подгруппы конечной группы G и $G \neq AB$, причем $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$. Тогда A или B содержится в собственном нормальном делителе группы G .

Лемма 1.6. Пусть G – конечная группа, не содержащая секций изоморфных группе Судзуки $Sz(q)$. Если H – $3'$ -подгруппа группы G , всякая подгруппа которой перестановочна со всякой 3 -подгруппой группы G , то $S(G) \neq 1$.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к лемме 1.6. Тогда $S(G) = 1$. Так как простая неабелева группа не содержит подгруппы индекса 3, то по лемме 1.5 G не является простой неабелевой группой.

Рассмотрим минимальную нормальную подгруппу $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где $k \geq 1$, N_i – простые неабелевы группы и $3 \in \pi(N)$. Ясно, что $N \cap H = 1$.

Пусть $T = [N]H$. Если $U \in \text{Syl}_3(N)$, то по условию леммы 1.6 существуют подгруппы $[U]H^t$, для всех $t \in T$. Отсюда следует, что $\langle H^T \rangle \subseteq N_T(U)$ и $\langle H^T \rangle \triangleleft T$.

Если $\langle H^T \rangle \supseteq H$, то по тождеству Дедекинда $\langle H^T \rangle = [(N \cap \langle H^T \rangle)]H$. Поэтому $N \cap \langle H^T \rangle = N$.

Следовательно, $\langle H^T \rangle = [N]H = T \subseteq N_T(U)$, откуда получим $U \triangleleft N$, что невозможно.

Значит $\langle H^T \rangle = H$ и $T = N \times H$. Получим, что $H \subseteq C_G(N) \triangleleft G$. Ясно, что $N \cap C_G(N) = 1$. Поскольку $N \triangleleft G$ и $C_G(N) \triangleleft G$, то существует подгруппа $N \times C_G(N) \triangleleft G$.

Если $(|C_G(N)|, 3) = 3$ и поскольку $H \subseteq C_G(N)$, то в силу минимальности контрпримера $S(C_G(N)) \neq 1$, значит $S(G) \neq 1$.

Пусть $(|C_G(N)|, 3) = 1$. Если $C_G(N)$ – неразрешимая подгруппа, то она содержит секцию, которая является простой неабелевой группой порядка взаимно простого с 3. Значит, эта секция изоморфна группе Судзуки, что противоречит условию леммы 1.6. Поэтому $C_G(N)$ – разрешимая нормальная подгруппа группы G и $S(G) \neq 1$. Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7 [9, лемма 1.6]. Пусть G – конечная группа. A, B – π -группы и для любого элемента $g \in G$ выполняется $AB^g = B^gA$. Тогда либо $O_\pi(G) \neq 1$, либо $S(G) \neq 1$, либо существуют две разрешимые минимальные нормальные подгруппы в группе G .

2 Основные результаты

В данной работе получены и доказаны следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть G – группа четного порядка и собственная подгруппа H группы G имеет нечетный порядок. Если подгруппа H перестановочна с любой 2-подгруппой группы G , то $H \subseteq O(G)$.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.1. По лемме 1.3 $S(G) \neq 1$. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G .

Пусть $N = Z_p \times \dots \times Z_p$, где p – нечетное число. Если $H \subseteq N$, то, поскольку G – минимальный контрпример к теореме 2.1, получим, $H \subseteq O(G)$ и теорема 2.1 верна. Значит, $H \not\subseteq N$. Рассмотрим фактор-группу G/N . По индукции $HN/N \subseteq O(G/N)$. Перейдя к полным прообразам, получим, что $H \subseteq O(G)$.

Следовательно, $N = Z_2 \times \dots \times Z_2$. Поскольку подгруппа H перестановочна с любой 2-подгруппой группы G , то получим, что $NH = N \times H$. Тогда $H \subseteq C_G(N)$.

Пусть $C_G(N) \neq G$. Тогда $H \subseteq O(C_G(N)) \text{ char } C_G(N) \triangleleft G$ и по лемме 1.4 $O(C_G(N)) \triangleleft G$, следовательно, $H \subseteq O(G)$. Пусть $C_G(N) = G$. Тогда $N \leq Z(G)$. Если N – силовская 2-подгруппа в G , то $G = N \times O(G)$. Тогда подгруппа $H \subseteq O(G)$. Значит, подгруппа N не совпадает с силовской 2-подгруппой группы G .

Рассмотрим фактор-группу G/N . По индукции фактор-группа $HN/N \subseteq O(G/N)$. Перейдя к полным прообразам, получим, что $H \subseteq O(G)$. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Пусть собственная подгруппа H конечной группы G имеет четный порядок. Если H перестановочна со всеми инволюциями из некоторого класса сопряженности, то G не является простой неабелевой группой.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.2. Тогда G – простая неабелева группа. Пусть τ – некоторая инволюция из класса сопряженности. Если $\tau \in H$, то $\tau \in N_G(H)$. Если $\tau \notin H$, то поскольку

$$\langle \tau \rangle H = H \langle \tau \rangle = L,$$

получим, что $L = [H] \langle \tau \rangle$ и $\tau \in N_G(H)$. Следовательно, для любого $g \in G$ $\langle \tau^g \rangle \subseteq N_G(H)$ и поскольку G – простая группа, следовательно, $G = \langle \tau^g \rangle \subseteq N_G(H)$, получим, что $H \triangleleft G$. Последнее невозможно. Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. Пусть G – конечная группа и $\pi = \{p, q\}$, где $p, q \in \pi(G)$, $p \neq q$. Если в группе G любая p -группа перестановочна с любой q -группой, то $S(G/O_\pi(G)) \neq 1$.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.3. Тогда $S(G/O_\pi(G)) = 1$. Если $O_\pi(G) \neq 1$, то рассмотрим факторгруппу $G/O_\pi(G)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 2.3, следовательно, $S(G/O_\pi(G)) \neq 1$, что невозможно в силу минимальности контрпримера. Поэтому $O_\pi(G) = 1$.

Пусть $O_p(G) \neq 1$. Тогда

$$S(G/O_\pi(G)) = S(G) \neq 1$$

и теорема 2.3 верна. Таким образом,

$$O_p(G) = O_q(G) = 1.$$

Так как $S_p S_q^g = S_q^g S_p = G$ для всех $g \in G$, то по лемме 1.5 группа G не является простой неабелевой группой и любая ее нормальная подгруппа имеет порядок, который делится на p или q . Пусть M – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Тогда $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$, где M_i – изоморфные простые неабелевы группы.

Пусть $(|M|, p) = p$, $(|M|, q) = q$. В этом случае подгруппа M удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и поэтому $S(M/O_\pi(M)) \neq 1$. Так как $O_\pi(M) \text{ char } M \triangleleft G$, то по лемме 1.4 $O_\pi(M) \triangleleft G$ и $O_\pi(M) \subseteq O_\pi(G) = 1$. Следовательно, $S(M) \neq 1$, что невозможно.

Пусть $(|M|, p) = p$, $(|M|, q) = 1$. Рассмотрим $a \in G$, $|a| = q$. Обозначим $L = M \langle a \rangle$. Если $L \neq G$, то подгруппа L удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и $S(L/O_\pi(L)) \neq 1$. Отсюда не трудно заключить, что $L = M \times \langle a \rangle$ и $a \in C_G(M) \triangleleft G$. Таким образом, $C_G(M)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и $S(C_G(M)/O_\pi(C_G(M))) \neq 1$, что невозможно.

Поэтому $L = G$ и $G = [(M_1 \times \dots \times M_k) \langle a \rangle]$. Если $k > 1$, то $G = [(M_1 \times M_1^a \times \dots \times M_1^{a^{q-1}}) \langle a \rangle]$. Обозначим $P \in \text{Syl}_p(M_1)$. Так как $P \langle a \rangle = \langle a \rangle P = T$, то $P = P^a \subseteq M_1$, что невозможно.

Таким образом, M – простая неабелева группа. Пусть $P \in \text{Syl}_p(M)$, тогда для любого элемента $g \in G$ существует подгруппа $[P] \langle a^g \rangle$. Следовательно, $\langle a^g \rangle = G \subseteq N_G(P)$ и $P \triangleleft G$, что невозможно. Теорема 2.3 доказана.

Теорема 2.4. Пусть G – конечная группа, не содержащая секций изоморфных группе Судзуки $Sz(q)$. Если H – 3'-подгруппа группы G , всякая подгруппа которой перестановочна со всякой 3-подгруппой группы G , то $H \subseteq S(G)$.

Доказательство. По лемме 1.6, $S(G) \neq 1$. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.4 и N – минимальная нормальная разрешимая подгруппа в группе G . Очевидно, что $H \not\subseteq N$. Рассмотрим подгруппу NH , где $N = Z_r \times \dots \times Z_r$.

Пусть $r = 3$ и $\bar{G} = G/N$. Если $(|\bar{G}|, 3) = 3$, то в силу минимальности контрпримера $\bar{H} \subseteq S(\bar{G})$. Следовательно, $H \subseteq S(G)$. Значит, \bar{G} – 3'-группа, следовательно, $N \in \text{Syl}_3(G)$ и \bar{G} – разрешимая группа, поэтому $H \subseteq S(G)$.

Пусть $r \neq 3$. Очевидно, что $(|\bar{G}|, 3) = 3$. Как было показано выше, $H \subseteq S(G)$. Теорема 2.4 доказана.

Отметим следующий результат о группах с факторизациями.

Предложение. Пусть $G = AB$, где $(|A|, |B|) = 1$, $2 \in \pi(A)$. Если всякая силовская подгруппа группы A перестановочна с любой силовской подгруппой группы B , то $B \subseteq S(G)$.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример. Очевидно, что $S(G) = 1$. Рассмотрим $A_r \in \text{Syl}_r(A)$, $B_s \in \text{Syl}_s(B)$. Пусть $g \in G$, тогда $g = ba$ для некоторого $b \in B$ и $a \in A$. Покажем, что $A_r B_s^g = B_s^g A_r$. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} A_r B_s^g &= A_r B_s^{ba} = (A_r^{a^{-1}} B_s^b)^a = (B_s^a A_r^{a^{-1}})^a = \\ &= B_s^{ba} A_r = B_s^g A_r. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_r B_s^g = B_s^g A_r$.

Обозначим $\pi = \{r, s\}$. Из леммы 1.7 следует, что либо $O_\pi(G) \neq 1$, либо $S(G) \neq 1$, либо группа G содержит две различные минимальные нормальные подгруппы. Следовательно, группа G содержит собственную минимальную нормальную подгруппу N , которая является неразрешимой. Так как $N = (N \cap A)(N \cap B)$, то подгруппа N удовлетворяет условиям предложения. Если $N \cap B \neq 1$, то, в силу минимальности контрпримера, $N \cap B \subseteq S(N)$, что невозможно. Поэтому $N = N \cap A$ и можно считать, что $G = [A]B$, где B – силовская p -подгруппа группы G . Очевидно, нормальное замыкание $\langle B^G \rangle = G$. Пусть S – некоторая силовская r -подгруппа группы A . По условию предложения $N_G(S)$ содержит $\langle B^G \rangle = G$. Поэтому подгруппа S нормальна в G . Так как $S(G) = 1$, то это невозможно. Полученное противоречие доказывает предложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
2. Ito, N. Uder die Quasinormalteiler vor endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szep // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23 – P. 169–170.
3. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 269–272.
4. Kegel, O. Produkte nilpotentner Gruppen / O. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90–93.
5. Beidleman, J.C. Mutually permutable subgroups and group classes / J.C. Beidleman, H. Heinen // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 18–30.
6. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 12–31.
7. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – М. : Мир, 1985.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
9. Казарин, Л.С. Признаки непрототы факторизуемых групп / Л.С. Казарин // Изв. АН СССР. – 1980. – Т. 44, № 2. – С. 288–308.

Поступила в редакцию 21.03.13.

УДК 681.3.06:624.131

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ АРМИРОВАННЫХ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ

В.Е. Быховцев, Д.В. Прокопенко, С.В. Торгонская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING OF THE BEARING ABILITY OF THE REINFORCED SOIL BASES OF THE BASES OF BUILDINGS

V.E. Bykhoutsev, D.V. Prokopenko, S.V. Torgonskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе рассматривается несущая способность грунтового основания плитного фундамента, имеющего включение малопрочного грунта, упрочненного винтовыми сваями малого сечения. Для исследования несущей способности был использован программный комплекс «Энергия 3D».

Ключевые слова: плитный фундамент, математическая модель, винтовая свая, компьютерное моделирование, несущая способность.

The paper deals with the analysis of the bearing ability of the soil basis slab the base which has the inclusion of the weak ground strengthened by screw piles of small section. For research of the bearing ability the program complex «Energy 3D» was used.

Keywords: slab foundation, computer modelling, mathematical model, screw pile, bearing ability.

Введение

В природе грунты представляют собой сложные многофазные системы, элементами которых являются различные структурные элементы: слои, линзы, вклинивания. Верхний слой природных грунтов представляет собой органоминеральное образование – почву. К этой же категории грунтов относятся илы, торф и т. п., которые могут находиться на поверхности грунтовой толщи и внутри ее, что является осложняющим фактором при оценке грунтов как оснований фундаментов [1]. В настоящее время все чаще под застройку отводятся площадки, которые в своей структуре имеют включение малопрочного грунта, что значительно снижает несущую способность грунта как основания фундамента возводимого здания. Несущая способность таких грунтовых оснований приводит к необходимости устройства сложных фундаментов зданий, что сопряжено со значительным увеличением стоимости одного квадратного метра возводимого здания. Решением этой проблемы может быть локальное повышение несущей способности малопрочных зон грунтового основания. В этом случае экономический эффект устройства фундаментов здания может достигать 20% их общей стоимости.

Существует несколько конструктивных методов, позволяющих увеличить несущую способность грунтовых оснований, в том числе содержащих малопрочные включения. Одним из

таких методов является вертикальное и горизонтальное армирование грунта. В настоящей работе рассматривается армирование грунта вертикальными сваями. Ставится задача определения количества, размеров и физико-механических характеристик армирующих элементов малопрочных зон грунтовых оснований. В формализованной постановке данная задача является многокритериальной краевой задачей нелинейной математической физики. Наиболее эффективным методом решения указанной задачи является метод объектно-ориентированного компьютерного моделирования на основе системного подхода и метода конечных элементов, рассмотренного совместно с методом энергетической линеаризации [2], [3], [4].

1 Постановка задачи

Рассматривается плитный фундамент на сложном нелинейно-деформируемом грунтовом основании. На верхнюю плоскость фундаментной плиты действует нормальная внешняя нагрузка. На некотором расстоянии от контактной поверхности плитного фундамента находится включение малопрочного грунта. С целью повышения несущей способности грунтового основания фундамента малопрочное грунтовое включение армируется винтовыми сваями малого сечения. Необходимо разработать численный метод расчёта упрочнения малопрочных грунтов под плитные фундаменты методом вертикального армирования сваями малого сечения.

В настоящей работе для исследования указанной нелинейной физической системы использовался программный комплекс «Энергия 3D», разработанный на основе метода конечных элементов и метода энергетической линеаризации [2].

2 Математическая модель системы

Всякая реальная система или объект всегда имеют определенные связи с внешней средой, которая налагает свои условия на их существование и функционирование. Все эти и другие качества в математической модели должны иметь своё отображение, а это значит, что математическая модель может иметь свою структурную схему. Это сразу накладывает свои требования на структуру ядра математической модели. Ядро математической модели будем строить на основе принципа минимума полной энергии системы. Для краевых задач нелинейной механики грунтов математическая модель исследуемой физической системы будет иметь вид [2], [3]:

1. Геометрическая модель деформируемой среды.

2. Механико-математическая модель элементов системы при линейно-упругом деформировании $\sigma_i = E\varepsilon_i$; при нелинейно-упругом деформировании $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, в частности

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \quad A > 0, \quad 0 < m < 1,$$

где σ_i, ε_i – интенсивности напряжений и деформаций, E – модуль деформации, A, m – параметры закона нелинейного деформирования.

3. Система краевых условий задаётся в соответствии с классификацией поставленной задачи как краевой задачи математической физики.

4. Условия равновесия системы (ядро математической модели):

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \{U\}} = 0,$$

$$\text{где } \Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\},$$

$\Pi, \{P\}$ – полная энергия деформируемой системы и вектор внешних сил, $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{U\}$ – векторы напряжений, деформаций и перемещений, V – объём области существования исследуемой системы.

5. Математическая модель (форма) искомого решения: $\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$.

В работе для исследования математической модели нелинейной физической системы используется аналитический метод энергетической линеаризации. Сущность метода состоит в построении секущего модуля деформации для каждого конечного элемента, что в целом сводится к решению неоднородной линейной системы, эквивалентной по несущей способности исходной задачи [2], [3].

3 Аналитический метод определения оптимального армирования сваями малого сечения грунтовых оснований, содержащих грунты пониженной несущей способности

Из физического анализа рассматриваемого класса задач следует, что несущая способность грунтового основания, содержащего малопрочные включения, будет зависеть от метрических и физико-механических параметров слоя пониженной несущей способности. При компьютерном объектно-ориентированном моделировании задач указанного класса в каждом частном случае определяется область существования исследуемой системы, в структуре этой области выделяется подобласть, содержащая малопрочные грунты. Подобласть с малопрочным грунтом армируется вертикальными сваями малого сечения. Количество этих свай, их геометрические и физические характеристики подлежат определению. Дискретизация всей области может быть своя, способ задания граничных условий и физико-механические характеристики элементов дискретизированной области определяются на основании экспериментальных данных. Следовательно, дискретизованная область по своей структуре и свойствам будет неоднородная и нелинейно деформируемая. В такой постановке решение этой задачи возможно только посредством компьютерного моделирования. Однако для оперативного принятия решения для задач данного класса получение приближённого аналитического решения представляет значительный интерес. Авторами разработан подход для получения приближённого аналитического решения поставленной задачи. Принципиальная сущность разработанной методики состоит в построении однородного гипотетического грунтового основания для подобласти малопрочного грунта, эквивалентного по своей несущей способности реальному основанию плитных фундаментов. Это значит, что средневзвешенное значение модуля деформации для армированной подобласти малопрочного грунта, расположенной в плане проекции фундаментной плиты, должно быть не меньше модуля деформации основной области грунтового основания. На основе результатов компьютерного моделирования реальных задач об осадке плитных фундаментов на основаниях с малопрочными грунтами были определены необходимые данные для их достаточного армирования и построены аналитические соотношения для определения количества армирующих свай, их геометрических и физических характеристик. Исходя из того, что площадь пятна застройки может определяться десятками квадратных метров, аналитические выкладки целесообразно проводить для небольшой площадки, расположенной в плане проекции фундаментной плиты. В общем случае рассматривается выделенный объём малопрочного грунта: $V = Sh$, где S – площадь горизонтальной площадки выделенного

объёма малопрочного грунта, h – высота слоя малопрочного грунта, E_{cl} – модуль деформации слоя малопрочного грунта. Для армированного выделенного объёма малопрочного слоя грунта при условии эквивалентности его по несущей способности реальному основанию плитного фундамента будет иметь место следующее соотношение:

$$(V - nV_{cs})E_{cl} + nV_{cs}E_{cs} = E_0V, \quad (3.1)$$

где n – количество армирующих свай для выделенного объёма малопрочного грунта, V_{cs}, E_{cs} – объём и модуль деформации армирующей сваи, E_0 – модуль деформации грунтового основания плитного фундамента.

Длина армирующих свай принимается равной мощности слоя малопрочного грунта, тогда из (3.1) следует

$$(S - nd^2)E_{cl} + nd^2E_{cs} = E_0S. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует

$$n = \frac{(E_0 - E_{cl})S}{d^2(E_{cs} - E_{cl})} \quad (3.3)$$

или

$$E_{cs} = \frac{(E_0 - E_{cl})S}{nd^2} + E_{cl}. \quad (3.4)$$

Полученные формулы были верифицированы методом компьютерного моделирования и этим самым была показана их практическая приемлемость для экспресс оценки способа армирования слоя малопрочного грунта грунтового основания плитного фундамента. Однако следует иметь в виду, что наиболее точное решение поставленной задачи может быть получено только методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования неоднородных и нелинейных систем деформируемых твёрдых тел.

4 Компьютерное моделирование упрочнения малопрочных грунтов под плитные фундаменты методом вертикального армирования сваями малого сечения

Для исследования поставленной задачи нам необходимо рассмотреть фундаментную плиту в однородном грунтовом основании – это будет базовая задача. На ее основе рассмотрим задачи для исследования упрочнения малопрочных грунтов методом вертикального армирования сваями малого сечения. Все задачи рассматривались в трехмерном пространстве, их исследование проводилось методом визуального объектно-ориентированного моделирования на основе метода конечных элементов и метода энергетической линеаризации. Площадки под застройку по своей протяженности могут быть довольно большими, поэтому для исследования выделим некоторую площадку, содержащую малопрочное включение. Армирование будем строить по симметричной схеме, что позволит нам увеличить объемы рас-

четной области. В силу симметрии рассматриваемых задач (рисунок 4.1), их численное решение производилось для одной четверти деформируемой области со схемой дискретизации, приведенной на рисунке 4.2.

Для получения решения методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования было построено 146 модельных задач. Все модельные задачи рассматриваются в одной и той же дискретизованной области. Свойства элементов модели определяются содержанием для каждой конкретной задачи. Во второй модельной задаче несущая способность фундаментной плиты рассматривалась с учетом и без учета уплотнения грунта вокруг ствола армирующих свай.

Модельная задача № 1 (Плитный фундамент – базовая задача).

Исходные данные: векторы шагов дискретизации

$$h_x = \{30, 30, 30, 20, 30, 10, 30, 10, 30, 30, 10, 30, 10, 30, 20, 30, 30, 30\},$$

$$h_y = \{30, 30, 30, 20, 30, 10, 30, 10, 30, 30, 10, 30, 10, 30, 20, 30, 30, 30\},$$

$$h_z = \{20, 10, 10, 10, 10, 30, 30, 30, 30, 30, 10, 30, 30, 30, 30\};$$

$$E_{cp} = 32 \text{ МПа}, \mu_{cp} = 0.3,$$

$$E_{nl} = 20000 \text{ МПа}, \mu_{nl} = 0.15,$$

расчётная область: $440 \times 440 \times 370$ см;

плита: $220 \times 220 \times 20$ см;

нагрузка $P = 1280$ кН (128000 кгс).

Модельная задача № 2 (Плитный фундамент в грунтовом основании с включением малопрочного грунта).

Исходные данные: векторы шагов дискретизации

$$h_x = \{30, 30, 30, 20, 30, 10, 30, 10, 30, 30, 10, 30, 10, 30, 20, 30, 30, 30\},$$

$$h_y = \{30, 30, 30, 20, 30, 10, 30, 10, 30, 30, 10, 30, 10, 30, 20, 30, 30, 30\},$$

$$h_z = \{20, 10, 10, 10, 10, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30\};$$

$$E_{cp} = 32 \text{ МПа}, \mu_{cp} = 0.3,$$

$$E_{nl} = 20000 \text{ МПа}, E_{1cl} = 2 \text{ МПа},$$

$$E_{2cl} = 8 \text{ МПа}, E_{cs} = 500 - 20000 \text{ МПа},$$

$$\mu_{nl} = 0.15, P = 1280 \text{ кН (128000 кгс)};$$

расчётная область: $440 \times 440 \times 370$ см;

малопрочный слой: $240 \times 240 \times 180$ см;

плита: $220 \times 220 \times 20$ см;

свая: $10 \times 10 \times 180$ см.

Проанализировав полученные методом компьютерного моделирования, данные в модельных задачах 1, 2, можно сделать выводы:

1. Учет уплотнения вокруг армирующих свай незначительно влияет на осадку фундаментной плиты (при $E_{2cl} = 2$ МПа уплотнение увеличивает в среднем несущую способность грунтового основания на 0,29%, при $E_{2cl} = 8$ МПа – на 0,6%).

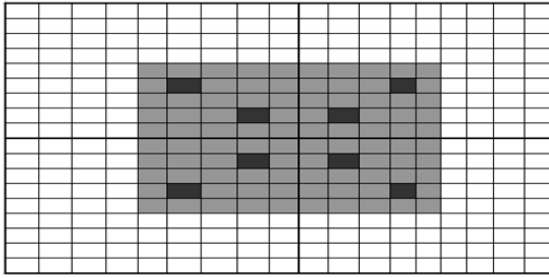


Рисунок 4.1 – Схема армирования малопрочного грунта (вид сверху)

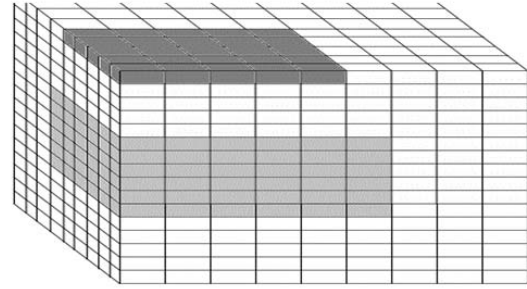


Рисунок 4.2 – Дискретизация 1/4 расчётной области фундамента на сложном основании

Таблица 4.1 – Осадка плитного фундамента без учета и с учетом малопрочного слоя при линейном и нелинейном деформировании (см)

№ узлов	Плитный фундамент $E_{1ст} = 8$				Плитный фундамент $E_{2ст} = 2$			
	Линейное решение		Нелинейное решение		Линейное решение		Нелинейное решение	
	Сл. слой	Без сл. слоя	Сл. слой	Без сл. слоя	Сл. слой	Без сл. слоя	Сл. слой	Без сл. слоя
1	3,21	2,25	7,87	6,95	3,95	2,25	8,38	6,95
2	3,21	2,25	7,87	6,95	3,94	2,25	8,37	6,95
3	3,20	2,24	7,86	6,94	3,94	2,24	8,36	6,94
4	3,16	2,21	7,82	6,91	3,89	2,21	8,31	6,91
5	3,14	2,20	7,8	6,89	3,87	2,20	8,29	6,89
6	3,08	2,15	7,73	6,83	3,80	2,15	8,21	6,83

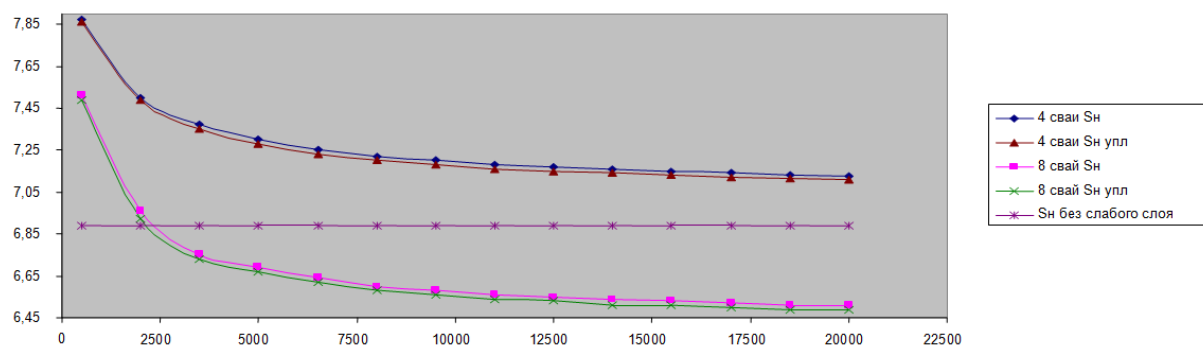
Таблица 4.2 – Осадки фундаментной плиты в зависимости от модуля упругости материала армирующих свай при модуле деформации малопрочного грунта $E_{2ст} = 2$ МПа (см)

$S_{пл} \backslash E_{ст}$	500	2000	3500	5000	6500	8000	9500	11000	12500	14000	15500	17000	18500	20000
Четыре сваи														
S_l	3,65	3,28	3,23	3,17	3,09	3,1	3,08	3,07	3,06	3,05	3,04	3,03	3,02	3,02
S_n	7,87	7,5	7,37	7,3	7,25	7,22	7,2	7,18	7,17	7,16	7,15	7,14	7,13	7,13
$S_{л упл}$	3,61	3,32	3,2	3,14	3,1	3,07	3,06	3,04	3,03	3,03	3,02	3,01	3,01	3
$S_{н упл}$	7,86	7,49	7,35	7,28	7,23	7,2	7,18	7,16	7,15	7,14	7,13	7,12	7,12	7,11
Восемь свай														
S_l	3,42	2,96	2,78	2,7	2,65	2,62	2,59	2,57	2,56	2,55	2,54	2,54	2,53	2,52
S_n	7,51	6,96	6,75	6,69	6,64	6,6	6,58	6,56	6,55	6,54	6,53	6,52	6,51	6,51
$S_{л упл}$	3,36	2,92	2,76	2,68	2,63	2,59	2,57	2,55	2,54	2,53	2,52	2,51	2,5	2,5
$S_{н упл}$	7,49	6,92	6,78	6,67	6,62	6,58	6,56	6,54	6,53	6,51	6,51	6,5	6,49	6,49

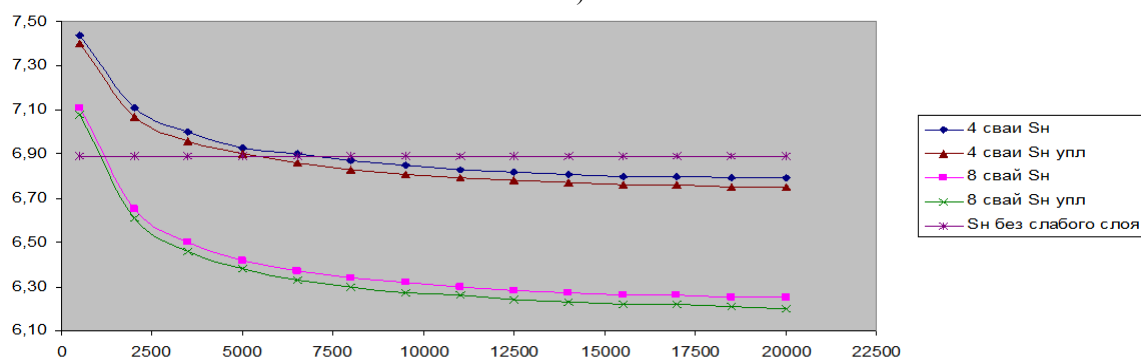
Таблица 4.3 – Осадки фундаментной плиты в зависимости от модуля упругости материала армирующих свай при модуле деформации малопрочного грунта $E_{2ст} = 8$ МПа (см)

$S_{пл} \backslash E_{ст}$	500	2000	3500	5000	6500	8000	9500	11000	12500	14000	15500	17000	18500	20000
Четыре сваи														
S_l	3,03	2,83	2,75	2,7	2,67	2,65	2,64	2,63	2,62	2,61	2,6	2,6	2,59	2,59
S_n	7,44	7,11	7	6,93	6,9	6,87	6,85	6,83	6,82	6,81	6,8	6,8	6,79	6,79
$S_{л упл}$	2,96	2,79	2,7	2,66	2,63	2,61	2,59	2,58	2,57	2,56	2,56	2,55	2,55	2,54
$S_{н упл}$	7,4	7,07	6,96	6,9	6,86	6,83	6,81	6,79	6,78	6,77	6,76	6,76	6,75	6,75
Восемь свай														
S_l	2,88	2,56	2,44	2,38	2,34	2,31	2,29	2,28	2,27	2,26	2,25	2,24	2,24	2,23
S_n	7,11	6,65	6,5	6,42	6,37	6,34	6,32	6,3	6,28	6,27	6,26	6,26	6,25	6,25
$S_{л упл}$	2,8	2,51	2,39	2,33	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,21	2,2	2,2	2,19	2,19
$S_{н упл}$	7,08	6,61	6,46	6,38	6,33	6,3	6,27	6,26	6,24	6,23	6,22	6,22	6,21	6,2

$S_{л}, S_{н}$ – осадки фундаментной плиты при линейном и нелинейном деформировании основания без учета уплотнения грунта вокруг армирующих винтовых свай, $S_{л\text{упл}}, S_{н\text{упл}}$ – осадки фундаментной плиты при линейном и нелинейном деформировании основания с учетом уплотнения грунта вокруг армирующих винтовых свай.



а)



б)

Рисунок 4.3 – График зависимости осадки фундаментной плиты при нелинейном деформировании от модуля упругости материала армирующих свай а) при модуле деформации малопрочного грунта $E_{2сг}=2$, б) при модуле деформации малопрочного грунта $E_{2сг}=8$

2. Чем больше модуль деформации малопрочного грунта, тем больше влияние уплотнения грунта вокруг армирующих винтовых свай на осадку фундаментной плиты (с увеличением модуля деформации малопрочного грунта увеличивается несущая способность грунтового основания).

3. При модуле деформации малопрочного грунта $E_{2сг}=2$ МПа четырех армирующих свай недостаточно для того, чтобы добиться несущей способности грунтового основания с включением малопрочного грунта, равной несущей способности грунтового основания без малопрочного включения.

4. При модуле деформации малопрочного грунта $E_{2сг}=8$ МПа достаточно четырех армирующих свай для того, чтобы добиться несущей способности грунтового основания с включением малопрочного грунта, равной несущей способности грунтового основания без малопрочного включения.

5. При модуле деформации малопрочного грунта $E_{2сг}=8$ МПа армирование можно произвести четырьмя сваями с модулем упругости

$E=6500$ МПа или восемью сваями с модулем упругости $E=2000$ МПа, чтобы добиться несущей способности грунтового основания с включением малопрочного грунта, равной несущей способности грунтового основания без малопрочного включения.

6. Как видно из рисунка 4.3, армирование можно производить сваями малого сечения с модулем упругости, рассчитанным по формуле (3.4), для того чтобы добиться несущей способности грунтового основания с включением малопрочного грунта, равной несущей способности грунтового основания без малопрочного включения.

Представляет интерес, как будет вести себя армирование малопрочного грунтового включения сваями малого сечения при различных модулях деформации малопрочного грунтового основания. Для этого были построены модельные задачи 3, 4.

В ниже приведенных модельных задачах модуль упругости материала армирующих свай рассчитывался по формуле (3.4).

Модельная задача № 3 (Плитный фундамент – базовая задача).

Исходные данные: векторы шагов дискретизации

$$h_x = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_y = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_z = \{20, 30, 30, 30, 40, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 10, 30, 30, 30, 30\};$$

$$E_{zp} = 32 \text{ МПа}, \mu_{zp} = 0.3,$$

$$E_{nl} = 20000 \text{ МПа}, \mu_{nl} = 0.15,$$

расчётная область: $1140 \times 1140 \times 460$ см;

плита: $170 \times 170 \times 20$ см;

нагрузка $P = 1280$ кН (128000 кгс).

Модельная задача № 4 (Плитный фундамент в грунтовом основании с включением малопрочного грунта).

Исходные данные: векторы шагов дискретизации

$$h_x = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_y = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_z = \{20, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30\};$$

$$E_{zp} = 35 \text{ МПа}, \mu_{zp} = 0.3,$$

$$E_{nl} = 20000 \text{ МПа}, E_{cl} = 1-10 \text{ МПа},$$

$$E_{ce} = 9847 \text{ МПа},$$

$$\mu_{nl} = 0.15, P = 1280 \text{ кН (128000 кгс)};$$

расчётная область: $1140 \times 1140 \times 460$ см;

малопрочный слой: $810 \times 810 \times 180$ см;

плита: $170 \times 170 \times 20$ см;

свая: $10 \times 10 \times 180$ см.

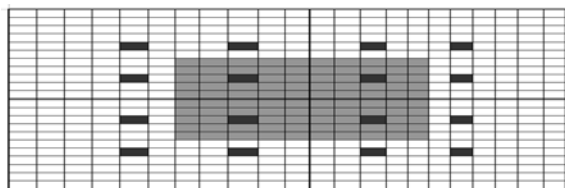


Рисунок 4.4 – Расчётная область с планом армирования сваями (вид сверху)

Осадка плиты базовой задачи равна 1,36 и 5,2 см при линейном и нелинейном деформировании соответственно.

Таблица 4.4 – Осадки фундаментной плиты в зависимости от модуля упругости малопрочного слоя (см)

$S_{nl} \backslash E_{cl}$	1	2	4	6	8	10
S_l	4,66	3,84	2,74	2,39	2,05	1,91
S_n	15,86	12,33	9,84	8,53	7,75	7,13
$S_{l \text{ арм}}$	1,34	1,34	1,3	1,27	1,26	1,25
$S_{n \text{ арм}}$	4,87	4,87	4,82	4,73	4,73	4,67

S_l, S_n – осадки фундаментной плиты при линейном и нелинейном деформировании основания без армирования малопрочного грунта сваями,

$S_{l \text{ арм}}, S_{n \text{ арм}}$ – осадки фундаментной плиты при линейном и нелинейном деформировании основания с учетом армирования малопрочного грунта сваями.

По результатам компьютерного моделирования, полученным в модельных задачах 3–4, можно сделать вывод, что вне зависимости от модуля упругости малопрочного слоя армирование достаточно производить под плитой и на расстоянии 10 см в горизонтальной плоскости от края проекции плиты, для того чтобы добиться несущей способности грунтового основания с включением малопрочного грунта большей несущей способности грунтового основания без малопрочного включения.

В следующих модельных задачах рассматривается армирование малопрочного включения в зависимости от расстояния этого включения в вертикальной плоскости от контактной поверхности фундаментной плиты с грунтовым основанием.

Модельная задача № 5 (Плитный фундамент – базовая задача).

Исходные данные: векторы шагов дискретизации

$$h_x = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_y = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_z = \{20, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30\};$$

$$E_{zp} = 35 \text{ МПа}, \mu_{zp} = 0.3,$$

$$E_{nl} = 20000 \text{ МПа}, \mu_{nl} = 0.15,$$

расчётная область: $1140 \times 1140 \times 460$ см;

плита: $170 \times 170 \times 20$ см;

нагрузка $P = 1280$ кН (128000 кгс).

Модельная задача № 6 (Плитный фундамент в грунтовом основании с включением малопрочного грунта).

Исходные данные: векторы шагов дискретизации

$$h_x = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_y = \{30, 150, 150, 150, 10, 10, 50, 10, 25, 25, 10, 50, 10, 10, 150, 150, 150, 30\},$$

$$h_z = \{20, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30\};$$

$$E_{zp} = 35 \text{ МПа}, \mu_{zp} = 0.3,$$

$$E_{nl} = 20000 \text{ МПа}, E_{cl} = 5 \text{ МПа},$$

$$E_{ce} = 9847 \text{ МПа}, \mu_{nl} = 0.15,$$

$P = 1280$ кН (128000 кгс);

расчётная область: $1140 \times 1140 \times 460$ см;

малопрочный слой: $810 \times 810 \times 150$ см;

плита: $170 \times 170 \times 20$ см;

свая: $10 \times 10 \times 150$ см.

Расчетная область с планом армирования сваями приведена на рисунке 4.4. Осадка базовой модели составляет 1,18 и 4,92 см. при линейном и нелинейном деформировании соответственно.

Таблица 4.5 – Осадки фундаментной плиты в зависимости от расстояния от контактной поверхности фундаментной плиты до малопрочного включения в вертикальной плоскости (см)

h	Осадки			
	Неармированный слабый грунт		Армированный слабый грунт	
	Линейное решение	Нелинейное решение	Линейное решение	Нелинейное решение
30	3,18	9,65	1,30	4,76
60	2,79	9,05	1,27	4,80
90	2,49	8,50	1,26	4,82
120	2,24	8,06	1,25	4,79
150	2,09	7,61	1,24	4,78
180	1,90	7,35	1,23	4,73
210	1,78	7,16	1,22	4,68
240	1,68	6,83	1,21	4,63
270	1,61	6,61	1,20	4,56
300	1,55	6,41	1,19	4,52

где h – расстояние от контактной поверхности фундаментной плиты до малопрочного включения в вертикальной плоскости.

По результатам компьютерного моделирования, полученным в модельных задачах 4–5, можно сделать вывод, что армирование малопрочного включения можно производить по выше изложенной формуле (3.4) вне зависимости от расстояния от контактной поверхности

фундаментной плиты до малопрочного включения, чтобы добиться несущей способности грунтового основания с малопрочным включением большей, чем несущая способность грунтового основания без малопрочного включения.

Заключение

Использование вертикального армирования зоны малопрочного грунтового основания сваями малого диаметра дает возможность обеспечить необходимую несущую способность слабых грунтов и осадку фундаментов. При этом, варьируя количеством, размерами и физико-механическими характеристиками армирующих элементов малопрочных зон грунтов, представляется возможным найти наиболее рациональные решения поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович, Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М. : Стройиздат, 1963. – 542 с.
2. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твердых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.
3. Быховцев, В.Е. Два эффективных метода решения краевых задач нелинейной теории упругости / В.Е. Быховцев. – Материалы, технологии, инструменты. – 2002. – № 4. – С. 5–7.
4. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 540 с.

Поступила в редакцию 24.01.13.

УДК 621.382

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ АППАРАТНО-ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ УЧЕБНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ ПРАКТИКУМОВ

Н.И. Листопад¹, С.В. Здоровцев², И.Г. Круглов², А.Г. Петрович²

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²Открытое акционерное общество «МНИПИ», Минск

FUNCTIONALITY OF THE HARDWARE AND SOFTWARE COMPLEX FOR LABORATORY WORK

N.I. Listopad¹, S.V. Zdorovtsev², I.G. Kruglov², A.G. Petrovich²

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²Public Joint Stock Company «MNIPI», Minsk

В статье предложен аппаратно-программный комплекс для решения учебных задач при практической подготовке специалистов по радиоэлектронике и приборостроению. Комплекс построен на основе информационно-измерительной системы, использующей программный пакет LabVIEW для ввода/вывода измерительной информации, управления функциональными узлами комплекса, анализа результатов измерений, составления электронных отчетов. Рассматриваются особенности построения отдельных узлов и всего комплекса в целом.

Ключевые слова: аппаратно-программный комплекс, информационно-измерительная система, USB-прибор, модуль управления.

The article describes the hardware and software complex to deal with educational tasks in the practical training of experts in electronics and instrumentation. The complex is built on the basis of the information-measuring system using LabVIEW software package for input/output of the measurement information, control of functional blocks of the complex, analysis of the measurement results and electronic reporting. The features of building of individual components and the entire complex as a whole are described.

Keywords: hardware and software complex, information-measuring system, USB device, control module.

Введение

Создание максимально гибких многофункциональных измерительных приборов и систем является актуальной научно-технической задачей при подготовке технических специалистов различных образовательных уровней. Решение данной задачи в каждом конкретном случае базируется, как правило, на научно-техническом заделе, имеющемся в той или иной области знаний. При этом универсальность системы обеспечивается, с одной стороны, программными возможностями используемых вычислительных средств – персональных компьютеров (ПК), с другой стороны – функциональной гибкостью технологической подсистемы [1].

Сами по себе ПК не могут обеспечить универсальность системы на технологическом уровне, то есть на уровне выполняемых технологических операций и процессов. Основное их назначение – обеспечение, прежде всего, информационной гибкости систем, то есть гибкости на уровне приема и обработки информации от самых различных источников (датчиков) и выдачи соответствующих управляющих и информационных сигналов на самые различные приемники подсистемы и т. д. [2]. Для обеспечения же максимальной функциональной гибкости технологической

подсистемы непосредственно на уровне технологических операций и процессов функциональные элементы и устройства должны отвечать определенным схемотехническим требованиям, которые формулируются и реализуются в соответствии со спектром решаемых задач [3].

1 Структура комплекса и его составных частей

Для создания современных учебных лабораторных практикумов наиболее целесообразным является их реализация в виде аппаратно-программных комплексов, которые позволяют исследовать реальные физические объекты и функциональные узлы. В этом случае имеется возможность использовать в работе элементы реального и виртуального взаимодействия с лабораторным оборудованием. При этом основными объектами исследования являются учебные лабораторные модули (УЛМ), а измерительное оборудование может быть как реальным, обеспечивающим непосредственную связь с ПК через интерфейс, так и виртуальным, полностью управляемым ПК.

Объединение аппаратно-программных средств измерения и обработки измерительной информации с учебными лабораторными модулями

представляет собой учебный аппаратно-программный комплекс (УАПК), предназначенный для выполнения учебных лабораторных практикумов по техническим дисциплинам.

Структура рассматриваемого УАПК приведена на рисунке 1.1. Основными составными узлами УАПК являются функциональные УЛМ и информационно-измерительная система (ИИС), включающая блок управления (БУ), блок измерения (БИ), блок обработки измерительной информации на базе ПК.

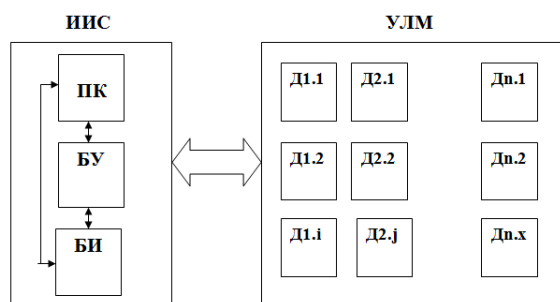


Рисунок 1.1 – Структурная схема УАПК

УЛМ могут иметь различную структуру и техническое исполнение в зависимости от многообразия решаемых задач. УЛМ подразделяются на изучаемые дисциплины (Д1, Д2 ... Дn) и на

лабораторные практикумы в составе этих дисциплин (Д1.1, Д1.2 ... Д1.i и т. д.). Основным условием реализации УЛМ в составе УАПК является их совместимость с ИИС.

Предлагаемая ИИС структурно состоит из трех функциональных групп. Первая группа включает радиоэлектронные модули первичной обработки информации. Вторая группа ИИС представляет собой блок измерительный (БИ), включающий комплект интеллектуальных измерительных USB-приборов с соответствующим программным обеспечением. Третья группа представляет собой блок управления (БУ) и информационный блок, включающий математическое, алгоритмическое и программное обеспечение системы на основе персонального компьютера (ПК). Первая и третья группы могут видоизменяться в зависимости от способа контроля параметров и функционального назначения ИИС. Структурная схема рассматриваемой ИИС представлена на рисунке 1.2.

Измерительный блок был построен на базе двух модулей: функционального USB-генератора сигналов и двухканального цифрового USB-осциллографа. Такой выбор обусловлен широкими возможностями интеллектуальных измерительных USB-приборов, использующих постоянно увеличивающиеся вычислительные возможности и гибкость ПК.

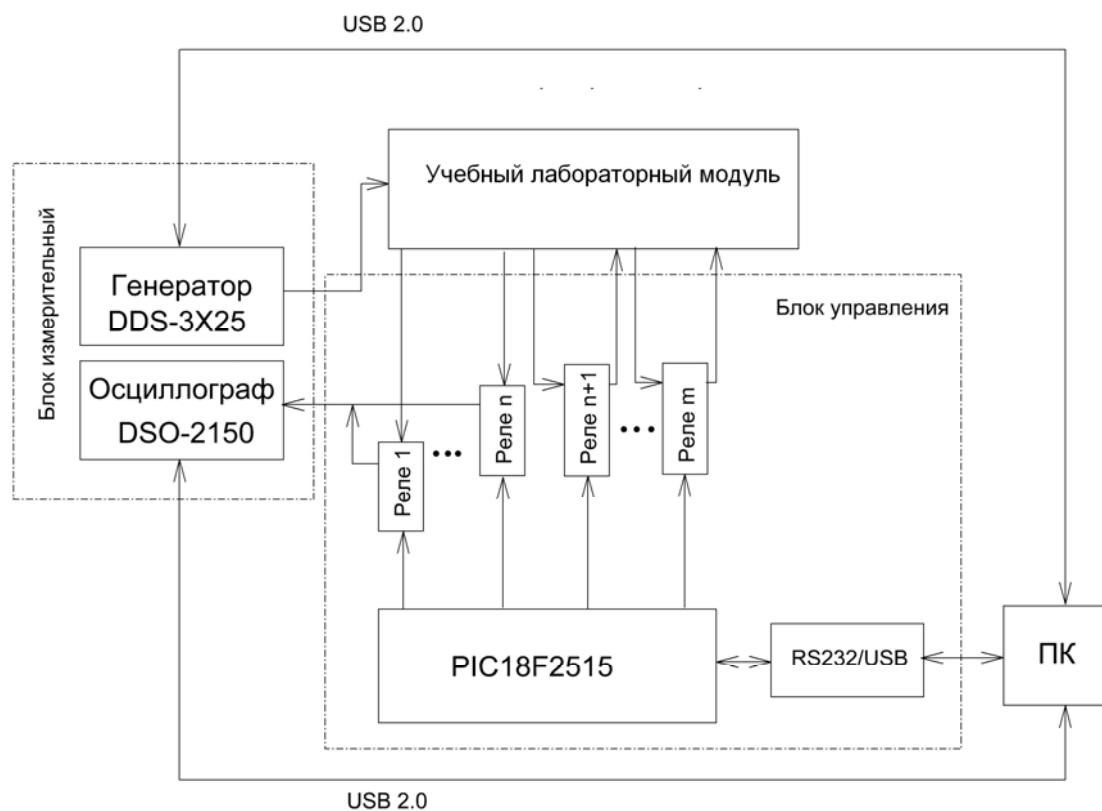


Рисунок 1.2 – Структурная схема ИИС

2 Особенности построения и функциональные возможности комплекса

Основными особенностями построения БИ на базе измерительных USB-приборов являются:

- широкие возможности представления и обработки измерительной информации;
- настраиваемый интерфейс пользователя;
- расширяемость;
- запись времени и комментариев вместе с данными;
- автоматизация процесса измерений;
- встроенные в измерительные процедуры возможности мультимедиа;
- взаимодействие с базами данных и информационными системами.

При этом автоматизированные средства разработки прикладных приложений, например LabVIEW или LabWindows/CVI, делают простым процесс создания как специализированных устройств, так и универсальных, комбинирующих возможности нескольких приборов.

При выборе USB-приборов учитывалось соответствие требуемых параметров входного сигнала (форма сигнала, амплитуда, диапазон задаваемой частоты) и характеристик осциллографа (количество входных каналов, диапазоны развертки амплитуды и времени).

При разработке программной части компьютерной информационно-измерительной системы были использованы следующие виртуальные инструменты LabVIEW:

- Interpolate 1D.VI – программный интерполятор;
- Harmonic Distortion Analyzer.VI – измеритель нелинейных искажений;

- Measure_for_1chan(SubVI).VI – измеритель параметров сигнала;
- Basic Averaged DC-RMS.VI – измеритель постоянного напряжения;
- Square Function.VI – формирователь прямоугольного импульса.

Для функционирования ИИС разработан протокол информационного взаимодействия узлов и подсистем и организована синхронизация процессов измерений различных параметров радиоэлектронных блоков. В среде LabVIEW было реализовано управление интеллектуальными измерительными приборами (генератор сигналов, цифровой осциллограф), а также управление как отдельными функциональными узлами ИИС, так и всей системой в целом. На рисунке 2.1 представлена блок-диаграмма программы USB-генератора сигналов.

Графический интерфейс пользователя реализован в виде графических образов панелей управления приборами. На рисунке 2.2 показан пример рабочего окна информационного дисплея в одном из режимов работы ИИС при измерении параметров радиоэлектронного модуля в соответствии с методическими материалами [4]. В представленном рабочем окне отображается анализируемая электрическая схема радиоэлектронного модуля, виртуальные панели измерительных приборов (генератор сигналов, цифровой осциллограф), параметры и характеристики исследуемого модуля в выбранном режиме ИИС. В представленном рабочем окне отображен режим исследования амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) модуля.

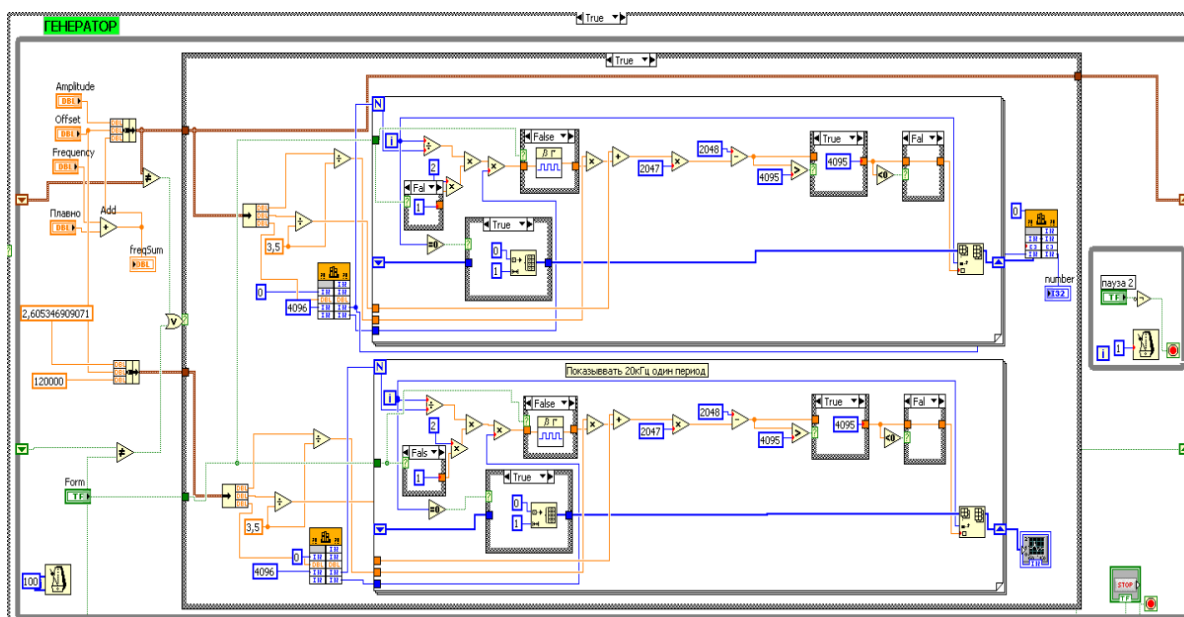


Рисунок 2.1 – Блок-диаграмма USB-генератора сигналов

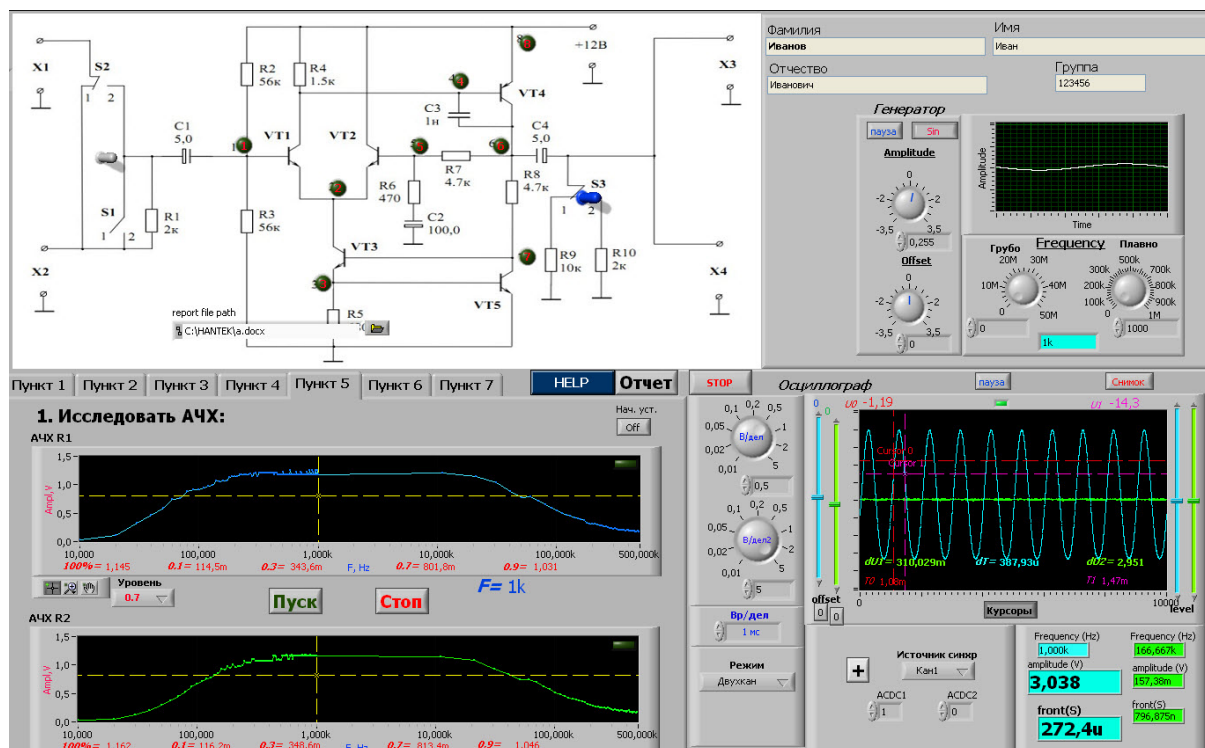


Рисунок 2.2 – Рабочее окно информационного дисплея ИИС

Во время выполнения лабораторного практикума симулируется работа генератора сигналов, при этом пользователь может управлять частотой, амплитудой и формой сигнала, с помощью двухканального USB-осциллографа измерять параметры и характеристики исследуемого модуля в контрольных точках при различных режимах работы схемы. Для подключения к исследуемой схеме тех или иных элементов используется коммутатор, который выполнен на малогабаритных реле, управляемых сигналами PIC-контроллера.

Блок управления связан с ПК через мост RS-232/USB, что позволяет упростить обмен данными путем использования механизма виртуальных COM портов. Изменение точек подключения входов USB-осциллографа, элементов схемы производится путем подачи команд управления в PIC-контроллер, что обеспечивает возможность выполнения широкого круга лабораторных практикумов.

Заключение

Разработанный учебный аппаратно-программный комплекс представляет интерес при решении измерительных задач, требующих автоматизации процессов измерения, хранения,

анализа измерительной информации, а также для реализации инновационных методов подготовки технических специалистов различного уровня на основе интеллектуальных аппаратно-программных средств в соответствии с современными образовательными программами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисенко, В.В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием / В.В. Денисенко. – М. : Горячая линия–Телеком, 2009. – 608 с.
2. Крюков, В.В. Информационно-измерительные системы / В.В. Крюков. – Владивосток : ВГУЭС, 2000. – 102 с.
3. Раннев, Г.Г. Интеллектуальные средства измерений: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Г.Г. Раннев. – М. : Издательский центр «Академия», 2010. – 272 с.
4. Крушев, В.Т. Лабораторный практикум по курсу Аналоговые электронные устройства для студентов спец. «Радиотехника», «Радиотехнические системы» и «Радиоинформатика» всех форм обучения / В.Т. Крушев, Э.Г. Попов. – Минск : БГУИР, 2004. – 58 с.

Поступила в редакцию 11.04.13.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25 % в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfimt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It pro-

vides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).