



ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№ 1 (14) 2013**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»

*Главный редактор:*  
**А.В. Рогачев** (Беларусь)

*Заместители главного редактора:*  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)  
**Л.А. Шеметков** (Беларусь)

*Редакционная коллегия:*  
**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**П.Д. Кухарчик** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

*Ответственный секретарь:*  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

*Адрес редакции:*  
Гомельский государственный  
университет им. Ф.Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»

*Editor-in-Chief:*  
**A.V. Rogachev** (Belarus)

*Deputy Editor-in-Chief:*  
**O.M. Demidenko** (Belarus)  
**L.A. Shemetkov** (Belarus)

*Editorial board:*  
**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Webin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**P.D. Kuharchik** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

*Executive Secretary:*  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

*Edition address:*  
F. Scorina Gomel State University  
Sovetskaya Str., 104,  
246019, Gomel, Republic of Belarus  
Ph. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
website: <http://pfmt.gsu.by>

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (14) 2013

### СОДЕРЖАНИЕ

#### ФИЗИКА

Балмаков А.П., Семченко И.В., Хахомов С.А., Нагатсу М. Поляризатор циркулярно-поляризованного СВЧ излучения на основе двухспиральных частиц .....	7
Веко О.В., Овсюк Е.М., Редьков В.М. О 4-спинорах Джонса частично поляризованного света .....	13
Гиргель С.С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера-Гаусса .....	19
Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н. Релятивистская задача о связанных состояниях двухчастичных систем с зависящим от энергии потенциалом однобозонного обмена .....	24
Залесский В.Б., Кравченко В.М., Леонова Т.Р., Поликанин А.М., Зарецкая Е.П., Петросян С.Г., Кечиянц А.М. CIGS-солнечные элементы с эффективностью 10,1% на перлитных стеклокерамических подложках .....	27
Цырельчук И.Н., Хорошко В.В., Гременок В.Ф., Мишута В.А. Исследование оптических свойств тонких пленок твердых растворов $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ , полученных методом двухстадийной селенизации .....	33
Чжубо Лю, Рогачев А.А., Ярмоленко М.А., Джанг Х.Н., Рогачев А.В., Горбачев Д.Л. Влияние ассистирующего лазерного излучения при электронно-лучевом диспергировании на молекулярную структуру формируемых наноконпозиционных покрытий полиэтилен-серебро ....	37
Шилова И.В., Бельская О.А., Сотский А.Б. Электродинамическая модель изгибного волоконно-оптического датчика давления .....	43
Шушкевич Г.Ч., Киселева Н.Н. Вычисление коэффициента ослабления звукового поля сферического излучателя проницаемой сферической оболочкой .....	48

#### МАТЕМАТИКА

Гальмак А.М., Воробьев Г.Н. О теореме Поста-Глускина-Хоссу .....	55
Грицук Д.В., Монахов В.С., Шпырко О.А. О конечных $\pi$ -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами .....	61
Ломовцев Ф.Е., Ляхов Д.А. Слабые решения гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения .....	67
Мурашко В.И. О частично сопряженно-пререстановочных подгруппах конечных групп .....	74
Новиков С.П. О принадлежности $\mathfrak{F}$ -профраттиниевых подалгебр мультиколец классу $\mathfrak{F}$ ....	79
Старовойтов А.П. Аппроксимации Эрмита-Паде для системы функций Миттаг-Леффлера .....	81
Федорцова Н.М. Метод корректировки для решения возмущенных параметрических линейно-квадратичных задач оптимального управления в окрестности нерегулярного значения параметра .....	88

#### ИНФОРМАТИКА

Ерофеева Е.А. Этапы применения имитационных моделей станций для расчета нормативных значений простоя вагонов .....	86
Пекарь Д.В., Садов В.С. Алгоритм принятия решений в речевой системе безопасности на основе нечеткой логики .....	101

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

**Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):**  
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**  
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 14.03.13. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 13,0. Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 100 экз. Заказ № 141.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»  
246019, Гомель, ул. Советская, 104  
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2013  
© Проблемы физики, математики и техники, 2013  
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2013

# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

*Published since December, 2009*

There are 4 times a year

№ 1 (14) 2013

## CONTENTS

### PHYSICS

<b>Balmakov A.P., Semchenko I.V., Khakhomov S.A., Nagatsu M.</b> Microwave circular polarizer based on bifilar helical particles .....	7
<b>Veko O.V., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M.</b> Jones 4-spinors for the partially polarized light .....	13
<b>Girgel S.S.</b> Kummer-Gaussian scalar astigmatic three-dimensional light beams .....	19
<b>Grishechkin Yu.A., Kapshai V.N.</b> Relativistic bound state problem for two-particle systems with energy dependent one boson exchange potential .....	24
<b>Zaleski V.B., Kravchenko V.M., Leonova T.R., Polikanin A.M., Zaretskaya E.P., Petrosyan S.G., Kechiantz A.M.</b> CIGS solar cells with efficiency 10,1% on perlite galssceramic substrates .....	27
<b>Tsyrelchuk I.N., Khoroshko V.V., Gremenok V.F., Mishuto V.A.</b> The optical properties of thin films of solid solutions $CU_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ , obtained by a two-stage selenization .....	33
<b>Zhubo Liu, Rogachev A.A., Yarmolenko M.A., Jiang X.H., Rogachev A.V., Gorbachev D.L.</b> Influence of assisting laser radiation at electron-beam dispersion on the molecular structure of polyethylene-silver nanocomposite coatings .....	37
<b>Shilova I.V., Belskaya O.A., Sotsky A.B.</b> Electrodynamic model of the bending fiber-optic sensor ..	43
<b>Shushkevich G.Ch., Kiseleva N.N.</b> Calculation of the attenuation coefficient of the sound field of a spherical radiator by penetrable spherical shell .....	48

### MATHEMATICS

<b>Gal'mak A.M., Vorobiev G.N.</b> On Post-Gluskin-Hosszu theorem .....	55
<b>Gritsuk D.V., Monakhov V.S., Shpyrko O.A.</b> On finite $\pi$ -solvable groups with bicyclic Sylow subgroups .....	61
<b>Lomovtsev F.E., Lyakhov D.A.</b> Weak solutions of hyperbolic even-order operator-differential equations with variable domains .....	67
<b>Murashka V.I.</b> On partially conjugate-permutable subgroups of finite groups .....	74
<b>Novikov S.P.</b> About belonging of $\mathfrak{F}$ -prefrattini subalgebras of multirings to class $\mathfrak{F}$ .....	79
<b>Starovoitov A.P.</b> Hermite-Pade approximants of the system Mittag-Leffler functions .....	81
<b>Fedartsova N.M.</b> Correction method for solving perturbed parametric linear-quadratic optimal control problems in the neighbourhood of irregular parameter value .....	88

### INFORMATION SCIENCE

<b>Erofeeva E.A.</b> Technological stages of imitating modeling traffic volume processing by railway station .....	96
<b>Pekar D.V., Sadov V.S.</b> Decision making algorithm in the safety system based on the fuzzy logic .....	101

***Founder – Francisk Scorina Gomel State University***

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

***The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):***

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

УДК 621.396.67

## ПОЛЯРИЗАТОР ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЧ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДВУХСПИРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

А.П. Балмаков<sup>1,2</sup>, И.В. Семченко<sup>2</sup>, С.А. Хахомов<sup>2</sup>, М. Нагатсу<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Университет Шизуока, Хамамацу, Япония

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

## MICROWAVE CIRCULAR POLARIZER BASED ON BIFILAR HELICAL PARTICLES

A.P. Balmakov<sup>1,2</sup>, I.V. Semchenko<sup>2</sup>, S.A. Khakhomov<sup>2</sup>, M. Nagatsu<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Shizuoka University, Hamamatsu, Japan

<sup>2</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В статье показана реализация нового поляризатора циркулярно поляризованного излучения, основанного на использовании металлических двухспиральных (дс-) элементов массива и работающего при нормальном к оси спирали прохождении волны. Последнее обстоятельство является ключевым отличием данного массива от ряда аналогов, работающих на прохождение вдоль оси спирали. Приведено теоретическое обоснование поляризационной селективности дс-спиралей для перпендикулярного к оси направления прохождения излучения. Построена компьютерная модель для изучения электродинамических свойств массивов спиралей, которая подтвердила реализуемость циркулярного поляризатора для массива в СВЧ диапазоне длин волн.

**Ключевые слова:** спираль, массив, поляризация, метаматериал.

In this paper, we describe practical realization of a new type of circular polarizer based on metallic double-stranded (ds-) array particles, operating under normal to the helix axis wave propagation. The latter is the key distinction of this array from a number of analogous operating under propagation along the helix axis. Theoretical foundation of ds-helices polarization selectivity is given for a wave propagation perpendicular to the helix's axis. A computer model is created to study electrodynamic properties of arrays of helices, which confirms the circular polarizer feasibility for a microwave wavelength region.

**Keywords:** helix, array, polarization, metamaterial.

### Introduction

In radio engineering there are several different ways to get circular microwaves by means of two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) metallic structures. One of the most widespread of them is the use of a spiral element. Although a helix can radiate in many modes, the axial mode and the normal mode present the common interest. The axial mode, the most commonly used mode, provides maximum radiation along the helix axis, which occurs when the helix circumference is of the order of one wavelength. The normal mode, which yields radiation broadside to the helix axis, occurs when the helix diameter is small as compared to a wavelength [1]. Typically, for a 3D helix, the flux of circular polarization is also radiated along the helix's axis, but a sidelobe polarization, if it exists, is not circular in general. This explains why the recent technique in developing helix-based circular polarizers is based on the along-helix-axis wave propagation [2]–[5]. In this article we propose a different approach for the circular polarizer realization, which is based on perpendicular to helix's axis wave propagation, but in this case the helix has a double stranded or bifilar structure with a specific shape and orientation in space. The parameters of helices as passive oscillators for perpendicular to helix axis wave propagation

have been recently intensively studied by our group [6]–[11] and worldwide [12]–[14], this indicates high interest in this field of research.

### 1 Helix as a meta-atom particle

According to the Drude-Lorentz model, free electrons in metals can oscillate under the influence of external electromagnetic fields. The material properties of the metal become relevant to the field frequency. For metals with a curved shape, the possible oscillation trajectories are restricted by the curved surface of the metal. Therefore, free electrons have to follow the curvature of the metal surface. Harmonic external fields force the electrons to oscillate harmonically, therefore the electric current in the helix can be represented by a Fourier series

$$I(\phi, x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} I_m(x) e^{jm\phi},$$

where  $I_m$  is the amplitude of the  $m$ -harmonic,  $\phi$  is the azimuth angle in the plane perpendicular to the helix axis,  $j$  is an imaginary unit. If the metal element has a periodic shape with its characteristic period corresponding to a wavelength, then a strong macro resonance of electric current can occur. For instance, consider a long metal single-stranded (ss-) helix,

fragment of which (1.5 turns or 3 half-turns) is depicted in Figure 1.1 (a). Theoretical analysis and computer modelling show that the main (principal) frequency resonance takes place when the wavelength approaches the period (length of one helix turn) of the helix  $\lambda = P$ . At this, the electric current has a harmonic mode, and, as it has been shown, it changes its direction every helix's half turn. No principal difference has been observed in the electric current distribution in the ds-helix [see Figure 1.1 (b)] in comparison to the ss-helix. There are, however, radical differences between these ss- and ds-helices in net electric  $\mathbf{p} = \alpha_e E_\tau \boldsymbol{\tau}$  and magnetic  $\mathbf{m} = \alpha_m E_n \mathbf{n}$  dipole responses induced in every half-turn(s) segment, where  $\alpha_e$ ,  $\alpha_m$  are electric and magnetic polarizabilities of the segment,  $\boldsymbol{\tau}$  is the unit vector directed along the wire,  $\mathbf{n}$  is the unit vector directed normal to the wire loop plane,  $E_{\tau,n}$  is the harmonic field of excitation. For chiral particles, however, both electric and magnetic fields are responsible for the dipole moments formation

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha_{ee} \mathbf{E} - j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha_{em} \mathbf{H},$$

$$\mathbf{m} = \alpha_{mm} \mathbf{H} + j \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \alpha_{me} \mathbf{E},$$

where  $\alpha_{ee}$  and  $\alpha_{mm}$  are the tensors of dielectric and magnetic polarizabilities;  $\alpha_{em}$  and  $\alpha_{me}$  are the pseudotensors characterizing the chiral properties of the helix [15].

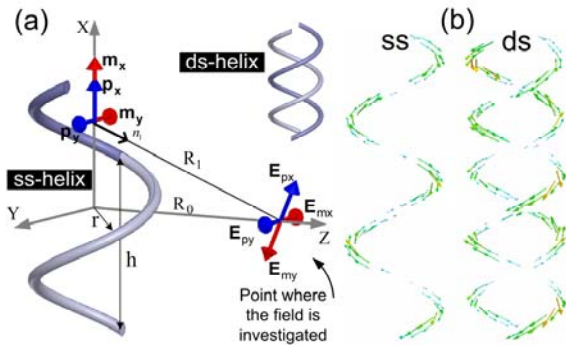


Figure 1.1 – (a) Schematic of the ss- and ds-helix where electric  $p$  and magnetic  $m$  responses are shown for the upper half-turn as well as the  $E$ -field induced by them, (b) surface electric current distribution along the 5 half-turn helices

Actually, due to the axial symmetry there are only axial dipoles for the ds-helix, but for the ss-one there are also perpendicular to axis dipoles, responsible for the helix scattering as well. The electric and magnetic moments induced in every half-turn of the ss-helix have been calculated. Important relations between them have been found

$$p_x = \frac{2j}{\omega r^2 q} m_x,$$

$$p_y \approx -\frac{2jq}{\omega} m_y,$$

$$p_z = m_z = 0,$$

where  $\omega$  is the current cyclic frequency,  $|q| = 2\pi / h$ , we assume  $q > 0$  and  $q < 0$  for the right- and left-handed helices, respectively, and  $h$  is the helix pitch,  $r$  is the helix radius. These correlations of electric and magnetic moments were found for the main resonance electric current mode in Figure 1.1 (b).

Let us consider what helix shape is optimal for circularly polarized waves radiation in the perpendicular-to-axis direction [e. g.  $\pm Z$ -axis in Figure 1.1 (a)], note that the helix's ends are located in the  $XY$  plane. Let us assume that the linearly polarized incident wave excites the helix in a perpendicular to its axis direction (e. g. propagates along  $\pm Y$ -axis). The condition for radiation of a CP wave in the direction orthogonal to the helix axis [9] is the following

$$|p_x| = \frac{1}{c} |m_x|.$$

The discrete dipole radiation model is applied [16], which allows to calculate the instantaneous  $E$ -field gained from an individual half-turn(s). It can be done using the next formulas

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi R_0} (\ddot{\mathbf{p}}_i \times \mathbf{n}_i) \times \mathbf{n}_i,$$

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mu_0}{4\pi c R_0} \mathbf{n}_i \times \ddot{\mathbf{m}}_i,$$

which are time and distance  $R_i$  dependent. Here  $\mathbf{n}_i$  is a unit vector (see Figure 1.1 (a) for  $i=1$ ),  $c$  is the speed of light, double dots denote the 2<sup>nd</sup> time derivative [17]. In Figure 1.1 (a) the total scattered field induced by the upper half-turn segment is shown in some point along the  $Z$  axis. We consider a monochromatic incident wave  $e^{-j\omega t}$ , therefore  $\dot{m} = -\omega^2 m$ ,  $\ddot{p} = -\omega^2 p$ . The resulting  $E$ -field can be calculated and the polarization of the radiated wave can be estimated by taking the sum of all field components from all half-turns. The ellipticity  $\varepsilon$ , which is of the great interest for polarization characterization, is introduced through the reciprocal axial ratio as defined for a general case in Ref. [18] as  $\varepsilon = OA / OB$ , where

$$OA = \left[ \frac{1}{2} \left[ E_x^2 + E_y^2 - [E_x^4 + E_y^4 + 2E_x^2 E_y^2 \cos(2\Delta\phi)]^{1/2} \right] \right]^{1/2},$$

$$OB = \left[ \frac{1}{2} \left[ E_x^2 + E_y^2 + [E_x^4 + E_y^4 + 2E_x^2 E_y^2 \cos(2\Delta\phi)]^{1/2} \right] \right]^{1/2}$$

here  $\Delta\phi$  is the time-phase difference between the two components  $E_x$  and  $E_y$  of the field.

For the ds-helix, however, the ellipticity calculation is simplified to the axial ratio of components  $\varepsilon = E_y / E_x$  as the phase difference between  $\mathbf{p}$  and



$\mathbf{m}$  (and therefore  $\mathbf{E}_p$  and  $\mathbf{E}_m$ ) is  $\pi/2$  and  $\mathbf{E}_p$  is orthogonal to  $\mathbf{E}_m$ .

The following expressions were found for the components of the resulting electric field for the ss-helix

$$E_x \approx aR_0 \sum_{k=-N}^N \exp\left(j\omega \frac{R_k}{c}\right) \left\{ \frac{(-1)^{k+1} R_0}{R_k^3} p_x + \frac{1}{cR_k^2} m_y \right\},$$

$$E_y \approx a \sum_{k=-N}^N \exp\left(j\omega \frac{R_k}{c}\right) \left\{ \frac{1}{R_k} p_y + \frac{(-1)^{k+1} R_0}{cR_k^2} m_x \right\}$$

for the ds-helix they are

$$E_x = 2aR_0^2 p_x \sum_{k=-N}^N \frac{(-1)^{k+1}}{R_k^3} \exp\left(j\omega \frac{R_k}{c}\right),$$

$$E_y = \frac{2aR_0}{c} m_x \sum_{k=-N}^N \frac{(-1)^k}{R_k^2} \exp\left(j\omega \frac{R_k}{c}\right)$$

where  $R_0$  is the distance between the origin and some point of field measuring (see Figure 1.1),

$$R_k = \sqrt{R_0^2 + \left(k \frac{h}{2}\right)^2}$$

is the distance from the half-turn with number  $k$  to the same point, and  $k$  is the index ranging from  $-N$  to  $N$ ,

$$a = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \exp(-j\omega t).$$

We performed computer processing of the ellipticity to analyze the resultant polarization for short and long helices (with different  $N$  and  $R_0$ ) in a far-field region. Usually a helix is characterized both by its radius  $r$  and pitch  $h$ , but they can be reduced to the helix pitch angle [19] via  $\alpha = \text{arc cot}(qr)$ . It was found that the ellipticity results to unity only for the ds-helix with approximately  $\alpha = 24.5^\circ$  having only a weak dependence on  $N$  with the constant maximum position. A ss-helix can reach its maximum ellipticity of near 0.3 at more than doubled pitch angle in the far-field zone, which is not the same for the near-field zone.

## 2 Modelling of an individual particle

Using computer simulations we can confirm the key predictions of the proposed theoretical model. Parameters of the individual helical particle (as well as arrays of them) were modelled by the commercial software finite element method solver for electromagnetic structures Ansoft HFSS (High Frequency Structural Simulator) for optimal parameters search. We have investigated helices (both ss and ds) of different lengths in the range from 1 to 5 half-turn(s), but further discussion and an array realization is based on the results obtained for the 5 half-turn particle.

A monochromatic plane wave of 3 GHz propagated along the  $Y$ -axis and was able to excite the helix according to the model considered above.

Simulations showed that the principal surface current mode induced in individual particles depicted in Figure 1.1 (b) is possible for a perpendicular to the helix axis direction of linear wave propagation having its  $E$ -vector oriented along the helix axis. The current has maximum in the center and the minimum at the ends of each half-turn. The field scattered by either ss- and ds- single particles along the  $Z$ -axis is investigated for the distance  $R_0 = 10\lambda$ . The results show a large difference in the axial ratios for the single ss- [see Figure 2.1 (a)] and ds-helix [see Figure 2.1 (b)], moreover, the phase difference  $\Delta\varphi$  can reach  $\pi/2$  for the ss-helix only at several spots (blue circles), but in wide regions for the ds-helix (solid curves).

Therefore, the unitary ellipticity is achievable for the latter case only. Resonance modes can be observed near the principal resonance  $\nu_{res} = 3$  GHz. As it has been predicted by the theory, the highest value for the ellipticity is achieved at  $\alpha = 55^\circ$  for the ss-helix near the main resonance and at  $\alpha = 20^\circ - 30^\circ$  for the ds-helix. Total scattered intensity can be calculated also from the proposed theoretical model and it is in agreement with the field strength peaks depicted in Figure 2.1.

As for single-layer arrays of ss-helices, the axial ratios can achieve high values, but the phase difference does not reach  $\pi/2$  (pictures are not given). Ds-helix arrays behave much better in this way; we can compare differences induced by the change in orientation of the incident  $E$ -field of excitation: along the helix axis [see Figure 2.1 (c)] and perpendicular to it [see Figure 2.1 (d)]. One can see the regions where both the high axial ratio and  $\Delta\varphi = \pi/2$  coexist (solid curve), which gives a circular polarization.

From the phase analysis of the  $\mathbf{E}_p$ ,  $\mathbf{E}_m$  oscillations we have found theoretically that the wave radiated by right-handed ds-DNA-like helix is polarized left-handed (DNA stands for deoxyribonucleic acid). To clarify, the  $E$ -vector of the wave follows a left-handed helix in space (very often this wave is called right-handed by engineers).

It is also important to study spatial distributions of scattered electromagnetic field (see Figure 2.2). These results showing strong narrow radiation beams along the  $Z$ -axis for ds-helices (in contrast to the ss-helices) are easy to understand taking into consideration the particle symmetry, its position in space and the perpendicular to the  $Z$ -axis maximal electric current direction, which contributes to the maximum radiation along this axis.

From the diagram in Figure 2.2 the advantage of ds-helices over ss-ones is obvious. In this picture, the difference between magnitudes of maximum and minimum scattered field is higher than one order.

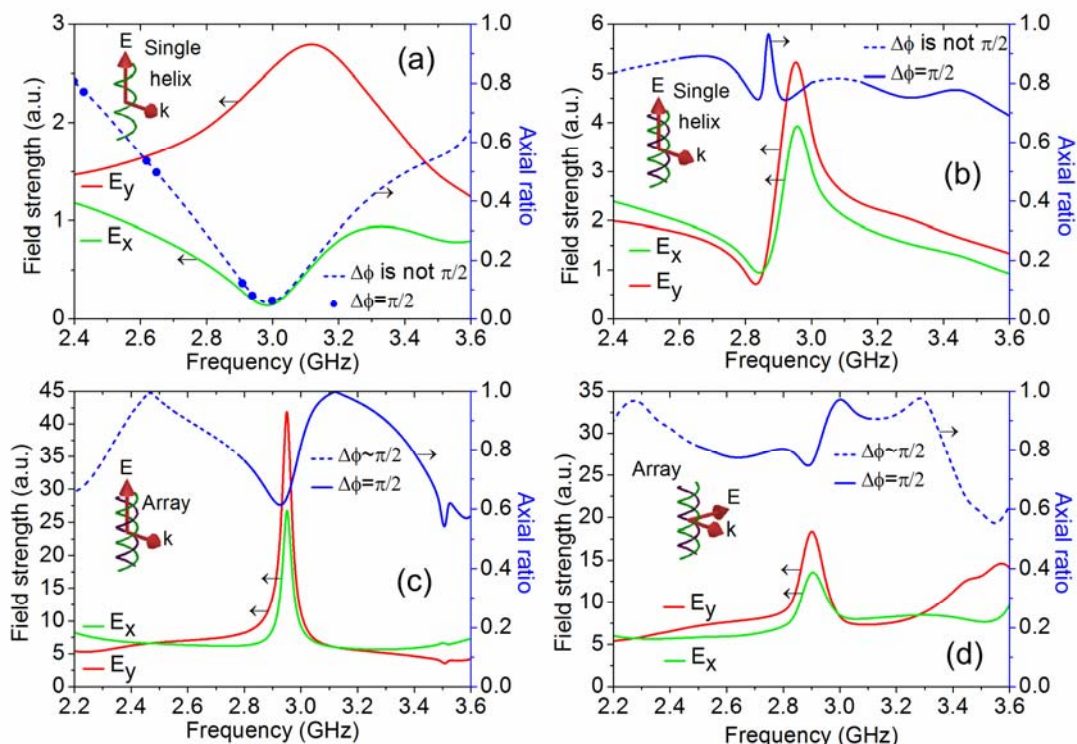


Figure 2.1 – (a), (b) Results of simulations: polarization analysis of the field scattered by the individual ss-helix (a) and the ds-helix (b). Incident linear wave propagates along the  $Y$ -axis ( $E$ -vector is along the helix axis), the  $E$ -field is detected at the point of the  $Z$ -axis at  $R_0 = 10\lambda$ ; (c), (d) the field scattered by a single-layer array of ds-helices, when the incident linearly polarized wave propagates along the  $Y$ -axis, the  $E$ -vector is: along the  $X$ -axis (c), along the  $Z$ -axis (d)

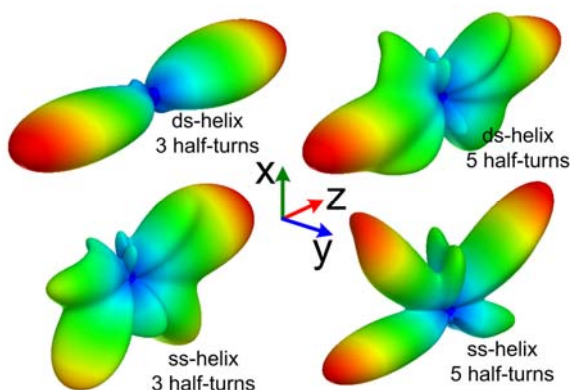


Figure 2.2 – Spatial distribution of the scattered electromagnetic field by the array of ds- and ss-helices of 3 and 5 half-turns. Vectors  $k$  and  $E$  of the incident linear wave were set along the  $Y$ - and  $X$ -axes, respectively

### 3 Three-dimensional arrays study for a circular polarizer realization

In this section we show how the mentioned advantage of ds-helices can be utilized for the development of 3D arrays acting as a circular polarizer. Incident circularly polarized wave is directed normally to one of the lateral surfaces of the array shown in Figure 3.1 (a). We study propagation of both right- and left-handed circularly polarized (RHCP, LHCP)

waves, which are described by the following formula  $e_{\pm} = \frac{e_1 \pm je_2}{\sqrt{2}}$ , where  $e_1, e_2$  are orthogonal unit vectors along the direction perpendicular to the wave vector.

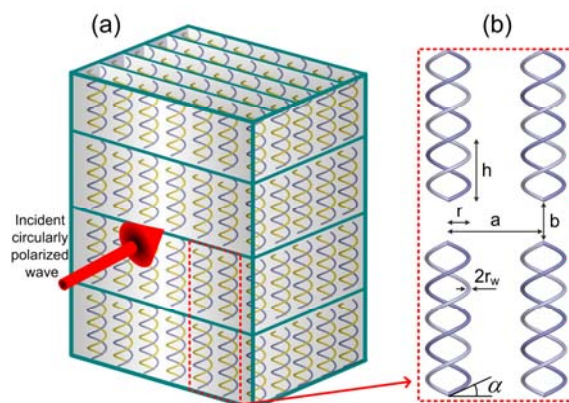


Figure 3.1 – (a) 3D array composed of metal ds-helices having the pitch angle of  $\alpha = 24.5^\circ$  and the incident circularly polarized radiation direction, (b) schematic of the array fragment with its parameters: the helix pith  $h=41.5$  mm, the helix radius  $r=14.5$  mm, the wire radius  $r_w=1$  mm, the array parameters  $a=2\lambda/5$ ,  $b=\lambda/5$ , the inter-layer interval is  $2\lambda/5$

The particles in the array are arranged so that their ends are placed in the plane formed by the incident wave vector and the helix axis. The lattice constant (the interval between the parallel layers) in the array is  $2\lambda/5$ , other parameters of the helix and the array are defined by Figure 3.1 (b) and have the following values: the helix pitch  $h=41.5$  mm, the helix radius  $r=14.5$  mm, the wire radius  $r_w=1$  mm, the array parameters  $a=2\lambda/5$ ,  $b=\lambda/5$ , wavelength  $\lambda$  is 100 mm, the pitch angle is  $\alpha = 24.5^\circ$ .

We studied the performance of the arrays as a polarization filter for a different number of layers in its composition. Far field analysis revealed clear peaks in spatial intensity and ellipticity diagrams. Figure 3.2 shows the total transmittance of electromagnetic radiation through a 5 layers array vs. frequency for different types of incident circularly polarized radiation – RHCP and LHCP. For low frequencies near the main frequency resonance, the interaction of the field with the helices is very strong and they scatter strongly perpendicular to the incident field direction, so the total propagation is very low. However, at higher frequencies, the effect of collective interaction between helices results in higher selective filtering of one circular mode than the opposite one. In our case, as the helices were right-handed, the propagation of RHCP mode is greater than for LHCP at wide frequency range between approximately 10 and 25 GHz. The study of the transmittance dependence on the number of layers in the array revealed the sharper transmittance peak for thicker arrays. This phenomenon can be explained in the following way. For an array with a small number of layers, strong lateral (relative to the direction of propagation) scattering takes place. For thicker array, this lateral scattering undergoes reflection towards the direction of propagation by further layers. Therefore, the resultant normally propagated intensity of radiation has higher and sharper profile in this case.

Propagated wave was predominantly RHCP (LHCP) polarized for RHCP (LHCP) incidence respectively. For more detailed analysis of the type of circular polarization of the propagated wave, we should assess the distinction ratio coefficient, which can be defined as

$$DR = \frac{T(\text{RHCP})}{T(\text{LHCP})},$$

where

$$T(\text{RHCP}) = \frac{I_{tr}^{\text{RHCP}}}{I_{ic}^{\text{RHCP}}},$$

$$T(\text{LHCP}) = \frac{I_{tr}^{\text{LHCP}}}{I_{ic}^{\text{LHCP}}}$$

are transmittances of the circular modes,  $ic$  denotes to incident field,  $tr$  denotes to transmitted field. From the  $DR$  coefficient (see Figure 3.2, black dashed curve) analysis one can see the array high

transparency for RHCP radiation in comparison to LHCP radiation, what is expectable because the array is composed of right-handed helices. Thus, the performance of this array as a polarization filter (circularly polarized selective surface) and the circular polarizer is proved. The result of strong polarization interaction for a lower part of the considered frequency band was confirmed experimentally for mono-layered arrays elsewhere [20]. Moreover, similar effect takes place in pure dielectric photonic crystals [21], [22].

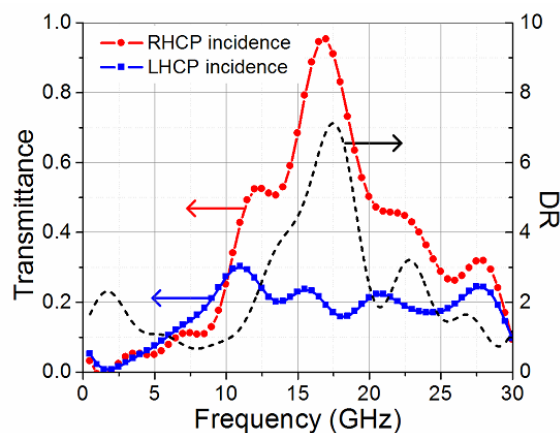


Figure 3.2 – Total transmittance vs. frequency for the array composed of 5 layers. Incident plane wave was circularly polarized, the red curve (circles) corresponds to the RHCP incidence radiation, the blue curve (squares) corresponds to the LHCP incidence radiation. The right scale and the black dashed curve represent the distinction ratio coefficient

### Conclusion

We have realized a circular filter and polarizer for a non-typical – perpendicular to helix's axis – direction of wave propagation using the array composed of 5 layers of the ds-helices. This became possible due to the optimal helix shape and specific spatial arrangement of helices inside the array. This new type of array can also be applied to photonic crystals applications and therefore tends to be utilized in optics of infrared and visible light.

### REFERENCES

1. Volakis, J.L. Antenna Engineering Handbook / J.L. Volakis. – 4th ed. – McGraw-Hill Co., 2007.
2. Gold helix photonic metamaterial as broadband circular polarizer / J.K. Gansel [et al.] // Science. – 2009. – Vol. 325. – P. 1513–1515.
3. Gold helix photonic metamaterials: a numerical parameter study / J.K. Gansel [et al.] // Optics Express. – 2010. – Vol. 18. – P. 1059–1069.
4. Ultrabroadband optical circular polarizers consisting of double-helical nanowire structures /

- Z.Y. Yang [et al.] // *Optics Letters*. – 2010. – Vol. 35. – P. 2588–2590.
5. *Broadband terahertz circular polarizers with single- and double-helical array metamaterials* / S. Li [et al.] // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2011. – Vol. 28. – P. 19–23.
6. *Semchenko, I.V.* Polarization selectivity of electromagnetic radiation of deoxyribonucleic acid / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.P. Balmakov // *Journal of Communications Technology and Electronics*. – 2007. – Vol. 52. – P. 996–1001.
7. *Semchenko, I.V.* Cube Composed of DNA-like Helices Displays Polarization Selectivity Properties in Microwave / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.P. Balmakov // in: *Metamaterials 2009 – 3rd International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics*. – London, UK – 2009. – P. 1–3.
8. *Semchenko, I.V.* Polarization Selectivity of Artificial Anisotropic Structures Based on DNA-Like Helices / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.P. Balmakov // *Crystallography Reports*. – 2010. – Vol. 55. – P. 921–926.
9. *Semchenko, I.V.* Transformation of the polarization of electromagnetic waves by helical radiators / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // *Journal of Communications Technology and Electronics*. – 2007. – Vol. 52. – P. 850–855.
10. *Semchenko, I.V.* Helices of optimal shape for nonreflecting covering / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // *The European Physical Journal Applied Physics*. – 2010. – Vol. 49. – P. 33002.
11. *Khakhomov, S.A.* Advantages of metamaterials based on double-stranded DNA-like helices / S.A. Khakhomov [et al.] // in: *Metamaterials'2012: The 6th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics*. – Saint Petersburg, 2012. – P. 1–3.
12. *Silveirinha, M.G.* Design of Linear-to-Circular Polarization Transformers Made of Long Densely Packed Metallic Helices / M.G. Silveirinha // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2008. – Vol. 56. – P. 390–401.
13. *Optically nonactive assorted helix array with interchangeable magnetic/electric resonance* / X. Xiong [et al.] // *Applied Physics Letters*. – 2011. – Vol. 98. – P. 071901.
14. *Metallic Helix Array as a Broadband Wave Plate* / C. Wu [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2011. – Vol. 107. – P. 1–5.
15. *Electromagnetics of bi-Anisotropic Materials: theory and applications* / A. Serdyukov [et al.]. – Gordon and Breach, New York, 2001.
16. *Landau, L.D.* The Classical Theory of Fields / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – 4th ed. – Butterworth-Heinemann, 1980.
17. *Yavorsky, B.M.* Handbook of Physics / B.M. Yavorsky, A.A. Detlaf, N. Weinstein. – 4th ed. – Central Books Ltd., 1973.
18. *Balanis, C.A.* Antenna Theory / C.A. Balanis. – 2nd ed. – John Wiley and Sons, Inc., 1996.
19. *Semchenko, I.V.* Polarization selectivity of electromagnetic radiation of DNA / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.P. Balmakov // in: *Bianisotropics 2006 – International Conference on Complex Media and Metamaterials, 25–28 September 2006*. – Samarkand, Uzbekistan, (printed in Helsinki University of Technology, Electromagnetics Laboratory, Espoo, Finland, Report 478). – P. 47–48.
20. *Семченко, И.В.* Взаимодействие искусственных ДНК-подобных структур в СВЧ диапазоне: поляризационная селективность отражения волн / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.П. Балмаков // *Радиофизика и электроника*. – 2009. – Vol. 14. – P. 103–108.
21. *Three-dimensional horizontal circular spiral photonic crystals with stop gaps below 1  $\mu\text{m}$*  / K.K. Seet [et al.] // *Applied Physics Letters*. – 2006. – Vol. 88. – P. 221101.
22. *Three-dimensional chiral photonic superlattices* / M. Thiel [et al.] // *Optics Letters*. – 2010. – Vol. 35. – P. 166–168.

Поступила в редакцию 15.11.12.

УДК 535.51

## О 4-СПИНОРАХ ДЖОНСА ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

О.В. Веко<sup>1</sup>, Е.М. Овсиук<sup>1</sup>, В.М. Редьков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

<sup>2</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

## JONES 4-SPINORS FOR THE PARTIALLY POLARIZED LIGHT

O.V. Veko<sup>1</sup>, E.M. Ovsyuk<sup>1</sup>, V.M. Red'kov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University, Mozyr

<sup>2</sup>B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk

Известное теоретико-групповое описание способов построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора позволяет ввести определение для 4-спиноров Джонса частично поляризованного света и связать этот объект с 4-вектором и 4-тензором Стокса для такого света. Это существенно обобщает известную в литературе ситуацию, когда используется только 2-мерный формализм Джонса, при этом он применяется только для описания полностью поляризованного света.

**Ключевые слова:** поляризационная оптика, 4-спиноры Джонса, параметры Стокса.

The known group-theory based description of constructing of 4-tensors based on the second rank 4-spinor permits to introduce definition for Jones 4-spinor of a partially polarized light and relates this object with Stokes 4-vector and Stokes antisymmetric 4-tensor. It provides us with extension of the known attitude to the problem when only Jones 2-spinors relevant to a completely polarized light are used.

**Keywords:** polarization optics, Jones 4-spinors, Stokes parameters.

### Введение

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. В литературе большое внимание уделялось анализу возможных типов матриц Мюллера. В частности, теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [2]–[9]: были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В последние годы много внимания уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской

физике [10]–[12], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богущем и др. были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе преобразований, изоморфной группе Лоренца [13]–[20]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, выполнен теоретико-групповой анализ степени неопределенности в нахождении матриц Мюллера оптического элемента из результатов одного поляризационного измерения, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

### 1 Постановка задачи

Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света. Следует обратить внимание и на то, что 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времени-подобных 4-векторов в рамках специальной теории относительности. В настоящей работе известная теоретико-групповая задача о способах построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора переформулируется как задача о связи между

4-спинорным (типа Джонса) и тензорным (типа Стокса) описаниями поляризованного света. Релятивистские 4-спиноры Джонса являются обобщением нерелятивистских 2-мерных спиноров Джонса, которые обычно только и применяются в литературе. В данной работе мы рассматриваем частично поляризованный свет (предварительный анализ проблемы был частично выполнен в [15]).

Исходим из разложения биспинора второго ранга по тензорам (используем обозначения, принятые в [21]):

$$U = \Psi \otimes \Psi = (-i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab} \Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^b \gamma^5 \tilde{\Phi}_b) E^{-1}; \quad (1.1)$$

для матриц Дирака будем использовать спинорный базис. Обратные к (1.1) соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \frac{1}{4} \text{Sp}[E\gamma_a U], \\ \tilde{\Phi}_a &= \frac{1}{4i} \text{Sp}[E\gamma^5 \gamma_a U], \\ \Phi &= \frac{i}{4} \text{Sp}[EU], \\ \tilde{\Phi} &= \frac{1}{4} \text{Sp}[E\gamma^5 U], \\ \Phi^{mn} &= -\frac{1}{2i} \text{Sp}[E\sigma^{mn} U]. \end{aligned}$$

Находим явный вид 4-вектора, 4-псевдовектора, двух скаляров:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1), \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2), \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2} (\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2), \\ \Phi_3 &= -\frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1), \\ \tilde{\Phi}_a &= 0, \quad \Phi = 0, \quad \tilde{\Phi} = 0, \end{aligned}$$

а также антисимметричного тензора:

$$\begin{aligned} \Phi^{01} &= \frac{i}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2 + \eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2), \\ \Phi^{23} &= \frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2 - \eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2), \\ \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 + \eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2), \\ \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 - \eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2), \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2), \\ \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2). \end{aligned}$$

В [15] было показано, что эта возможность пригодна для описания полностью поляризованного света, когда релятивистская длина 4-вектора Стокса равна нулю.

## 2 4-Спиноры Джонса для частично поляризованного света

Исследуем возможность построения тензоров из двух зарядово-сопряженных спиноров [21]:

$$\begin{aligned} \Psi \otimes \Psi^c &= \begin{vmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} +\eta_2^* \\ -\eta_1^* \\ -\xi^{2*} \\ +\xi^{1*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} +D^* \\ -C^* \\ -B^* \\ +A^* \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} +AD^* & -AC^* & -AB^* & +AA^* \\ +BD^* & -BC^* & -BB^* & +BA^* \\ +CD^* & -CC^* & -CB^* & +CA^* \\ +DD^* & -DC^* & -DB^* & +DA^* \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Для эквивалентного представлению  $\Phi \otimes \Psi^c$  набора тензоров находим следующие явные выражения (знак тильды относится к псевдовеличинам):

– для скаляра и псевдо скаляра (чисто мнимых):

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{4i} (AC^* + BD^* + CA^* + DB^*), \\ \tilde{\Psi} &= -\frac{1}{4} (AC^* + BD^* - CA^* - DB^*); \end{aligned}$$

– для (вещественного) 4-вектора и (мнимого) псевдо 4-вектора:

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= \frac{1}{4} (AA^* + BB^* + DD^* + CC^*), \\ \Psi^3 &= \frac{1}{4} (AA^* - BB^* + DD^* - CC^*), \\ \Psi^1 &= \frac{1}{4} (AB^* + BA^* - CD^* - DC^*), \\ \Psi^2 &= -\frac{i}{4} (-AB^* + BA^* + CD^* - DC^*); \\ \tilde{\Psi}^0 &= \frac{1}{4i} (AA^* + BB^* - DD^* - CC^*), \\ \tilde{\Psi}^3 &= \frac{1}{4i} (AA^* - BB^* - DD^* + CC^*), \\ \tilde{\Psi}^1 &= \frac{1}{4i} (AB^* + BA^* + CD^* + DC^*), \\ \tilde{\Psi}^2 &= -\frac{1}{4} (-AB^* + BA^* - CD^* + DC^*); \end{aligned}$$

– для (вещественного) антисимметричного тензора:

$$\begin{aligned} \Psi^{01} &= \frac{i}{4} (AD^* + BC^* - CB^* - DA^*), \\ \Psi^{23} &= \frac{1}{4} (AD^* + BC^* + CB^* + DA^*), \\ \Psi^{02} &= -\frac{1}{4} (AD^* - BC^* - CB^* + DA^*), \\ \Psi^{31} &= \frac{i}{4} (AD^* - BC^* + CB^* - DA^*), \\ \Psi^{03} &= -\frac{i}{4} (-AC^* + BD^* + CA^* - DB^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{12} &= -\frac{1}{4}(-AC^* + BD^* - CA^* + DB^*), \\ s_3 &= \frac{i}{2}(AC^* - BD^*), \\ s_1 &= \frac{i}{2}(AD^* + BC^*), \\ s_2 &= -\frac{1}{2}(AD^* - BC^*). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Легко получаем представление для инварианта 4-вектора  $\Psi^a$ :

$$\begin{aligned} \Phi^a \Phi_a &= (AC^* + BD^*)(A^*C + B^*D) = \\ &= + |AC^* + BD^*|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

С учетом  $\Psi^0 > 0$  это означает, что 4-вектор  $\Psi^a$  может рассматриваться как четырехмерный вектор Стокса для частично поляризованного света [1].

Комплексный 3-вектор  $\mathbf{s}$  из (2.1) является неизотропным:

$$\mathbf{s}^2 = -\frac{1}{4}(\xi^1 \eta_1^* + \xi^2 \eta_2^*)^2 = -\frac{1}{4}(AC^* + BD^*)^2 \neq 0.$$

Используя представление для (чисто мнимого) псевдо 4-вектора  $\tilde{\Psi}^a$ , находим инвариант

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^a \tilde{\Psi}_a &= \tilde{\Psi}_0^2 - \tilde{\Psi}_1^2 - \tilde{\Psi}_2^2 - \tilde{\Psi}_3^2 = \\ &= \frac{1}{4}(AC^* + BD^*)(A^*C + B^*D) > 0, \end{aligned}$$

т. е. инвариант вещественного 4-вектора  $\tilde{\Psi}^a$  (мнимой части этого вектора) отрицательный, и такой вещественный 4-вектор  $-i\tilde{\Psi}^a$  не может рассматриваться как стоксов.

Найдем явные выражения для двух скаляров, двух 4-векторов, а также антисимметричного тензора, который можно описать комплексным 3-вектором  $s_j$ , при использовании следующей параметризации 4-спинора:

$$\Psi = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{i\alpha} \\ b e^{i\beta} \\ c e^{is} \\ d e^{it} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{i}{4} \left( a e^{i\alpha} c e^{-is} + b e^{i\beta} d e^{-it} + \right. \\ &\quad \left. + c e^{is} a e^{-i\alpha} + d e^{it} b e^{-i\beta} \right) = \\ &= \frac{i}{2} [ ac \cos(\alpha - s) + bd \cos(\beta - t) ], \\ \tilde{\Psi} &= -\frac{1}{4} \left( a e^{i\alpha} c e^{-is} + b e^{i\beta} d e^{-it} - \right. \\ &\quad \left. - c e^{is} a e^{-i\alpha} - d e^{it} b e^{-i\beta} \right) = \\ &= -\frac{i}{2} [ ac \sin(\alpha - s) + bd \sin(\beta - t) ], \end{aligned}$$

$$\Psi^0 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

$$\Psi^3 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2),$$

$$\Psi^1 = \frac{1}{2}[ab \cos(\alpha - \beta) - cd \cos(s - t)],$$

$$\Psi^2 = \frac{1}{2}[ab \sin(\beta - \alpha) + cd \sin(s - t)],$$

$$\tilde{\Psi}^0 = \frac{1}{4i}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2),$$

$$\tilde{\Psi}^3 = \frac{1}{4i}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2),$$

$$\tilde{\Psi}^1 = \frac{1}{2i}[ab \cos(\alpha - \beta) + cd \cos(s - t)],$$

$$\tilde{\Psi}^2 = \frac{i}{2}[ab \sin(\alpha - \beta) + cd \sin(s - t)];$$

для (вещественного) антисимметричного тензора

$$\Psi^{01} = -\frac{1}{2}[ad \sin(\alpha - t) + bc \sin(\beta - s)],$$

$$\Psi^{23} = \frac{1}{2}[ad \cos(\alpha - t) + bc \cos(\beta - s)],$$

$$\Psi^{02} = -\frac{1}{2}[ad \cos(\alpha - t) - bc \cos(\beta - s)],$$

$$\Psi^{31} = -\frac{1}{2}[ad \sin(\alpha - t) - bc \sin(\beta - s)],$$

$$\Psi^{03} = \frac{1}{2}[-ac \sin(\alpha - s) + bd \sin(\beta - t)],$$

$$\Psi^{12} = -\frac{1}{2}[-ac \cos(\alpha - s) + bd \cos(\beta - t)].$$

Зависимость тензоров от параметров  $a, b, c, d, \alpha, \beta, s, t$  можно пояснить следующим образом:

$$\Psi^a \text{ -----} > a, b, c, d, \alpha - \beta, s - t;$$

$$\tilde{\Psi}^a \text{ -----} > a, b, c, d, \alpha - \beta, s - t;$$

$$\Psi \text{ -----} > a, b, c, d, \alpha - s, \beta - t;$$

$$\tilde{\Psi} \text{ -----} > a, b, c, d, \alpha - s, \beta - t;$$

$$\Psi^{ab} \text{ -----} > a, b, c, d, \alpha - t, \beta - s, \alpha - s, \beta - t.$$

Чтобы установить зависимость 2-мерных блоков от фазовых множителей, запишем в явном виде  $4 \times 4$ -матрицу:

$$U = \Psi \otimes \Psi^c =$$

$$= \begin{pmatrix} ade^{i(\alpha-t)} & -ace^{i(\alpha-s)} & -abe^{i(\alpha-\beta)} & a^2 \\ bde^{i(\beta-t)} & -bce^{i(\beta-s)} & -b^2 & abe^{-i(\alpha-\beta)} \\ cde^{i(s-t)} & -c^2 & -bce^{-i(\beta-s)} & ace^{-i(\alpha-s)} \\ d^2 & -cde^{-i(s-t)} & -bde^{-i(\beta-t)} & ade^{-i(\alpha-t)} \end{pmatrix}.$$

Исходный 4-спинор (2.2)

$$\Psi = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{i\alpha} \\ b e^{i\beta} \\ c e^{is} \\ d e^{it} \end{pmatrix}$$

можно представить следующим образом:

$$\Psi = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{i(\alpha-\beta)/2} & e^{i(\alpha+\beta)/2} \\ b e^{-i(\alpha-\beta)/2} & e^{i(\alpha+\beta)/2} \\ c e^{i(s-t)/2} & e^{i(s+t)/2} \\ d e^{-i(s-t)/2} & e^{i(s+t)/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ b e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ c e^{+i(s-t)/2} \\ d e^{-i(s-t)/2} \end{pmatrix}.$$

Введем 4-спинор  $\Psi^{(0)}$ , который однозначно определяет стоксов 4-вектор  $S^a = \Psi^a$ :

$$S^0 = \frac{1}{4}(a^2 + d^2 + b^2 + c^2),$$

$$S^3 = \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2),$$

$$S^1 = \frac{1}{2}[ab \cos(\alpha - \beta) - cd \cos(s - t)],$$

$$S^2 = \frac{1}{2}[-ab \sin(\alpha - \beta) + cd \sin(s - t)],$$

$$S^a S_a = a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd \cos[(\alpha - \beta) - (s - t)],$$

$$(ac - bd)^2 < S^a S_a < (ac + bd)^2, \quad (2.3)$$

$$\Psi^{(0)} = \begin{pmatrix} a e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ b e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ c e^{+i(s-t)/2} \\ d e^{-i(s-t)/2} \end{pmatrix}.$$

Разложение

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} \end{pmatrix} \Psi^{(0)},$$

учитывая тождества

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \left( \frac{\alpha + \beta}{4} + \frac{s + t}{4} \right) + \left( \frac{\alpha + \beta}{4} - \frac{s + t}{4} \right) = \gamma + \Gamma,$$

$$\frac{s + t}{2} = \left( \frac{\alpha + \beta}{4} + \frac{s + t}{4} \right) - \left( \frac{\alpha + \beta}{4} - \frac{s + t}{4} \right) = \gamma - \Gamma,$$

можно представить в виде:

$$\Psi = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} e^{i\Gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\Gamma} \end{pmatrix} \Psi^{(0)} =$$

$$= e^{i\gamma} \exp(i\Gamma \gamma^5) \Psi^{(0)}.$$

Очевидно, что общий фазовый множитель  $e^{i\gamma}$  никак не сказывается на величинах всех тензорных компонент, поскольку биспинор второго ранга равен  $U = \Psi \otimes (-i\Gamma^2 \Psi^*)$ . Очевидно, также, что величина  $\Gamma$  никак не проявляет себя в выражениях компонент стоксова 4-вектора.

Отмечаем, что в 4-спинор  $\Psi^{(0)}$  входит 6 независимых параметров, а 4-вектор Стокса содержит только 4 независимых параметра. Это означает, что 2 параметра в 4-спиноре  $\Psi^{(0)}$  лишние – они не сказываются на величине стоксова 4-вектора.

В уравнениях (2.3) компоненты вектора Стокса связаны с 6 параметрами  $a, b, c, d, (\alpha - \beta), (s - t)$ . Первые два уравнения можно преобразовать в следующие:

$$2(S^0 + S^3) = a^2 + d^2 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{2(S^0 + S^3)} \cos x,$$

$$d = \sqrt{2(S^0 + S^3)} \sin x,$$

$$2(S^0 - S^3) = b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{2(S^0 - S^3)} \cos y,$$

$$c = \sqrt{2(S^0 - S^3)} \sin y;$$

$x, y \in [0, \pi/2]$ . Параметры  $x, y$  не задаются измеримыми величинами  $S_0, S_3$ , самый простой способ выбора частного решения выглядит как ( $x = y = \pi/4$ ):

$$a = \sqrt{S^0 + S^3}, \quad d = \sqrt{S^0 + S^3},$$

$$b = \sqrt{S^0 - S^3}, \quad c = \sqrt{S^0 - S^3}.$$

Два оставшихся уравнения из (2.3)

$$S^1 = \frac{1}{2}[ab \cos(\alpha - \beta) - cd \cos(s - t)],$$

$$S^2 = \frac{1}{2}[-ab \sin(\alpha - \beta) + cd \sin(s - t)]$$

при этом принимают вид:

$$\frac{S^1}{\sqrt{S_0^2 - S_3^2}} = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(s - t)}{2} =$$

$$= \sin \frac{(s - t) - (\alpha - \beta)}{2} \sin \frac{(\alpha - \beta) + (s - t)}{2},$$

$$\frac{S^2}{\sqrt{S_0^2 - S_3^2}} = \frac{-\sin(\alpha - \beta) + \sin(s - t)}{2} =$$

$$= \sin \frac{(s - t) - (\alpha - \beta)}{2} \cos \frac{(\alpha - \beta) + (s - t)}{2};$$

отсюда получаем соотношения

$$\sin^2 \frac{(s - t) - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{S_1^2 + S_2^2}{S_0^2 - S_3^2},$$

$$\cos^2 \frac{(s - t) - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{S_0^2 - S_2^2}{S_0^2 - S_3^2},$$

$$\frac{S^1}{S^2} = \tan \frac{(s - t) + (\alpha - \beta)}{2} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \frac{(s - t) + (\alpha - \beta)}{2} = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2},$$

$$\cos^2 \frac{(s - t) + (\alpha - \beta)}{2} = \frac{S_2^2}{S_1^2 + S_2^2},$$

где  $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ .



Зависимость 4-спинора  $\Psi^{(0)}$  от физически неизмеряемых параметров  $x, y$  может быть описана с помощью разложения

$$\Psi^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2(S^0 + S^3)}e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ \sqrt{2(S^0 - S^3)}e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ \sqrt{2(S^0 - S^3)}e^{+i(s-t)/2} \\ \sqrt{(S^0 + S^3)}e^{-i(s-t)/2} \end{pmatrix}.$$

Зависимость компонент 4-тензора Стокса от физически неизмеряемых параметров задается формулами

$$\Psi^{01} = -\frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\sin 2x \sin(\alpha - t) + (S^0 - S^3)\sin 2y \sin(\beta - s)],$$

$$\Psi^{23} = \frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\sin 2x \cos(\alpha - t) + (S^0 - S^3)\sin 2y \cos(\beta - s)],$$

$$\Psi^{02} = -\frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\sin 2x \cos(\alpha - t) - (S^0 - S^3)\sin 2y \cos(\beta - s)],$$

$$\Psi^{31} = -\frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\sin 2x \sin(\alpha - t) - (S^0 - S^3)\sin 2y \sin(\beta - s)],$$

$$\Psi^{03} = \sqrt{S_0^2 - S_3^2} [-\cos x \sin y \sin(\alpha - s) + \sin x \cos y \sin(\beta - t)],$$

$$\Psi^{12} = \sqrt{S_0^2 - S_3^2} [\cos x \sin y \cos(\alpha - s) - \sin x \cos y \cos(\beta - t)].$$

При  $x = y = \pi/4$  имеем существенно более простые выражения

$$\Psi^{01} = -\frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\sin(\alpha - t) + (S^0 - S^3)\sin(\beta - s)],$$

$$\Psi^{23} = \frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\cos(\alpha - t) + (S^0 - S^3)\cos(\beta - s)],$$

$$\Psi^{02} = -\frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\cos(\alpha - t) - (S^0 - S^3)\cos(\beta - s)],$$

$$\Psi^{31} = -\frac{1}{2}[(S^0 + S^3)\sin(\alpha - t) - (S^0 - S^3)\sin(\beta - s)],$$

$$\Psi^{03} = \frac{1}{2}\sqrt{S_0^2 - S_3^2} [-\sin(\alpha - s) + \sin(\beta - t)],$$

$$\Psi^{12} = \sqrt{S_0^2 - S_3^2} [\cos(\alpha - s) - \cos(\beta - t)].$$

Заметим, что можно найти простые ограничения, связывающие тензорные величины:

$$S^{ab}S_b = -\tilde{\Psi}\Psi^a, \quad S^{ab}\tilde{\Psi}_b = -\tilde{\Psi}S^a.$$

Таким образом, известное теоретико-групповое описание способов построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора позволяет

вести определение для 4-спиноров Джонса для частично поляризованного света и связать этот объект с 4-вектором и 4-тензором Стокса для такого света. Обратим внимание еще раз на то, что в литературе используются, как правило, только 2-мерные спиноры Джонса, описывающие полностью поляризованный свет.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.
2. Lamekin, P.I. Intrinsic polarization states of corner reflectors / P.I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. – P. 658–661.
3. Ламекин, П.И. Необходимые и достаточные условия недеполяризуемости оптических систем / П.И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81, вып. 1. – С. 164–168.
4. Ламекин, П.И. Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П.И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
5. Lamekin, P.I. Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88, № 5. – P. 737–742.
6. Lamekin, P.I. Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91, № 5. – P. 741–748.
7. Lamekin, P.I. Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P.I. Lamekin, Yu.V. Sivaev, K.G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
8. Lamekin, P.I. Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P.I. Lamekin // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 294–302.
9. Ламекин, П.И. Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П.И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5 (8). – С. 128–132.
10. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
11. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
12. Bogush, A.A. On Unique Parametrization of the Linear Group and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.

13. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
14. Богуш, А.А. Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.
15. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
16. Овсюк, Е.М. Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1 (37). – С. 69–75.
17. Редьков, В.М. Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / В.М. Редьков, Е.М. Овсюк // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.
18. Овсюк, Е.М. О нахождении параметров матриц Мюллера лоренцевского типа по результатам поляризационных измерений / Е.М. Овсюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2012. – № 2 (40). – С. 59–71.
19. Овсюк, Е.М. Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2 / Е.М. Овсюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 34–40.
20. Ovsyuk, E.M. Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. – 2013. – № 1.
21. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 495 с.

Поступила в редакцию 12.11.12.

УДК 535.42+537.86.22

## СКАЛЯРНЫЕ АСТИГМАТИЧЕСКИЕ 3D СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА-ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## KUMMER-GAUSSIAN SCALAR ASTIGMATIC THREE-DIMENSIONAL LIGHT BEAMS

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предложен формализм для описания параксиальных 3D гауссовоподобных световых пучков Куммера-Гаусса с простым астигматизмом. Сформулированы условия их физической реализуемости. Найдены новые типы пучков Куммера-Гаусса. Такие пучки описываются произведением гауссиана на функции Куммера комплексного аргумента и целочисленного индекса  $n$ .

**Ключевые слова:** параксиальные пучки, пучки Эрмита-Гаусса, пучки Куммера-Гаусса, гауссовоподобные пучки.

The formalism for the description of paraxial 3D Gaussian-like light Kummer-Gaussian beams by a simple astigmatism is offered. Conditions of their physical realizability are formulated. New types of Kummer-Gaussian beams are found. Such beams are presented by Gaussian product on Kummer function of a complex argument and a nonnegative integer index  $n$ .

**Keywords:** paraxial beams, Hermite-Gaussian beams, Kummer-Gaussian beams, Gaussian-like beams.

### Введение

В настоящее время наблюдается всплеск интереса к поиску новых решений для оптических полей. Наибольший интерес представляют узконаправленные (пучковые) решения, реализуемые экспериментально [1]–[2]. Такие пучки часто можно считать параксиальными. К ним относятся гауссовы пучки [1]–[3], пучки Эрмита-Гаусса ( $H-G$ ) [1]–[3] и многие другие [2]–[8]. Обычно для вывода таких пучков используют различные подходы, что затрудняет установление взаимосвязей между ними.

В работах [7], [8] нами был предложен унифицированный формализм, позволяющий вывести выражения для гауссовоподобных 2D пучков разных типов и установить взаимосвязи между ними.

В настоящей работе этот формализм распространяется на 3D астигматические гауссовоподобные пучки, описывается фундаментальная гауссова мода с простым астигматизмом. В разделе 2 получены уравнения для скалярных гауссовоподобных мод высших порядков. В разделе 3 выведены выражения для скалярных параксиальных 3D пучков Куммера-Гаусса ( $K-G$ ) с простым астигматизмом. Подробно обсуждаются условия физической реализуемости 2D и 3D пучков  $K-G$  в разделе 4. Наиболее известные частные случаи пучков  $K-G$  – стандартные (*standard*)  $H-G$  (*sH-G*) пучки и элегантные (*elegant*)  $H-G$  (*eH-G*) пучки кратко характеризуются в разделе 5. Наконец, в заключении сформулированы основные результаты и выводы настоящей работы.

### 1 Фундаментальная астигматическая гауссова мода

Для монохроматических волн вида  $f(\mathbf{r}, t) = f \exp(-i\omega t)$  скалярное параболическое уравнение, описывающее амплитуду  $f$  параксиальных световых пучков, имеет вид [1]

$$(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 2ik\partial_z)f = 0, \quad (1.1)$$

где  $k = k_0 n$ ,  $k_0 = \omega/c$ .

В работах [7], [8] мы ограничились изучением двумерных (2D) пучков, полагая  $\partial_y f = 0$ .

В настоящей работе использованный подход обобщается на 3D световые пучки. Целесообразно перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Y = y/x_0, \quad Z = z/z_0. \quad (1.2)$$

Здесь  $x_0$  и  $z = kx_0^2/2$  – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям  $\theta X$  и  $\theta Y$  соответственно. Теперь параболическое уравнение (1.1) приобретает простейшую форму

$$(\partial_{X,X}^2 + \partial_{Y,Y}^2 + 4i\partial_Z)f = 0. \quad (1.3)$$

Фундаментальным решением последнего уравнения является гауссиан [1]

$$G(X, Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{Q_X Q_Y}} \exp\left(i\left(\frac{X^2}{Q_X} + \frac{Y^2}{Q_Y}\right)\right), \quad (1.4)$$

где  $Q_X$  и  $Q_Y$  – введенные безразмерные комплексные параметры пучка:

$$Q_{X,Y} = Z - Q_{0X,0Y}, \quad (1.5)$$

причем  $Q_{0X,0Y} = Q'_{0X,0Y} + iQ''_{0X,0Y}$ . Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые

части различных величин. При  $Q_{OX}'' > 0$  и  $Q_{OY}'' > 0$  данное решение удовлетворяет физическим принципам:  $G(X, Y, Z) \rightarrow 0$  при  $X \rightarrow \pm\infty$ ,  $Y \rightarrow \pm\infty$  и квадратично интегрируемо. Гауссиан  $G(X, Y, Z)$  является [1] 3D основной гауссовой модой с простым астигматизмом. Полное поле светового пучка при этом имеет вид  $E = E_0 G \exp(kz - \omega t)$ .

### 2 Гауссовоподобные моды высших порядков

Для нахождения более сложных решений параболического уравнения (1.3) (гауссовоподобных мод высших порядков) применим подстановку

$$f(X, Y, Z) = G(X, Y, Z) \cdot h(X, Y, Z). \quad (2.1)$$

Здесь на некоторую функцию  $h(X, Y, Z)$  накладывается гауссова функция  $G(X, Y, Z)$ . Поэтому пучки, описываемые функциями  $f(X, Y, Z)$ , будем называть 3D гауссовоподобными астигматическими световыми пучками.

Новая функция  $h(X, Y, Z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[ \partial_{X,X}^2 + \partial_{Y,Y}^2 + 4i \left( \frac{X}{Q_X} \partial_X + \frac{Y}{Q_Y} \partial_Y + \partial_Z \right) \right] h = 0. \quad (2.2)$$

Для его решения выполним нелинейную замену переменных

$$\begin{aligned} X_1(X, Z) &= X \cdot b_X(Z), \\ Y_1(X, Z) &= Y \cdot b_Y(Z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $b_X(Z)$ ,  $b_Y(Z)$  – некоторые функции от  $Z$ . Тогда функция  $h(X_1, Y_1, Z)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &b_X^2 \left( \partial_{X_1, X_1}^2 - 2c_1 X_1 \partial_{X_1} \right) h + \\ &+ b_Y^2 \left( \partial_{Y_1, Y_1}^2 - 2c_2 Y_1 \partial_{Y_1} \right) h + 4i \partial_Z h = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $c_{1,2}$  соответственно равны

$$c_{1,2} = -\frac{i}{b_{X,Y}^2} \left( \frac{2}{Q_{X,Y}} + \frac{1}{b_{X,Y}^2} d_Z (b_{X,Y}^2) \right). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) при произвольных зависимостях  $b_X(Q)$  и  $b_Y(Q)$  не имеет известных аналитических решений. Оно решается, если множители  $c_1$  и  $c_2$  в (2.4) не зависят от  $Z$  и являются некоторыми комплексными константами. Интегрируя (2.5), находим  $b_X(Z)$  и  $b_Y(Z)$  при постоянных  $c_1$  и  $c_2$ :

$$b_{X,Y}^2(Q) = \frac{is_{X,Y}}{Q_{X,Y} (Q_{X,Y} - c_{1,2} s_{X,Y})}. \quad (2.6)$$

Здесь  $s_{X,Y}$  – некоторые комплексные постоянные интегрирования.

Выполним разделение переменных в (2.4), полагая, что

$$h(X_1, Y_1, Z) = h_1(X_1) \cdot h_2(Y_1) \cdot h_3(Z). \quad (2.7)$$

Теперь уравнение (2.4) сводится к трем уравнениям:

$$\frac{dh_3}{h_3} = -\frac{i}{2} (v_1 b_X^2 + v_2 b_Y^2) dZ; \quad (2.8)$$

$$d_{X_1, X_1}^2 h_1 - 2c_1 X_1 d_{X_1} h_1 + 2v_1 h_1 = 0; \quad (2.9)$$

$$d_{Y_1, Y_1}^2 h_2 - 2c_2 Y_1 d_{Y_1} h_2 + 2v_2 h_2 = 0, \quad (2.10)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – постоянные разделения переменных, в общем случае комплексные.

Решения уравнений (2.8)–(2.10) описывают 3D астигматические гауссовоподобные моды высших порядков и принципиально различаются при нулевых и ненулевых значениях комплексных параметров  $c_1$  и  $c_2$ .

### 3 3D астигматические пучки Куммера-Гаусса

Если в уравнениях (2.9), (2.10)  $c_1 \neq 0$  и  $c_2 \neq 0$ , то, без ограничения общности, можно положить  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ . Целесообразно также обозначить  $P_{0X,0Y} = Q_{0X,0Y} + s_{X,Y}$  и ввести, наряду с  $Q_X$  и  $Q_Y$ , еще два комплексных безразмерных параметра пучка  $P_X$  и  $P_Y$  соотношениями

$$P_{X,Y} = Z - P_{0X,0Y}, \quad (3.1)$$

где  $P_{0X,0Y} = P'_{0X,0Y} + iP''_{0X,0Y}$ .

При этом функции  $b_{X,Y}(Z)$  принимают простую форму [7], [8]

$$b_{X,Y}^2 = i \left( 1/P_{X,Y} - 1/Q_{X,Y} \right).$$

Все параметры пучка  $Q_X$ ,  $Q_Y$ ,  $P_X$ ,  $P_Y$  линейно зависят от  $Z$ . В итоге аргументы  $X_1$  и  $Y_1$  функций  $h_1$  и  $h_2$  в (2.9) и (2.10) зависят от поперечных координат  $X$ ,  $Y$  и четырех комплексных параметров пучка  $Q_X$ ,  $Q_Y$ ,  $P_X$ ,  $P_Y$ :

$$\begin{aligned} X_1^2 &= i \left( 1/P_X - 1/Q_X \right) X^2; \\ Y_1^2 &= i \left( 1/P_Y - 1/Q_Y \right) Y^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид:

$$h_3(Z) = \left( \frac{P_X}{Q_X} \right)^{\frac{v_1}{2}} \cdot \left( \frac{P_Y}{Q_Y} \right)^{\frac{v_2}{2}}. \quad (3.3)$$

Общие решения уравнений (2.9) и (2.10) для амплитуд  $h_1(X_1)$  и  $h_2(Y_1)$  3D гауссовоподобного пучка можно выразить через одну конфлюэнтную гипергеометрическую функцию  ${}_1F_1$  [11], которая эквивалентна функции Куммера  $M$  [9]–[11]:

$$\begin{aligned} h_1(X_1) &= A_1 \cdot X_1 \cdot M \left( \frac{1}{2} - \frac{v_1}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2 \right) + \\ &+ B_1 \cdot M \left( -\frac{v_1}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2 \right) \equiv h_1^o + h_1^e; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$h_2(Y_1) = A_2 \cdot Y_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu_2}{2}, \frac{3}{2}, Y_1^2\right) + B_2 \cdot M\left(-\frac{\nu_2}{2}, \frac{1}{2}, Y_1^2\right) \equiv h_2^o + h_2^e, \quad (3.5)$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$  – некоторые произвольные постоянные. Индексы  $^o$  и  $^e$  отмечают соответственно четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций  $h^e$  и  $h^o$  относительно изменения знаков их аргументов.

Общее решение для амплитуды  $f(X, Y, Z)$  3D скалярного гауссовоподобного пучка имеет вид

$$f(X, Y, Z) = G(X, Y, Z) \cdot h_1(X_1) \cdot h_2(Y_1) \cdot h_3(Z), \quad (3.6)$$

где переменные  $X_1, Y_1$  выражаются через  $X, Y$  согласно (3.2). Выражения (3.6) зависят от трех переменных ( $X, Y, Z$ ) и шести комплексных параметров ( $\nu_1, \nu_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y}$ ). Они описывают шестипараметрическое семейство решений для амплитуд гауссовоподобных астигматических 3D пучков. Зависимости функций  $f(X, Y, Z)$  от поперечных координат  $X$  и  $Y$  характеризуются функциями Куммера и Гаусса, поэтому такие пучки, определяемые формулами (3.1)–(3.6), будем называть пучками  $K-G$ . Пучки  $K-G$  представляют обобщение пучков  $H-G$ , описываемых функциями Эрмита с комплексным аргументом [2]–[8]. Заметим также, что 3D скалярные решения для пучков  $K-G$  можно построить как произведения соответствующих 2D решений. При этом возможна любая комбинация четностей функций  $h_1$  и  $h_2$ .

Итак, в общем случае, амплитуда скалярного 3D астигматического пучка  $K-G$  зависит от трех координат и шести свободных комплексных параметров.

#### 4 Условия физической реализуемости 2D и 3D пучков Куммера-Гаусса

Мы выяснили, что при заданных значениях переменных и параметров всегда существуют два формальных решения для амплитуд 3D рассматриваемых световых пучков  $K-G$ . Однако не все эти решения соответствуют физически реализуемым пучкам с переносимой конечной мощностью [1], [2].

В [7], [8] нами подробно исследованы условия квадратичной интегрируемости (*KII*) для 2D пучков  $K-G$ . Для удобства полученные результаты представим в таблице 4.1, проведем ее анализ и сформулируем основные выводы по условиям *KII* для 2D пучков  $K-G$ .

Чтобы 2D гауссов пучок был физически реализуем, как отмечалось выше, достаточно одного простого ограничения  $Q_{0X}^* > 0$ . Для 2D пучков  $K-G$ , как видно из таблицы 4.1, условия их *KII* более разнообразны.

Необходимые условия *KII* для 2D пучков  $K-G$  –  $Q_{0X}^* > 0$  либо  $R_{0X}^* > 0$ .

При произвольных значениях комплексных параметров  $\nu_1, Q_{0X}, R_{0X}$  условия *KII* для 2D пучков  $K-G$ , вообще говоря, не выполняются. Однако при определенных ограничениях на свободные параметры возможно удовлетворить условиям *KII* для обоих пучков, описываемых функциями  $f^o$  и  $f^e$ , либо только для одного из них.

Условия *KII* для четных пучков ( $f^e$ ) и для нечетных ( $f^o$ ) одинаковы только для пучков с нецелым индексом  $\nu_1$ .

Ограничений  $Q_{0X}^* > 0$  и  $R_{0X}^* > 0$  либо ограничений  $Q_{0X}^* > 0, R_{0X}^* = 0$  и  $\nu_1' > -1/2$  всегда достаточно для одновременной физической реализации 2D пучков  $K-G$  двух типов ( $f^o$  и  $f^e$ ).

Если  $\nu_1$  – целое число, то условия *KII* для четных и нечетных пучков, вообще говоря, различны.

При четном (нечетном) неотрицательном целочисленном индексе  $\nu_1$  пучки  $K-G$ , сопоставляемые функциям  $f^e$  ( $f^o$ ), редуцируются к обобщенным (*general*) пучкам  $H-G$  ( $gH-G$ ). При этом возможны новые типы пучков  $K-G$ , которые отсутствуют в работах Бандреса [6] и Торре [12]. На такие пучки в таблице 4.1 даются ссылки с пометкой <sup>a</sup>.

Остановимся на 2D пучках  $K-G$  с положительным целочисленным индексом  $\nu_1$ . Пусть  $Q_{0X}^* > 0$ . Тогда при  $\nu_1 = 2m + 1$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$  (пункты 1 и 2 в таблице 4.1), для пучков  $K-G$  имеет место следующая ситуация. Нечетные пучки  $K-G$  ( $f_1^o$ ) редуцируются к пучкам  $gH-G$ . Последние при  $P_X \rightarrow \infty$  переходят в  $eH-G$  пучки, а при  $P_{0X}^* = -Q_{0X}^*$  – к обычным  $sH-G$  пучкам. Четные же пучки  $K-G$  ( $f_1^e$ ) целочисленного индекса  $\nu_1 = 2m + 1$  при  $P_{0X}^* \geq 0$  физически реализуемы и являются новыми.

Аналогичные рассуждения справедливы и при  $Q_{0X}^* > 0$  и четных неотрицательных индексах  $\nu_1 = 2m$ .

В работах [7], [8] было отмечено, что любое решение  $f$  уравнений для пучков  $K-G$  инвариантно относительно преобразований

$$Q_X \leftrightarrow P_X, \nu_1 \leftrightarrow (-\nu_1 - 1). \quad (4.1)$$

Используя соотношения симметрии (4.1), находим, например, что условия *KII* для пучков  $K-G$ , представленные под номерами 1 и 2 таблицы 4.1, переходят в условия *KII* для пучков  $K-G$ , представленные под номерами 7 и 8 таблицы 4.1. В итоге преобразования (4.1) приводят к следующим взаимосвязям:

Таблица 4.1 – Возможные типы 2D пучков  $K-G$  и их условия физической реализуемости  
(<sup>a</sup> – новые типы пучков  $K-G$ )

№ п/п	Ограничения на параметры $Q_{0x}^*$	Ограничения на параметры $P_{0x}^*$	Ограничения на индекс $\nu_1$ ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )	Типы пучков, описываемые функцией $f_1^o$	Типы пучков, описываемые функцией $f_1^e$	Число пучков
1	$Q_{0x}^* > 0$	$P_{0x}^* < 0$	$\nu_1 = 2m + 1$	$gH - G; sH - G;$ $eH - G;$	–	$f_1^o$
2		$P_{0x}^* \geq 0$		$gH - G; eH - G;$	$K - G^a$	$f_1^o + f_1^e$
3	$Q_{0x}^* < 0$	$P_{0x}^* > 0$	$\nu_1 = -2m - 1$	–	$gH - G; sH - G;$ $eH - G;$	$f_1^e$
4				$Q_{0x}^* \geq 0$	$K - G^a$	$gH - G; eH - G;$
5	$Q_{0x}^* > 0$	$P_{0x}^* < 0$	$\nu_1 = 2m$	–	$gH - G; sH - G;$ $eH - G;$	$f_1^e$
6		$P_{0x}^* \geq 0$		$K - G^a$	$gH - G; eH - G;$	$f_1^o + f_1^e$
7	$Q_{0x}^* < 0$	$P_{0x}^* > 0$	$\nu_1 = -2m - 2$	$gH - G; sH - G;$ $eH - G;$	–	$f_1^o$
8				$Q_{0x}^* \geq 0$	$gH - G; eH - G;$	$K - G^a$
9	$Q_{0x}^* > 0$	$P_{0x}^* > 0$	$\nu_1$ – произв.	$K - G$	$K - G$	$f_1^o + f_1^e f_1^o$
10	$Q_{0x}^* > 0$	$P_{0x}^* = 0$	$\nu_1' > -1/2$	$K - G$	$K - G$	$f_1^o + f_1^e$
11	$Q_{0x}^* = 0$	$P_{0x}^* > 0$	$\nu_1' < -1/2$	$K - G$	$K - G$	$f_1^o + f_1^e$

(1, 2) ↔ (7, 8); (3, 4) ↔ (5, 6);

(10) ↔ (11); (9) ↔ (9). (4.2)

Отсюда следует, что возможны физически реализуемые пучки  $K-G$ , характеризуемые функциями  $f$  с отрицательным целочисленным индексом  $\nu_1$ .

Амплитуду  $f(X, Y, Z)$  общего 3D скалярного гауссовоподобного пучка с простым астигматизмом можно представить как произведение соответствующих амплитуд 2D пучков, т. е.

$$f(X, Y, Z) = f_1(X, Z) \cdot f_2(Y, Z). \quad (4.3)$$

Мы характеризовали 2D пучки  $K-G$ , распространяющиеся в плоскости  $XZ$  и описываемые функцией  $f_1(X, Z)$ . Такие рассуждения справедливы также для 2D пучков  $K-G$ , распространяющихся в плоскости  $YZ$  и описываемых функцией  $f_2(Y, Z)$ . Поэтому для 2D пучков  $K-G$  в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$  проявляются аналогичные закономерности, включая условия их физической реализуемости. Отсюда вытекает, что каждая из функций  $f_{1,2}^o, f_{1,2}^e$  3D пучка  $K-G$  должна быть ограничена независимо и обладать свойствами  $KII$ , которые обсуждались нами выше.

Таким образом, при  $c_1 \neq 0$  и  $c_2 \neq 0$  исследуемые нами параксиальные 3D гауссовоподобные

световые пучки в общем случае являются пучками  $K-G$ , зависящими от двух комплексных аргументов  $X_1, Y_1$  и шести комплексных параметров  $\nu_1, \nu_2, Q_{0x}, Q_{0y}, P_{0x}, P_{0y}$ .

Как функции  $f_1(X, Z)$ , так и функции  $f_2(Y, Z)$  описывают соответствующие 2D пучки  $K-G$ , которые в частных случаях могут редуцироваться к  $gH-G, sH-G$  или  $eH-G$  пучкам.

В итоге возможна реализация  $3 \times 3 = 9$  различных типов астигматических 3D пучков  $K-G$  с различными физическими свойствами в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ .

### 5 Стандартные и элегантные пучки Кумера-Гаусса

Рассмотрим далее некоторые частные случаи обобщенных 3D пучков  $K-G$  с комплексным аргументом. Пусть переменная  $X_1$  будет вещественной при любых  $Z$ . Тогда параметр  $P_x = Q_x^*$ , откуда  $P_{0x}'' = -Q_{0x}''$  и поэтому

$$X_1 = X \frac{\sqrt{2P_{0x}''}}{|Q_x|} = \frac{\sqrt{2}X}{W_x}. \quad (5.1)$$

Здесь  $W_x = \sqrt{1 + (Z - Q_{0x}')^2 / Q_{0x}''^2} = w_x / x_0$  – нормированный поперечный размер (радиус) пучка

вдоль оси  $OX$ . Выражения для вещественных переменных  $Y_1$  аналогичны.

Таким образом, при выполнении условий  $P''_{0X} = -Q''_{0X}$ ,  $P''_{0Y} = -Q''_{0Y}$  3D пучки Куммера-Гаусса редуцируются к 3D астигматическим  $sH-G$  пучкам с вещественным аргументом [1], которые можно представить в форме

$$f(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{W_X W_Y}} \exp\left(i\left(\frac{X^2}{Q_X} + \frac{Y^2}{Q_Y}\right)\right) \times \\ \times H(\nu_1, X_1) \cdot H(\nu_2, Y_1) \times \\ \times \exp(-i\Phi_{0X}(\nu_1 + 1/2)) \times \\ \times \exp(-i\Phi_{0Y}(\nu_2 + 1/2)), \quad (5.1)$$

где  $\Phi_{0X,0Y} = \arctg((Z - Q'_{0X,0Y}) / Q''_{0X,0Y})$  – фазы Гуи для соответствующих 2D пучков [1], а  $W_X$  и  $W_Y$  – соответствующие нормированные радиусы астигматического пучка. Чтобы  $sH-G$  пучки были физически реализуемы, достаточно, чтобы  $\nu_1$  и  $\nu_2$  были целыми неотрицательными.

Заметим попутно, что все пучки  $K-G$ , кроме  $sH-G$  пучков, – это волновые поля с изменяющейся пространственной геометрией. Распределение амплитуды такого пучка непрерывно изменяется по мере распространения его в пространстве.

При  $P_{0X} \rightarrow \infty$ ,  $P_{0Y} \rightarrow \infty$  пучки  $K-G$  комплексного аргумента сводятся к элегантным пучкам  $K-G$  ( $eK-G$ ):

$$f(X, Y, Z) = \exp\left(i\left(\frac{X^2}{Q_X} + \frac{Y^2}{Q_Y}\right)\right) \times \\ \times h_1\left(\nu_1, \frac{X}{\sqrt{iQ_X}}\right) \times \\ \times h_2\left(\nu_2, \frac{Y}{\sqrt{iQ_Y}}\right) Q_X^{-(\nu_1+1)/2} Q_Y^{-(\nu_2+1)/2}. \quad (5.3)$$

Если  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – целые, то  $eK-G$  редуцируются к  $eH-G$  пучкам, впервые введенным Сигманом [4].

### Заключение

В данной работе формализм для описания 2D параксиальных световых пучков, предложенный ранее нами в [7], [8], был распространен на 3D астигматические пучки  $K-G$  с простым астигматизмом. Выявлены также взаимосвязи пучков  $K-G$  с обобщенными, стандартными и элегантными пучками  $H-G$ .

Показано, что выражения, характеризующие 3D астигматические пучки  $K-G$ , являются произведением функций, описывающих 2D световые пучки  $K-G$ . Поэтому число свободных комплексных параметров для 3D астигматических пучков  $K-G$  по сравнению с 2D пучками  $K-G$  удваивается и равно шести.

Обсуждены ограничения на параметры, чтобы полученные решения соответствовали гауссовоподобным 3D пучкам с конечной переносимой мощностью, или, как говорят, физически реализуемым. Условия физической реализуемости, сводящиеся с  $KH$ , должны независимо выполняться для 2D полей в двух взаимно перпендикулярных плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ .

Найдено, что при целочисленных индексах  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , наряду с известными решениями, описывающими пучки  $H-G$  с комплексным аргументом, существуют также решения с теми же самыми индексами  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , характеризующие новые 3D пучки  $K-G$  с целочисленными индексами  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 142 с.
2. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М. : Наука, 1990. – 264 с.
3. Киселев, А.П. Новые структуры параксиальных гауссовых пучков / А.П. Киселев // Опт. и спектр. – 2004. – Т. 96, № 4. – С. 533 – 535.
4. Siegman, A.E. Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.
5. Pratesi, R. Generalized gaussian beams in free space / R. Pratesi, L. Ronchi // JOSA. – 1977. – Vol. 17, № 9. – P. 1274–1276.
6. Bandres, M.A. Cartesian beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3450–3461.
7. Гиргель, С.С. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера-Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.
8. Гиргель, С.С. Свойства скалярных 2D пучков Куммера-Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
9. Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 379 с.
10. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М. : Наука, 1979. – 830 с.
11. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1977. – 342 с.
12. Torre, A. A note on the general solution of paraxial wave equation: a Lie algebra view / A. Torre // Journ. Opt. A. – 2008, Vol. 10, № 8. – P. 055006–055020.

Поступила в редакцию 07.12.12.

УДК 539.12.01

## РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ С ЗАВИСЯЩИМ ОТ ЭНЕРГИИ ПОТЕНЦИАЛОМ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## RELATIVISTIC BOUND STATE PROBLEM FOR TWO-PARTICLE SYSTEMS WITH ENERGY DEPENDENT ONE BOSON EXCHANGE POTENTIAL

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Найдены численные решения уравнений квантовой теории поля, описывающих связанные  $s$ -состояния системы двух скалярных частиц с одинаковой массой для потенциала однобозонного обмена, который зависит от энергии системы. Масса скалярного бозона обмена равна нулю. На основе полученных решений вычислены константы распада системы скалярной частицы и античастицы на два фотона.

**Ключевые слова:** релятивистские двухчастичные уравнения, потенциал однобозонного обмена, волновые функции, связанные состояния, условие нормировки, собственные значения энергии, константа распада.

Numerical solutions of quantum field theory equations describing bound  $s$ -states of two scalar particles with equal masses are found in the case of one-boson exchange potential dependent on the system energy. The mass of the scalar exchange boson is chosen to be equal to zero. The constants of scalar particle-antiparticle system decay into two photons are calculated based on obtained solutions.

**Keywords:** relativistic two-particle equations, one-boson exchange potential, wave functions, bound states, normalization condition, energy eigenvalues, decay constant.

### Introduction

The expressions for relativistic potentials of two particle interactions by means of the one-boson exchange were obtained in the framework of different variants of the quasipotential approach in quantum field theory [1]–[3]. One of the main properties of these potentials is their dependence on the total energy of the system. The result of such dependence is the nonlinearity of the problem of system energy eigenvalues for the two-particle equations, which comprise these potentials; meaning that it is necessary to apply special methods for solving this problem.

In this paper numerical solutions of quantum field theory equations, describing the bound  $s$ -states of two scalar particles with equal masses [1], [4] in the case of the energy dependent one-boson exchange potential [2], were found. The mass of the scalar exchange boson is chosen to be equal to zero. The constants of scalar particle-antiparticle bound system decay into two photons are calculated based on these solutions.

### 1 Two-particle equations and one-boson exchange potential

The two-particle relativistic equations in the center of mass system have the following form in the momentum representation:

$$E_p^2 \psi(2E, p) + \frac{2\lambda m}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} V(2E, p, k) \psi(2E, k) = \quad (1.1)$$

$$= E^2 \psi(2E, p),$$

$$E_p = \sqrt{p^2 + m^2},$$

$$2E_p \psi(2E, p) +$$

$$+ \frac{2\lambda m}{\pi E_p} \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} V(2E, p, k) \psi(2E, k) = \quad (1.2)$$

$$= 2E \psi(2E, p),$$

$$E_k = \sqrt{k^2 + m^2},$$

where (1.1) is the Logunov-Tavkhelidse equation, and (1.2) is the Kadyshevsky equation. The quantity  $2E$  in these equations is the total energy of two-particle system ( $0 < 2E < 2m$ ),  $m$  is the mass of each particle,  $\lambda$  is the coupling constant,  $\psi(2E, p)$  is the wave function,  $V(2E, p, k)$  is the relativistic potential.

The normalization condition for the relativistic bound state wave functions in the case of energy depended potentials has a rather complicated form [5]. This condition for the  $s$ -states can be represented as:



$$\int_0^\infty dp \frac{m}{E_p} \psi^2(2E, p) - \frac{2\lambda m^2}{\pi E} \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} \psi(2E, p) \times \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} \psi(2E, k) \frac{\partial}{\partial(2E)} V(2E, p, k) = 1 \quad (1.3)$$

– for the wave function of equation (1.1), and

$$\frac{m}{E} \int_0^\infty dp \psi^2(2E, p) - \frac{2\lambda m^2}{\pi E} \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} \psi(2E, p) \times \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} \psi(2E, k) \frac{\partial}{\partial(2E)} V(2E, p, k) = 1 \quad (1.4)$$

– for the wave function of equation (1.2). In this paper we consider one-boson exchange potential obtained in [1], which for the  $s$ -states (after partial decomposition) can be represented in the form [2]

$$V(2E, p, k) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E_p + E_k + |p - k| - 2E}{E_p + E_k + p + k - 2E} \right). \quad (1.5)$$

It is obvious that in the non-relativistic limit ( $m \rightarrow \infty$ ) expression (1.5) transforms into the Coulomb potential ( $\lim_{m \rightarrow \infty} 2E = 2m - \kappa^2/m$ , where  $\kappa > 0$ ).

**2 Method of numerical solution and results**

To find numerical solutions of integral equations (1.1) and (1.2) the quadratures method was used. Herewith the infinite limit of the integral is replaced by a large value  $R$  chosen based on the accuracy requirement of obtained results. All calculations are carried out at  $m = 1$ . After replacing the integral by the sum following from the quadrature formula, the integral equations are reduced to the homogeneous systems of linear algebraic equations having the form

$$K_1(2E)\psi = E^2\psi; \quad K_2(2E)\psi = 2E\psi, \quad (2.1)$$

where  $K_{1,2}(2E)$  are the matrices obtained from the left parts of equations (1.1), (1.2), and  $\psi$  is the vector of wave function values in the quadrature node. The energy eigenvalues  $2E$  are then found using the iteration method for the system of equations (2.1).

This method has been discussed in detail in previous works, such as [6]. Let us explain briefly the main point of the iteration method. For the state under consideration one may choose some initial energy value  $2E^{(0)}$  and then calculate the next approximations using the formulas

$$K_1(2E^{(s)})\psi = (E^{(s+1)})^2 \psi, \quad K_2(2E^{(s)})\psi = 2E^{(s+1)} \psi, \quad (2.2)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots$$

To find the eigenvalues of the matrices  $K_{1,2}(2E^{(s)})$  one can use standard methods, such as the QR-method [7]. Process (2.2) has to be continued until the condition  $|2E^{(s+1)} - 2E^{(s)}| \leq \varepsilon$  holds, where  $\varepsilon$  is the required accuracy for finding the matrix eigenvalues.

A problem that emerged during the process of solving the integral equations was the slow convergence of numerical solutions to exact ones as the number of nodes increased. This is natural since the potential (1.5) contains a module of variable difference, i. e. the kernel derivative with respect to  $p$  (or with respect to  $k$ ) is discontinuous. In order to obtain the solution, first the rectangle method on three grids, with the numbers of nodes  $N, 2N, 4N$  was used. Then, the Aitken extrapolation process [7] was applied to the energy values  $2E_N, 2E_{2N}, 2E_{4N}$  obtained with the rectangle method, and to the wave functions  $\psi_N, \psi_{2N}, \psi_{4N}$  normalized using formulas (1.3) and (1.4):

$$2E = 2E_{2N} + \frac{(2E_{2N} - 2E_N)(2E_{4N} - 2E_{2N})}{4E_{2N} - 2E_{4N} - 2E_N},$$

$$\psi = \psi_{2N} + \frac{(\psi_{2N} - \psi_N)(\psi_{4N} - \psi_{2N})}{2\psi_{2N} - \psi_{4N} - \psi_N}.$$

This allowed to obtain more accurate values of  $2E$  and  $\psi$ . The energy eigenvalues and the wave functions are represented in figures 2.1 and 2.2 for the first (ground) state and some higher states.

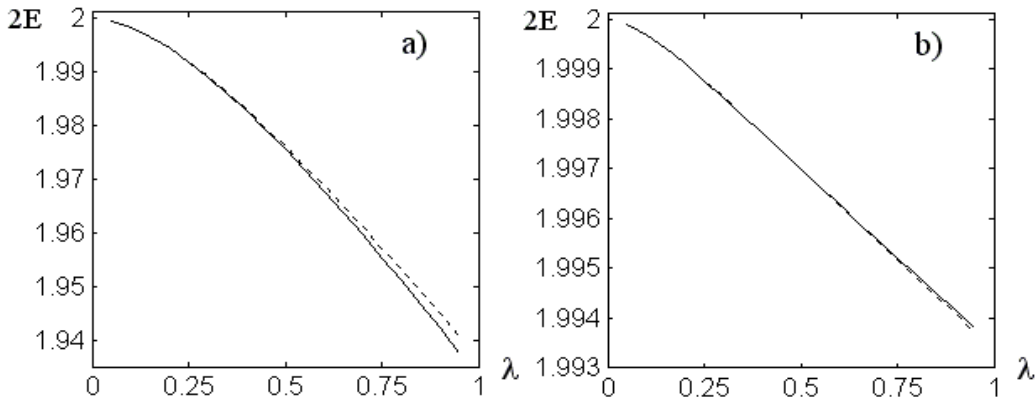


Figure 2.1 – The bound state energies for: a) first states, b) second states; solid line – the Logunov-Tavkhelidze equation; dashed line – the Kadyshevsky equation

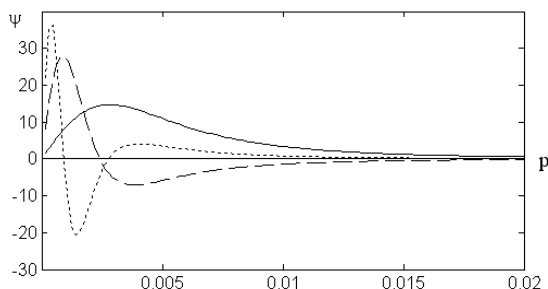


Figure 2.2 – The wave functions of the Logunov-Tavkhelidze equation for  $\lambda = 0.01$ : solid line – first state; dashed line – second state; dotted line – third state

It is seen in figure 2.2, that at  $p \neq 0$  the first state wave function does not have zeros, the second state wave function has one zero and the third state wave function has two zeros. Subsequent calculations show that for the equations under consideration the number of wave function zeros is equal to the “state number minus one”. The wave functions obtained by solving the two-particle relativistic equations for other potentials, for example for the potential discussed in [8], have the same properties. The non-relativistic wave functions have analogous property. In quantum mechanics this property is proved as a theorem [9]. In the relativistic two particle system case such proof is unknown.

### 3 Decay constants

As an example of possible applications of the numerical solutions obtained, let us adduce the results of calculations for the constants of the particle-antiparticle system decay into two photons. In the single-time approach such decay constant is given by [10]:

$$f(\lambda) = \frac{-4\sqrt{2\pi}\lambda S}{2E} \int_0^{E_p} \ln\left(\frac{p + E_p}{m}\right) \psi(2E, p), \quad (3.1)$$

where the value of  $S$  depends on the type of particles (in the case of scalar particles  $S = 1/2$ ).

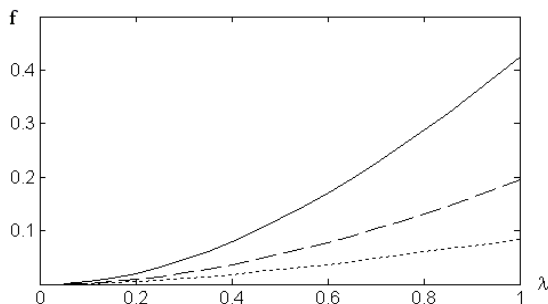


Figure 3.1 – The decay constant: solid line – ground state; dashed line – second state; dotted line – third state

Results of numerical calculations for expression (3.1) in the case of the Kadyshevsky equation are

shown in figure 3.1. Calculations for the Logunov-Tavkhelidze equation give almost identical values of the decay constant and are therefore not presented here.

### Conclusion

In this paper numerical solutions of the integral equations of quantum field theory, describing relativistic bound  $s$ -states of two scalar particles with identical masses, have been found in the case of one-boson exchange potential dependent on the total energy of the system. The mass of scalar exchange boson is equal to zero. The normalization conditions for spherically symmetric wave functions are discussed in the case of energy dependent potentials. As an example of application for found solutions, the constant of scalar particle-antiparticle system decay into two photons has been calculated.

### REFERENCES

1. *Kadyshevsky, V.G.* Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, №1. – P. 125–148.
2. *Капшай, В.Н.* О зависимости квазипотенциала от полной энергии двухчастичной системы / В.Н. Капшай, В.И. Саврин, Н.Б. Скачков // ТМФ, 1986. – Т. 69, № 3. – С. 400–410.
3. *Dey, E.A.* One-Photon Exchange Quasipotentials of Two-Body Systems / E.A. Dey, V.N. Kapshai, G.Yu. Tyumenkov // Acta Physica Polonica. – 1990. – Vol. B21, № 6. – P. 449–456.
4. *Logunov, A.A.* Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
5. *Фаустов, Р.Н.* Квазипотенциальный метод в задаче о связанных состояниях / Р.Н. Фаустов // ТМФ, 1970. – Т. 3, № 2. – С. 240–254.
6. *Solov'eva, T.M.* Iteration method of solving the integral equation with nonlinear dependence on spectral parameter / T.M. Solov'eva, E.P. Zhidkov // Comp. Phys. Comm. – 2000. – Vol. 126. – P. 168–177.
7. *Калиткин, Н.Н.* Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
8. *Kapshai, V.N.* Form-factors of relativistic bound state systems of two scalar particles with one-boson exchange potential / V.N. Kapshai, Yu.A. Grishchkin // Proceedings of the F. Scorina Gomel State University. – 2011. – № 6 (69). – P. 70–74.
9. *Мессия, А.* Квантовая механика: в 2 т. / А. Мессия. – М.: Наука, 1978. – Т. 1: Квантовая механика. – 480 с.
10. *Саврин, В.И.* Метод квазипотенциала в теории связанных состояний / В.И. Саврин. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2006. – 134 с.

Поступила в редакцию 17.10.12.

УДК 621.315.592

## CIGS-СОЛНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ 10,1% НА ПЕРЛИТНЫХ СТЕКЛОКЕРАМИЧЕСКИХ ПОДЛОЖКАХ

В.Б. Залесский<sup>1</sup>, В.М. Кравченко<sup>1</sup>, Т.Р. Леонова<sup>1</sup>,  
А.М. Поликанин<sup>1</sup>, Е.П. Зарецкая<sup>2</sup>, С.Г. Петросян<sup>3</sup>, А.М. Кечиянц<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь

<sup>3</sup>Институт радиофизики и электроники НАН Республики Армения, Аштарак, Армения

## CIGS SOLAR CELLS WITH EFFICIENCY 10,1% ON PERLITE GALSSCERAMIC SUBSTRATES

V.B. Zalesski<sup>1</sup>, V.M. Kravchenko<sup>1</sup>, T.R. Leonova<sup>1</sup>,  
A.M. Polikanin<sup>1</sup>, E.P. Zaretskaya<sup>2</sup>, S.G. Petrosyan<sup>3</sup>, A.M. Kechiantz<sup>3</sup>

<sup>1</sup>B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>Scientific and Practical Materials Research Centre of NAS Belarus, Minsk, Belarus

<sup>3</sup>Institute of Radiophysics and Electronics, NAS RA Ashtarak, Armenia

Впервые сформированы тонкопленочные солнечные элементы с поглощающим слоем  $\text{Cu}(\text{In,Ga})\text{Se}_2$  (CIGS) на специально разработанных непроводящих стеклокерамических подложках на основе перлита с целью создания фотовольтаических устройств, полностью интегрированных в элементы строительных конструкций. Данная стеклокерамика удовлетворяет как физическим требованиям к материалу подложки, так и требованиям снижения стоимости производства солнечных элементов. В данной работе представлены предварительные результаты, показывающие, что солнечные элементы подобного типа могут обладать эффективностью свыше 10 %.

**Ключевые слова:** тонкие пленки, CIGS, солнечные элементы, стеклокерамика.

For the first time thin film solar cells with  $\text{CuInGaSe}_2$  absorber layer were formed on a specially designed non-conductive ceramic substrates on the basis of perlite to produce photovoltaic devices fully integrated into building constructions. This glass ceramic satisfies the physical demands of the substrate material as well as the requirements of cost reduction of solar cells production. This paper presents preliminary results which show that these type solar cells with the efficiency higher than 10 % may be designed.

**Keywords:** thin films, CIGS, solar cells, glass ceramic.

### Введение

Тонкопленочные солнечные элементы (СЭ) с активным слоем на основе поликристаллических пленок полупроводников  $\text{Cu}(\text{In,Ga})\text{Se}_2$  (CIGS), обладающих коэффициентом поглощения свыше  $15 \text{ см}^{-1}$  в ближней ИК и видимой области спектра, являются фотопреобразователями нового поколения. Одним из основных преимуществ тонкопленочных солнечных элементов этого типа по сравнению с кристаллическими кремниевыми солнечными элементами является то, что такие фотовольтаические устройства, толщиной всего в несколько микрон, могут быть сформированы посредством низкотемпературных процессов на различных подложках таких, как стекло, сталь или керамика [1], [2]. CIGS-солнечные элементы на недорогих и стабильных керамических подложках являются перспективными с точки зрения снижения затрат на фотозенергетику (общепринятый за рубежом термин «фотовольтаика» – photovoltaics – PV) и разработку элементов строительных конструкций (например, крыша из «солнечных» плит), способных генерировать электрическую

энергию [3]. Замена обычной плитки на «фотовольтаическую» или «солнечную» плитку позволит иметь источник PV-энергии для здания без каких-либо дополнительных затрат по установке фотовольтаических модулей на существующие или спроектированные строения.

Высококачественная, изготовленная в лабораторном масштабе, или коммерческая керамика такая, как муллит алюминия [4], [5], [7], силикат циркония [6], нитрид кремния [8] и карбид кремния [9], уже успешно использовалась в качестве подложек для тонкопленочных кремниевых солнечных элементов. В данной статье сообщается о CIGS-солнечных элементах, впервые сформированных на специально разработанных непроводящих керамических подложках на основе кристаллизованного перлитного стекла. Такие стеклокерамические пластины удовлетворяют физическим и химическим требованиям к материалу подложки для нанесения тыльного контакта из молибдена и CIGS-поглощающего слоя, а также удовлетворяют требованиям низкой стоимости материала подложки. По сравнению со стеклом,

они позволяют использовать более высокую температуру для напыления пленок, что обеспечивает повышение температуры рекристаллизации осаждаемых слоев и увеличение размеров зерен, а это, в свою очередь, является желательным для получения высокоэффективных солнечных элементов [10]. Подложка не содержит примесей (кроме натрия), способных диффундировать в активный слой во время процесса осаждения. Другим преимуществом стеклокерамики на основе перлита является то, что значение коэффициента его термического расширения близко к величине коэффициента термического расширения CIGS-поглощающего материала и позволяет использовать данный материал в качестве подложек для CIGS-солнечных элементов в крупномасштабном производстве. Результаты формирования и исследования таких солнечных элементов площадью  $0,5 \text{ см}^2$  представлены в данной статье.

### 1 Эксперимент

Одним из первых этапов формирования тонкопленочного CIGS-солнечного элемента является нанесение омического обратного контакта. Омический тыльный контакт для CIGS-солнечных элементов традиционно представляет собой тонкий ( $0,5 \text{ мкм}$ ) слой молибдена (Mo), нанесенный ионно-плазменным напылением. В данном исследовании осаждение обратного Mo-контакта производилось методом магнетронного распыления на постоянном токе.

Перед нанесением тыльного Mo-контакта стеклокерамические подложки толщиной  $2\text{--}3 \text{ мм}$  были подвергнуты влажной химической обработке, промыты деионизованной водой и высушены в потоке азота. Полированные подложки имеют сплошную поверхность без проколов и микротрещин (рисунок 1.1 а, б). Шероховатость поверхности, измеренная профилометром «ZAYGO – 7000» (рисунок 1.1, с), характеризуется средним интервалом профиля неровностей около  $14 \text{ нм}$ .

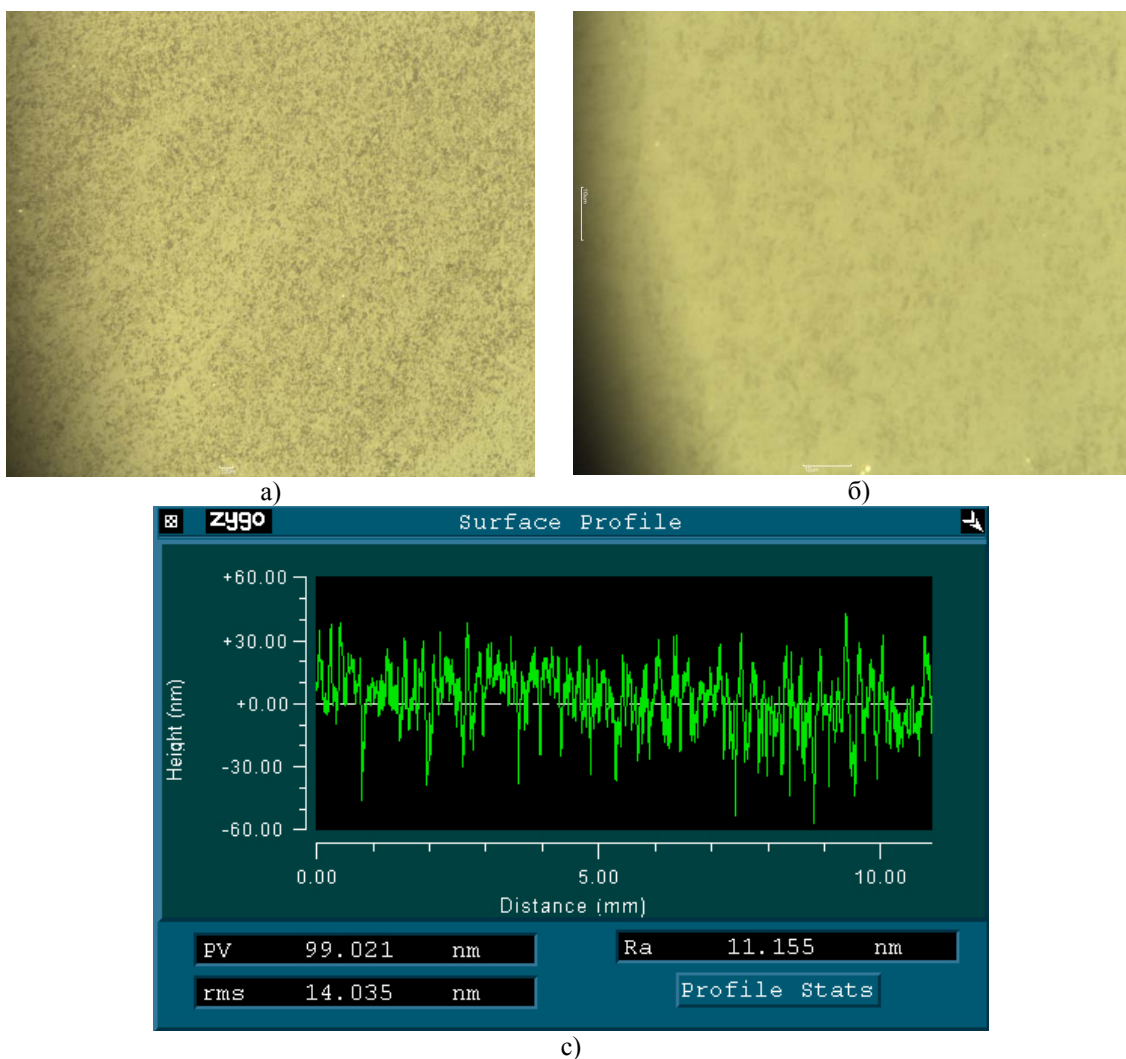


Рисунок 1.1 – Микрофотографии с увеличением в  $\times 500$  раз (а),  $\times 1000$  (б), с) профиль шероховатости поверхности стекла керамической подложки

Исследование состава стеклокерамической подложки на основе перлита с помощью рентгеновского микроанализатора «Bruker» XR выявляет наличие значительного количества примесей (рисунок 1.2). Наряду с основными составляющими компонентами Si, Ca, C, Al и O подложки содержат примеси K, F, N и Na (таблица 1.1). Как установлено рядом исследователей, внедрение Na в количестве  $\approx 0,1$  вес %. повышает эффективность преобразования CIGS-солнечного элемента на 30–50 % [11], [12]. Это увеличение связано с улучшением напряжения холостого хода и фактора заполнения, вызванным электронными и структурными изменениями в поглощающем слое. Механизм воздействия Na многообразен: он увеличивает концентрацию дырок в поглощающем слое, улучшает структуру и морфологию пленки, приводя к увеличению размеров зерен.

Обычно Na внедряется в CIGS-слой в процессе его формирования, диффундируя из Na-содержащих стеклянных подложек (soda – lime glass) через Mo-контакт. Этот метод неприемлем в случае использования гибких, не содержащих натрия подложек, но вполне применим на перлитовых подложках с учетом возможности управления концентрацией натрия за счет использования барьерного слоя между подложкой и структурой солнечного элемента. Приведенные в таблице 1.1 данные показывают, что содержание натрия в стеклокерамической подложке, положительно влияющего на фотопреобразование в поглощающем CIGS-слое, достигает 3,29 вес. %.

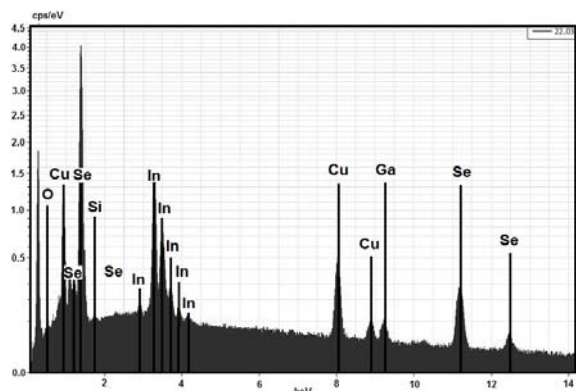


Рисунок 1.2 – Состав стеклокерамической подложки на основе перлита

Кроме того, существенным достоинством перлитовых подложек по сравнению со стеклом является то, что они позволяют использовать более высокую температуру для напыления пленок, что, как правило, приводит к увеличению размеров зерен и текстуры осаждаемых слоев. Разрастание зерен сопровождается снижением поверхностной рекомбинации на их границах, что является желательным для достижения высокого преобразования энергии.

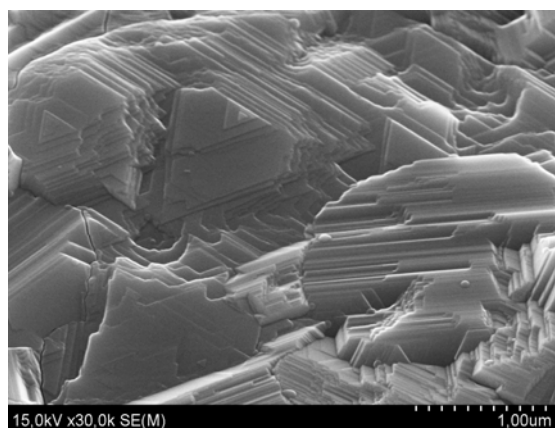
Таблица 1.1 – Состав стеклокерамической подложки на основе перлита

El	Series	unn.C, wt.%	norm.C wt.%	Atom.C at.%	Error wt.%
C	K-series	37.64	33.10	43.56	4.1
N	K-series	2.53	2.22	2.51	0.4
O	K-series	47.37	41.66	41.15	5.1
F	K-series	1.82	1.60	1.33	0.3
Na	K-series	3.74	3.29	2.26	0.3
Mg	K-series	0.73	0.64	0.42	0.1
Al	K-series	3.00	2.64	1.54	0.2
Si	K-series	9.37	8.24	4.64	0.4
P	K-series	0.16	0.14	0.07	0.0
S	K-series	0.14	0.13	0.06	0.0
Cl	K-series	0.08	0.07	0.03	0.0
K	K-series	0.82	0.72	0.29	0.1
Ca	K-series	5.89	5.18	2.04	0.2
Fe	K-series	0.21	0.18	0.05	0.0
Cu	K-series	0.22	0.20	0.05	0.0

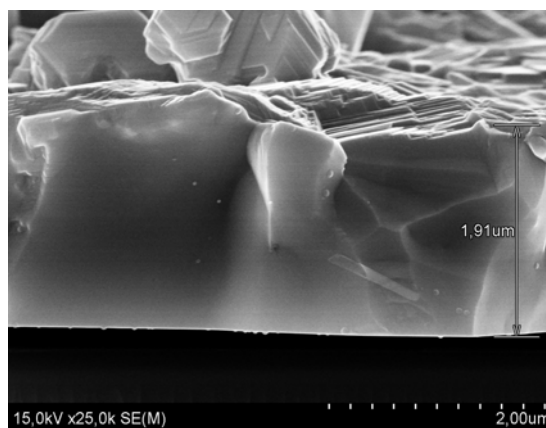
Следующим этапом формирования CIGS-солнечного элемента являлось нанесение светопоглощающего слоя. Поликристаллическая пленка CIGS толщиной около 1,7 мкм была нанесена на стеклокерамическую подложку с подслоем молибдена (толщиной 0,8 мкм) методом вакуумного соиспарения меди, галлия, индия и селена. Температура подложки в процессе соиспарения составляла 500–550 °C.

Последующие охлаждение подложки может вызвать существенные деформации в CIGS-слое при значительном различии коэффициентов термического расширения CIGS-слоя и подложки. Для натрийсодержащего стекла, как правило, используемого в качестве подложки для CIGS-солнечных элементов, коэффициент термического расширения составляет  $9,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  [2]. Значение коэффициента термической стеклокерамики на основе перлита составляет  $7,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , которое очень близко к значению коэффициента термического расширения CIGS ( $8,6 \cdot 10^{-6} \text{ K}$ ). Таким образом, по этой характеристике стеклокерамика на основе перлита хорошо согласуется с параметрами вышележащих слоев.

На рисунке 1.3 (а, б) представлены микрофотография поверхности и вид поперечного сечения CIGS-слоя. Как видно из фотографий, осажденная поликристаллическая CIGS-пленка сформирована плотно упакованными кристаллитами без четко выраженных границ раздела с преимущественным направлением роста, перпендикулярным подложке. Размеры кристаллитов составляют 2–5 мкм, а в направлении роста кристаллиты распространяются на всю толщину пленки и достигают 2 мкм.



а)



б)

Рисунок 1.3 – СЭМ изображения поверхности и поперечного сечения и CIGS-слоя

Исследование химического состава и однородности CIGS-слоя проводилось на основе анализа различных участков пленки с помощью «Bruker» XR микроанализатора, который дает усредненное содержание элементов Cu, In, Ga и Se в слое, приведенное в таблице 1.2 под рисунком 1.4. Из таблицы 1.2 следует, что пленка имеет соотношение  $Ga/(Ga+In) = 0,17$ , являющееся оптимальным для формирования оптически активного CIGS-слоя с шириной запрещенной зоны, близкой к оптимальному фотопреобразованию (1,2–1,4 эВ).

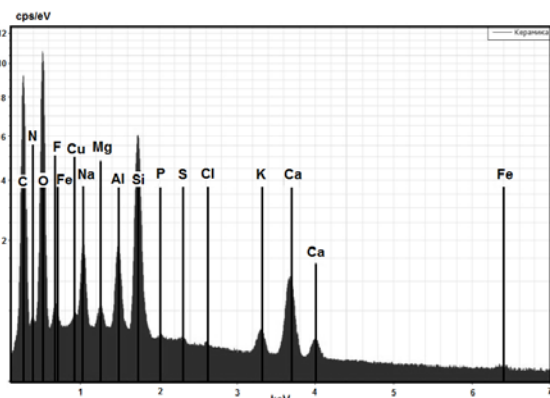


Рисунок 1.4 – Состав CIGS-поглощающего слоя

Таблица 1.2 – Содержание элементов Cu, In, Ga и Se в CIGS-слое

El	Series	unn.C, wt. %	norm.C wt. %	Atom.C at. %	Error wt. %
O	K-series	0.52	0.57	2.89	0.1
Si	K-series	0.12	0.13	0.39	0.0
Cu	K-series	15.84	17.57	22.33	0.5
Ga	K-series	3.40	3.77	4.36	0.1
Se	K-series	42.81	47.47	48.57	1.3
In	L-series	27.50	30.49	21.45	0.9

Формирование многослойной структуры фотоэлектрического преобразователя было завершено нанесением буферного слоя CdS толщиной 50 нм методом химического осаждения и

последующим осаждением двухслойного прозрачного покрытия ZnO (50 нм нелегированного ZnO и 350 нм легированного алюминием проводящего ZnO слоя), а также напылением двухслойного Ni/Al верхнего контакта сетки.

## 2 Результаты измерения электрических характеристик и обсуждение

После того, как устройство было сформировано, было проведено исследование темновых ВАХ (рисунок 2.1, а) при освещении в условиях AM1.5, что соответствует  $1000 \text{ Вт/м}^2$  (рисунок 2.2), а также вольт-емкостных характеристик (рисунок 2.2) и квантовой эффективности (рисунок 2.3). Некоторые параметры электрических характеристик солнечного элемента приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Электрические характеристики CIGS-солнечных элементов на стеклокерамической подложке

$S, \text{ см}^2$ – площадь элемента	0.5
$U_{\text{хх}}, \text{ В}$ – напряжение холостого хода	0.52
$I_{\text{кз}}, \text{ Ом}$ – ток короткого замыкания	20.12
$U, \text{ В}$ – напряжение в точке максимальной мощности,	0.37
$I, \text{ мА}$ – ток в точке максимальной мощности	13.53
$FF, \%$ – фактор заполнения	48.4
$\eta, \%$ – эффективность	10.09
$R_n, \text{ Ом}$ – последовательное сопротивление	6.96
$R_{\text{ш}}, \text{ Ом}$ – шунтирующее сопротивление	70.6
Ширина обедненной зоны при нулевом смещении, мкм	0.34
$\rho_0, \text{ см}^{-3}$ – концентрация дырок	$2 \cdot 10^{16}$

Как видно из таблицы, несмотря на необходимость значительного улучшения последовательного и шунтирующего сопротивлений, лучшие элементы показывают эффективность более 10 %,

что является очень перспективным результатом, так как он был достигнут на стеклокерамической подложке при неоптимизированных условиях осаждения. Из полученных результатов видно, что эффективность созданных на таких подложках солнечных элементов в основном ограничена низким коэффициентом заполнения. С улучшением этого показателя, а также увеличением напряжения холостого хода элемента становится реальным достижение эффективности свыше 15 % для этого типа элементов.

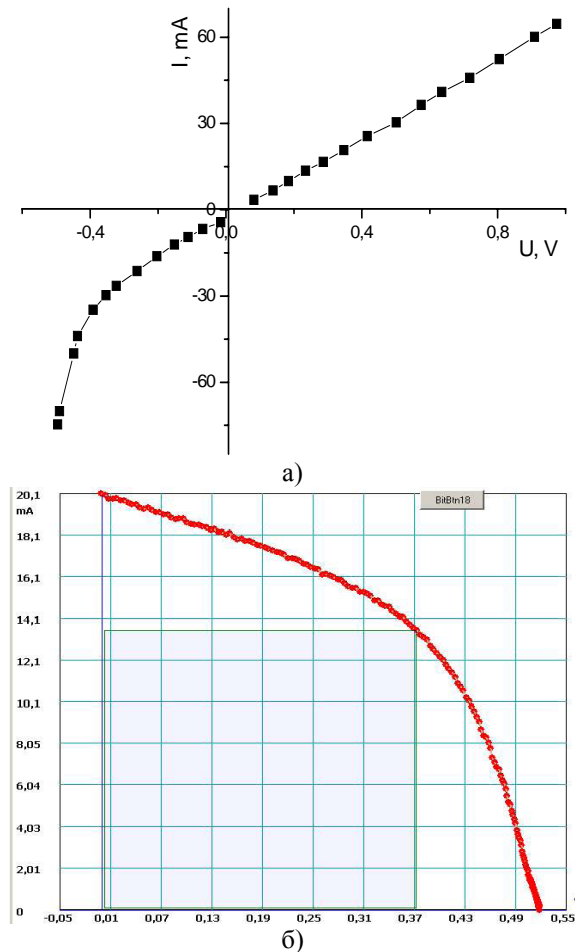


Рисунок 2.1 – ВАХ одного из лучших устройств в темноте (а) и при освещении (б)

Рисунок 2.1 а) показывает, что увеличение напряжения при обратном смещении ( $U > 0$ ) диода приводит к увеличению тока. Возможной причиной этого является шунтирование, которое означает, что мы имеем высокую шунтирующую проводимость, которая может быть даже ответственной за относительно низкое напряжение холостого хода. Кроме того, это явление может также быть вызвано зависящим от напряжения сбором носителей.

Используя измерение емкости  $C$  гетероперехода  $p-CIGS-n^+-ZnO$  как функции приложенного напряжения, можно оценить плотность легирования поглощающего слоя. В связи с асиммет-

ричным легированием, область пространственного заряда распространяется гораздо дальше в CIGS, и график зависимости  $1/C^2$  от напряжения, должен давать прямую линию [13], а плотность легирования  $N_A$   $p$ -типа поглощающего слоя может быть определена по наклону этой прямой:

$$\frac{d\left(\frac{S^2}{C^2}\right)}{dV} = \frac{2}{q\epsilon\epsilon_0 N_A}. \quad (2.1)$$

Здесь  $S$  – это площадь элемента,  $q$  – элементарный заряд,  $\epsilon = 12$  – диэлектрическая проницаемость CIGS [2] и  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  – электрическая постоянная.

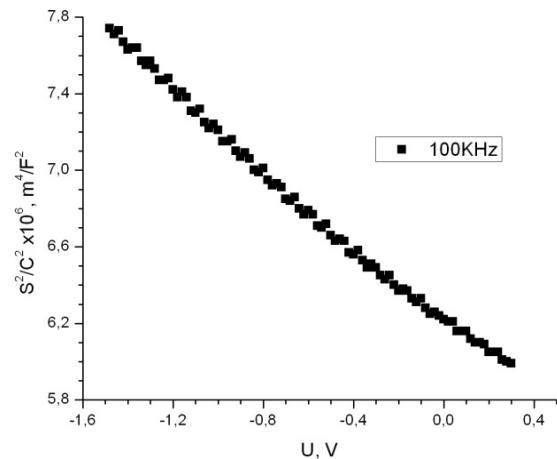


Рисунок 2.2 – График зависимости  $V$  от  $S^2/C^2$

Плотность легирования поглощающего слоя, полученная из такого графика для лучшего солнечного элемента, составила  $N_A = 1.12 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Ширина обедненной зоны, например, при нулевом смещении может быть найдена из емкости  $d = \epsilon\epsilon_0 S / C = 0.347 \mu\text{m}$ .

Спектральная характеристика солнечного элемента (без антиотражающего покрытия) показана на рисунке 2.3. Это график нормированной внутренней квантовой эффективности (QE) в зависимости от энергии фотонов, показывающий, что значительная часть фотонов в видимой и ближней инфракрасной области солнечного света преобразуется в полезный ток элемента.

Используя график зависимости квадрата квантовой эффективности от энергии фотонов в области низких энергий (вставка на рисунке 2.3), можно оценить ширину запрещенной зоны поглощающего слоя. Пересечение с осью энергий дает значение ширины запрещенной зоны CIGS, равное 1,2 эВ, что соответствует составу  $x \approx 0.3$  при использовании для определения ширины запрещенной зоны твердого раствора  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  следующего выражения [2]:

$$E_g(x)(\text{eV}) = 1.01 + 0.625x - 0.167x(1-x).$$

Полученные результаты также находятся в соответствии с данными по исследованию состава

пленок (рисунок 1.4). Видно также, что некоторое поглощение фотонов имеет место в области ниже ширины запрещенной зоны, что может быть вызвано дефектами или вторичными фазами с меньшей шириной запрещенной зоны.

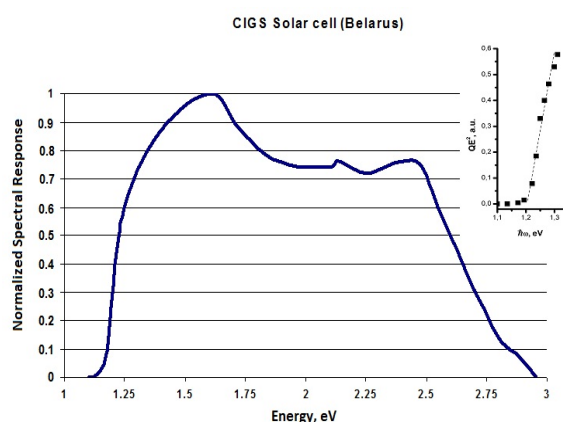


Рисунок 2.3 – Спектральная характеристика устройства. Вставка показывает зависимость квадрата QE от энергии фотонов в области низких энергий для оценки ширины запрещенной зоны поглощающего слоя

### Заключение

Показано, что стеклокерамика на основе перлита может быть успешно использована в качестве подложки для CIGS-солнечных элементов. Лучшие солнечные элементы показали эффективность более чем 10 % с коэффициентом заполнения 48,4 % и напряжением холостого хода 518 мВ. Учитывая сложные свойства подложки, этот результат можно рассматривать как важный шаг на пути развития фотоэлектрических преобразователей, интегрированных в элементы строительных конструкций (например, «солнечной» плитки).

Дальнейшее повышение эффективности солнечных элементов на керамических подложках требует дополнительных исследований по оптимизации как поглощающего слоя, так и составляющих компонентов структуры солнечных элементов в целом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Rau, U. CuInGaSe<sub>2</sub> Solar cells, in Clean Electricity From Photovoltaics / U. Rau, U.W. Schock ; Eds. M. D. Archer and R. Hill. – London : Imperial College Press, UK, 2001. – P. 277.
2. Shafarman, W.N. Cu(InGa)Se<sub>2</sub> Solar Cells, Handbook of Photovoltaic Science and Engineering / W.N. Shafarman, L. Stolt ; Ed. by A. Lique and S. Hegedus. – John Wiley & Sons Ltd, 2003.

3. Iencinella, D. Thin-film solar cells on commercial ceramic tiles / D. Iencinella, E. Centurioni, G. Busana // Sol. Energy Mater. Sol. Cells. – 2009. – Vol. 93. – P. 206–210.

4. Slaoui, A. Thin-film silicon solar cells on mullite substrates / A. Slaoui, E. Pihan, A. Focsa // Sol. Energy Mater. Sol. Cells. – 2006. – Vol. 90. – P. 1542–1552.

5. Influence of Deposition Processing Conditions on Polycrystalline Silicon Thin Film for Solar Cells on Ceramic Substrates / H. Li [et al.] // Materials Science Forum. – 2005. – Vol. 475–479. – P. 1231–1234.

6. Crystalline silicon thin-film solar cells on ZrSiO<sub>4</sub> ceramic substrates / Kieliba, T. [et al.] // In Technical Digest of the 12<sup>th</sup> International Photovoltaic Science and Engineering Conference, Cheju Island, Korea, 2001. – 557 p.

7. Thin-film polycrystalline silicon solar cells on ceramic substrates with a V<sub>oc</sub> above 500 mV / L. Carnel [et al.] // Thin Solid Films. – 2006. – Vol. 511–512. – P. 21–25.

8. Stollwerck, G. Crystalline Silicon Thin-Film Solar Cells on Silicon Nitride Ceramic Substrates / G. Stollwerck, S. Reber, C. Häbeler // Adv. Mater. – 2001. – Vol. 13. – P. 1820–1824.

9. Processing of C-Si Thin-Film Solar Cell on Ceramic Substrate with Conductive SiC Diffusion Barrier Layer / S. Janz [et al.] // Proceedings of Photovoltaic Energy Conversion, Conference Record of the 2006 IEEE 4th World Conference on, Waikoloa, HI, 7–12 May 2006, Vol. 2. – P. 1403–1406.

10. Taretto, K. Numerical simulation of grain boundary effects in Cu(In,Ga)Se<sub>2</sub> thin-film solar cell / K. Taretto, U. Rau, J. Werner // Thin Solid Films. – 2005. – Vol. 480–481. – P. 8–12.

11. Influence of Na on the properties of Curich prepared CuInS<sub>2</sub> thin films and the performance of corresponding CuInS<sub>2</sub>/CdS/ZnO solar cells / J. Luck [et al.] // Sol. Energy Mater. & Sol. Cells. – 2001. – Vol. 67. – P. 151–158.

12. Vaseker, P.S. Effect of sodium addition on Cu-deficient CuIn<sub>1-x</sub>Ga<sub>x</sub>S<sub>2</sub> thin film solar cells / P.S. Vaseker, N.G. Dhere // Sol. Energy Mat. & Sol. Cells. – 2009. – Vol. 93. – P. 69–73.

13. Mauk, P.H. Interpretation of thin-film polycrystalline solar cell capacitance / P.H. Mauk, H. Tavakolian, J.R. Sites // IEEE Trans. Electron Devices. – 1990. – Vol. 37. – P. 422–427.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (ФНРАФ – 025).

Поступила в редакцию 01.02.13.



УДК 517.977

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТОНКИХ ПЛЕНОК ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ , ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ДВУХСТАДИЙНОЙ СЕЛЕНИЗАЦИИ

И.Н. Цырельчук<sup>1</sup>, В.В. Хорошко<sup>1</sup>, В.Ф. Гременок<sup>2</sup>, В.А. Мишута<sup>1</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск<sup>2</sup>Институт физики твердого тела и полупроводников НАН Беларуси, Минск

## THE OPTICAL PROPERTIES OF THIN FILMS OF SOLID SOLUTIONS $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ , OBTAINED BY A TWO-STAGE SELENIZATION

I.N. Tsyrelchuk<sup>1</sup>, V.V. Khoroshko<sup>1</sup>, V.F. Gremenok<sup>2</sup>, V.A. Mishuto<sup>1</sup><sup>1</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk<sup>2</sup>Institute of Solid State and Semiconductor Physics of NAS Belarus, Minsk

В работе рассматриваются результаты исследований в температурном интервале 80 и 300 К спектров оптического поглощения и фотолюминесценции тонких пленок  $\text{Zn}_{2-2x}\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Se}_2$  с концентрацией атомов цинка 0–10 ат.%. Поликристаллические пленки *p*-типа проводимости получены на стеклянных подложках методом двухстадийной селенизации базовых слоев  $\text{ZnSe}/(\text{Cu}+\text{In})$  в атмосфере инертного газа. Установлен характер зависимости ширины запрещенной зоны и спектров фотолюминесценции от концентрации атомов цинка.

**Ключевые слова:** тонкие пленки, двухстадийная селенизация, коэффициент поглощения, фотолюминесценция, ширина запрещенной зоны.

This paper discusses the results of studies in the temperature range of 80 and 300 K absorption spectra and photoluminescence spectra of thin films of  $\text{Zn}_{2-2x}\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Se}_2$  with the concentration of zinc atoms 0–10 at.%. Polycrystalline films of *p*-type conductivity were obtained on glass substrates by a two-stage selenization base layers  $\text{ZnSe}/(\text{Cu} + \text{In})$  under an inert atmosphere. The authors established the character of the width of the band gap and photoluminescence spectra of the concentration of zinc atoms.

**Keywords:** thin film, two-stage selenization, absorption coefficient, photoluminescence, band gap.

### Введение

Прогресс современной полупроводниковой электроники во многом определяется как соответствующим выбором исходных материалов для изготовления приборов, так и технологическими методами их получения. И если в начальный период становления полупроводникового приборостроения в качестве исходных материалов использовались, в основном, элементарные полупроводники (Ge, Si) и бинарные соединения (GaAs и др.), то в настоящее время внимание исследователей привлекают новые химические соединения и твердые растворы со свойствами полупроводников. Это обусловлено возможностью изменять их физические свойства (а значит, функциональный диапазон и характеристики получаемых приборов) в широких пределах за счет управления атомным составом веществ. Так, например, использование тройных  $\text{A}^{\text{IV}}\text{B}^{\text{III}}\text{C}^{\text{VI}}$  и более сложных фаз с халькопиритной структурой уже позволило получить тонкопленочные солнечные элементы (СЭ) на основе  $\text{Cu}(\text{In},\text{Ga})\text{Se}_2$  (CIGS) с рекордной эффективностью до 21 % [1]. Дальнейшее улучшение характеристик таких фотопреобразователей лежит на пути исследований взаимосвязи технологических процессов со

свойствами конкретных типов структур, а также освоения новых систем на основе  $\text{A}^{\text{IV}}\text{B}^{\text{III}}\text{C}^{\text{VI}}$  полупроводников. В рамках этих исследований твердые растворы на основе тройных и  $\text{A}^{\text{IV}}\text{B}^{\text{VI}}$  (ZnSe, ZnS, ZnTe) соединений в последнее время привлекают внимание разработчиков приборов на их основе [2]–[5]. Полупроводники этой группы являются прямозонными материалами, имеют наибольший для известных полупроводников коэффициент оптического поглощения (до  $10^5 \text{ см}^{-1}$ ) и обнаруживают повышенную радиационную стойкость. Кроме того, использование цинка позволяет заменить такие дорогостоящие материалы, как индий и галлий.

Вместе с тем широкому практическому применению этих материалов на сегодняшний день препятствует ряд факторов, одним из которых являются технологические трудности получения структурно-совершенных пленок этих соединений, а также неполная, а иногда и противоречивая информация об их физических свойствах. В последнее время приоритетным направлением в области получения пленок  $\text{A}^{\text{IV}}\text{B}^{\text{III}}\text{C}^{\text{VI}}$  соединений является использование двухступенчатого технологического цикла: напыление металлов или их бинарных халькогенидов (прекурсоры) с последующей их

селенизацией [6]–[8]. Перспективность такого подхода обусловлена возможностью получения плёнок большой площади с контролируемым составом посредством хорошо развитых методов как на первой стадии напыления, так и на второй – реакции с галогеном.

Целью настоящей работы являлось исследование влияния концентрации атомов цинка ( $N_{Zn} = 0–10$  ат.%) и температуры на спектры оптического поглощения и фотолюминесценции тонких плёнок  $Zn_{2-2x}Cu_xIn_xSe_2$ .

### 1 Методика эксперимента

Для получения поликристаллических плёнок  $Zn_{2-2x}Cu_xIn_xSe_2$  применялся метод двухстадийной селенизации, особенностью которого является то, что процесс синтеза протекает в атмосфере одного из наиболее летучих компонент, образующих выбранную систему, тогда как остальные компоненты наносятся в виде тонких плёнок на твердый носитель, в качестве которого применяются стеклянные пластины. При повышении температуры компоненты плёнок вступают в реакцию между собой и сосуществующей паровой фазой и образуют гомогенную плёнку требуемого состава. В качестве паровой фазы использовался селен и поэтому в целом такой процесс получил название селенизация [9].

Базовые слои были нанесены термическим испарением в вакууме на стеклянные подложки. Температура подложек составляла  $100–120$  °С. Селенизация  $ZnSe/(Cu+In)$  слоев осуществлялась путем диффузии элементарного селена из твердотельного источника Se в проточной атмосфере инертного газа  $N_2$ . Первая стадия селенизации осуществлялась при температуре  $240–270$  °С в течение 10–30 минут, вторая стадия – при температуре  $460–540$  °С в течение 10–50 минут. Структурные свойства и фазовый состав слоев до и после селенизации исследовались методом рентгеновского фазового анализа (РФА) в области  $2\theta = 15 \div 100$  ° на  $CuK_\alpha$  излучении ( $\lambda = 1.5405$  Å) с

никелевым фильтром. Идентификация фаз в плёнках проводилась сравнением экспериментально установленных межплоскостных расстояний  $d$  с данными таблиц JCPDS. Все полученные плёнки были  $p$ -типа проводимости. Толщина плёнок составляла  $1.0–1.5$  мкм. Спектры оптического поглощения и фотолюминесценции регистрировались призмным спектрометром при температурах 80 К и 300 К. Исследование оптического поглощения при  $T = 80$  К проводилось при погружении образцов в жидкий азот. При исследовании фотолюминесценции образцы прижимались в вакуумной камере к медному хладопроводу, который охлаждался жидким азотом до температуры 80 К.

Излучательные свойства плёнок исследовались методом фотолюминесценции (ФЛ) в температурном интервале  $80–300$  К. Исследования проводились на установке, описанной в [11]. ФЛ возбуждалась излучением  $Ag^+$ -лазера ( $\lambda = 514.5$  нм) при мощности возбуждения  $10–50$  мВт. Исследуемые образцы прижимались диафрагмой к охлаждаемому жидким азотом медному хладопроводу в вакуумной камере. Спектры фотолюминесценции регистрировались призмным спектрометром. В качестве приемника излучения применялся охлаждаемый жидким азотом германиевый ( $p-i-n$ )-фотодиод. Для построения графических зависимостей был применен метод аппроксимации полиномом второй степени.

### 2 Результаты и их обсуждение

Рентгеновские исследования показали, что при оптимальных условиях ( $T_s = 510–540$  °С и времени селенизации 10–15 мин) формируется однофазное четверное соединение  $Zn_{2-2x}Cu_xIn_xSe_2$  без следов ZnSe или других фаз (рисунок 2.1). Кристаллическая структура соединения относится к упорядоченной структуре халькопирита, что следует из наличия типичных рефлексов 112, 220/204, 116/312, 316/332 и рефлексов сверхрешетки халькопирита 101 и 103.

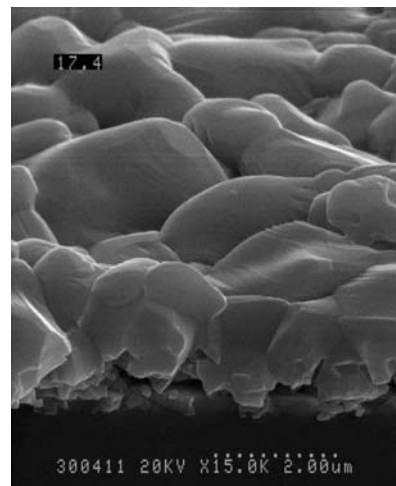
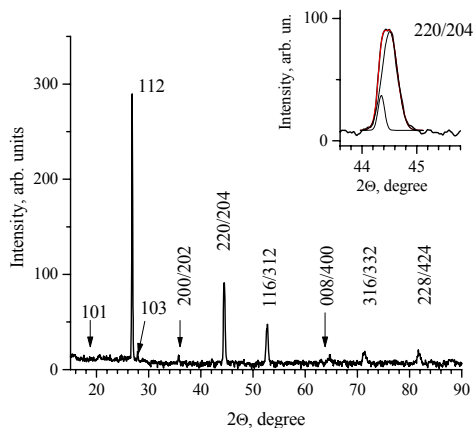


Рисунок 2.1 – Рентгенограмма и микрофотография скола плёнок ZCIS

Данные количественного анализа показали, что пленки были слегка обогащены индием. Микроструктура слоев состояла из плотноупакованных зерен с размерами 1–2 мкм с направлением роста кристаллитов перпендикулярно плоскости подложки (рисунок 2.1).

На рисунке 2.2 приведены типичные зависимости коэффициента поглощения пленок ZCIS при температурах 80 К и 300 К.

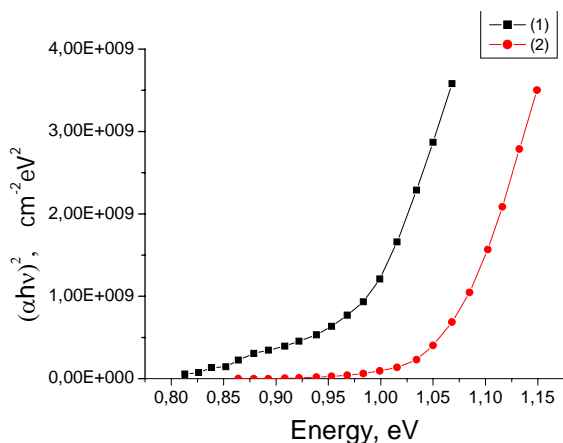


Рисунок 2.2 – Спектральные зависимости коэффициента поглощения для пленок с концентрацией атомов цинка 6.28 ат.% при температурах: 1 – 300 К, 2 – 80 К

Из приведенной зависимости видно, что с уменьшением температуры фундаментальный край поглощения сдвигается в коротковолновую область спектра. Такой характер зависимости сдвига края поглощения типичен для большинства полупроводников [12]. Коэффициент оптического поглощения  $\alpha$  рассчитывался по формуле, учитывающей многократное внутреннее отражение в плоскопараллельном образце:

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \left( \frac{(1-R)^2}{2T} + \sqrt{\left( \frac{(1-R)^2}{2T} \right)^2 + R^2} \right),$$

где  $d$  – толщина пленки,  $T$  – коэффициент пропускания,  $R$  – коэффициент отражения. Коэффициент отражения принимался  $R = 0.25$  во всем спектральном диапазоне, что является типичным для пленок полупроводников с халькопиритной структурой [10]. Ширина запрещенной зоны исследуемых пленок  $E_g$  определялась экстраполяцией прямолинейного участка зависимости  $(\alpha h\nu)^2$  от энергии фотона  $(h\nu)$  до пересечения с осью абсцисс. Согласно рассчитанным значениям  $E_g$  была определена температурная скорость изменения ширины запрещенной зоны  $dE_g/dT = 3.7 \times 10^{-4}$  эВ/К.

Спектры фотолюминесценции пленок состояли из одной широкой полосы. На рисунке 2.3 приведены спектры фотолюминесценции пленок при разных температурах. Из рисунка видно, что

с уменьшением температуры спектральный максимум полосы излучения незначительно смещается в длинноволновую область спектра. Полная ширина спектра на полувысоте изменяется в сторону уменьшения с 115 мэВ при 300 К до 85 мэВ при 80 К. Такая зависимость спектра излучения характерна для оптических излучательных переходов с участием примесных уровней. В нашем случае роль примеси играют собственные дефекты. Так как все исследованные пленки имели  $p$ -тип проводимости, то превалирующими в пленках являются акцепторные уровни и ответственными за излучательные переходы вероятно являются переходы зона проводимости – акцепторный уровень.

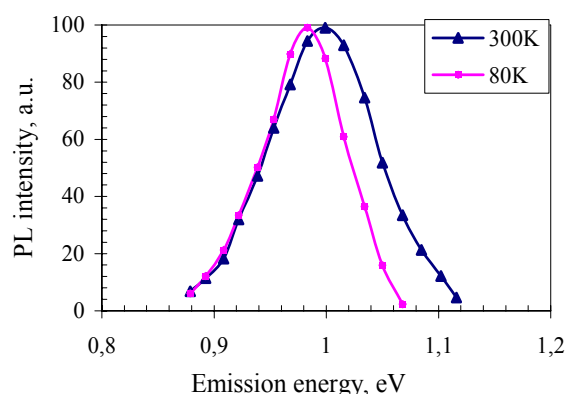


Рисунок 2.3 – Спектры фотолюминесценции пленок с концентрацией атомов цинка 6.28 ат.% при различных температурах

На рисунке 2.4 показаны зависимости величины ширины запрещенной зоны и энергетического положения максимума интенсивности спектральной полосы фотолюминесценции при  $T = 80$  К от концентрации атомов цинка.

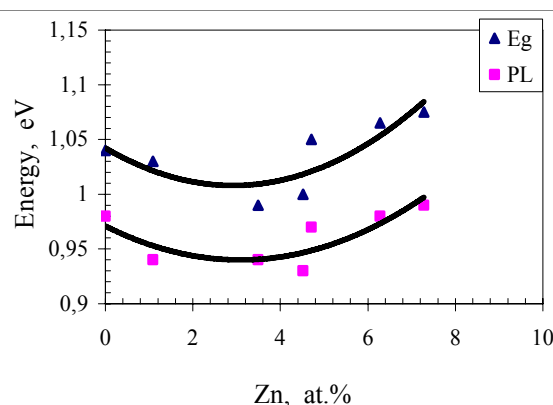


Рисунок 2.4 – Зависимости ширины запрещенной зоны ( $E_g$ ) и энергетического положения максимума полосы фотолюминесценции ( $PL$ ) в пленках  $\text{Zn}_{2-2x}\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Se}_2$  при  $T = 80$  К от концентрации атомов цинка

С повышением концентрации атомов цинка величина запрещенной зоны сначала монотонно уменьшается и достигает минимальных значений при концентрации атомов цинка порядка 3–4 ат.%. При дальнейшем повышении концентрации атомов цинка ширина запрещенной зоны начинает увеличиваться. Аналогичная тенденция наблюдается и в приведенной на этом рисунке зависимости энергетического положения максимумов спектральных полос фотолюминесценции от концентрации атомов цинка. Следует отметить, что аналогичные зависимости ширины запрещенной зоны и максимумов спектральных полос излучения от концентрации атомов цинка сохраняются и при температуре  $T = 300$  К.

Из рисунка 2.4 видно, что разность между величинами  $E_g$  и энергиями максимумов полос фотолюминесценции составляет порядка 70–75 мэВ. Такую величину имеют, в частности, энергии активации собственных дефектов, вакансии меди ( $V_{Cu}$ ), в медьсодержащих соединениях халькопиритной структуры [13]. Так как исследованные нами пленки имели избыток индия, то естественно предположить, что ответственными за излучательные переходы являются переходы зона проводимости –  $V_{Cu}$ . Уменьшение ширины запрещенной зоны при росте концентрации атомов цинка до 3–4 ат.% можно объяснить тем, что при небольших концентрациях атомов цинка они играют для пленки  $CuInSe_2$  роль легирующей примеси с небольшой энергией ионизации. Взаимодействие примесных атомов между собой, неоднородность их распределения в пленке, наличие локальных деформаций обуславливают возникновение уровней у краев запрещенной зоны, что приводит к длинноволновым «хвостам» поглощения. Вследствие этого происходит сужение запрещенной зоны, обусловленное обменным и кулоновским взаимодействием носителей [14]. При повышении концентрации атомов цинка свыше 4 ат.% они начинают замещать атомы меди и индия в узлах кристаллической решетки, т. е. начинают образовываться твердые растворы  $Zn_{2-2x}Cu_xIn_xSe_2$ , ширина запрещенной зоны которых увеличивается.

#### Заключение

Методом двухстадийной селенизации на стеклянных подложках получены поликристаллические пленки  $Zn_{2-2x}Cu_xIn_xSe_2$   $p$ -типа проводимости с концентрацией атомов цинка 0–10 ат.%. Исследованы спектры оптического пропускания и фотолюминесценции при комнатной температуре и температуре жидкого азота. При уменьшении температуры ширина запрещенной зоны увеличивается со скоростью  $dE_g/dT = 3.7 \times 10^{-4}$  эВ/К. Спектры фотолюминесценции при  $T = 300$  К и 80 К имели вид одной спектральной полосы, обусловленной собственными дефектами типа вакансии меди. Установлено, что ширина запре-

щенной зоны пленок и энергетического положения максимумов спектральных полос фотолюминесценции при увеличении концентрации атомов цинка изменяется нелинейно и имеет минимальное значение при концентрациях 3–4 ат.%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *A 21.5 % Efficient Cu(In,Ga)Se<sub>2</sub> Thin-Film Concentrator Solar Cell* / J.S. Ward [et. al.] // Prog. Photovolt. Res. Appl. – 2002. – Vol. 10. – P. 41–46.
2. *Photosensitivity of Thin-Film Structures Based on (CuInSe<sub>2</sub>)<sub>x</sub>(2ZnSe)<sub>1-x</sub> Solid Solutions* / V.Yu. Rud' [et. al.] // Semiconductors. – 2000. – Vol. 34, № 5. – P. 558–562.
3. *Formation and Investigation of Photosensitive Structures Based on Laser-Deposited CuInSe<sub>2</sub>–2ZnSe Films* / V.Yu. Rud' [et. al.] // Phys. Stat. Sol (a). – 2001. – Vol. 188, № 3. – P. 1077–1085.
4. *Preparation of Zn doped Cu(In,Ga)Se<sub>2</sub> thin films by physical vapor deposition for solar cells* / S. Nishiwaki [et. al.] // Solar Energy Materials & Solar Cells. – 2003. – Vol. 77. – P. 359–368.
5. *Lattice Parameters and Optical Energy Gap of Pure and Doped (CuInSe<sub>2</sub>)<sub>x</sub>(ZnSe)<sub>1-x</sub>* / C.A. Durante [et. al.] // Cryst. Res. Technol. – 1996. – Vol. 31. – Special Issue 2. – P. 241–246.
6. *Фотозлектрические свойства поверхностно барьерных структур на основе пленок Zn<sub>2-2x</sub>Cu<sub>x</sub>In<sub>x</sub>Se<sub>2</sub>, полученных селенизацией* / В.Ю. Рудь [и др.] // Физика и Техника Полупроводников. – 2005. – Т. 39, вып. 9. – С. 1070–1074.
7. *Kazmerski, L.L. Photovoltaics: a review of cell and module technologies* / L.L. Kazmerski // Renewable and sustainable energy reviews. – 1997. – Vol. 1, № 1, 2. – P. 71–170.
8. *Rau, U. Properties of Cu(In,Ga)Se<sub>2</sub> heterojunction solar cells – recent achievements, current understanding, and future challenges* / U. Rau, H.W. Schock // Appl. Phys. A. – 1999. – Vol. 69, № 131–147. – P. 32–147.
9. *Rau, U. Cu(In,Ga)Se<sub>2</sub> Solar Cells* / U. Rau, H.W. Schock // Series of Photoconversion of Solar Energy. – 2001. – Vol. 1. – P. 277–345.
10. *Коутса, Т.М. Современные проблемы полупроводниковой фотоэнергетики* / под ред. Т.М. Коутса. – Мир, 1988. – 306 с.
11. *Иванов, В.А. Установка для возбуждения катодолюминесценции полупроводников* / В.А. Иванов, Н.Н. Корень // ПТЭ. – 1981. – № 6. – С. 161–163.
12. *Панков, Ж. Оптические процессы в полупроводниках* / Ж. Панков. – М.: Мир, 1973, 455 с.
13. *Rogacheva, E.I. Nonstoichiometry in the I-III-VI<sub>2</sub> compounds* / E.I. Rogacheva // Inst. Phys. Conf. Ser. № 152. – 1998. – P. 1–14.
14. *Грибковский, В.П. Теория поглощения и испускания света в полупроводниках* / В.П. Грибковский. – Мн.: Наука и техника, 1975. – 464 с.

Поступила в редакцию 01.11.12.

УДК 678.743.41:620.197:621.793

**ВЛИЯНИЕ АССИСТИРУЮЩЕГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ  
ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОМ ДИСПЕРГИРОВАНИИ  
НА МОЛЕКУЛЯРНУЮ СТРУКТУРУ ФОРМИРУЕМЫХ  
НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ ПОЛИЭТИЛЕН-СЕРЕБРО**

**Чжубо Лю<sup>1</sup>, А.А. Рогачев<sup>1</sup>, М.А. Ярмоленко<sup>1</sup>,  
Х.Н. Джанг<sup>2</sup>, А.В. Рогачев<sup>1</sup>, Д.Л. Горбачев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Нанкинский университет науки и технологии, Нанкин, КНР

**INFLUENCE OF ASSISTING LASER RADIATION  
AT ELECTRON-BEAM DISPERSION ON THE MOLECULAR STRUCTURE  
OF POLYETHYLENE-SILVER NANOCOMPOSITE COATINGS**

**Zhubo Liu<sup>1</sup>, A.A. Rogachev<sup>1</sup>, M.A. Yarmolenko<sup>1</sup>,  
X.H. Jiang<sup>2</sup>, A.V. Rogachev<sup>1</sup>, D.L. Gorbachev<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, PR China

Методом осаждения из активной газовой фазы, образованной электронно-лучевым диспергированием полиэтилена и нитрида серебра, сформированы нанокomпозиционные покрытия на основе полиэтилена и серебра, изучены их молекулярная структура и морфология. Определено влияние лазерного ассистирования при электронно-лучевом диспергировании и отжига покрытия на степень проявления плазмонного эффекта, химический состав и структуру слоев. Установлено, что при лазерном ассистировании наночастицы металла, образовавшиеся на стадии диспергирования, оказывают активное автокаталитическое влияние на процессы разложения соли. Нагрев покрытия приводит к формированию однородной структуры с меньшей высотой выступов.

**Ключевые слова:** электронно-лучевое диспергирование, лазерное ассистирование, нанокomпозиционное покрытие, полиэтилен, наночастицы серебра, термообработка.

The paper deals with the study of the molecular structure and morphology of polyethylene-silver nanocomposite coatings. Polyethylene-silver nanocomposite coatings were prepared from active gas phase by electron-beam dispersion of polyethylene and silver nitride. The influences of laser assisted electron-beam dispersion and annealing on the formation degree of plasmon effect, the chemical composition and structure of the layer were determined. The results show that metal nanoparticles could be produced by laser assisting at the dispersion stage affecting the autocatalytic process of decomposition of the salt. Annealing leads to a more homogeneous structure with a smaller protuberance on the surface of the coatings.

**Keywords:** electron-beam dispersion, laser assistant, nanocomposite coating, polyethylene, silver nanoparticles, heat treatment.

**Введение**

Известно, что серебро является металлом, обладающим явно выраженными антибактериальными свойствами. При низкой концентрации серебро не токсично и при этом снижает активность бактерий [1], [2]. Серебро, его химические соединения используются в качестве бактерицидных препаратов для лечения ожогов и подавления глазных инфекций, вводится в состав стоматологических и полимерных упаковочных материалов [3]–[5].

Антибактериальные свойства серебра зависят от размера частиц, их концентрации [6] и объясняются воздействием на среду ионов  $\text{Ag}^+$ , образующихся при контакте среды с металлом. При этом массивное состояние серебра ( $\text{Ag}^0$ ) является инертным. В работах [4], [7], [8] изучили поведение нано- и микрочастиц серебра в полимерном покрытии, особенности проявления

в такой системе антибактериального эффекта. Установлено, что скорость выхода ионов серебра в полимерном покрытии более медленная в сравнении с выходом ионов, например, в жидкую среду. При этом проявляется заметное влияние на эти процессы природы полимерной матрицы.

Отметим, что, несмотря на большой научный и практический интерес, исследования поведения наночастиц серебра в полиэтиленовом слое, особенностей структурного состояния полимерной матрицы отсутствуют. Это объясняется, прежде всего, трудностями формирования нанокomпозиционных систем на основе полиэтилена; растворные методы не применимы из-за высокой стойкости полимера к действию органических растворителей, а введение наночастиц в расплав не обеспечивает формирование однородных тонких слоев. Вместе с тем, как показано в [9], формирование таких покрытий возможно

при использовании плазмохимического синтеза, включающего в качестве основных стадий электронно-лучевое диспергирование полимера, перевод в газовую фазу вещества-наполнителя и осаждение образовавшихся паров на поверхности подложки. Установлено, что структура и свойства покрытий, осажденных из активной газовой фазы, наряду с другими параметрами в значительной степени зависят от условий и режимов диспергирования. В частности, лазерное ассистирование процесса электронно-лучевого диспергирования оказывает влияние на молекулярную структуру и морфологию покрытия и его использование расширяет технологические возможности синтеза слоев с заданными свойствами [10].

Целью настоящей работы является изучение молекулярной структуры, морфологии композиционных покрытий на основе полиэтилена и серебра, формируемых из активной газовой фазы, генерируемой электронно-лучевым диспергированием, установление закономерностей влияния на процессы осаждения лазерного ассистирующего воздействия, термообработки сформированных слоев.

### 1 Методика эксперимента

Покрытия осаждали из активной газовой фазы, генерируемой в процессе воздействия на однокомпонентный порошок или механическую смесь порошков потока электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см<sup>2</sup> по методике, приведенной в [10]. В качестве материала диспергируемой мишени использовали порошки серебра азотнокислого (AgNO<sub>3</sub>, ГОСТ 1277–75), полиэтилена (ПЭ), механические смеси полимера и соли в массовом соотношении 1 : 1 и 1 : 2. Эффективную толщину покрытий определяли с помощью кварцевого измерителя толщины. Расстояние от электронной пушки до мишени составляло 150 мм, а от мишени до подложки – 120 мм. Процесс осаждения покрытий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере  $\approx 4 \cdot 10^{-3}$  Па. В качестве источника лазерного излучения был выбран лазер L-2137U+HG-5, генерирующий излучение с длиной волны  $\lambda = 266$  нм. Длительность импульса накачки в режиме модулированной добротности составляла 6 нс. Энергия лазерного импульса в системе генератор-усилитель – 117 мДж. Диаметр пятна лазерного излучения – 7 мм. При осаждении покрытий в условиях лазерного ассистирующего воздействия использовали мишени диаметром, соответствующим пятну лазерного излучения. Термообработку сформированных слоев проводили на воздухе в печи при температуре 100 или 200°C, длительность отжига – 30 минут.

Подложками при осаждении слоев служили кварцевые пластины (при проведении спектроскопических измерений в видимой области), пленки металлизированного лавсана и пластины

NaCl (при регистрации ИК-спектра, проведении отжига), пластины монокристалла кремния (при проведении микроскопических исследований).

Спектроскопические исследования осуществляли с помощью УФ-Вид спектрофотометра Cary-50 (Varian) и ИК-Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker). Для исследования морфологии покрытия использовался сканирующий зондовый микроскоп Solver P47 PRO, в котором реализована схема сканирования образцом.

### 2 Результаты и их обсуждение

Приведенные на рисунках 2.1 и 2.2 ИК-спектры покрытий AgNO<sub>3</sub> и композиционных покрытий на основе AgNO<sub>3</sub> и ПЭ, сформированных при отсутствии и в условиях лазерного ассистирования, свидетельствуют о заметном влиянии условий диспергирования на молекулярную структуру.

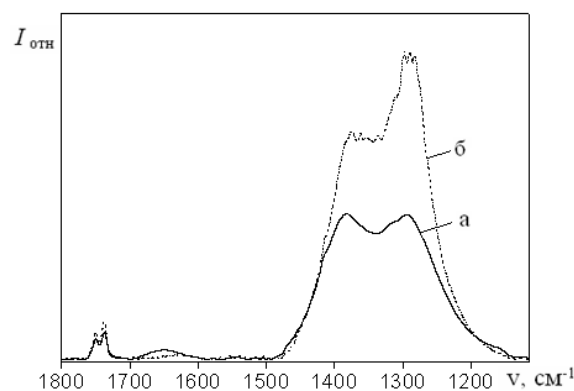


Рисунок 2.1 – ИК-спектр покрытий AgNO<sub>3</sub>, сформированных при отсутствии (а) и в условиях лазерного ассистирования (б)

Как видно, ИК-спектр покрытий (рисунок 2.1), полученных диспергированием соли AgNO<sub>3</sub>, характеризуется наличием интенсивной двойной полосы поглощения в частотной области 1200...1500 см<sup>-1</sup>. Поглощение в указанной области, помимо всего прочего, связывают с присутствием ионов NO<sub>3</sub><sup>-</sup> и NO<sub>2</sub><sup>-</sup> [11]–[13]. В ИК-спектре композиционных покрытий AgNO<sub>3</sub> и ПЭ (рисунок 2.2) присутствуют полосы поглощения, характерные для ПЭ. В частности, интенсивные полосы поглощения, расположенные вблизи 1464 см<sup>-1</sup> и ответственные за колебания С-Н связей группы –CH<sub>2</sub>–; малоинтенсивные полосы поглощения вблизи 1378 см<sup>-1</sup>, обязанные деформационным колебаниям связей С-Н групп CH<sub>3</sub> [14]. В спектрах покрытий, полученных при диспергировании серебросодержащей смеси, наблюдаются полосы поглощения соли металла, которые в сравнении с полосами однокомпонентного покрытия AgNO<sub>3</sub> смещаются в длинноволновую область вследствие влияния полиэтиленовой матрицы на колебания молекул AgNO<sub>3</sub> [15]. Интенсивность пиков поглощения, характерных для

соли металла и полиэтилена, возрастает при проведении диспергирования в условиях лазерного воздействия, что объясняется формированием при этих режимах более толстых слоев.

Определены особенности изменения молекулярной структуры покрытий при их термообработке. Сравнительный анализ приведенных на рисунке 2.2 спектров композиционных покрытий на основе  $\text{AgNO}_3$  и ПЭ, сформированных при отсутствии и в условиях лазерного ассистирования и подвергнутых термообработке при  $100^\circ\text{C}$

или  $200^\circ\text{C}$  в течение 30 мин, показывает, что при отжиге возрастает интенсивность пиков поглощения вблизи  $1700\text{ см}^{-1}$ , связанных с валентным колебанием карбонильных групп [13]. Изменение интенсивности полос наблюдается и в области  $1200\text{--}1500\text{ см}^{-1}$ , характерных для однокомпонентных покрытий  $\text{AgNO}_3$ , что указывает на разложение нитрата серебра. Отметим, что влияние лазерного излучения при диспергировании в меньшей степени сказывается на химическом составе покрытий, подвергнутых термообработке.

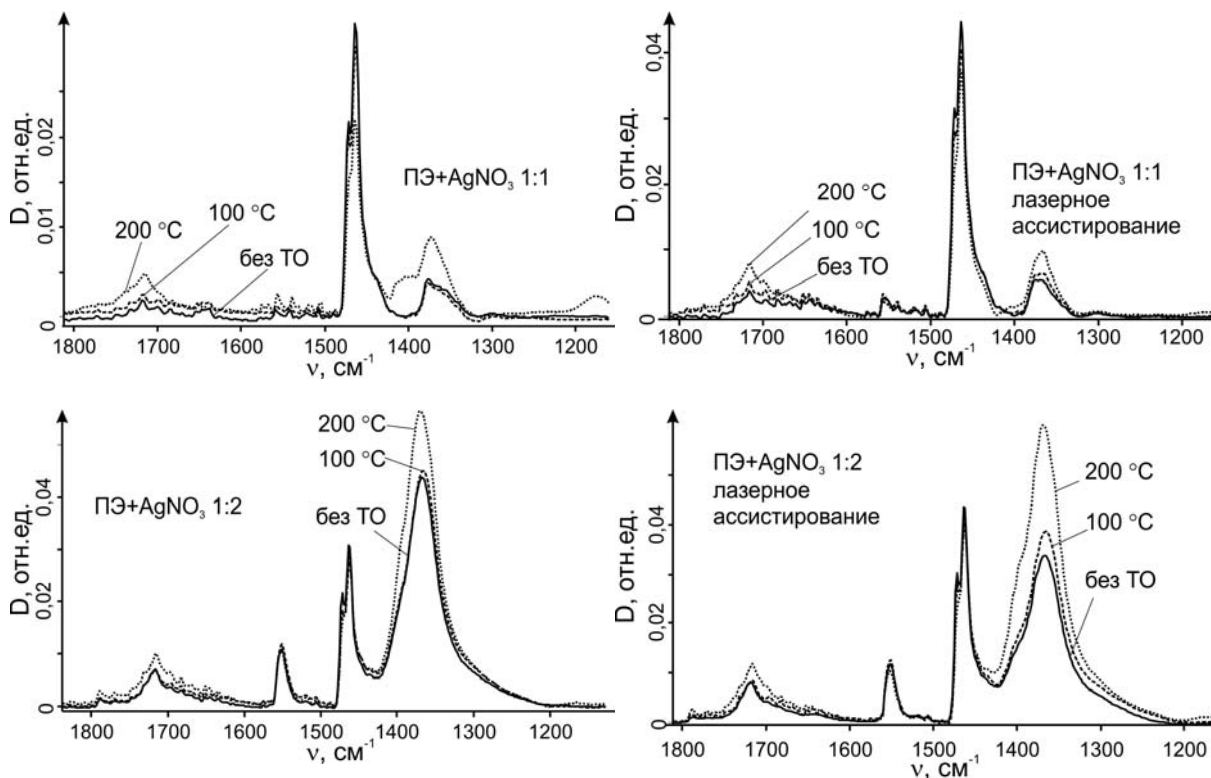


Рисунок 2.2 – ИК-спектр композиционных покрытий  $\text{AgNO}_3$  и ПЭ, сформированных при отсутствии и в условиях лазерного ассистирования и подвергнутых отжигу при различных режимах

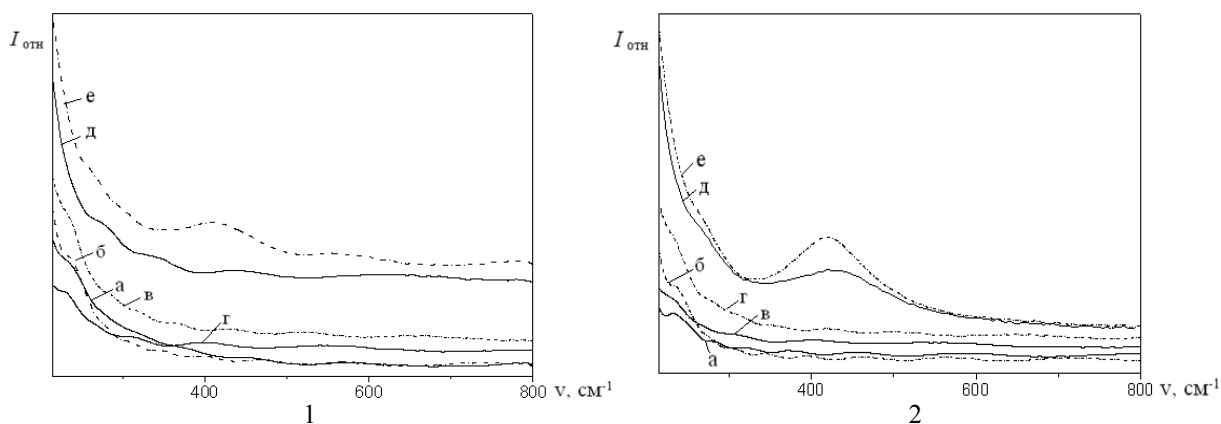


Рисунок 2.3 – Электронные спектры покрытий ПЭ (а, б) и композиционных покрытий  $\text{AgNO}_3$  и ПЭ (соотношение компонент  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 1 : 1 (в, г), 2 : 1 (д, е)), сформированных при отсутствии (а, в, д) и в условиях лазерного ассистирования (б, г, е); 1 – без термообработки; 2 – отжиг при  $100^\circ\text{C}$

Электронные спектры покрытий ПЭ и композиционных покрытий на основе  $\text{AgNO}_3$  и ПЭ, сформированных при отсутствии и в условиях лазерного ассистирования, представленные на рисунке 2.4, также имеют свои особенности. Покрытия ПЭ и композиционные покрытия при соотношении компонент в тигле 1 : 1 содержат в спектре характерные для полиэтилена полосы поглощения с  $\lambda = 231$  нм (рисунок 2.3). В электронном спектре покрытия, сформированного при соотношении  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 2 : 1 без лазерного стимулирования, отсутствует пик плазменного поглощения, а в спектре покрытия, сформированного в условиях лазерного ассистирующего воздействия, наблюдается пик плазменного поглощения с максимумом при длине волны  $\lambda = 410$  нм, что указывает на образование в слое наночастиц серебра. После термообработки покрытия при  $100^\circ\text{C}$  в течение 30 мин в спектре покрытия (рисунок 2.3), сформированного при соотношении  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 2 : 1 в условиях лазерного стимулирования и без него, также появляется пик плазменного поглощения. Известно, что нитрат серебра разлагается при температуре выше  $300^\circ\text{C}$ , температура его плавления –  $209,6^\circ\text{C}$  [14]. В этой связи появление пика поглощения при температуре отжига  $100^\circ\text{C}$  для покрытия, сформированного при соотношении  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 2 : 1 без лазерного стимулирования, показывает, что процесс образования частиц серебра является в определенной степени автокаталитическим; на его протекание оказывают влияние серебряные нанокластеры, образовавшиеся в результате диссоциации соединений на стадии электронно-лучевого диспергирования.

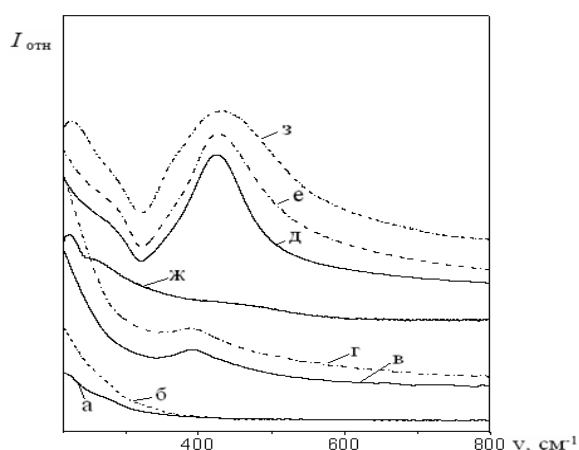


Рисунок 2.4 – Электронные спектры покрытий ПЭ (а, б) и композиционных покрытий на основе  $\text{AgNO}_3$  и ПЭ (соотношение компонент  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 1 : 1 (в, г), 2 : 1 (д, е)), покрытий  $\text{AgNO}_3$  (ж, з), сформированных при отсутствии (а, в, д и ж) и в условиях лазерного ассистирования (б, г, е и з) после термообработки при  $200^\circ\text{C}$  в течение 30 мин

Термообработка композиционных покрытий интенсифицирует проявление плазменного эффекта. Из представленных на рисунке 2.4 электронных спектров покрытий, подвергнутых термообработке при  $200^\circ\text{C}$ , следует, что малоинтенсивные пики плазменного поглощения появляются в области длин волн 380 нм при диспергировании смеси с соотношением  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 1 : 1. При этом лазерное стимулирование не оказывает заметного влияния на образование наночастиц серебра. Данный вывод согласуется и с результатами анализа ИК-спектров покрытий, представленных на рисунке 2.2.

Для композиционных покрытий, сформированных при диспергировании смеси с соотношением  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 2 : 1, интенсивное плазменное поглощение появляется вблизи 410 нм. В сравнении с покрытием, сформированным в результате диспергирования нитрата серебра в условиях лазерного ассистирующего воздействия, пик плазменного поглощения для композиционного полимерного покрытия является более узким, что указывает на высокую монодисперсность образующихся наночастиц [15].

Условия диспергирования, состав мишени оказывают заметное влияние и на морфологию образующихся слоев. Из рисунка 2.5 видно, что на поверхности покрытия ПЭ, сформированного электронно-лучевым диспергированием при отсутствии лазерного ассистирующего воздействия, образуются сфероподобные частицы высотой 40...150 нм. Лазерное стимулирование процесса диспергирования при осаждении покрытия ПЭ не приводит к заметному изменению морфологии покрытия. С введением  $\text{AgNO}_3$  в матрицу ПЭ морфология покрытий характеризуется значительно меньшей шероховатостью (30...90 нм). Применение в этом случае лазерного стимулирования при диспергировании вызывает формирование на поверхности более монодисперсных образований. Отметим, что термообработка покрытия при температуре  $200^\circ\text{C}$ , как правило, смещает максимум распределения микровыступов в область меньших значений и способствует формированию более однородной структуры.

### Выводы

Определены особенности влияния условий диспергирования и термообработки покрытий, осажденных методом электронно-лучевого диспергирования смеси полиэтилена и нитрида серебра, на их молекулярную структуру и морфологию. Показано, что при формировании покрытий в условиях лазерного ассистирования электронно-лучевого диспергирования более активно протекают процессы образования наночастиц серебра, которые при последующем отжиге оказывают автокаталитическое влияние на процессы разложения соли. Структура поверхностного слоя



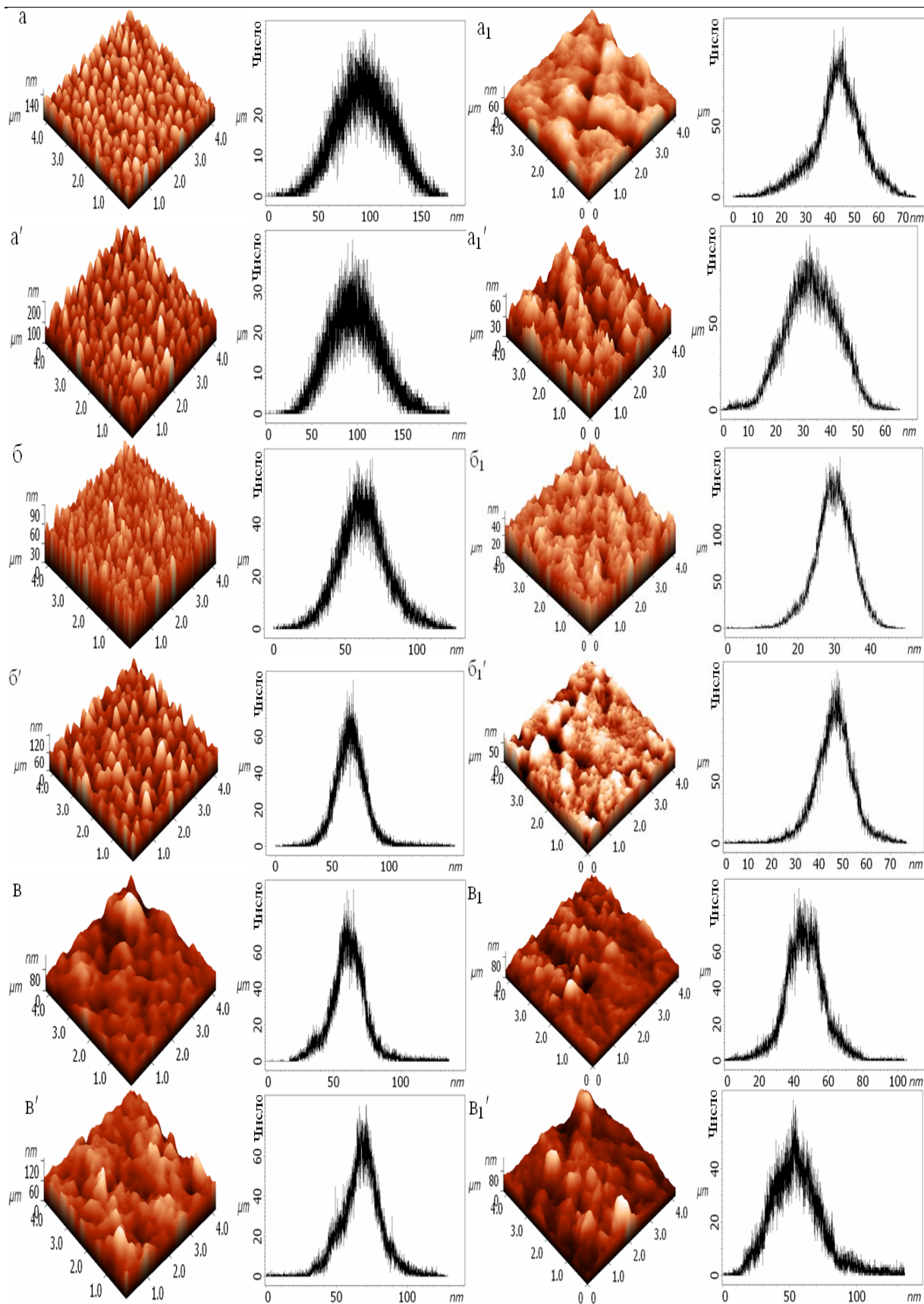


Рисунок 2.5 – АСМ-изображения поверхности и распределения по высоте элементов рельефа покрытий ПЭ (а) и композиционных покрытий  $\text{AgNO}_3$  и ПЭ (соотношение компонент  $\text{AgNO}_3$ : ПЭ = 1 : 1 (б) и 2 : 1 (в)), сформированных электронно-лучевым диспергированием: ' – в условиях лазерного ассистирования; <sub>1</sub> – после термообработки 200°C

синтезируемых покрытий характеризуется шероховатостью с высотой микровыступов 40...100 нм, практически не зависящей от условий генерации активной газовой фазы. Термообработка приводит к формированию более однородной структуры с меньшей высотой выступов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Silver supported on natural Mexican zeolite as an antibacterial material* / R.M. Garza [et al.] // *Micropor. Mesopor. Mater.* – 2000. – Vol. 39. – P. 431–444.

2. *Antibacterial effect of silver–zeolite on oral bacteria under anaerobic conditions* / K. Kawahara [et al.] // *Dent. Mater.* – 2000. – Vol. 16. – P. 452–455.

3. *Mode of action of silver zeolite and its comparison with that of silver nitrate* / Y. Matsu-mura [et al.] // *Appl. Microbiol.* – 2003. – Vol. 69. – P. 4278–4281.

4. *Characterization of pure and silver ex-changed natural zeolite filled polypropylene composite films* / H. Pehlivan [et al.] // *Compos. Sci. Technol.* – 2005. – Vol. 65. – P. 2049–2058.

5. *Antimicrobial polymers from polypropylene/silver composites – Ag<sup>+</sup> release measured by anode stripping voltammetry* / C. Radheshukumar [et al.] // *React. Funct. Polym.* – 2006. – Vol. 66. – P. 780–788.

6. *Плазмохимический синтез нанокмпозиционных биосовместимых покрытий, обладающих антибактериальным пролонгированным действием* / М.А. Ярмоленко [и др.] // *Научно-технические технологии.* – 2011. – Т. 12, № 35. – С. 26–34.

7. *Preparation and characterization of antibacterial zeolite–polyurethane composites* / K. Kamiso-glu [et al.] // *J. Appl. Pol. Sci.* – 2008. – Vol. 110. – P. 2854–2861.

8. *PVC silver zeolite composites with antimicrobial properties* / D. Zampino [et al.] // *J. Mater. Sci.* – 2011. – Vol. 46. – P. 6734–6743.

9. *Рогачев А.В. Плазмохимический синтез нанокмпозиционных плазмонных покрытий* / А.В. Рогачев [и др.] // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.* – 2001. – № 6 (69). – С. 110–117.

10. *A preparation of polyethylene coatings by pulse laser-assisted electron beam deposition* / Zhubo Liu [et al.] // *Progress in Organic Coatings.* – 2011. – Vol. 136. – P. 28–31.

11. *Харитонов, Ю.Я.* Аналитическая химия (аналитика). В 2 кн. Кн. 1. Общие теоретические основы. Качественный анализ. Учеб. для вузов; 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 615 с.

12. *Беллами, Л.* Инфракрасные спектры сложных молекул. – М.: Мир, 1963. – 592 с.

13. *Наканиси, К.* Инфракрасные спектры и строение органических соединений. Практическое руководство. – М.: Мир, 1965. – 216 с.

14. *Некрасов, Б.В.* Основы общей химии. Т. 2. – М.: Химия, 1973. – 688 с.

15. *Егорова, Е.М.* Наночастицы металлов в растворах: биохимический синтез, свойства и применение. Автореф. дис... докт. хим. наук: 03.01.06 / Е.М. Егорова; Рос. хим. акад.– М., 2011. – 53 с.

*Поступила в редакцию 01.02.13.*

УДК 681.7.068

## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБНОГО ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКОГО ДАТЧИКА ДАВЛЕНИЯ

И.В. Шилова<sup>1</sup>, О.А. Бельская<sup>2</sup>, А.Б. Сотский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусско-Российский университет, Могилев

<sup>2</sup>Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев

## ELECTRODYNAMIC MODEL OF THE BENDING FIBER-OPTIC SENSOR

I.V. Shilova<sup>1</sup>, O.A. Belskaya<sup>2</sup>, A.B. Sotsky<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian-Russian University, Mogilev

<sup>2</sup>A.A. Kuleshov Mogilev State University, Mogilev

На основании модели петлевой волоконно-оптической антенны исследованы изгибные потери излучения, вызванные эллиптической деформацией чувствительного элемента волоконно-оптического датчика давления.

**Ключевые слова:** оптическое волокно, волоконно-оптический датчик давления.

Bending radiation loss caused by elliptical deformation in the sensitive element of the fiber-optic pressure sensor was investigated on the basis of the fiber-optic loop antenna model.

**Keywords:** optical fiber, fiber optical sensor of pressure.

### Введение

В некоторых областях промышленности, например в энергетике, высокий уровень электромагнитных полей создает помехи и наводки в традиционных датчиках давления с электрическим выходным сигналом: тензометрических, ёмкостных, пьезоэлектрических и т. д. Это затрудняет их практическое применение. Такая ситуация возникает, например, при измерении давления в маломасляных выключателях на электростанциях. Для ряда приложений необходим также контроль давления в горючих и взрывоопасных средах. В указанных ситуациях могут быть использованы волоконно-оптические датчики давления.

В настоящее время разработано большое количество волоконно-оптических первичных преобразователей различных физических величин [1]–[4]. Из этого числа наиболее простыми и надежными являются амплитудные датчики, использующие модуляцию потерь в изогнутых оптических волокнах. Главным недостатком таких датчиков является их низкая чувствительность по сравнению с интерференционными и поляризационными волоконно-оптическими датчиками. Поэтому не прекращаются поиски возможностей повышения чувствительности изгибных датчиков. Исследования идут в направлениях использования многоэлементных конструкций, содержащих в одном датчике различные типы оптических волокон [5], применения микроструктурных волокон [6] и регистрации изменения спектральных характеристик излучения при механическом воздействии на изогнутое оптическое волокно [7].

Решение оптимизационных задач по максимизации чувствительности волоконно-оптических датчиков изгибного типа требует разработки адекватных теоретических моделей сенсорных эффектов. В настоящей работе представлена такого рода модель для датчика давления, в котором чувствительным элементом служит эллиптически деформируемая петля, состоящая из нескольких витков жгута многомодовых оптических волокон.

### 1 Постановка задачи

При использовании оптических волокон в датчиках возникает проблема ввода излучения в волокно. С целью облегчения указанного ввода нами разработан датчик давления, содержащий волоконно-оптическую светопередающую часть в виде волоконно-оптического жгута, состоящего из нескольких многомодовых оптических волокон. Жгут имеет круговое сечение на его концах и плоское сечение в середине. В этом случае ввод излучения в оптические волокна не требует применения прецизионных фокусирующих оптических систем [8], [9].

Схема преобразования прогиба мембраны датчика давления в величину изменения кривизны колец оптических волокон приведена на рисунке 1.1.

Конструкция первичного преобразователя волоконно-оптического датчика давления содержит корпус 1, прикрепляемый с помощью штуцера к объекту, в котором измеряется давление жидкости или газа. В корпусе 1 закреплена мембрана 2, которая при изменении давления прогибается и

смещает шток 3, который, в свою очередь, с помощью поворотного механизма 4 деформирует кольца жгута оптических волокон 5. При этом локальная кривизна витков волокон внутри жгута изменяется, что приводит к модуляции выходного сигнала вследствие изменения условий выхода энергии мод изогнутых оптических волокон в защитную полимерную оболочку. В качестве источника излучения используется светодиод с длиной волны 630–640 нм, а в качестве приемника излучения – фотодиод ФД-256.

Светопередающая часть 5 в виде волоконно-оптического жгута содержит несколько отрезков многомодового кварц-кварцевого волокна с диаметром сердцевины 50 мкм и диаметром кварцевой оболочки 125 мкм. Последняя покрыта полимерной защитной оболочкой. Полный диаметр волокна в защитной оболочке составляет 300 мкм. При разработке конструкции датчика были выбраны многомодовые оптические волокна, поскольку они имеют невысокую стоимость и большой радиус сердцевины, что облегчает ввод излучения в жгут. На концах жгута волокна собраны и склеены вместе в виде цилиндров.

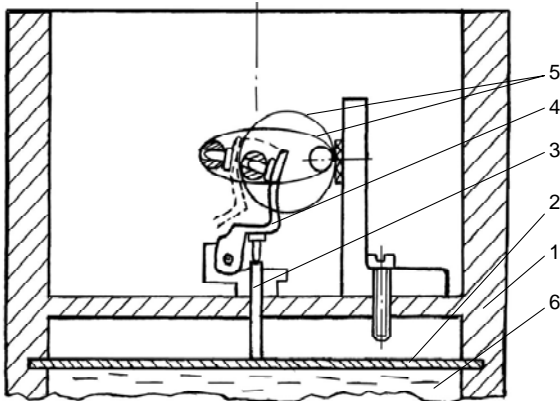


Рисунок 1.1 – Схема преобразования прогиба мембраны под действием давления в величину изменения кривизны колец оптических волокон (1 – корпус; 2 – мембрана; 3 – шток; 4 – поворотный механизм; 5 – светопередающая часть; 6 – измеряемая среда (жидкость или газ))

Поскольку работа датчика объясняется излучением света из сердцевины каждого из волокон жгута при изгибе жгута и поглощением этого света защитной полимерной оболочкой волокна, исследование светопропускания чувствительного элемента датчика сводится к расчету потерь излучения, вызванных изгибом одного многомодового оптического волокна.

При деформации петли волокна в датчике (рисунок 1.1) будут изменяться радиусы локальных изгибов волокна в пределах петли. Поскольку свет распространяется вдоль волокна в виде его собственных мод, а затухание каждой из этих мод существенно зависит от радиуса изгиба

волокна [10], деформация петли волокна в датчике вызовет модуляцию пропускания волокна, представляющую собой сенсорный эффект.

Для описания данного эффекта воспользуемся известной скалярной теорией излучения кольцевой волоконно-оптической антенны [10], [11].

Предположим, что возбуждение волокна в датчике осуществляется широким световым пучком амплитуды  $A$ , падающим перпендикулярно входному торцу волокна. В этом случае оптическое поле внутри волокна, записанное в цилиндрических координатах, не зависит от угловой переменной. В результате в волокне будут возбуждаться только те моды, которые не имеют угловой структуры поля. Радиальная зависимость поля  $\nu$ -й собственной моды такого типа описывается цилиндрическими функциями:

$$u_\nu = J_0(\chi_{co}r) \text{ при } r \leq r_0, \\ u_\nu = \frac{J_0(\chi_{co}r_0)H_0^{(2)}(\chi_{cl}r)}{H_0^{(2)}(\chi_{cl}r_0)} \text{ при } r > r_0,$$

где  $r_0$  – радиус сердцевины волокна,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число вакуума,  $n_{co}$ ,  $n_{cl}$  – показатели преломления сердцевины и оболочки волокна,

$$\chi_{co} = \sqrt{k_0^2 n_{co}^2 - \beta_\nu^2}, \quad \chi_{cl} = \sqrt{k_0^2 n_{cl}^2 - \beta_\nu^2},$$

$\beta_\nu$  – постоянная распространения моды, удовлетворяющая дисперсионному уравнению

$$\chi_{co} J_1(\chi_{co}) H_0^{(2)}(\chi_{cl}) = \chi_{cl} J_0(\chi_{co}) H_1^{(2)}(\chi_{cl}). \quad (1.1)$$

Амплитуда  $\nu$ -й собственной моды указанного типа на входе в волокно может быть рассчитана по формуле [10]

$$C_\nu = AT \int_0^\infty u_\nu r dr \left( \int_0^\infty u_\nu^2 r dr \right)^{-1},$$

где  $T$  – френелевский коэффициент прохождения светом границы раздела воздух – материал волокна.

В рамках теории излучения кольцевой волоконно-оптической антенны затухание  $\nu$ -й моды волокна, вызванное его круговым изгибом, характеризуется коэффициентом [10]

$$\gamma_\nu = \left( \frac{\pi V^8}{16 r_0 R_c W^3} \right)^{1/2} \exp \left( - \frac{4 R_c \Delta W^3}{3 r_0 V^2} \right) \times \\ \times \left( \int_0^{r_0} u_\nu I_0(WR) R dR \right)^2 \left( \int_0^\infty u_\nu^2 R dR \right)^{-1}, \quad (1.2)$$

где  $R_c$  – радиус изгиба волокна,  $V = k_0 r_0 \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2}$ ,  $\Delta = 0.5(n_{co}^2 - n_{cl}^2)n_{co}^{-2}$ ,  $W = k_0 r_0 \sqrt{\beta_\nu^2 - n_{cl}^2}$ ,  $I_0(WR)$  – модифицированная функция Бесселя,  $R = r/r_0$ .

В рассматриваемом датчике давления происходит деформация изначально круговой петли оптического волокна, вследствие которой форма петли становится близкой к эллипсу. На основании этого мы аппроксимировали указанную петлю

четырьмя радиальными участками с длинами  $L_i$  и радиусами изгиба  $R_c^{(i)}$ , где  $i$  – номер участка (рисунок 1.2).

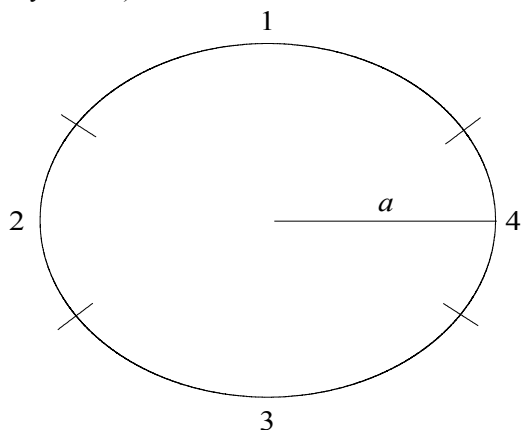


Рисунок 1.2 – Аппроксимация петли волокна четырьмя радиальными участками с номерами 1, 2, 3, 4

Этим участкам соответствуют параметры

$$R_c^{(1),(3)} = R_c^{(2),(4)} + (a - R_c)(2\varphi \pi^{-1} - 1 + \cos \varphi), \quad (1.3)$$

$$L_{1,3} = (\pi - 2\varphi) R_c^{(1),(3)}, \quad (1.4)$$

$$R_c^{(2),(4)} = a - (a - R_c)(2\varphi \pi^{-1} - 1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \quad (1.5)$$

$$L_{2,4} = 2\varphi R_c^{(2),(4)}, \quad (1.6)$$

где  $a$  – большая полуось эллипса.

Значение параметра  $\varphi$  в (1.3)–(1.6) мы выбирали из соображений максимальной близости формы петли на рисунке 1.2 к эллипсу по критерию наименьших квадратов. Выражения (1.3)–(1.6) получены из условий сохранения неизменной длины петли волокна

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 2\pi R_c$$

( $R_c$  – радиус исходной круговой петли) при вариациях  $a$  и сочленения радиальных участков петли без изломов.

Пренебрегая взаимной трансформацией мод в местах сочленения указанных радиальных участков, используя соотношения ортогональности мод и предполагая, что моды оболочки волокна эффективно фильтруются поглощающим полимерным покрытием, для мощности излучения на выходе волокна можем записать:

$$P = \sum_{\nu} P_{\nu},$$

где

$$P_{\nu} = \pi n_a \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |C_{\nu}|^2 \exp\left(-m \sum_{i=1}^4 \gamma_{\nu}^{(i)} L_i\right) \int_0^{\infty} u_{\nu}^2 r dr,$$

$P_{\nu}$  – мощность  $\nu$ -ой моды на выходе волокна,  $n_a$  – показатель преломления воздуха,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума,  $m$  – число петель волокна в чувствительном элементе датчика,  $\gamma_{\nu}^{(i)}$  – коэффициент затухания

вида (1.2), отнесенный к  $i$ -му радиальному участку петли.

## 2 Результаты расчетов

Рисунки 2.1–2.4 иллюстрируют применение описанной модели к расчету пропускания чувствительного элемента датчика. Указанный элемент представляет собой кварцевое многомодовое волокно в полимерной оболочке. Радиус и показатель преломления сердцевинны равны  $r_0 = 25$  мкм и  $n_{co} = 1,472$ , показатель преломления кварцевой оболочки  $n_{cl} = 1,4584$ . В качестве источника света использован He-Ne лазер ( $\lambda_0 = 0,6328$  мкм).

В результате численного решения дисперсионного уравнения (1.1) мы нашли, что описанное волокно направляет 16 собственных мод. Значения их постоянных распространения представлены на рисунке 2.1.

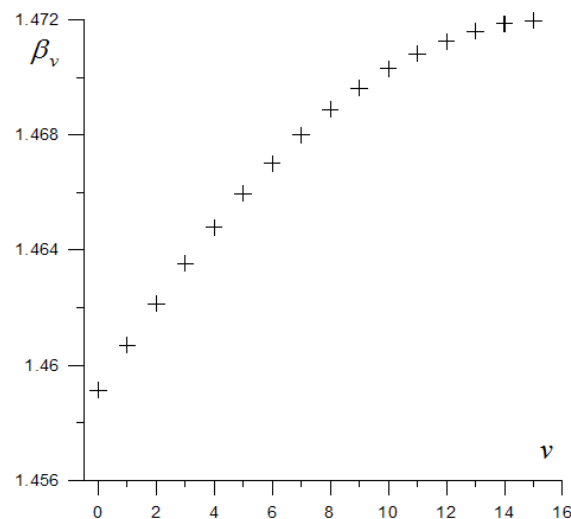


Рисунок 2.1 – Постоянные распространения мод волокна

Рисунок 2.2 иллюстрирует зависимость затухания нескольких мод низшего порядка от радиуса изгиба круговой петли волокна  $R_c$  при  $m = 1$ . Из рисунка 2.2 видно, что основная часть мощности излучения передается основной модой (кривая 0).

На рисунке 2.3 сопоставлены теоретическая и экспериментальная зависимости нормированной мощности излучения  $P/P_0$  на выходе одной круговой петли волокна от радиуса петли  $R_c$  (под  $P_0$  понимается максимальное значение мощности на выходе волокна).

В соответствии с рисунком 2.3, при  $R_c < 4$  мм происходит резкое снижение пропускания волокна, называемое в литературе изгибной отсечкой (bend loss edge [11]). В целом принятая модель достаточно хорошо описывает эксперимент. Некоторое расхождение теоретической и экспериментальной зависимостей на рисунке 2.3 можно

объяснить неполной фильтрацией оболочечных мод экспериментального волокна, возбуждаемых при его изгибе, полимерным покрытием.

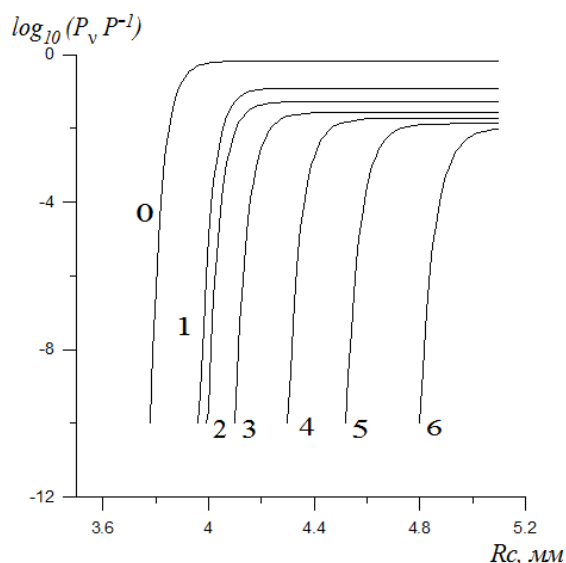


Рисунок 2.2 – Зависимость относительной мощности семи мод низшего порядка на выходе волокна от радиуса изгиба  $R_c$  круговой петли волокна. Номера кривых совпадают с номерами мод

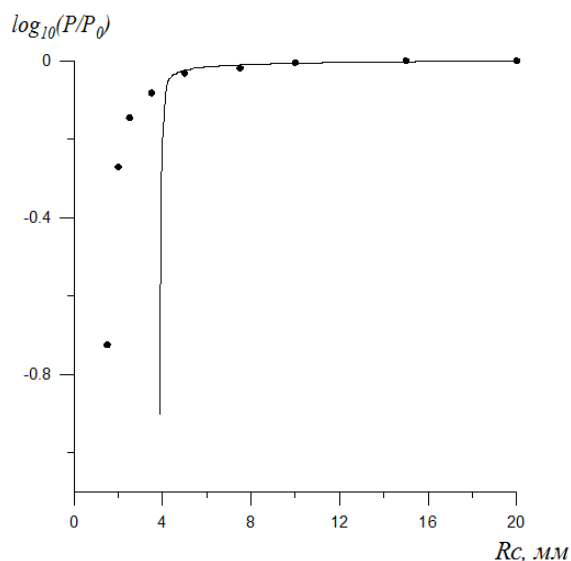


Рисунок 2.3 – Теоретическая (сплошная кривая) и экспериментальная (дискретные точки) зависимости пропускания волокна от радиуса его изгиба

На рисунке 2.4 сопоставлены расчетная и экспериментальная зависимости пропускания чувствительного элемента датчика в виде 10 деформируемых витков от большой полуоси эллипса  $a$  (рисунок 1.2).

Видимое из рисунка 2.4 расхождение теории и эксперимента можно связать как с указанной выше причиной, так и с возникновением спиральности в реальной системе витков жгута в

датчике, которая в рассмотренной модели не учитывалась.

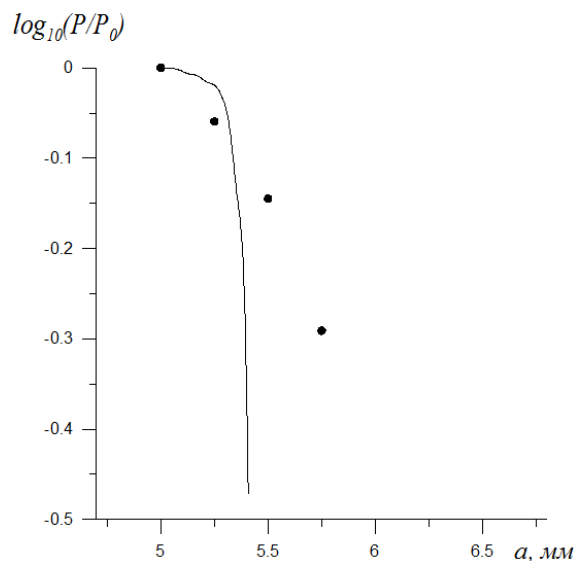


Рисунок 2.4 – Теоретическая (сплошная кривая) и экспериментальная (дискретные точки) зависимости пропускания чувствительного элемента датчика от большой полуоси  $a$  эллипса, аппроксимирующего деформируемые петли волокна

### Заключение

Представленное сопоставление теории и эксперимента позволяет сделать вывод, что рассмотренная теоретическая модель в целом эффективна для оценки потерь излучения в изгибном волоконно-оптическом датчике давления. В частности, она позволяет корректно оценить параметры эллиптической петли чувствительного элемента датчика, при которых происходит изгибная отсечка пропускания устройства. В соответствии с теоретическим расчетом, рассматриваемый датчик может обладать более высокой чувствительностью пропускания к деформации эллиптической петли жгута волокон по сравнению с чувствительностью, полученной в работе экспериментально. Из представленного выше обсуждения следует, что чувствительность устройства может быть повышена за счет более эффективной фильтрации оболочечных мод волокон полимерной оболочкой и за счет дальнейшей оптимизации механической части чувствительного элемента датчика с целью устранения спиральности в системе витков жгута волокон.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Shizhuo, Yin. Fiber Optic Sensors / Yin Shizhuo, Paul B. Ruffin, T.S.Yu. Francis. – Boca Raton, London, New York : CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008. – 477 p.
2. Волоконно-оптические датчики / Т. Око-си [и др.] ; под ред. Т. Око-си: пер. с япон. – Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-е, 1991 – 256 с.

3. *Волоконно-оптические датчики. Вводный курс для инженеров и научных работников* / под ред. Э. Удда; пер. с англ. – М.: Техносфера, 2008. – 520 с.
4. *Бусурин, В.И.* Волоконно-оптические датчики: Физические основы, вопросы расчета и применения / В.И. Бусурин, Ю.Р. Носов – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.
5. *Donlagic, D.* Fiber-optic microbend sensor structure / D. Donlagic, M. Zavrsnik // *Opt. Lett.* – 1997. – Vol. 22. – № 11. – P. 837–839.
6. *Tunable fiber grating fabricated in photonic crystal fiber by use of mechanical pressure* / J.H. Lim [et al.] // *Opt. Lett.* – 2004. – Vol. 29. – № 4. – P. 331–333.
7. *Ivanov O.V.* Wavelength shift and split of cladding mode resonances in microbend long-period fiber gratings under torsion / O.V. Ivanov // *Opt. Commun.* – 2004. – Vol. 232. – № 1–6. – P. 159–166.
8. *Борисов, В.И.* Многоканальный микроизгибный волоконно-оптический датчик механического усилия / В.И. Борисов, И.В. Шилова // *Вестник Могилевского государственного технического университета.* – 2004. – № 1. – С. 19–21.
9. *Борисов, В.И.* Многоканальный микроизгибный волоконно-оптический датчик температуры / В.И. Борисов, И.В. Шилова // *Вестник Могилевского государственного технического университета.* – 2004. – № 2. – С. 21–24.
10. *Снайдер, А.* Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – М.: Радио и связь, 1987.
11. *Nielsen, M.D.* Predicting macrobending loss for large-mode area photonic crystal fibers / M.D. Nielsen, N.A. Mortensen, M. Albertsen // *Optics Express.* – 2004. – № 7. – P. 1775–1779.

Поступила в редакцию 26.12.12.

УДК 534.26

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОСЛАБЛЕНИЯ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ПРОНИЦАЕМОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Г.Ч. Шушкевич, Н.Н. Киселева

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно*

## CALCULATION OF THE ATTENUATION COEFFICIENT OF THE SOUND FIELD OF A SPHERICAL RADIATOR BY PENETRABLE SPHERICAL SHELL

G.Ch. Shushkevich, N.N. Kiseleva

*Y. Kupala Grodno State University, Grodno*

Построено аналитическое решение граничной задачи, описывающей процесс проникновения звукового поля сферического излучателя, который расположен внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки, через проницаемую сферическую оболочку. Численно исследуется влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля внутри сферической оболочки.

**Ключевые слова:** парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра, бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором, коэффициент ослабления звукового поля.

The analytical solution of the boundary problem which describes the process of penetration of the sound field of a spherical radiator located inside a thin unclosed spherical shell, through the permeable spherical shell is constructed. The influence of some parameters of the problem on the value of the attenuation coefficient (screening) of a sound field inside the spherical shell is numerically investigated.

**Keywords:** dual series equations for Legendre polynomials, infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a completely continuous operator, attenuation coefficient of a sound field.

### **Введение**

Задача о рассеянии звуковых волн на системе тел различной конфигурации имеет большое количество практических приложений в электроакустике, гидроакустике, медицинской диагностике, биоакустике, конструировании многослойных звукопоглощающих панелей для защиты от шума и вибрации [1]–[5].

Библиография по решению задач рассеяния весьма обширна. Рассмотрим лишь некоторые работы, имеющие отношение к данной теме исследования.

Рассеяние плоской звуковой волны на двух разнесенных идеальных (акустически мягких либо жестких) сферах одинаковых или разных радиусов исследовано в работах [6]–[8]. В [9] задача рассеяния плоской звуковой волны на двух проницаемых сферах, одна из которых имеет малый радиус, решена методом разделения переменных в сочетании с теоремами сложения для сферических волновых функций. Рассеяние звука на системе тел, ограниченных гладкими поверхностями, рассмотрено в работах [10]–[12]. Задача рассеяния сферической звуковой волны на плавающем твердом сферическом теле методом граничных элементов решена в [13]. Методом разделения переменных решена задача

рассеяния плоской звуковой волны на пористой сфере [14] и сфере, покрытой эластичным пористым слоем [15]. В работах [16], [17] рассматривается рассеяние плоской звуковой волны на двух упругих сферических оболочках. В работе [18] рассмотрена дифракция звука на радиально-слоистой изотропной термоупругой сферической оболочке. В [19], используя интегральное преобразование типа Абеля, приведено решение задачи рассеяния плоской звуковой волны на сфере с отверстием.

В данной работе построено точное осесимметричное решение задачи о проникновении звукового поля через сферическую оболочку. В качестве источника поля рассматривается точечный сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. С помощью соответствующих теорем сложения [20] решение поставленной задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода с вполне непрерывным оператором. Исследуется влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля внутри сферической оболочки.



**1 Постановка и представление решения задачи**

Пусть все пространство  $R^3$  разделено концентрическими сферами  $S_1 (r_1 = a_1)$  и  $S_2 (r_1 = a_2)$  с центром в точке  $O_1$  на три области  $D_0, D_1, D_2$  (рисунок 1.1). В области  $D_0$  находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка  $\Gamma_1$  с углом раствора  $\theta_0$ , расположенная на сфере  $\Gamma$  радиуса  $a$  с центром в точке  $O$ . В точке  $O$  расположен сферический излучатель с круговой частотой  $\omega$ . Области  $D_j, j = 0, 1, 2$ , заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность среды и скорость звука в области  $D_j, j = 0, 1, 2$ , обозначим соответственно через  $\rho_j, c_j$ . Расстояние между точками  $O$  и  $O_1$  обозначим через  $h$ .

Для решения задачи свяжем с точками  $O$  и  $O_1$  сферические координаты. Сферическая оболочка  $\Gamma_1$  описывается следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{r = a, 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

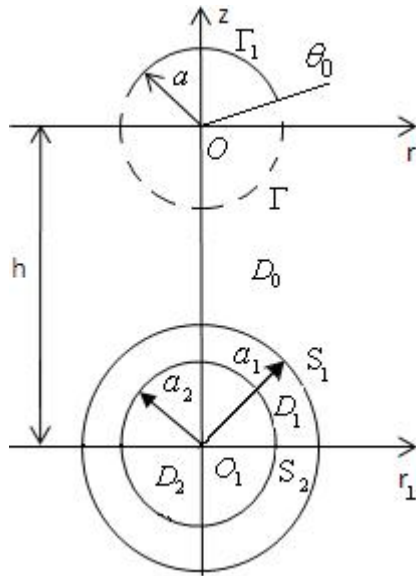


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи

Обозначим через  $p_c$  давление исходного звукового поля,  $p_j$  – давление рассеянного звукового поля в области  $D_j, j = 0, 1, 2$ .

Решение дифракционной задачи сводится к нахождению давления  $p_j, j = 0, 1, 2$ , удовлетворяющего:

– уравнению Гельмгольца

$$\Delta p_j + k_j^2 p_j = 0,$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,

$k_j = \omega / c_j$  – волновое число;

– граничному условию на поверхности сферической оболочки  $\Gamma_1$  – акустически жесткой оболочки:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} (p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\bar{n}$  – нормаль к поверхности  $\Gamma_1$ ;

– граничным условиям на проникаемой сфере  $S_1$ :

$$p_0 \Big|_{S_1} = p_1 \Big|_{S_1}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \bar{n}} \Big|_{S_1} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial \bar{n}} \Big|_{S_1}, \quad (1.2)$$

где  $\bar{n}$  – нормаль к поверхности  $S_1$ ;

– граничным условиям на проникаемой сфере  $S_2$ :

$$p_1 \Big|_{S_2} = p_2 \Big|_{S_2}, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial \bar{n}} \Big|_{S_2} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial \bar{n}} \Big|_{S_2}, \quad (1.3)$$

где  $\bar{n}$  – нормаль к поверхности  $S_2$ ;

– условию на бесконечности [21]:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p_0(M)}{\partial r} - i k_0 p_0(M) \right) = 0, \quad (1.4)$$

где  $M$  – произвольная точка пространства.

Потребуем также выполнения условия непрерывности давления на открытой части сферической оболочки  $\Gamma \setminus \Gamma_1$  и производной по нормали на сфере  $\Gamma$ :

$$(p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = (p_0^{(1)} + p_0^{(2)}) \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} (p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \bar{n}} (p_0^{(1)} + p_0^{(2)}) \Big|_{\Gamma}, \quad (1.6)$$

где  $\bar{n}$  – нормаль к поверхности  $\Gamma$ .

Реальные звуковые давления вычисляются по формуле

$$P_j = \text{Re} (p_j e^{-i\omega t}),$$

$i$  – мнимая единица,  $j = 0, 1, 2$ .

Давление исходного звукового поля представим в виде ряда по сферическим волновым функциям [21]

$$\begin{aligned} p_c(r, \theta) &= P \frac{e^{ik_0 r}}{r} = ik_0 P h_0^{(1)}(kr) = \\ &= P \sum_{n=0}^{\infty} f_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (1.7) \\ f_n &= ik_0 \delta_{0n}, \end{aligned}$$

где  $h_n^{(1)}(kr)$  – сферические функции Ханкеля,  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра [22],  $\delta_{0n}$  – символ Кронекера,  $P = \text{const}$  [23].

Представим давление  $p_j$  рассеянного звукового поля в области  $D_j, j = 0, 1, 2$ , в виде суперпозиции базисных решений уравнения Гельмгольца, принимая во внимание условие на бесконечности (1.4):

$$p_0 = \begin{cases} p_0^{(0)}(r, \theta) = \\ = P \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), r < a, \\ p_0^{(1)}(r, \theta) + p_0^{(2)}(r_1, \theta_1), \end{cases} \quad (1.8)$$

$$p_0^{(1)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} x_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta), r > a, \\ p_0^{(2)}(r_1, \theta_1) = \\ = P \sum_{n=0}^{\infty} y_n h_n^{(1)}(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1), r_1 > a_1, \quad (1.9)$$

$$p_1(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} j_n(k_1 r_1) P_n(\cos \theta_1) + \\ + P \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} h_n^{(1)}(k_1 r_1) P_n(\cos \theta_1) \text{ в } D_1, \quad (1.10)$$

$$p_2(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} d_n j_n(k_2 r_1) P_n(\cos \theta_1) \text{ в } D_2, \quad (1.11)$$

где  $j_n(kr)$  – сферические функции Бесселя первого рода [22].

Неизвестные коэффициенты  $c_n, x_n, y_n, a_n^{(1)}, b_n^{(1)}, d_n$  подлежат определению из граничных условий.

### 2 Выполнение граничных условий

Выполним граничные условия (1.1), (1.5), (1.6). Для этого представим функцию  $p_0^{(2)}(r_1, \theta_1)$  через сферические волновые функции в системе координат с началом в точке  $O$ , используя формулу [20], [21]

$$h_n^{(1)}(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} A_{nl}(h) j_l(k_0 r) P_l(\cos \theta), r < h,$$

где  $A_{nl}(h) = (2l+1) \sum_{\sigma=|l-n|}^{l+n} i^{\sigma+l-n} b_{\sigma}^{(n0|0)} h_{\sigma}^{(1)}(k_0 h)$ ,

$b_{\sigma}^{(n0q0)} = (nq00 | \sigma 0)^2, (nq00 | \sigma 0)$  – коэффициенты Клебша-Гордона [21].

Тогда

$$p_0^{(2)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} T_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), \\ T_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_k A_{kn}(h). \quad (2.1)$$

Принимая во внимание представления (1.7)–(1.9), (2.1), граничное условие (1.6) с учетом условия ортогональности полиномов Лежандра на отрезке  $[0, \pi]$  примет вид

$$f_n \frac{d}{d\xi} h_n^{(1)}(\xi_0) + c_n \frac{d}{d\xi} j_n(\xi_0) = x_n \frac{d}{d\xi} h_n^{(1)}(\xi_0) +$$

$$+ T_n \frac{d}{d\xi} j_n(\xi_0), \xi_0 = k_0 a, n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Выполним граничные условия (1.1), (1.5). В полученных уравнениях исключим коэффициенты  $c_n$  с помощью представления (2.2) и, принимая во внимание вронскиан функций  $j_n(x), h_n^{(1)}(x)$  [22], получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра вида

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) P_n(\cos \theta) = \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) P_n(\cos \theta), 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n - f_n}{d\xi_0} j_n(\xi_0) P_n(\cos \theta) = 0, \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для преобразования парных сумматорных уравнений (2.3) введем в рассмотрение новые коэффициенты  $X_n$  по формуле

$$x_n = X_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) + f_n, n = 0, 1, \dots, \quad (2.4)$$

и малый параметр  $g_n$  по формуле

$$g_n = 1 + \frac{4i\xi_0^3}{2n+1} \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0), \\ g_n = O(n^{-2}). \quad (2.5)$$

В результате парные сумматорные уравнения (2.3) преобразуются к виду:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(1-g_n) X_n P_n(\cos \theta) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(\tilde{f}_n + \tilde{T}_n) P_n(\cos \theta), 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n(\cos \theta) = 0, \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{T}_n = 4i\xi_0^3 T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) / (2n+1), \\ \tilde{f}_n = 4i\xi_0^3 f_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) / (2n+1).$$

Используя интегральные представления для полиномов Лежандра, парные сумматорные уравнения (2.6) преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода с вполне непрерывным оператором [19], [24]

$$X_n - \sum_{k=0}^{\infty} g_k R_{nk} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{T}_k + \tilde{f}_k) R_{nk}, \quad (2.7) \\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$R_{ns} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \sin(n+0,5)t \sin(s+0,5)t dt,$$

$$R_{ns} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(n-s)\theta_0}{n-s} - \frac{\sin(n+s+1)\theta_0}{n+s+1} \right],$$

$$\left. \frac{\sin(n-s)\theta_0}{n-s} \right|_{n=s} = \theta_0.$$

Для выполнения граничных условий (1.2), (1.3) представим функцию  $p_0^{(1)}(r, \theta)$  через сферические волновые функции в системе координат с началом в точке  $O_1$ , используя формулу [20], [21]

$$h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_{nl}(h) j_l(k_0 r_1) P_l(\cos \theta_1), \quad r_1 < h,$$

где

$$B_{nl}(h) = (2l+1) \sum_{\sigma=|l-n|}^{l+n} (-1)^\sigma i^{\sigma+l-n} b_\sigma^{(n0l0)} h_\sigma^{(1)}(k_0 h).$$

Тогда

$$p_0^{(1)}(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} Z_n j_n(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1),$$

$$Z_n = \sum_{p=0}^{\infty} x_p B_{pn}(h). \quad (2.8)$$

Принимая во внимание представления давлений (1.10), (1.11), (2.8), выполняя граничные условия (1.2), учитывая ортогональность полиномов Лежандра на отрезке  $[0; \pi]$ , получим систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} m_{11}(n)y_n + m_{12}(n)a_n^{(1)} + m_{13}(n)b_n^{(1)} = m_1(n)Z_n, \\ m_{21}(n)y_n + m_{22}(n)a_n^{(1)} + m_{23}(n)b_n^{(1)} = m_2(n)Z_n, \\ m_{32}(n)a_n^{(1)} + m_{33}(n)b_n^{(1)} + m_{34}(n)d_n = 0, \\ m_{42}(n)a_n^{(1)} + m_{43}(n)b_n^{(1)} + m_{44}(n)d_n = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$m_{11}(n) = h_n^{(1)}(\xi_1),$$

$$m_{12}(n) = -j_n(\xi_{11}),$$

$$m_{13}(n) = -h_n^{(1)}(\xi_{11}),$$

$$m_{21}(n) = \frac{k_0}{\rho_0} \frac{d}{d\xi_1} h_n^{(1)}(\xi_1),$$

$$m_{22}(n) = -\frac{k_1}{\rho_1} \frac{d}{d\xi_{11}} j_n(\xi_{11}),$$

$$m_{23}(n) = -\frac{k_1}{\rho_1} \frac{d}{d\xi_{11}} h_n^{(1)}(\xi_{11}),$$

$$m_{32}(n) = j_n(\xi_{12}),$$

$$m_{33}(n) = h_n^{(1)}(\xi_{12}),$$

$$m_{34}(n) = -j_n^{(1)}(\xi_{22}),$$

$$m_{42}(n) = \frac{k_1}{\rho_1} \frac{d}{d\xi_{12}} j_n(\xi_{12}),$$

$$m_{43}(n) = \frac{k_1}{\rho_1} \frac{d}{d\xi_{12}} h_n^{(1)}(\xi_{12}),$$

$$m_{44}(n) = -\frac{k_2}{\rho_2} j_n \frac{d}{d\xi_{22}}(\xi_{22}),$$

$$m_1(n) = -j_n(\xi_1),$$

$$m_2(n) = -\frac{k_0}{\rho_0} \frac{d}{d\xi_1} j_n(\xi_1),$$

$$\xi_1 = k_0 a_1, \quad \xi_{11} = k_1 a_1,$$

$$\xi_{12} = k_1 a_2, \quad \xi_{22} = k_2 a_2.$$

Решая систему (2.9), получим

$$y_n = W_1(n)Z_n, \quad d_n = W_2(n)Z_n, \quad (2.10)$$

где

$$W_1(n) = \Delta_1(n) / \Delta(n),$$

$$W_2(n) = \Delta_4(n) / \Delta(n),$$

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= (m_{11}(n)m_{23}(n) - m_{13}(n)m_{21}(n)) \times \\ &\times (m_{34}(n)m_{42}(n) - m_{44}(n)m_{32}(n)) + \\ &+ (m_{11}(n)m_{22}(n) - m_{21}(n)m_{12}(n)) \times \\ &\times (m_{44}(n)m_{33}(n) - m_{34}(n)m_{43}(n)), \\ \Delta_1(n) &= m_1(n)m_{34}(n) \times \\ &\times (m_{22}(n)m_{43}(n) - m_{23}(n)m_{42}(n)) - \\ &- m_1(n)m_{44}(n)(m_{22}(n)m_{33}(n) - m_{23}(n)m_{32}(n)) - \\ &- m_2(n)m_{34}(n)(m_{12}(n)m_{43}(n) - m_{13}(n)m_{42}(n)) + \\ &+ m_2(n)m_{44}(n)(m_{12}(n)m_{33}(n) - m_{13}(n)m_{32}(n)), \\ \Delta_4(n) &= (m_{32}(n)m_{43}(n) - m_{33}(n)m_{42}(n)) \times \\ &\times (m_1(n)m_{21}(n) - m_2(n)m_{11}(n)). \end{aligned}$$

Из соотношений (2.1), (2.4), (2.8), (2.10) следует связь между коэффициентами  $T_n$  и  $X_n$ :

$$T_n = \sum_{m=0}^{\infty} S_{mn} X_m + \tilde{f}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

где

$$S_{mn} = \frac{d}{d\xi_0} j_m(\xi_0) \sum_{s=0}^{\infty} W_1(s) B_{ms}(h) A_{sn}(h),$$

$$\tilde{f}_n = ik_0 \sum_{s=0}^{\infty} W_1(s) B_{0s}(h) A_{sn}(h).$$

Преобразуем правую часть (2.7). Исключим из правой части коэффициенты  $\tilde{T}_n$  с помощью представления (2.11) и получим бесконечную СЛАУ второго рода

$$X_n - \sum_{k=0}^{\infty} (g_k R_{nk} + \alpha_{nk}) X_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \tilde{f}_k + 4i\xi_0^3 \frac{d}{d\xi_0} j_k(\xi_0) \tilde{f}_k / (2k+1) \right) R_{nk}, \quad (2.12)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_{nk} = 4i\xi_0^3 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d}{d\xi_0} j_p(\xi_0) R_{np} S_{kp} / (2p+1).$$

Коэффициенты  $d_n$ , входящие в представление давления в области  $D_2$ , вычисляются через решение системы (2.12) по формуле

$$d_n = W_2(n) \sum_{p=0}^{\infty} \left( X_p \frac{d}{d\xi_0} j_p(\xi_0) + f_p \right) B_{pn}(h). \quad (2.13)$$

Коэффициент ослабления звукового поля в области  $D_2$  вычислим по формуле

$$K(r_1, \theta_1) = |p_2(r_1, \theta_1)| / |p_c|, \quad 0 \leq r_1 \leq a_2,$$

где

$$p_c(r_1, \theta_1) = P i k_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_{0n}(h) j_n(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1).$$

Если незамкнутая сферическая оболочка  $\Gamma_1$  отсутствует, то решение задачи сводится к решению системы (2.9). В этом случае величина  $Z_n$ , входящая в правую часть, вычисляется по формуле  $Z_n = i k_0 B_{0n}(h)$ , а коэффициенты  $d_n$ , входящие в представление давления в области  $D_2$  – по формуле  $d_n = W_2(n) Z_n$ .

### 3 Вычислительный эксперимент

Используя систему компьютерной алгебры MathCAD [25], были проведены вычисления коэффициента ослабления звукового поля в области  $D_2$  для некоторых параметров задачи.

Сферические функции

$$j_n(x), \quad h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x)$$

вычислялись с помощью встроенных функций  $js(n, x)$  и  $ys(n, x)$ . Здесь  $y_n(x)$  – сферическая функция Бесселя второго рода [22]. Производные сферических функции вычислялись с помощью формулы [22, с. 258]

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = n f_n(x) / x - f_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Коэффициенты Клебша-Гордона  $b_{\sigma}^{(n_0 q_0)}$  вычислялись по формуле (3.4.17) [21, с. 127].

Бесконечная система (2.12) решалась методом усечения [21]. Вычислительный эксперимент показал, что порядок усечения для рассмотренных параметров задачи можно взять равным 75. Это обеспечивает решение системы (2.12) с точностью  $10^{-4}$ . Все бесконечные суммы, входящие в представление (2.12), вычислялись с точностью  $10^{-5}$ .

На рисунке 3.1 изображены графики коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля  $K(0, 2; \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений радиуса  $a_2$ , если области  $D_0, D_2$  заполнены морской водой ( $\rho_0 = \rho_2 = 1030 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = c_2 = 1533 \text{ м/с}$ ), область  $D_1$  – льдом ( $\rho_1 = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 3980 \text{ м/с}$ ),  $a = 0,1 \text{ м}$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $a_1 = 1 \text{ м}$ ,  $h = 2 \text{ м}$ ,  $f = 100 \text{ Гц}$ ,  $\omega = 2\pi f$ .

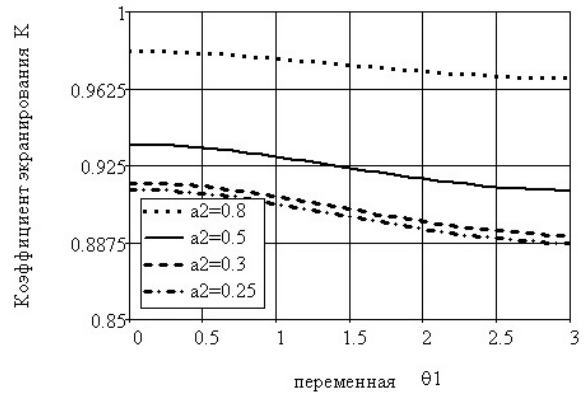


Рисунок 3.1 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(0, 2; \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений радиуса  $a_2$

На рисунке 3.2 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля (экранирования)  $K(r_1, \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений переменной  $r_1 < a_2$ , на рисунке 3.3 –  $K(r_1, \theta_1)$ ,  $0 \leq r_1 < a_2$ , для некоторых значений переменной  $\theta_1$ , если область  $D_0$  заполнена морской водой ( $\rho_0 = 1030 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1533 \text{ м/с}$ ), область  $D_1$  – органическим стеклом ( $\rho_1 = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 2560 \text{ м/с}$ ), область  $D_2$  – воздухом ( $\rho_2 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_2 = 343 \text{ м/с}$ ),  $a = 0,3 \text{ м}$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $a_1 = 1 \text{ м}$ ,  $a_2 = 0,95 \text{ м}$ ,  $h = 2,5 \text{ м}$ ,  $f = 150 \text{ Гц}$ .

На рисунке 3.4 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля (экранирования)  $K(0, 1; \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений угла раствора  $\theta_0$  сферической оболочки  $\Gamma_1$ , если область  $D_0$  заполнена морской водой ( $\rho_0 = 1030 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1533 \text{ м/с}$ ), область  $D_1$  – органическим стеклом ( $\rho_1 = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 2560 \text{ м/с}$ ), область  $D_2$  – льдом ( $\rho_2 = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_2 = 3980 \text{ м/с}$ ),  $a = 0,4 \text{ м}$ ,  $a_1 = 1 \text{ м}$ ,  $a_2 = 0,8 \text{ м}$ ,  $h = 3 \text{ м}$ ,  $f = 200 \text{ Гц}$ .

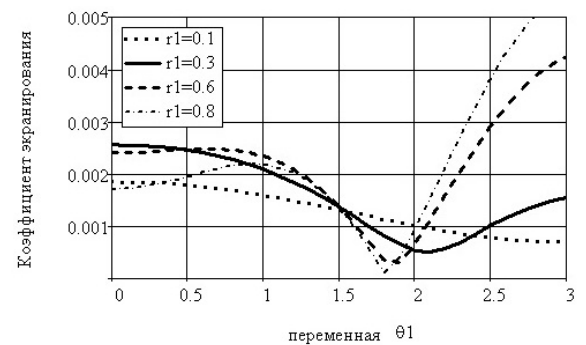


Рисунок 3.2 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(r_1, \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений переменной  $r_1$

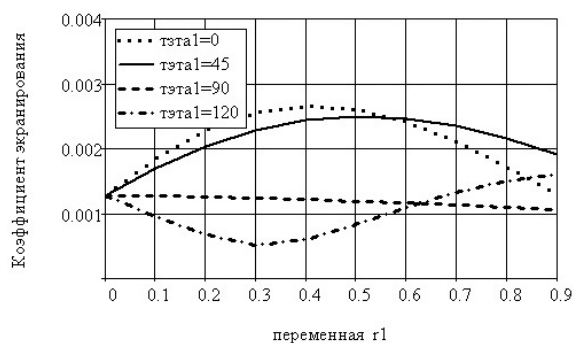


Рисунок 3.3 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(r_1, \theta_1)$ ,  $0 \leq r_1 < a_2$ , для некоторых значений переменных  $\theta_1$

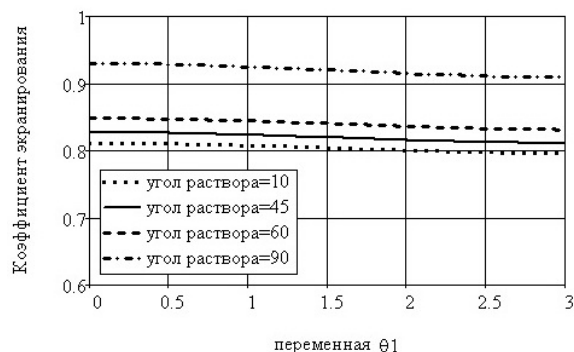


Рисунок 3.4 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(0, 1; \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений угла раствора  $\theta_0$  сферической оболочки  $\Gamma_1$

### Заключение

В работе показано, что решение задачи о проникновении звукового поля через проницаемую сферическую оболочку сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. В качестве источника звукового поля рассматривается точечный сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки – акустически жесткой оболочки.

Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи, плотности сред и скорости звука на значение коэффициента ослабления (экранирования) поля.

Разработанная методика и программное обеспечение могут найти практическое использование в задачах экранирования звуковых полей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Raichel, D.R. The science and applications of acoustics / D.R. Raichel // NY : Springer Science+Business Media. – 2006. – 663 p.
2. 6th National Conference ACOUSTICS 2012 [Electronic resource]. – Mode of access : <http://conferences.ionio.gr/acoustics2012/en/>. – Date of access : 05.11.2012.

3. International Conference on Noise and Vibration Engineering [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.isma-isaac.be/>. – Date of access : 05.11.2012.

4. Second International Conference of Acoustics and Vibration, ISAV2012, Engineering [Electronic resource]. – Mode of access : <http://isav.ir/2012/index.php/> –Date of access : 05.11.2012.

5. III Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Защита населения от повышенного шумового воздействия» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://onlinereg.ru/noise2011>. – Дата доступа : 07.11.2012.

6. Марневская, Л.А. Решение некоторых задач дифракции звуковых волн на сферах и сферических приемниках: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Л.А. Марневская ; Бел.гос.ун-т. – Мн., 1979. – 18 с.

7. Acoustic scattering by a pair of spheres / C.G. Gaunard [et al.] // J. Acous. Soc. Amer. – 1995. – Vol. 98. – P. 495–507.

8. Gabrielli, P. Acoustic scattering by two spheres: Multiple scattering and symmetry considerations / P. Gabrielli, M. Mercier-Finidori // J. of Sound and Vibration. – 2001. – Vol. 241. – P. 423–439.

9. Румелиотис, Дж.А. Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус / Дж.А. Румелиотис, А.Д. Котсис // Акустический журнал. – 2007. – Т. 5, № 1. – С. 38–49.

10. Шебеко, Г.А. Дифракция скалярной сферической волны на нескольких шарах, расположенных в полупространстве / Г.А. Шебеко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1970. – № 3. – С. 5–10.

11. Sloan, I.H. Good approximation on the sphere, with application to geodesy and the scattering of sound / I.H. Sloan, R.S. Womersley // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2002. – № 149. – P. 227–237.

12. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water / N.C. Skaropoulos [et al.] // J. Acous. Soc. Amer. – 2003. – Vol. 113. – P. 3001–3011.

13. Wang, Ch.-N. The scattering of an acoustic wave incident on the rigid floating body / Ch.-N. Wang, Ch.-Ch. Tse // Applied Acoustics. – 2003. – Vol. 64, № 12. – P. 1187–1204.

14. Huang, L.N. Trapping and absorption of sound waves I a screened sphere / L.N. Huang // Wave Motion. – 1990. – Vol. 12, № 1. – P. 1–13.

15. Huang, L N. Trapping and absorption of sound waves II a sphere covered with a porous layer / L.N. Huang // Wave Motion. – 1990. – Vol. 12, № 5. – P. 401–414.

16. Huang, H.H. Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells / H.H. Huang, G.C. Gaunard // J. Acous Soc. Amer. – 1995. – Vol. 98. – P. 2149–2156.

17. Huang, H.H. Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells above the

coincidence frequency / Н.Н. Huang, G.C. Gaunaurd // J. Acous. Soc. Amer. – 1997. – Vol. 101. – P. 2659–2668.

18. Ларин, Н.В. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем / Н.В. Ларин, Л.А. Толоконников // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 645–654.

19. Резуненко, В.А. Дифракция плоской звуковой волны на сфере с круговым отверстием / В.А. Резуненко // Вісник Харків. нац. універ. імен. В.Н. Каразіна. Сер. «Мат., прик. мат. і мех.». – 2009. – № 850. – С.71–77.

20. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.

21. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.

22. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / М. Абрамовица под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.

23. Шендарев, Е.Л. Излучение и рассеяние звука / Е.Л. Шендарев. – Л. : Судостроение, 1989. – 304 с.

24. Шушкевич, Г.Ч. Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения / Г.Ч. Шушкевич. – Гродно : ГрГУ, 1999. – 238 с.

25. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 1. / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 287 с.

Поступила в редакцию 24.11.12.

УДК 512.548

## О ТЕОРЕМЕ ПОСТА-ГЛУСКИНА-ХОССУ

А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

## ON POST-GLUSKIN-HOSSZU THEOREM

A.M. Gal'mak, G.N. Vorobiev

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

Теоремой Поста-Глускина-Хоссу мы называем теорему, которую обычно называют теоремой Глускина-Хоссу или теоремой Хоссу-Глускина. В формулировке этой теоремы присутствуют  $n$ -арная группа  $\langle A, [ ] \rangle$  и некоторая бинарная группа  $\langle A, \circ \rangle$ , имеющие общий носитель  $A$ . Э. Пост сформулировал и доказал эту теорему, рассматривая вместо группы  $\langle A, \circ \rangle$  ее изоморфную копию  $A_0$  (associated group). На наш взгляд, отсутствие имени Э. Поста в названии указанной теоремы является досадным недоразумением, которое должно быть устранено. По-видимому, М. Хоссу не знал о результате Э. Поста. Отметим, что Л.М. Глускин, вообще, специально  $n$ -арными группами не занимался. Он изучал более широкий класс алгебраических систем – позиционные оперативы, для которых получил ряд важных результатов. Среди многочисленных следствий одного из таких результатов находится и теорема Поста-Глускина-Хоссу.

**Ключевые слова:** группа,  $n$ -арная группа, автоморфизм.

Post-Gluskin-Hosszu theorem is known as Gluskin-Hosszu or Hosszu-Gluskin theorem. In the formulation of this theorem there is an  $n$ -ary group  $\langle A, [ ] \rangle$  and some binary group  $\langle A, \circ \rangle$ . These groups have a common carrier  $A$ . E. Post formulated and proved this theorem considering isomorphous copy of  $A_0$  (associated group) instead of group  $\langle A, \circ \rangle$ . In our opinion the absence of the name of E. Post in the title of the theorem is an embarrassing mistake which must be corrected. Apparently, M. Hosszu didn't know anything about the results of E. Post. It is necessary to note that L.M. Gluskin was not engaged in the study of  $n$ -ary groups. He investigated a large class of algebraic systems – positional operatives, and achieved a series of important results. Post-Gluskin-Hosszu theorem is among numerous consequences of these results.

**Keywords:** group,  $n$ -ary group, automorphism.

**Введение**

Согласно В. Дёрнте [1], универсальная алгебра  $\langle A, [ ] \rangle$  с одной  $n$ -арной ( $n \geq 2$ ) операцией  $[ ]: A^n \rightarrow A$  называется  $n$ -арной группой, если операция  $[ ]$  ассоциативна, то есть в  $A$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n-1$  выполняются тождества ассоциативности

$$\begin{aligned} & [[a_1 \dots a_n] a_{n+1} \dots a_{2n-1}] = \\ & = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+n}] a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}], \end{aligned}$$

и для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  и всех  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$  в  $A$  однозначно разрешимы уравнения

$$[a_1 \dots a_{i-1} x_i a_{i+1} \dots a_n] = b.$$

Полагая в определении В. Дёрнте  $n = 2$ , получаем определение бинарной группы.

Распознавать  $n$ -арные группы в классе всех универсальных алгебр можно различными способами. Один из них, наиболее естественный, состоит в том, что вначале из всех универсальных алгебр выделяют универсальные алгебры с одной ассоциативной  $n$ -арной операцией. Затем применяют следующую теорему.

**Теорема 0.1.** Для универсальной алгебры  $\langle A, [ ] \rangle$  с ассоциативной  $n$ -арной операцией  $[ ]$  следующие утверждения эквивалентны:

- 1)  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа;
- 2) (Е. Пост [2], 1940) для любых  $a_1, \dots, a_n, b \in A$  в  $A$  разрешимы уравнения

$$[x a_2 \dots a_n] = b, [a_1 \dots a_{n-1} y] = b;$$

- 3) (Е. Пост [2], 1940) для любых  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$  и некоторого  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ , где  $n \geq 3$ , в  $A$  разрешимо уравнение

$$[a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n] = b;$$

- 4) (А.Н. Скиба, В.И. Тютин [3], 1985) для любых  $a, b \in A$  в  $A$  разрешимы уравнения

$$[\underbrace{x a \dots a}_{n-1}] = b, [\underbrace{a \dots a}_{n-1} y] = b;$$

- 5) (А.Н. Скиба, В.И. Тютин [3], 1985) для любых  $a, b \in A$  и некоторого  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ , где  $n \geq 3$ , в  $A$  разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \dots a}_{i-1} x \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = b;$$

- 6) (А.М. Гальмак [4], [5], 1991) для любых  $a, b \in A$  в  $A$  разрешимы уравнения

$$[x_1 \dots x_{n-1} a] = b, [a y_1 \dots y_{n-1}] = b$$

с  $n-1$  неизвестными;

- 7) (А.М. Гальмак [4], [5], 1991) для любых  $a, b \in A$  в  $A$  разрешимо уравнение

$$[a x_1 \dots x_{n-2} a] = b$$

с  $n-2$  неизвестными, где  $n \geq 3$ .

Необходимые сведения из теории  $n$ -арных групп можно найти в книгах [5]–[7].

Теоремой Глускина-Хоссу или теоремой Хоссу-Глускина обычно называют следующую теорему.

**Теорема 0.2** (Л.М. Глускин [8], М. Hosszu [9]). На всякой  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$  можно определить бинарную операцию  $\circ$ , отображение  $\beta$ , а также выбрать элемент  $d \in A$  так, что  $\langle A, \circ \rangle$  – группа,  $\beta$  – ее автоморфизм, и выполняются следующие условия:

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 \circ x_2^{\beta} \circ \dots \circ x_n^{\beta^{n-1}} \circ d, \quad x_1, \dots, x_n \in A; \quad (0.1)$$

$$d^{\beta} = d; \quad (0.2)$$

$$x^{\beta^{n-1}} = d \circ x \circ d^{-1}, \quad x \in A. \quad (0.3)$$

Верна и обратная теорема Глускина-Хоссу.

**Теорема 0.3** (Л.М. Глускин [8], М. Hosszu [9]). Если элемент  $d$  группы  $\langle A, \circ \rangle$  и ее автоморфизм  $\beta$  удовлетворяют условиям (0.2) и (0.3), то  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа с  $n$ -арной операцией (0.1).

Краткое и красивое доказательство теоремы 0.2 нашел Е.И. Соколов [10]. Он доказал эту теорему, полагая

$$x \circ y = [x \underbrace{a \dots a}_{n-2} y],$$

$$\beta: x \rightarrow x^{\beta} = [\bar{a} x \underbrace{a \dots a}_{n-2}],$$

$$d = [\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_n],$$

где  $\bar{a}$  – косоый элемент для  $a$ , то есть решение уравнения  $[x \underbrace{a \dots a}_{n-1}] = a$ .

Если в  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$  зафиксировать элемент  $a \in A$ , то в качестве операции  $\circ$ , отображения  $\beta$  и элемента  $d$  можно взять операцию

$$x \circ_a y = [x a_1 \dots a_{n-2} y], \quad (0.4)$$

отображение

$$\beta = \beta_a: x \rightarrow [a x a_1 \dots a_{n-2}] \quad (0.5)$$

и элемент

$$d = d_a = [\underbrace{a \dots a}_n], \quad (0.6)$$

где  $a_1 \dots a_{n-2}$  – обратная последовательность в  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$  для элемента  $a$ .

Теперь теорему 0.2 можно переформулировать следующим образом (см., например, [5]).

**Теорема 0.4.** В любой  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$  для любого  $a \in A$  выполняются следующие условия:

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 \circ_a x_2^{\beta_a} \circ_a \dots \circ_a x_n^{\beta_a^{n-1}} \circ_a d_a, \quad x_1, \dots, x_n \in A; \quad (0.7)$$

$$d_a^{\beta_a} = d_a; \quad (0.8)$$

$$x^{\beta_a^{n-1}} = d_a \circ_a x \circ_a d_a^{-1}, \quad x \in A, \quad (0.9)$$

где  $\langle A, \circ_a \rangle$  – группа,  $\beta_a$  – её автоморфизм.

При определении операции  $\circ_a$  и отображения  $\beta_a$  в качестве обратной последовательности  $a_1 \dots a_{n-2}$  можно взять любую из последовательностей

$$\underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

в частности, одну из последовательностей

$$\underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a}, \quad \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-3}.$$

**Замечание 0.1.** Единицей группы  $\langle A, \circ_a \rangle$  является элемент  $a$ . Так как

$$d_a \circ_a \bar{a} = [[\underbrace{a \dots a}_n] \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a}] = a,$$

то  $d_a^{-1} = \bar{a}$  – обратный элемент в группе  $\langle A, \circ_a \rangle$  для элемента  $d_a$ .

Если в (0.4)–(0.6) элемент  $a$  заменить элементом  $\bar{a}$ , то получится конструкция Е.И. Соколова.

Согласно Э. Посту [2], группа  $G$  называется *обертывающей* для  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ , если множество  $A$  порождает группу  $G$ , а  $n$ -арная операция  $[ ]$  связана с бинарной операцией в группе  $G$  равенством:

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 x_2 \dots x_n, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in A.$$

Последнее равенство означает, что  $n$ -арная операция  $[ ]$  совпадает на множестве  $A$  с  $n$ -арной операцией, производной от операции в группе  $G$ . Для краткости будем говорить, что  $n$ -арная операция  $[ ]$  является *производной* от операции в группе  $G$ . Подмножество

$$A_0 = \{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \mid x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in A\} \subseteq G$$

является нормальной подгруппой группы  $G$  [2] и называется *соответствующей группой* [6] (*associated group* [2]) для  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ .

Если зафиксировать элемент  $a \in A$ , то несложно убедиться [2] в том, что

$$A_0 = A a^{-1} = \{x a^{-1} \mid x \in A\},$$

где символ  $a^{-1}$  обозначает обратный элемент в группе  $G$  к элементу  $a$ . Сам элемент  $a^{-1}$  может быть представлен в группе  $G$  в виде произведения

$$a^{-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-2}, \quad a_1, a_2, \dots, a_{n-2} \in A,$$

где  $a_1 \dots a_{n-2}$  – любая обратная последовательность в  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$  для элемента  $a$ .

Отображение

$$\varphi_a: u \rightarrow ua, \quad u \in A_0$$

является изоморфизмом группы  $A_0$  на группу  $\langle A, \circ_a \rangle$ , а отображение

$$\psi_a: x \rightarrow x a^{-1}, \quad x \in A$$

является изоморфизмом группы  $\langle A, \circ_a \rangle$  на группу  $A_0$ . Отсюда, в частности, следует, что для любых  $a, b \in A$  группы  $\langle A, \circ_a \rangle$  и  $\langle A, \circ_b \rangle$  изоморфны. Например, изоморфизм  $\langle A, \circ_a \rangle$  на  $\langle A, \circ_b \rangle$  осуществляется по правилу

$$\tau = \psi_a \varphi_b: x \rightarrow x a^{-1} b = [x a_1 \dots a_{n-2} b], \quad x \in A.$$

Ясно, что  $\varphi_a$  и  $\psi_a$  – взаимно обратные отображения.

**Замечание 0.2.** Так как равенства

$$\underbrace{[a \dots a \bar{a}]}_{n-1} = a, \quad a^{n-1} \bar{a} = a$$



равносильны, то  $\bar{a} = (a^{-1})^{n-2}$ , где  $a^{-1}$  – обратный элемент к элементу  $a$  в группе  $G$ .

Приведем оригинальную формулировку результата Э. Поста.

**Теорема 0.5 (Е. Post [2], с. 245).** *Given any abstract 2-group  $G_0$  to serve as associated group, an abstract element  $s_0$  subject to the condition  $s_0^{m-1} = t_0$ ,  $t_0$  in  $G_0$ , and any automorphism  $T$  of  $G_0$ , which carries  $t_0$  into itself, and whose  $(m-1)$ -st power is the automorphism of  $G_0$  under  $t_0$ , to serve as the automorphism of  $G_0$  under  $s_0$ , then there is one and only one corresponding abstract  $m$ -group  $G$ ; conversely every  $m$ -group can be thus determined.*

При доказательстве прямого утверждения теоремы 0.5 [2, с. 246] (Э. Пост называет его первой частью) для любых элементов

$$s_{i_j} = t_{i_j} s_0, t_{i_j} \in G_0, j = 1, \dots, m$$

из смежного класса  $G = G_0 s_0$  вначале определяется элемент

$$c(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}) = t_{i_1} s_0 t_{i_2} s_0 \dots t_{i_m} s_0.$$

Затем доказывается равенство

$$c(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}) = (t_{i_1} \cdot T^{-1} t_{i_2} \dots T^{-(m-1)} t_{i_m} \cdot t_0) s_0, \quad (0.10)$$

где  $T$  – автоморфизм из условия теоремы 0.5, действующий по правилу

$$T: Tt \rightarrow s_0^{-1} t s_0, t \in G_0,$$

а символом  $T^{-(j-1)} t_{i_j}$  обозначается образ элемента  $t_{i_j}$  при действии отображения  $T^{-(j-1)}$ . После этого устанавливается, что смежный класс  $G = G_0 s_0$  является  $m$ -арной группой относительно  $m$ -арной операции  $c$ .

Если для обозначения образа элемента  $t$  при отображении  $T^{-1}$  вместо символа  $T^{-1} t$  использовать символ  $t^{T^{-1}}$  и положить  $T^{-1} = \beta$ , то равенство Э. Поста (0.10) примет вид

$$c(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}) = (t_{i_1}^{\beta} t_{i_2}^{\beta} \dots t_{i_m}^{\beta} t_0) s_0. \quad (0.11)$$

Равенство (0.11) отличается от равенств (0.1) и (0.7) только обозначениями и множителем  $s_0$ , с помощью которого осуществляется переход от элемента  $t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_m}^{\beta} t_0$  множества  $G_0$  к элементу

$c(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m})$  множества  $G = G_0 s_0$ .

В следующих разделах мы подробно рассмотрим прямое и обратное утверждения теоремы 0.5 и покажем эквивалентность равенств из теоремы 0.4 соответствующим равенствам из теоремы 0.5.

### 1 Обратное утверждение теоремы 0.5

Для доказательства обратного утверждения теоремы 0.5 (Э. Пост называл его второй частью) нам понадобится следующая

**Лемма 1.1.** *Пусть  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа,  $G$  и  $A_0$  – ее обертывающая и соответствующая группы,  $a$  – фиксированный элемент из  $A$ ,*

$$\gamma: u \rightarrow aua^{-1}, u \in G,$$

$$d_i = a^i, i = 1, 2, \dots.$$

Тогда:

1) сужение  $\gamma$  на  $A$  является автоморфизмом  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ ;

2) сужение  $\gamma$  на  $A_0$  является автоморфизмом группы  $A_0$ ;

3) отображение  $\gamma$  оставляет неподвижным элемент  $d_i$  для любого  $i = 1, 2, \dots$ ;

4)  $i$ -ая степень автоморфизма  $\gamma$  действует на  $G$  как внутренний автоморфизм, определяемый элементом  $d_i$ , то есть

$$u^{\gamma^i} = d_i u d_i^{-1}, u \in G.$$

**Доказательство.** 1) Так как  $\gamma$  – внутренний автоморфизм группы  $G$ ,  $A_0$  – нормальная подгруппа в  $G$ , то сужение  $\gamma$  на  $A_0$  является автоморфизмом группы  $A_0$ .

2) Ясно, что сужение  $\gamma$  на  $A$  является биекцией. А так как

$$[x_1 x_2 \dots x_n]^{\gamma} = a(x_1 x_2 \dots x_n) a^{-1} = (ax_1 a^{-1})(ax_2 a^{-1}) \dots (ax_n a^{-1}) = [x_1^{\gamma} x_2^{\gamma} \dots x_n^{\gamma}]$$

для всех  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ , то  $\gamma$  – автоморфизм  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ .

3) Так как  $d_i^{\gamma} = a(a^i) a^{-1} = a^i = d_i$ , то  $d_i^{\gamma} = d_i$ .

4) Так как  $u^{\gamma^i} = a^i u (a^{-1})^i = a^i u (a^i)^{-1} = d_i u d_i^{-1}$ , то  $u^{\gamma^i} = d_i u d_i^{-1}$ . Лемма доказана.

Если в теореме 0.5 словесные формулировки записать в виде формул, то обратное утверждение этой теоремы может принять следующий вид.

**Теорема 1.1 (Е. Post [2]).** *Пусть  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа,  $G$  и  $A_0$  – ее обертывающая и соответствующая группы,  $a$  – фиксированный элемент из  $A$ ,*

$$b = a^{n-1} \in A_0, \quad (1.1)$$

$\gamma$  – сужение на  $A_0$  автоморфизма  $\gamma$  из леммы 1.1, то есть

$$u^{\gamma} = aua^{-1}, u \in A_0. \quad (1.2)$$

Тогда  $\gamma$  является автоморфизмом группы  $A_0$ , и для любых  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ ,  $u \in A_0$  выполняются следующие условия:

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = u_1 u_2^{\gamma} \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b a, \quad (1.3)$$

где  $u_i = x_i a^{-1}, i = 1, 2, \dots, n$ ;

$$b^{\gamma} = b; \quad (1.4)$$

$$u^{\gamma^{n-1}} = b u b^{-1}. \quad (1.5)$$

**Доказательство.** То, что  $\gamma$  – автоморфизм группы  $A_0$ , доказано в 1) леммы 1.1.

Так как

$$\begin{aligned} & u_1 u_2^{\gamma} \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b a = \\ & = (x_1 a^{-1}) a (x_2 a^{-1}) a^{-1} a a (x_3 a^{-1}) a^{-1} a^{-1} \dots \\ & \dots a^{n-2} (x_{n-1} a^{-1}) a^{-1} \dots a^{-1} a \dots a (x_n a^{-1}) a^{-1} \dots a^{-1} a^{n-1} a = \\ & = x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n = [x_1 x_2 \dots x_n], \end{aligned}$$

то верно (1.3).

Полагая в 3) леммы 1.1  $b = d_{n-1}$ , получим (1.4).

Полагая в 4) леммы 1.1  $i = n - 1$ ,  $b = d_{n-1}$ , получим (1.5). Теорема доказана.

Пусть  $\langle A, [ ] \rangle$ ,  $G$ ,  $A_0$ ,  $a$ ,  $b$  и  $\gamma$  – те же, что и в теореме 1.1. Во введении отмечалось, что обратный элемент  $a^{-1}$  в группе  $G$  совпадает с произведением элементов  $a_1 a_2 \dots a_{n-2}$ , где  $a_1 \dots a_{n-2}$  – обратная последовательность для элемента  $a$  в  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$ . Поэтому, учитывая, что  $n$ -арная операция  $[ ]$  является производной от операции в группе  $G$ , равенства (0.4)–(0.6) могут быть переписаны следующим образом:

$$x \circ_a y = xa^{-1}y, \quad (1.6)$$

$$\beta_a: x \rightarrow axa^{-1} \quad (1.7)$$

$$d_a = a^n, \quad (1.8)$$

где в правых частях записанных равенств присутствует произведение элементов в группе  $G$ .

Покажем, что из равенств (1.3), (1.4) и (1.5) теоремы 1.1 следуют соответственно равенства (0.7), (0.8) и (0.9) теоремы 0.4.

Отображение  $\gamma$ , являясь внутренним автоморфизмом группы  $G$ , определяемым элементом  $a$ , оставляет на месте элементы  $a$  и  $a^{-1}$ , то есть  $a^\gamma = a$ ,  $(a^{-1})^\gamma = a^{-1}$ . Кроме того, как уже отмечалось, элемент  $a^{-1}$  совпадает с произведением элементов  $a_1 a_2 \dots a_{n-2}$ , где  $a_1 \dots a_{n-2}$  – обратная последовательность для элемента  $a$  в  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$ . Будем использовать также равенства (1.6) и (1.8), а также тот факт, что  $\gamma$  – автоморфизм группы  $G$ . Тогда из (1.3) последовательно получаем цепочку равенств

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = (x_1 a^{-1})(x_2 a^{-1})^\gamma \dots (x_n a^{-1})^{\gamma^{n-1}} a^{n-1} a,$$

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = (x_1 a^{-1}) x_2^\gamma (a^{-1})^\gamma \dots x_n^{\gamma^{n-1}} (a^{-1})^{\gamma^{n-1}} a^n,$$

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 a^{-1} x_2^\gamma a^{-1} \dots x_n^{\gamma^{n-1}} a^{-1} a^n,$$

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 \circ_a x_2^\gamma \circ_a \dots \circ_a x_n^{\gamma^{n-1}} \circ_a d_a.$$

Ввиду (1.7), сужение отображения  $\gamma$  на  $A$  совпадает с отображением  $\beta_a$ . Поэтому, заменяя в последнем равенстве  $\gamma$  на  $\beta_a$ , получим равенство (0.7). Таким образом, из (1.3) следует (0.7).

Из (1.4) последовательно получаем

$$b^\gamma a = ba, \quad b^\gamma a^\gamma = ba,$$

$$(ba)^\gamma = ba, \quad (a^{n-1} a)^\gamma = a^{n-1} a, \quad (a^n)^\gamma = a^n,$$

откуда, из (1.8) и из отмеченного выше совпадения на множестве  $A$  отображений  $\gamma$  и  $\beta_a$  вытекает справедливость равенства (0.8). Таким образом, из (1.4) следует (0.8).

Аналогично, из (1.5) для  $u = xa^{-1}$  последовательно получаем

$$(xa^{-1})^{\gamma^{n-1}} = a^{n-1} xa^{-1} (a^{-1})^{n-1},$$

$$x^{\gamma^{n-1}} (a^{-1})^{\gamma^{n-1}} = a^n a^{-1} xa^{-1} (a^{-1})^{n-1},$$

$$x^{\gamma^{n-1}} a^{-1} = a^n a^{-1} xa^{-1} (a^{-1})^{n-1},$$

$$x^{\gamma^{n-1}} = a^n \circ_a x \circ_a (a^{-1})^{n-2}.$$

Так как, ввиду замечаний 0.1 и 0.2,  $(a^{-1})^{n-2} = d_a^{-1}$ , то из последнего равенства и совпадения на множестве  $A$  отображений  $\gamma$  и  $\beta_a$  вытекает справедливость равенства (0.9). Таким образом, из (1.5) следует (0.9).

Теперь мы можем утверждать, что теорема 0.2 является следствием теоремы 1.1. На самом деле обе эти теоремы являются эквивалентными утверждениями, так как, проведя все рассуждения в обратном порядке, можно убедиться в том, что теорема 1.1 является следствием теоремы 0.2.

## 2 Прямое утверждение теоремы 0.5

Если в теореме 0.5 словесные формулировки записать в виде формул, то прямое утверждение этой теоремы может принять следующий вид.

**Теорема 2.1 (Е. Post [2]).** Пусть в группе  $G$  имеются подгруппа  $A_0$  и элемент  $a$  такие, что верно (1.1); пусть также подгруппа  $A_0$  обладает таким автоморфизмом  $\gamma$ , что верны (1.2), (1.4) и (1.5). Тогда смежный класс  $A = A_0 a$  является  $n$ -арной группой с  $n$ -арной операцией  $[ ]$ , производной от операции в группе  $G$ , и верно (1.3); кроме того, множество  $A_0$  может быть представлено в виде

$$A_0 = \{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \mid x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in A\}. \quad (2.1)$$

Мы докажем более общую версию теоремы 0.5.

**Теорема 2.2 (Е. Post [2]).** Пусть в группе  $G$  имеются подгруппа  $A_0$  и элемент  $a$  такие, что верно (1.1); пусть также подгруппа  $A_0$  обладает таким автоморфизмом  $\gamma$ , что верны (1.4) и (1.5). Тогда  $\langle A = A_0 a, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа с  $n$ -арной операцией (1.3). Если действие автоморфизма  $\gamma$  определяется правилом (1.2), то  $n$ -арная операция  $[ ]$  является производной от операции в группе  $G$ ; кроме того, множество  $A_0$  может быть представлено в виде (2.1).

*Доказательство.* Сразу же отметим, что из равенства  $A = A_0 a$  вытекает  $a \in A$ ,  $A_0 = Aa^{-1}$ . Тогда для любых  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$  имеем

$$u_1 = x_1 a^{-1}, \quad u_2 = x_2 a^{-1}, \quad \dots, \quad u_n = x_n a^{-1} \in A_0.$$

Так как  $A_0$  – группа,  $\gamma$  – ее автоморфизм, то

$$u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b \in A_0,$$

откуда следует  $u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} ba \in A$ . Так как  $n$ -арная операция  $[ ]$  определяется равенством (1.3), то  $[x_1 x_2 \dots x_n] \in A$ . Следовательно, множество  $A$  замкнуто относительно  $n$ -арной операции  $[ ]$ .

Используя (1.3), (1.4) и (1.5), будем иметь для любого  $i = 0, 1, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} & [x_i \dots x_i [x_{i+1} \dots x_{i+n}] x_{i+n+1} \dots x_{2n-1}] = \\ & = u_1 u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} ([x_{i+1} \dots x_{i+n}] a^{-1})^\gamma u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba = \\ & = u_1 u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} (u_{i+1} u_{i+2}^\gamma \dots u_{i+n}^{\gamma^{n-1}} ba a^{-1})^\gamma u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba = \\ & = u_1 u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} (u_{i+1} u_{i+2}^\gamma \dots u_{i+n}^{\gamma^{n-1}} b)^\gamma u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba = \\ & = u_1 u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} (u_{i+1}^\gamma u_{i+2}^{\gamma^2} \dots u_n^{\gamma^{n-1}} u_{n+1}^\gamma \dots \\ & \dots u_{i+n}^{\gamma^{n-i}} b^\gamma) u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} (u_{n+1}^\gamma \dots u_{i+n}^\gamma)^{\gamma^{n-1}} b u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} b a = \\
 &= u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} (b u_{n+1}^\gamma \dots u_{i+n}^\gamma b^{-1}) b u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} b a = \\
 &= u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b u_{n+1}^\gamma \dots u_{i+n}^\gamma u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots a_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} b a = \\
 &= u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b u_{n+1}^\gamma \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} b a,
 \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
 [x_1 \dots x_i [x_{i+1} \dots x_{i+n}] x_{i+n+1} \dots x_{2n-1}] &= \\
 &= u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b u_{n+1}^\gamma \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} b a.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 [x_1 \dots x_i [x_{i+1} \dots x_{i+n}] x_{i+n+1} \dots x_{2n-1}] &= \\
 &= [x_1 \dots x_j [x_{j+1} \dots x_{j+n}] x_{j+n+1} \dots x_{2n-1}]
 \end{aligned}$$

для любых  $i, j = 0, 1, \dots, n-1$ , что означает ассоциативность  $n$ -арной операции  $[ ]$ .

Для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  и любых  $g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n, h \in A$  рассмотрим в  $\langle A, [ ] \rangle$  уравнение

$$[g_1 \dots g_{i-1} t g_{i+1} \dots g_n] = h. \quad (2.2)$$

Так как

$$g_1 = u_1 a, \dots, g_{i-1} = u_{i-1} a, \\ g_{i+1} = u_{i+1} a, \dots, g_n = u_n a, h = w a,$$

для некоторых  $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n, w \in A_0$ , и, кроме того,  $\gamma$  – автоморфизм группы  $A_0$ , то

$$u_2^\gamma, \dots, u_{i-1}^{\gamma^{i-2}}, u_{i+1}^\gamma, \dots, u_n^{\gamma^{n-1}} \in A_0.$$

В группе  $A_0$  разрешимо уравнение

$$u_1 u_2^\gamma \dots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} s u_{i+1}^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b = w,$$

то есть существует  $v \in A_0$  такой, что

$$u_1 u_2^\gamma \dots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} v u_{i+1}^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b = w.$$

Обозначив через  $\delta$  автоморфизм, обратный для автоморфизма  $\gamma$ , и положив  $u_i = v^{\delta^{i-1}}$ , последнее равенство можно переписать в виде

$$u_1 u_2^\gamma \dots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b = w,$$

откуда

$$u_1 u_2^\gamma \dots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b a = w a,$$

то есть

$$u_1 u_2^\gamma \dots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b a = h.$$

Из последнего равенства, полагая  $g_i = u_i a$  и учитывая (1.3), получим

$$\begin{aligned}
 [g_1 g_2 \dots g_{i-1} g_i g_{i+1} \dots g_n] &= \\
 &= u_1 u_2^\gamma \dots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b a = h.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $g_i$  – решение уравнения (2.2). Таким образом, согласно определению В. Дертте,  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа.

Используя (1.2) и (1.3), получим

$$\begin{aligned}
 [x_1 x_2 \dots x_n] &= u_1 u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b a = \\
 &= x_1 a^{-1} (a x_2 a^{-1} a^{-1}) (a^2 x_3 a^{-1} a^{-2}) \dots \\
 &\dots (a^{n-2} x_{n-1} a^{-1} a^{-(n-2)}) (a^{n-1} x_n a^{-1} a^{-(n-1)}) a^{n-1} a = \\
 &= x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n,
 \end{aligned}$$

то есть

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Следовательно,  $n$ -арная операция  $[ ]$  является производной от операции в группе  $G$ .

Используя этот факт, а также замкнутость множества  $A$  относительно  $n$ -арной операции  $[ ]$ , получим

$$x_1 \dots x_{n-1} a = [x_1 \dots x_{n-1} a] \in A$$

для любых  $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ , откуда и из равенства  $A_0 = A a^{-1}$  следует

$$x_1 \dots x_n = [x_1 \dots x_n a] a^{-1} \in A a^{-1} = A_0.$$

Следовательно,

$$\{x_1 \dots x_{n-1} \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in A\} \subseteq A_0.$$

Так как  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа, то существуют  $a_1, \dots, a_{n-2} \in A$  такие, что

$$[a a a_1 \dots a_{n-2}] = a,$$

откуда и из производности  $n$ -арной операции  $[ ]$  от операции в группе  $G$ , вытекает

$$a a a_1 \dots a_{n-2} = a.$$

Из последнего равенства следует

$$a^{-1} = a_1 \dots a_{n-2}.$$

А так как  $A_0 = A a^{-1}$ , то

$$A_0 = A a_1 \dots a_{n-2} \subseteq \{x_1 \dots x_{n-1} \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in A\}.$$

Из доказанных включений следует равенство (2.1). Теорема доказана.

**Замечание 2.1.** Так как  $n$ -арная операция  $[ ]$   $n$ -арной группы  $\langle A = A_0 a, [ ] \rangle$  из теорем 2.1 и 2.2 является производной от операции в группе  $G$ , то подгруппа группы  $G$ , порожденная смежным классом  $A = A_0 a$ , является обертывающей группой для  $n$ -арной группы  $\langle A = A_0 a, [ ] \rangle$ . Если непосредственно в условия теорем 2.1 и 2.2 включить требование, чтобы группа  $G$  порождалась смежным классом  $A = A_0 a$ , то получим еще две версии прямого утверждения теоремы 0.5.

**Теорема 2.3 (Е. Post [2]).** Пусть в группе  $G$  имеются подгруппа  $A_0$  и элемент  $a$  такие, что группа  $G$  порождается смежным классом  $A = A_0 a$  и верно (1.1); пусть также подгруппа  $A_0$  обладает таким автоморфизмом  $\gamma$ , что верны (1.2), (1.4) и (1.5). Тогда  $\langle A = A_0 a, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа с  $n$ -арной операцией, которая определяется с помощью (1.3); обертывающей группой для этой  $n$ -арной группы является группа  $G$ , а соответствующей группой – ее подгруппа  $A_0$ .

**Теорема 2.4 (Е. Post [2]).** Пусть в группе  $G$  имеются подгруппа  $A_0$  и элемент  $a$  такие, что группа  $G$  порождается смежным классом  $A = A_0 a$  и верно (1.1); пусть также подгруппа  $A_0$  обладает таким автоморфизмом  $\gamma$ , что верны (1.4) и (1.5). Тогда  $\langle A = A_0 a, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа с  $n$ -арной операцией, которая определяется с помощью (1.3). Если действие автоморфизма  $\gamma$  определяется правилом (1.2), то обертывающей группой для этой  $n$ -арной группы является группа  $G$ , а соответствующей группой – ее подгруппа  $A_0$ .

Проведенный выше сравнительный анализ теоремы Глускина-Хоссу и соответствующего результата Э. Поста (теорема 0.5) показывает,

что речь идет не просто об эквивалентных утверждениях, а фактически об одном и том же результате. Небольшие отличия, существующие между сравниваемыми результатами, объясняются тем, что Э. Поста в своей теореме использовал группу  $A_0$ , а в теореме Глускина-Хоссу фигурирует некоторая изоморфная копия этой группы, например, группа  $\langle A, \circ_a \rangle$ , как в теореме 0.4. Замена группы  $A_0$  ее изоморфной копией приводит к тому, что в теореме Глускина-Хоссу, в отличие от теоремы Поста, в равенстве, устанавливающем связь между  $n$ -арной и бинарной операциями, отсутствует множитель, с помощью которого определяется изоморфизм указанных групп.

Таким образом, по нашему мнению, включение в название теоремы Глускина-Хоссу фамилии Э. Поста не должно вызывать возражений, так как является обоснованным и восстанавливает историческую справедливость.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

3. Тютин, В.И. К аксиоматике  $n$ -арных групп / В.И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.

4. Гальмак, А.М. Об определении  $n$ -арной группы / А.М. Гальмак // Междунар. конф. по алгебре. – Тез. докл. – Новосибирск, 1991. – С. 30.

5. Гальмак, А.М.  $n$ -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.

6. Русаков, С.А. Алгебраические  $n$ -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. Гальмак, А.М.  $n$ -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. Центр БГУ, 2007. – 323 с.

8. Глускин, Л.М. Позиционные оперативы / Л.М. Глускин // Мат. сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 444–472.

9. Hosszu, M. On the explicit form of  $n$ -group operations / M. Hosszu // Publ. Math. – 1963. – Vol. 10, № 1–4. – P. 88–92.

10. Соколов, Е.И. О теореме Глускина-Хоссу для  $n$ -групп Дёрнте / Е.И. Соколов // Мат. исследования. – Вып. 39. – С. 187–189.

Поступила в редакцию 30.05.12.

УДК 512.542

## О КОНЕЧНЫХ $\pi$ -РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С БИЦИКЛИЧЕСКИМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

Д.В. Грицук<sup>1</sup>, В.С. Монахов<sup>1</sup>, О.А. Шпырко<sup>2</sup><sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь<sup>2</sup>Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Севастополь, Украина

## ON FINITE $\pi$ -SOLVABLE GROUPS WITH BICYCLIC SYLOW SUBGROUPS

D.V. Gritsuk<sup>1</sup>, V.S. Monakhov<sup>1</sup>, O.A. Shpyrko<sup>2</sup><sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus<sup>2</sup>Branch of the M.V. Lomonosov Moscow State University, Sevastopol, Ukraine

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Доказывается, что производная  $\pi$ -длина конечной  $\pi$ -разрешимой группы с бициклическими силовскими  $p$ -подгруппами для всех  $p \in \pi$  не превышает 6, а в случае, когда  $2 \notin \pi$ , не превышает 3.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\pi$ -разрешимая группа, бициклическая группа, силовская подгруппа, производная  $\pi$ -длина.

The group is called a bicyclic group if it is the product of two cyclic subgroups. It is proved that the  $\pi$ -solvable group with bicyclic Sylow  $p$ -subgroups for any  $p \in \pi$  is at most 6 and if  $2 \notin \pi$ , then the derived  $\pi$ -length of a  $\pi$ -solvable group with bicyclic Sylow  $p$ -subgroups for any  $p \in \pi$  is at most 3.

**Keywords:** finite group,  $\pi$ -solvable group, bicyclic group, Sylow subgroup, derived  $\pi$ -length.

### Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Инварианты конечных разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в [3]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4. Разрешимые группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими силовскими подгруппами, изучены в [4].

Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^a(G)$ . Ясно, что в случае, когда  $\pi = \pi(G)$ , значение  $l_\pi^a(G)$  совпадает со значением производной длины группы  $G$ .

В настоящей статье исследуется производная  $\pi$ -длина  $\pi$ -разрешимой группы, у которой силовские  $p$ -подгруппы бициклические для всех  $p \in \pi$ . Доказывается, что  $l_\pi^a(G) \leq 6$ , а если

$2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ . Отсюда вытекают некоторые результаты работы [3].

### 1 Основные понятия

Пусть  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел, а  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Дополнение к  $\pi$  во множестве  $\mathbb{P}$  обозначается через  $\pi'$ . Символом  $\pi$  обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел  $\mathbb{N}$  следующим образом:  $\pi(a)$  – множество простых чисел, делящих натуральное число  $a$ . Для группы  $G$  считаем, что  $\pi(G) = \pi(|G|)$ .

Зафиксируем некоторое множество простых чисел  $\pi$ . Если  $\pi(m) \subseteq \pi$ , то натуральное число  $m$  называется  $\pi$ -числом. Группа  $G$  называется  $\pi$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi$ , и  $\pi'$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi'$ . В последнем случае  $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$ .

Пусть  $G$  – группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы  $G$ :

$$1 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_i \subseteq \dots,$$

где  $F_{i+1}/F_i = F(G/F_i(G))$ . Здесь  $F(X)$  – подгруппа Фиттинга группы  $X$ , т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы  $X$ . Если группа  $G$  разрешима, то существует натуральное число  $k$  такое, что  $F_k = G$ . Наименьшее

натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной разрешимой группы  $G$  и обозначают через  $n(G)$ . Наименьшее натуральное число  $n$ , для которого выполняется равенство  $G^{(n)} = 1$ , называют производной длиной разрешимой группы  $G$  и обозначают через  $d(G)$ . Здесь  $G'$  – коммутант группы  $G$  и  $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ .

Группа  $G$  называется  $\pi$ -разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1.1)$$

факторы которого являются либо разрешимыми  $\pi$ -группами, либо  $\pi'$ -группами. Ряд (1.1) будем называть  $(\pi', \pi)$ -рядом группы  $G$ . Наименьшее число  $\pi$ -факторов среди всех нормальных  $(\pi', \pi)$ -рядов группы  $G$  называется  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi(G)$ . При  $\pi = \{p\}$  определение  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы превращается в определение  $p$ -длины  $l_p(G)$ , предложенное Ф. Холлом и Г. Хигменом [5] для  $p$ -разрешимых групп. Элементарная теория  $p$ -длины изложена в монографии Хупперта [2].

Поскольку  $\pi$ -факторы  $(\pi', \pi)$ -ряда  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  разрешимы, то каждая  $\pi$ -разрешимая группа обладает  $(\pi', \pi^n)$ -рядом, т. е. таким нормальным  $(\pi', \pi)$ -рядом, у которого все  $\pi$ -факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных  $\pi$ -факторов среди всех  $(\pi', \pi^n)$ -рядов группы  $G$  называется нильпотентной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^n(G)$ . Если  $\pi(G) \subseteq \pi$ , то  $\pi$ -разрешимая группа  $G$  становится разрешимой и значение нильпотентной  $\pi$ -длины группы  $G$  совпадает со значением нильпотентной длины.

Теперь введем понятие производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы. Обратим внимание на то, что здесь будут использоваться субнормальные ряды. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным  $(\pi', \pi^a)$ -рядом, т. е. таким рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (1.2)$$

что подгруппа  $G_i$  нормальна в  $G_{i-1}$  и факторы  $G_{i-1}/G_i$  являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами для всех  $i$ . Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех субнормальных  $(\pi', \pi^a)$ -рядов группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^a(G)$ . Ясно, что в случае, когда  $\pi = \pi(G)$ , значение  $l_\pi^a(G)$  совпадает со значением производной длины группы  $G$ .

Метациклическая группа – это группа, содержащая циклическую нормальную подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая. Ясно, что метациклическая группа всегда является бициклической. Бициклическая примарная группа нечетного порядка является метациклической [2, III.11.5]. Бициклические 2-группы и непримарные бициклические группы нечетного порядка могут быть неметациклическими (см. примеры 2.2 и 2.3 в статье [4]). Общие свойства бициклических групп можно найти в монографии [2].

## 2 Вспомогательные результаты

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

**Лемма 2.1** [3, следствие теоремы 2]. *Группа нечетного порядка с метациклическими силовскими подгруппами дисперсивна по Оре и имеет нильпотентный коммутант.*

Из определений  $\pi$ -длины, нильпотентной  $\pi$ -длины и производной  $\pi$ -длины вытекает следующая лемма.

**Лемма 2.2.** *Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, то  $l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G)$ .*

В дальнейшем под  $l_\pi^*(G)$  будем понимать либо всюду  $l_\pi(G)$ , либо всюду  $l_\pi^n(G)$ , либо всюду  $l_\pi^a(G)$ .

**Лемма 2.3** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда:

1) если  $H$  – подгруппа группы  $G$ , то

$$l_\pi^*(H) \leq l_\pi^*(G);$$

2) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^*(G/N) \leq l_\pi^*(G)$  и  $l_\pi^*(G) \leq l_\pi^*(G/N) + l_\pi^*(N)$ ;

3) если  $N$  – нормальная  $\pi'$ -подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^*(G/N) = l_\pi^*(G)$ ;

4) если  $G$  и  $V$  –  $\pi$ -разрешимые группы, то  $l_\pi^*(G \times V) = \max\{l_\pi^*(G), l_\pi^*(V)\}$ ;

5) если  $N_1$  и  $N_2$  – нормальные подгруппы в  $G$ , то  $l_\pi^*(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^*(G/N_1), l_\pi^*(G/N_2)\}$ .

*Доказательство.* Для  $l_\pi(G)$  и  $l_\pi^n(G)$  утверждения доказаны в [2] и [7] соответственно. Докажем справедливость утверждения для производной  $\pi$ -длины  $l_\pi^a(G)$ .

Для  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  зафиксируем субнормальный  $(\pi', \pi^a)$ -ряд (1.2), в котором число абелевых  $\pi$ -факторов совпадает с  $l_\pi^a(G) = t$ .

1. Пусть  $H_i = G_i \cap H$ . Ряд

$$H = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_n = 1 \quad (2.1)$$

будет субнормальным для подгруппы  $H$ , причем факторы

$$H_i / H_{i+1} = (G_i \cap H) / (G_{i+1} \cap H) \simeq (G_i \cap H)G_{i+1} / G_{i+1}$$

изоморфны подгруппам факторов  $(\pi', \pi^a)$ -ряда (1.2). Поэтому построенный ряд (2.1) будет  $(\pi', \pi^a)$ -рядом группы  $H$  и число абелевых  $\pi$ -факторов этого ряда не превосходит  $t$ . Из определения производной  $\pi$ -длины заключаем, что  $l_\pi^a(H) \leq t = l_\pi^a(G)$ .

2. Ясно, что ряд

$$G/N = G_0/N \supseteq G_1/N \supseteq \dots \supseteq G_n/N = 1 \quad (2.2)$$

будет субнормальным рядом группы  $G/N$  с факторами

$$\begin{aligned} (G_i N / N) / (G_{i+1} N / N) &\simeq G_i N / G_{i+1} N = \\ &= G_i (G_{i+1} N) / G_{i+1} N = \\ &\simeq G_i / (G_i \cap G_{i+1} N) = G_i / (G_{i+1} (G_i \cap N)) = \\ &\simeq (G_i / G_{i+1}) / (G_{i+1} (G_i \cap N) / G_{i+1}), \end{aligned}$$

изоморфными фактор-группам групп  $G_i / G_{i+1}$ . Построенный ряд (2.2) будет  $(\pi', \pi^a)$ -рядом для группы  $G/N$ , и число его абелевых  $\pi$ -факторов не превосходит  $t$ . Поэтому  $l_\pi^a(G/N) \leq t = l_\pi^a(G)$ .

Пусть теперь ряды

$$G/N = G_0/N \supseteq G_1/N \supseteq \dots \supseteq G_n/N = 1, \quad (2.3)$$

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_m = 1 \quad (2.4)$$

будут субнормальными  $(\pi', \pi^a)$ -рядами, в которых число абелевых  $\pi$ -факторов совпадает с  $l_\pi^a(G/N)$  и с  $l_\pi^a(N)$  соответственно. Тогда ряд

$$\begin{aligned} G &= G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = \\ &= N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_m = 1 \end{aligned}$$

будет субнормальными  $(\pi', \pi^a)$ -рядом группы  $G$ , в котором число абелевых  $\pi$ -факторов равно  $l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N)$ . Из определения производной  $\pi$ -длины получаем, что  $l_\pi^a(G) \leq l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N)$ .

3. Пусть  $N$  – нормальная  $\pi'$ -подгруппа группы  $G$  и пусть ряд (2.3) является  $(\pi', \pi^a)$ -рядом группы  $G/N$ , в котором число абелевых  $\pi$ -факторов совпадает с  $l_\pi^a(G/N)$ . Тогда ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq N \supseteq 1$$

будет  $(\pi', \pi^a)$ -рядом для группы  $G$ , в котором число абелевых  $\pi$ -факторов равно  $l_\pi^a(G/N)$ . Из определения производной  $\pi$ -длины следует, что  $l_\pi^a(G) \leq l_\pi^a(G/N)$ . Так как уже доказано, что  $l_\pi^a(G/N) \leq l_\pi^a(G)$ , то  $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$ .

4. Поскольку  $G$  и  $V$  – подгруппы группы  $G \times V$ , то из утв. 1 следует, что

$$\max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\} \leq l_\pi^a(G \times V).$$

Покажем, используя индукцию по  $|G| + |V|$ , обратное неравенство. Пусть

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = 1, \quad (2.5)$$

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_m = 1 \quad (2.6)$$

– субнормальные  $(\pi', \pi^a)$ -ряды  $\pi$ -разрешимых групп  $G$  и  $V$ , в которых число абелевых  $\pi$ -факторов равно  $l_\pi^a(G)$  и  $l_\pi^a(V)$  соответственно. Предположим, что одна из подгрупп  $G/G_1$ ,  $V/V_1$  является  $\pi'$ -подгруппой. Пусть, например,  $G/G_1$  –  $\pi'$ -подгруппа. Тогда  $l_\pi^a(G) = l_\pi^a(G_1)$ , а по индукции

$$l_\pi^a(G_1 \times V) = \max\{l_\pi^a(G_1), l_\pi^a(V)\}.$$

Поскольку

$$(G \times V) / (G_1 \times V) \simeq G / G_1$$

является  $\pi'$ -группой, то

$$l_\pi^a(G \times V) = l_\pi^a(G_1 \times V)$$

и утв. 4 справедливо.

Пусть теперь  $G/G_1$  и  $V/V_1$  являются  $\pi$ -подгруппами. Из выбора рядов (2.5) и (2.6) следует, что

$$l_\pi^a(G_1) = l_\pi^a(G) - 1, l_\pi^a(V_1) = l_\pi^a(V) - 1.$$

Действительно, у  $(\pi', \pi^a)$ -ряда

$$G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = 1$$

число абелевых  $\pi$ -факторов равно  $l_\pi^a(G) - 1$ , поэтому

$$l_\pi^a(G_1) \leq l_\pi^a(G) - 1.$$

Но если  $l_\pi^a(G_1) < l_\pi^a(G) - 1$ , то у ряда (2.5) число абелевых  $\pi$ -факторов равно

$$l_\pi^a(G_1) + 1 < l_\pi^a(G),$$

что противоречит выбору этого ряда. Поэтому

$$l_\pi^a(G_1) = l_\pi^a(G) - 1.$$

Аналогично,  $l_\pi^a(V_1) = l_\pi^a(V) - 1$ . Отсюда следует, что

$$\max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\} = 1 + \max\{l_\pi^a(G_1), l_\pi^a(V_1)\}.$$

Используя индукцию, получаем:

$$l_\pi^a(G_1 \times V_1) = \max\{l_\pi^a(G_1), l_\pi^a(V_1)\}.$$

Так как

$$(G \times V) / (G_1 \times V_1) \simeq G / G_1 \times V / V_1$$

является абелевой  $\pi$ -группой, то

$$l_\pi^a(G \times V) \leq 1 + l_\pi^a(G_1 \times V_1) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}.$$

Утв. 4 доказано.

5. Пусть  $N_1$  и  $N_2$  – нормальные подгруппы в  $G$ . По лемме Ремака группа  $G / (N_1 \cap N_2)$  является подгруппой группы  $(G / N_1) \times (G / N_2)$ , поэтому из утв. 1 и 4 следует, что

$$l_\pi^a(G / (N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^a(G / N_1), l_\pi^a(G / N_2)\}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.4** Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, то  $n(G_\pi) \leq l_\pi^n(G) \leq l_\pi(G)n(G_\pi)$  и

$$d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi).$$

*Доказательство.* Для  $I_\pi^n(G)$  утверждение доказано в [7]. Докажем вторую цепочку неравенств. Пусть

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = 1$$

– нормальный ряд группы  $G$ , факторы которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо  $\pi$ -группами, причем число  $\pi$ -факторов совпадает со значением  $I_\pi(G)$ . Пусть  $G_i / G_{i+1}$  –  $\pi$ -фактор этого ряда. Тогда

$$G_i / G_{i+1} \subseteq G_\pi G_i / G_{i+1},$$

где  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа группы  $G$ . Поэтому

$$d(G_i / G_{i+1}) \leq d(G_\pi).$$

Для каждого натурального  $t$  подгруппа  $(G_i)^{(t)}$  является характеристической в  $G_i$ , поэтому

$$(G_i)^{(t)} \triangleleft G, (G_i)^{(t)} G_{i+1} \triangleleft G.$$

Так как

$$(G_i / G_{i+1})^{(t)} = (G_i)^{(t)} G_{i+1} / G_{i+1},$$

то ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_i \supseteq (G_i)' G_{i+1} \supseteq (G_i)'' G_{i+1} \supseteq \dots \supseteq (G_i)^{(d(G_i/G_{i+1}))} G_{i+1} = G_{i+1} \supseteq \dots \supseteq G_n = 1$$

будет нормальным рядом группы  $G$  и на участке от  $G_i$  до  $G_{i+1}$  число абелевых  $\pi$ -факторов не превышает числа  $d(G_\pi)$ . Поступая так с каждым  $\pi$ -фактором исходного ряда, приходим к нормальному ряду группы  $G$ , факторы которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами, причем число абелевых  $\pi$ -факторов не превысит числа  $I_\pi(G)d(G_\pi)$ . Следовательно,  $I_\pi^a(G) \leq I_\pi(G)d(G_\pi)$ . Из утв. 1 следует, что

$$d(G_\pi) = I_\pi^a(G_\pi) \leq I_\pi^a(G).$$

Лемма доказана.

Напомним, что через  $O_\pi(G)$  ( $O_{\pi'}(G)$ ) обозначается наибольшая нормальная  $\pi$ -подгруппа ( $\pi'$ -подгруппа соответственно) группы  $G$ , а  $O_{\pi',\pi}(G) / O_{\pi'}(G) = O_\pi(G / O_{\pi'}(G))$ .

**Лемма 2.5** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $t$  – натуральное число. Предположим, что  $I_\pi^*(G/N) \leq t$  для всех неединичных нормальных подгрупп  $N$  группы  $G$ , но  $I_\pi^*(G) > t$ . Тогда:

- 1)  $O_{\pi'}(G) = 1$ ;
- 2) в группе  $G$  существует только одна минимальная нормальная подгруппа;
- 3)  $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$  для некоторого простого  $p \in \pi$ ;
- 4)  $O_{p'}(G) = 1$  и  $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ .

*Доказательство.* Для  $I_\pi(G)$  и  $I_\pi^n(G)$  утверждения доказаны в [2] и [7]. Докажем утверждения для  $I_\pi^a(G)$ .

1. Предположим, что  $O_{\pi'}(G) \neq 1$ . Тогда по условию леммы  $I_\pi^a(G / O_{\pi'}(G)) \leq t$ . Теперь из леммы 2.3 (2) заключаем, что

$$I_\pi^a(G) = I_\pi^a(G / O_{\pi'}(G)) \leq t,$$

противоречие. Поэтому предположение неверно и  $O_{\pi'}(G) = 1$ .

2. Допустим, что в группе  $G$  существуют две различные минимальные нормальные подгруппы  $N_1$  и  $N_2$ . Тогда  $N_1 \cap N_2 = 1$  и по условию

$$I_\pi^a(G / N_1) \leq t, I_\pi^a(G / N_2) \leq t.$$

Теперь из леммы 2.3 (5) заключаем, что

$$I_\pi^a(G) \leq \max \{I_\pi^a(G / N_1), I_\pi^a(G / N_2)\} \leq t,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и в группе  $G$  существует только одна минимальная нормальная подгруппа.

3. Так как группа  $G$   $\pi$ -разрешима и  $O_{\pi'}(G) = 1$ , то  $O_\pi(G) \neq 1$ . Подгруппа  $O_\pi(G)$  разрешима и неединична, поэтому ее подгруппа Фиттинга  $F(O_\pi(G))$  отлична от единичной подгруппы и, очевидно,

$$F(O_\pi(G)) \subseteq F(G).$$

Из утв. 1 следует, что  $F(G)$  является  $\pi$ -подгруппой, поэтому

$$F(G) \subseteq F(O_\pi(G)), F(G) = F(O_\pi(G)).$$

Так как подгруппа  $F(G)$  нильпотентна, а согласно утв. 2 в группе  $G$  минимальная нормальная подгруппа единственна, то

$$F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$$

для некоторого простого  $p \in \pi$ .

4. Если  $O_{p'}(G) \neq 1$ , то в группе  $G$  будут существовать две различные минимальные нормальные подгруппы:  $p$ -подгруппа из  $O_p(G)$  и  $p'$ -подгруппа из  $O_{p'}(G)$ . Имеем противоречие с утв. 2. Поэтому  $O_{p'}(G) = 1$ .

Так как подгруппа  $O_p(G)$  нормальна в  $G$ , то  $C_G(O_p(G))$  нормальна в  $G$ . Предположим, что

$$C_G(O_p(G)) \not\subseteq O_p(G).$$

Тогда фактор-группа

$$C_G(O_p(G))O_p(G) / O_p(G)$$

будет неединичной нормальной подгруппой фактор-группы  $G / O_p(G)$ . Поскольку  $O_p(G / O_p(G)) = 1$ , то минимальная нормальная в  $G / O_p(G)$  подгруппа  $A / O_p(G)$  из  $C_G(O_p(G))O_p(G) / O_p(G)$  будет  $p'$ -группой. Пусть  $K$  –  $p'$ -холлова подгруппа из  $A$ . Тогда фактор-группа  $KO_p(G) / O_p(G)$  будет  $p'$ -холловой подгруппой в группе  $A / O_p(G)$ , поэтому



$$A = KO_p(G) = K \times O_p(G).$$

Так как  $K$  холлова, то  $K$  – характеристическая подгруппа в  $A$ , а подгруппа  $A$  нормальна в  $G$ . Следовательно, подгруппа  $K$  нормальна в  $G$  и  $K \subseteq O_p(G) = 1$ .

Имеем противоречие. Поэтому допущение неверно и  $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.6** Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ , то  $l_\pi^a(G) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G)$ .

*Доказательство.* Для  $l_\pi(G)$  и  $l_\pi^n(G)$  утверждения доказаны в [6] и [7]. Докажем справедливость утверждения для производной  $\pi$ -длины  $l_\pi^a(G)$ . Предположим, что утверждение неверно, и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка. Тогда для любой неединичной нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$  по индукции

$$l_\pi^a(G/N) \leq l_{\pi_1}^a(G/N) + l_{\pi_2}^a(G/N). \quad (2.7)$$

По лемме 2.3 (2)

$$l_{\pi_1}^a(G/N) \leq l_{\pi_1}^a(G), l_{\pi_2}^a(G/N) \leq l_{\pi_2}^a(G),$$

поэтому

$$l_\pi^a(G/N) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G). \quad (2.8)$$

Если существует нормальная неединичная подгруппа  $N$  такая, что  $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$ , то из (2.8) получаем, что

$$l_\pi^a(G) = l_\pi^a(G/N) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G),$$

и лемма справедлива. Поэтому следует считать, что  $l_\pi^a(G) > l_\pi^a(G/N)$  для любой неединичной нормальной в  $G$  подгруппы  $N$ . По лемме 2.5  $O_\pi(G) = 1$ , в группе  $G$  только одна минимальная нормальная подгруппа,  $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$  для некоторого простого  $p \in \pi$ ,  $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ . Пусть  $N = F(G)$  и

$$l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G) - i \quad (2.9)$$

для некоторого натурального  $i > 0$ . Фиксируем субнормальный ряд

$$G/N = G_0/N \supset G_1/N \supset \dots \supset G_n/N = 1, \quad (2.10)$$

где  $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$  – либо абелева  $\pi$ -группа, либо  $\pi'$ -группа, причем число абелевых  $\pi$ -факторов совпадает с  $l_\pi^a(G) - i$ .

Без ущерба для доказательства можно считать, что  $p \in \pi_1$ . Так как  $\pi_1 \subseteq \pi$ , то  $\pi' \subseteq (\pi_1)'$ . Поэтому  $\pi'$ -факторы ряда (2.10) будут  $(\pi_1)'$ -факторами. Если  $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$  – абелевый  $\pi$ -фактор ряда (2.10), то

$$\begin{aligned} & (G_i/N)/(G_{i+1}/N) = \\ & = (G_i/N)_1/(G_{i+1}/N) \times (G_i/N)_2/(G_{i+1}/N), \end{aligned}$$

где  $(G_i/N)_1/(G_{i+1}/N)$  –  $\pi_1$ -холлова подгруппа, а  $(G_i/N)_2/(G_{i+1}/N)$  –  $(\pi_1)'$ -холлова подгруппа

группы  $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$ . Теперь ряд (2.10) уплотняем на участке от  $G_i/N$  до  $G_{i+1}/N$  следующим образом

$$G_i/N \supset (G_i/N)_1 \supset G_{i+1}/N.$$

Ясно, что первый фактор  $G_i/N/(G_i/N)_1$  будет  $(\pi_1)'$ -группой, а второй фактор  $(G_i/N)_1/(G_{i+1}/N)$  – абелевой  $\pi_1$ -группой. Поступая так с каждым абелевым  $\pi$ -фактором ряда (2.10), мы приходим к новому ряду группы  $G/N$ , у которого факторы либо абелевы  $\pi_1$ -группы, либо  $(\pi_1)'$ -группы, причем число абелевых  $\pi_1$ -факторов осталось прежним, т. е. совпадает с  $l_\pi^a(G) - i$ . Из определения производной  $\pi$ -длины получаем, что

$$l_{\pi_1}^a(G/N) \leq l_\pi^a(G) - i. \quad (2.11)$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} l_\pi^a(G) & \stackrel{(2.9)}{=} \\ & = l_\pi^a(G/N) + i \stackrel{(2.7)}{\leq} l_{\pi_1}^a(G/N) + l_{\pi_2}^a(G/N) + i \stackrel{(2.11)}{\leq} \\ & \stackrel{(2.11)}{\leq} l_{\pi_1}^a(G) - i + l_{\pi_2}^a(G) + i = l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.7** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_\pi$  – ее  $\pi$ -холлова подгруппа. Если  $G_\pi$  абелева, то  $l_\pi^a(G) \leq 1$ .

*Доказательство.* Ясно, что в любой факторгруппе группы  $G$   $\pi$ -холлова подгруппа абелева. По индукции  $l_\pi^a(G/N) \leq 1$  для каждой неединичной нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$ . По лемме 2.5 в группе  $G$  только одна минимальная нормальная подгруппа,  $O_\pi(G) = 1$  и

$$F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$$

для некоторого простого  $p \in \pi$ . Так как  $F(G) \subseteq G_\pi$  и  $G_\pi$  абелева, то  $G_\pi \subseteq C_G(F(G))$ . Но из леммы 2.5 следует, что

$$C_G(F(G)) \subseteq F(G),$$

поэтому  $G_\pi = F(G)$  и  $l_\pi^a(G) \leq 1$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.8** Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа с бициклической силовской  $p$ -подгруппой. Тогда

$$1) \text{ если } p > 2, \text{ то } l_p(G) \leq 1 \text{ и } l_p^a(G) \leq 2;$$

$$2) \text{ если } p = 2, \text{ то } l_2^a(G) \leq 3 \text{ и } G/O_{2',2}(G)$$

либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна  $S_3$ ; в частности,  $l_2(G) \leq 2$ .

*Доказательство.* По условию в группе  $G$  силовская  $p$ -подгруппа  $G_p$  бициклическая, поэтому подгруппа  $(G_p)'$  абелева [1] и  $d(G_p) \leq 2$ . Если  $l_p(G) \leq 1$ , то  $l_p^a(G) \leq 2$  по лемме 2.7. Пусть  $l_p(G) > 1$ . Тогда по лемме из работы [3] число

$p = 2$  и  $G/O_{2',2}(G)$  изоморфна симметрической группе  $S_3$ . Из леммы 2.7 следует, что  $l_2^a(G/O_{2',2}(G)) \leq 1$ . Поскольку  $l_2(O_{2',2}(G)) \leq 1$  и силовская 2-подгруппа из  $O_{2',2}(G)$  имеет абелевый коммутант, то  $l_2^a(O_{2',2}(G)) \leq 2$  по лемме 2.4. Теперь из леммы 2.3 (2) получаем, что  $l_2^a(G) \leq 3$ . Лемма доказана.

### 3 Основные результаты

**Теорема 3.1.** Пусть  $G - \pi$ -разрешимая группа с бициклическими силовскими  $p$ -подгруппами для всех  $p \in \pi$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi(G) \leq 2$ ,  $l_\pi^n(G) \leq 2$  и  $l_\pi^a(G) \leq 3$ ;
- 2) если  $2 \in \pi$ , то  $l_\pi(G) \leq 4$ ,  $l_\pi^n(G) \leq 4$  и  $l_\pi^a(G) \leq 6$ .

*Доказательство.* 1. Ясно, что в любой фактор-группе группы  $G$  силовские  $p$ -подгруппы являются бициклическими для всех  $p \in \pi$ . Поэтому можно воспользоваться индукцией по порядку группы. По лемме 2.5

$$O_\pi(G) = 1,$$

$$F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G)),$$

$$O_{p'}(G) = 1$$

для некоторого простого  $p \in \pi$ . Так как силовская  $p$ -подгруппа  $G_p$  бициклическая и  $p > 2$ , то  $l_p(G) \leq 1$  по лемме 2.8. Поэтому  $G_p = F(G)$ . По лемме 2.1 подгруппа  $(G_\pi)'$  нильпотентна, поэтому  $(G_\pi)' \subseteq F(G_\pi)$ , фактор-группа  $G_\pi / F(G)$  абелева и  $l_\pi^a(G / F(G)) \leq 1$  по лемме 2.7. Из леммы 2.2 следует, что  $l_\pi(G / F(G)) \leq 1$  и  $l_\pi^n(G / F(G)) \leq 1$ , а значит  $l_\pi(G) \leq 2$  и  $l_\pi^n(G) \leq 2$ . Из того, что  $F(G)$  нильпотентна и метациклическая следует, что  $d(F(G)) \leq 2$ . Следовательно,  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

2. Под  $l_\pi^*(G)$  будем понимать всюду одну из длин:  $l_\pi(G)$ ,  $l_\pi^n(G)$ ,  $l_\pi^a(G)$ . Пусть  $\pi_1 = \pi \setminus \{2\}$ . Тогда по лемме 2.6  $l_\pi^*(G) \leq l_{\pi_1}^*(G) + l_2^*(G)$ . По первому пункту доказываемой теоремы  $l_{\pi_1}(G) \leq l_{\pi_1}^n(G) \leq 2$  и

$l_{\pi_1}^a(G) \leq 3$ , а по лемме 2.8  $l_2(G) = l_2^n(G) \leq 2$  и  $l_2^a(G) \leq 3$ .

Поэтому  $l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq 4$  и  $l_\pi^a(G) \leq 6$ . Теорема доказана.

С учетом того, что  $d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G)$  и  $n(G_\pi) \leq l_\pi^n(G)$  при  $\pi = \pi(G)$ , из теоремы 3.1 получаем два следствия

**Следствие 3.2.** [3] Если  $G -$  разрешимая группа с бициклическими силовскими подгруппами, то  $n(G) \leq 4$  и  $d(G) \leq 6$ .

**Следствие 3.3.** Если  $G -$  группа нечетного порядка с метациклическими силовскими  $p$ -подгруппами для всех  $p \in \pi(G)$ , то  $n(G) \leq 2$  и  $d(G) \leq 3$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
3. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
4. Monakhov, V.S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.
5. Hall, P. The  $p$ -length of a  $p$ -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
6. Ballester-Bolinches, A. Products finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estaban-Romero, M. Asaad // De Gruyter Expositions in Mathematics. – 2010. – 53 с.
7. Монахов, В.С. О нильпотентной  $\pi$ -длине конечной  $\pi$ -разрешимой группы / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 145–152.

Поступила в редакцию 27.09.12.

УДК 517.95

## СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ф.Е. Ломовцев, Д.А. Ляхов

*Белорусский государственный университет, Минск*

## WEAK SOLUTIONS OF HYPERBOLIC EVEN-ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE DOMAINS

F.E. Lomovtsev, D.A. Lyakhov

*Belarusian State University, Minsk*

В работе доказаны теоремы существования и единственности слабых решений  $u(t) \in L_2(]0, T[, H)$  граничной задачи для двучленного гиперболического дифференциально-операторного уравнения произвольного четного порядка с неограниченным операторным коэффициентом  $A(t)$ , имеющим зависящую от  $t$  область определения  $D(A(t))$ . Показано, что для более гладких правых частей слабые решения этой граничной задачи становятся гладкими, т. е. удовлетворяют уравнению почти всюду на  $]0, T[$  в  $H$  и граничным условиям в обычном смысле. Приведен пример новой корректной краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка при нестационарных граничных условиях по пространственной переменной.

**Ключевые слова:** корректность по Адамару, дифференциально-операторное уравнение, неограниченный оператор, переменная область определения, слабое решение.

We prove the existence and uniqueness of weak solutions  $u(t) \in L_2(]0, T[, H)$  of boundary value problem for a two-term even-order hyperbolic operator-differential equation with unbounded operator coefficient  $A(t)$ , having  $t$ -depending domain  $D(A(t))$ . It is shown that for a smooth right-hand part the weak solutions of boundary value problem are smooth, i. e. they satisfy the equation almost everywhere on  $]0, T[$  in  $H$  and the boundary conditions in the usual sense. An example of the new correct boundary value problem for fourth-order partial differential equation with unsteady boundary conditions on the space variables is given.

**Keywords:** correctness by Hadamard, operator-differential equation, unbounded operator, variable domain, weak solution.

### Введение

Пусть  $H$  – гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $|\cdot|$ . На ограниченном интервале  $]0, T[$ ,  $0 < T < +\infty$ , изучается дифференциально-операторное уравнение

$$\mathcal{L}_m(t)u \equiv (-1)^{m-1} \frac{d^{2m}u(t)}{dt^{2m}} + \lambda A(t)u(t) = f(t), \quad (0.1)$$

$$\lambda > 0, t \in ]0, T[,$$

при граничном условии

$$\frac{d^i u(0)}{dt^i} = \frac{d^j u(T)}{dt^j} = 0, \quad (0.2)$$

$$i = 0, m, j = 0, m-2, m = 1, 2, \dots,$$

где  $u$  и  $f$  – соответственно неизвестная и заданная функции переменной  $t$ , принимающие значения в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $A(t)$  – линейные неограниченные операторы в  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(A(t))$ , самосопряженные, т. е.  $A^*(t) = A(t)$  в  $H$ , и положительные операторы, т. е.

$$(A(t)u, u) \geq 0 \quad \forall u \in D(A(t)).$$

Условимся называть уравнение (0.1) гиперболическим. В случае зависящих от  $t$  областей определения операторных коэффициентов изучались только сильные решения граничной задачи (0.1), (0.2) высших четных порядков в [1], [2]. Исследуем существование, единственность, устойчивость по правой части и гладкость слабых решений граничной задачи (0.1), (0.2) в пространстве решений с интегральной нормой по времени.

### 1 Существование слабых решений

Обозначим пространства

$$\mathcal{H}^+ = L_2(]0, T[, H_t^+),$$

$$\mathcal{H} = L_2(]0, T[, H),$$

$$\mathcal{H}^- = L_2(]0, T[, H_t^-),$$

где  $H_t^\pm$  – антидвойственные пространства к гильбертовым пространствам  $H_t^\pm$  – областям определения  $D(A^{1/2}(t))$  квадратного корня  $A^{1/2}(t)$  операторов  $A(t)$  с эрмитовыми нормами

$$[\cdot]_{(t)} = |A^{1/2}(t)\cdot|.$$

**Определение 1.1.** Функция  $u \in \mathcal{H}$  называется слабым решением граничной задачи (0.1), (0.2) для параметра  $\lambda > 0$  и правой части  $f \in \mathcal{H}^-$ , если она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^T \left( u, (-1)^{m-1} \frac{d^{2m}\varphi}{dt^{2m}} + \lambda A(t)\varphi \right) dt = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{(t)} dt \quad \forall \varphi \in \Phi_m, m = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где множества

$$\Phi_m = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \varphi(t) \in D(A(t)), t \in [0, T], \right. \\ \left. d^k \varphi / dt^k, td^{2m}\varphi / dt^{2m}, \right. \\ \left. A(t)\varphi \in \mathcal{H}, k = 1, 2m-1, \right.$$

$$\left. d^i \varphi(0) / dt^i = d^j \varphi(T) / dt^j = 0, i = \overline{0, m-2}, j = \overline{0, m} \right\}$$

и под символом  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(t)}$  понимается полуторалинейная форма двойственности между пространствами  $H_t^+$  и  $H_t^-$ .

Докажем теорему существования слабых решений исследуемой граничной задачи, используя проекционную теорему Ж.-Л. Лионса [3].

Для доказательства корректной разрешимости нам потребуется накладывать дополнительные условия на операторы  $A(t)$ .

$A_1$ . При всех  $t \in [0, T]$  существуют их ограниченные обратные операторы

$$A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H)),$$

которые в  $H$  сильно непрерывны по  $t$  [4, с. 216] и имеют ограниченную сильную производную  $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0, T], \mathcal{L}(H))$  [4, с. 218] такую, что

$$\left( \frac{dA^{-1}(t)}{dt} g, g \right) \leq c_1 (A^{-1}(t)g, g) \quad (1.2)$$

$$\forall g \in H, c_1 \geq 0;$$

**Теорема 1.1.** Пусть при каждом  $t \in [0, T]$  операторы  $A(t)$  самосопряжены и положительны на  $D(A(t))$  в  $H$  и удовлетворяют условию  $A_1$ .

Тогда существуют  $\lambda_1 = 0$  при  $m = 1$  и  $\lambda_m > 0$  при  $m = 2, 3, \dots$  такие, что для каждого  $\lambda > \lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и каждого  $f \in \mathcal{H}^-$  существует слабое решение  $u \in \mathcal{H}$  граничной задачи (0.1), (0.2).

*Доказательство.* В теореме Ж.-Л. Лионса за гильбертово пространство  $F$  возьмём множество

$$F = \{ w \in \mathcal{H} : dw/dt \in \mathcal{H}, w(T) = 0 \}$$

с эрмитовой нормой

$$\|w\|_F = \left[ \int_0^T \left| \frac{dw}{dt} \right|^2 dt + \int_0^T |w|^2 dt \right]^{1/2},$$

за предгильбертово пространство  $\Phi$  – множества  $\Phi_m$  из определения 1.1, наделенные эрмитовыми нормами

$$\|\varphi\|_m = \left[ \int_0^T \left| \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right|^2 dt + \int_0^T |A^{1/2}(t)\varphi|^2 dt \right]^{1/2},$$

за полуторалинейную форму  $E(w, \varphi)$  на произведении пространств  $F \times \Phi_m$  – формы

$$E_m(w, \varphi) = \int_0^T e^{ct} \left( J(t)w, (-1)^{m-1} \frac{d^{2m}\varphi}{dt^{2m}} + \lambda A(t)\varphi \right) dt,$$

где  $J(t)w = -t(dw/dt) + (m-1)w$ , и за антилинейный функционал  $L$  на  $\Phi_m$  – функционалы

$$L_m(\varphi) = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{(t)} dt, \quad \varphi \in \Phi_m.$$

Имеет место непрерывное вложение пространств  $\Phi_m$  в  $F$ . Действительно, используя интерполяционное неравенство [5, с. 1647]

$$\int_0^T \left| \frac{d^i \varphi}{dt^i} \right|^2 dt \leq \frac{T^{2(m-i)}}{((m-i)!)^2} \int_0^T \left| \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right|^2 dt, \quad (1.3)$$

$$\varphi \in \Phi_m, i = \overline{0, m-1},$$

при  $i = 1$  и равномерную по  $t$  ограниченность в  $H$  операторов  $A^{-1/2}(t)$ , из которой следует неравенство  $a_1 |A^{1/2}(t)\varphi| \geq |\varphi| \quad \forall \varphi \in \Phi_m$ , с постоянной  $a_1 = \sup_{0 < t < T} \|A^{-1/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} > 0$ , получаем оценку

$$\max \{ T^{m-1} / ((m-1)!), a_1 \} \|\varphi\|_m \geq \|\varphi\|_F,$$

то есть непрерывное вложение пространств  $\Phi_m$  в пространство  $F$ .

В силу определения  $J(t)w$  при каждом  $\varphi \in \Phi_m$  формы  $E_m(w, \varphi)$  непрерывны по  $w$  на  $F$ . Вычислим удвоенную вещественную часть  $2\text{Re}E_m(\varphi, \varphi)$ , которую разобьём на сумму двух слагаемых

$$I_1 = 2\text{Re} \int_0^T e^{ct} (J(t)\varphi, \lambda A(t)\varphi) dt,$$

$$I_2 = 2\text{Re} \int_0^T e^{ct} \left( J(t)\varphi, (-1)^{m-1} \frac{d^{2m}\varphi}{dt^{2m}} \right) dt.$$

Применяя свойства абстрактных сглаживающих операторов

$$A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}, \quad \varepsilon > 0,$$

из [6], первое слагаемое  $I_1$  перепишем в виде

$$I_1 = 2\text{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T e^{ct} \left( -t \frac{d\varphi}{dt} + (m-1)\varphi, \lambda A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\varphi \right) dt = \\ = -2\lambda \text{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T t e^{ct} \left( \frac{d\varphi}{dt}, A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\varphi \right) dt + \\ + 2\lambda (m-1) \int_0^T e^{ct} |A^{1/2}(t)\varphi|^2 dt.$$

Используя дифференцируемость по  $t$  операторов  $A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)$  в предпоследнем слагаемом, интегрируем по частям один раз по  $t$ , переходим

к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , применяем неравенство (1.2), проводим элементарные оценки и для любого произвольно малого  $\varepsilon_0 > 0$  и любых  $\varphi \in \Phi_m$  получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda(2m-1) \int_0^T e^{c t} |A^{1/2}(t)\varphi|^2 dt + \\ &+ \lambda c \int_0^T t e^{c t} |A^{1/2}(t)\varphi|^2 dt - \\ &- \lambda \int_0^T t e^{c t} \left( \frac{dA^{-1}(t)}{dt} A(t)\varphi, A(t)\varphi \right) dt \geq \\ &\geq \varepsilon_0 \int_0^T e^{c t} |A^{1/2}(t)\varphi|^2 dt + \\ &+ [\lambda(2m-1)a_1 - \varepsilon_0] \int_0^T e^{c t} |\varphi|^2 dt + \\ &+ \lambda(c - c_1) \int_0^T t e^{c t} |A^{1/2}(t)\varphi|^2 dt. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом  $I_2$  интегрируем по частям  $(m-1)$ -раз по  $t$  с помощью формулы

$$\frac{d^k(J(t)v)}{dt^k} = -t \frac{d^{k+1}v}{dt^{k+1}} + (m-1-k) \frac{d^k v}{dt^k}, \quad (1.4)$$

$$k = 1, m-1,$$

и однородных граничных условий, сопряженных к условиям (0.2), и получаем

$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 \geq \\ &\geq \left[ 1 - \left( e^{cT} \sum_{k=0}^{m-1} c_{1,m}^{(k)}(c, T) \varepsilon^{1-\frac{k}{m}} \frac{k}{m} \right)^{1/2} \right] \int_0^T \left| \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right|^2 dt + \\ &+ \varepsilon_0 \int_0^T |\varphi|_{(t)}^2 dt + \\ &+ \left[ (2m-1)c - \left( e^{cT} \sum_{k=0}^{m-1} c_{2,m}^{(k)}(c, T) \tau^{1-\frac{k}{m}} \frac{k}{m} \right)^{1/2} \right] \times \\ &\times \int_0^T t \left| \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right|^2 dt + \\ &+ \left[ \lambda(2m-1)a_1 - \varepsilon_0 - \left( e^{cT} \sum_{k=0}^{m-1} c_{1,m}^{(k)}(c, T) \varepsilon^{-\frac{k}{m}} \left( 1 - \frac{k}{m} \right) \right)^{1/2} \right] \times \\ &\times \int_0^T |\varphi|^2 dt + \\ &+ \left[ \lambda(c - c_1)a_1 - \left( e^{cT} \sum_{k=0}^{m-1} c_{2,m}^{(k)}(c, T) \tau^{-\frac{k}{m}} \left( 1 - \frac{k}{m} \right) \right)^{1/2} \right] \times \\ &\times \int_0^T t |\varphi|^2 dt. \end{aligned}$$

Сначала здесь выбираем достаточно малые параметры  $\varepsilon = \varepsilon_m > 0$ ,  $\tau = \tau_m > 0$ , и достаточно большую постоянную  $c = c_m^{(0)} > 0$  такими, чтобы коэффициент перед первым интегралом стал не

меньше  $\varepsilon_0$ , а коэффициент перед третьим интегралом был неотрицательным. Затем при фиксированных  $\varepsilon_m, \tau_m, c_m^{(0)}$  подбираем значение  $\lambda = \lambda_m$  на столько большим, чтобы коэффициенты перед двумя последними интегралами были неотрицательными. В итоге, отбрасывая три последние интеграла, при любых  $\lambda > \lambda_m$  имеем требуемые оценки

$$|E_m(\varphi, \varphi)| \geq \operatorname{Re} E_m(\varphi, \varphi) \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \|\varphi\|_m^2$$

$$\forall \varphi \in \Phi_m, m = 2, 3, \dots$$

При каждом  $f \in \mathcal{H}^-$  антилинейный функционал  $L_m$  непрерывен по  $\varphi$  на  $\Phi_m$ . Из утверждения теоремы Лионса заключаем, что для любого  $\lambda > \lambda_m$  и для любого  $f \in \mathcal{H}^-$  существует решение  $w \in F$  интегрального уравнения

$$E_m(w, \varphi) = L_m(\varphi), \varphi \in \Phi_m,$$

и, следовательно, слабое решение

$$u = \exp\{c_m^{(0)} t\} J(t)w \in \mathcal{H}$$

граничной задачи (0.1), (0.2).

## 2 Единственность слабых решений

При доказательстве единственности слабых решений граничной задачи (0.1), (0.2) любая функция  $u \in \mathcal{H}$  сглаживается новыми операторами, дающими решения следующей краевой задачи:

$$\mathcal{P}_m v_\delta \equiv (-1)^m \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[ e^{c t} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right] = J_\delta^{-1}(t)u(t), \quad (2.1)$$

$$c \geq 0, \delta > 0,$$

$$\frac{d^i v_\delta(0)}{dt^i} = \frac{d^j v_\delta(T)}{dt^j} = 0, \quad (2.2)$$

$$i = 0, m-2, j = 0, m-1, m = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$J_\delta^{-1}(t) = (I + \delta J(t))^{-1}, \delta > 0,$$

вспомогательный сглаживающий оператор типа резольвенты, а операторы

$$J(t) = -t(d/dt) + (m-1)$$

зависят от  $m$  и действуют в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  с областей определения

$$D(J) = \{h \in \mathcal{H} : t(dh/dt) \in \mathcal{H}, h(T) = 0\}.$$

Для доказательства теоремы единственности мы наложим еще условия на операторы  $A(t)$ .

$A_2$ . При всех  $t \in [0, T]$  в  $H$  существуют сильные производные

$$\frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} \in B([0, T], \mathcal{L}(H)), i = \overline{2, 2m},$$

удовлетворяющие неравенствам

$$\left| \left( \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} g, h \right) \right| \leq c_i |g|_{-(m+1-i), t} |h|_{-m, t}$$

$$\forall g, h \in H, i = \overline{2, m},$$

$$\left| \left( \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} g, h \right) \right| \leq c_i |g| |h|_{-m,t}$$

$$\forall g, h \in H, i = \overline{m+1, 2m},$$

где постоянные  $c_i$  не зависят от  $g, h$  и  $t$ .

**Теорема 2.1.** Пусть выполняются предположения теоремы 1.1 и условие  $A_2$ .

Тогда существуют  $\bar{\lambda}_1 = 0$  при  $m=1$  и  $\bar{\lambda}_m > 0$  при  $m=2, 3, \dots$  такие, что для каждого  $\lambda > \bar{\lambda}_m$  и каждого  $f \in \mathcal{H}$  слабое решение  $u \in \mathcal{H}$  граничной задачи (0.1), (0.2) единственно.

Согласно определению 1.1 слабых решений достаточно показать, что однородная граничная задача (0.1), (0.2), т. е. интегральное уравнение

$$\int_0^T \left( u, (-1)^{m-1} \frac{d^{2m} \varphi}{dt^{2m}} + \lambda A(t) \varphi \right) dt = 0 \quad (2.3)$$

$$\forall \varphi \in \Phi_m, m = 1, 2, \dots,$$

имеет в  $\mathcal{H}$  только тривиальное решение  $u = 0$ .

В уравнении (2.3) полагаем  $\varphi = A^{-1}(t)v_\delta$ , ввиду (2.1) подставляем

$$u(t) = (-1)^m J_\delta(t) d^{m-1} [e^{ct} (d^m v_\delta / dt^m)] / dt^{m-1},$$

берем удвоенную вещественную часть и получаем равенства

$$2\text{Re} \int_0^T \left( \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right), \right. \\ \left. - \frac{d^{2m} (A^{-1}(t)v_\delta)}{dt^{2m}} + (-1)^m \lambda v_\delta \right) dt + \\ + 2\delta \text{Re} \int_0^T \left( \left[ -t \frac{d^m}{dt^m} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (m-1) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) \right], \right. \\ \left. - \frac{d^{2m} (A^{-1}(t)v_\delta)}{dt^{2m}} + (-1)^m \lambda v_\delta \right) dt = 0, \quad (2.4)$$

$$\delta > 0, m = 1, 2, \dots$$

Оценим их левые части снизу. Разбиваем четные производные по  $t$  на две суммы

$$\frac{d^{2m} (A^{-1}(t)v_\delta)}{dt^{2m}} = \\ = \sum_{i=0}^m C_{2m}^i \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{2m-i} v_\delta}{dt^{2m-i}} + \\ + \sum_{i=m+1}^{2m} C_{2m}^i \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{2m-i} v_\delta}{dt^{2m-i}},$$

для первой из которых справедливо представление

$$\sum_{i=0}^m C_{2m}^i \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{2m-i} v_\delta}{dt^{2m-i}} = \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} C_{2m}^i C_{m-i}^j (-c)^j \times e^{-ct} \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{m-i-j}}{dt^{m-i-j}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right).$$

Положим

$$\mathcal{T}_1^{(\delta)} = -2\text{Re} \int_0^T \left( \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} C_{2m}^i C_{m-i}^j (-c)^j e^{-ct} \times \right. \\ \left. \times \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{m-j-i}}{dt^{m-j-i}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) \right) dt.$$

Непосредственными оценками показывается

$$\mathcal{T}_1^{(\delta)} \geq [(2m-1)c - (4m-1)c_1] \times \\ \times \int_0^T e^{-ct} \left| \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) \right|_{-m,t}^2 dt - \\ - 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i+j > 1}}^m \sum_{j=0}^{m-i} C_{2m}^i C_{m-i}^j (-c)^j c_i \times \\ \times \int_0^T e^{-ct} \left| \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) \right|_{-m,t} \times \\ \times \left| \frac{d^{m-j-i}}{dt^{m-j-i}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) \right|_{-(m+1-i),t} dt.$$

Для второй суммы с помощью элементарных преобразований находим миноранту

$$\mathcal{T}_2^{(\delta)} = -2\text{Re} \int_0^T \left( \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right), \right. \\ \left. \sum_{i=m+1}^{2m} C_{2m}^i \frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{2m-i} v_\delta}{dt^{2m-i}} \right) dt \geq \\ \geq -2 \sum_{i=m+1}^{2m} C_{2m}^i \tilde{c} e^{\frac{cT}{2}} \times \\ \times \int_0^T e^{-\frac{ct}{2}} \left| \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) \right|_{-m,t} \left| \frac{d^{2m-i} v_\delta}{dt^{2m-i}} \right| dt.$$

Проинтегрировав по частям  $m$ -раз по  $t$ , согласно граничным условиям (2.2) имеем равенства

$$\mathcal{T}_3^{(\delta)} = (-1)^m 2\lambda \text{Re} \int_0^T \left( \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right), v_\delta \right) dt = \\ = \lambda \left| \frac{d^{m-1} v_\delta(0)}{dt^{m-1}} \right|^2 + \lambda c \int_0^T e^{ct} \left| \frac{d^{m-1} v_\delta}{dt^{m-1}} \right|^2 dt,$$

в которых неотрицательные первые слагаемые для любых  $\lambda > 0$  можно опустить при оценке снизу.

Таким образом, главные члены равенств (2.4) оценены снизу, так как

$$I_1^{(\delta)} = \mathcal{T}_1^{(\delta)} + \mathcal{T}_2^{(\delta)} + \mathcal{T}_3^{(\delta)}, \delta > 0.$$

Ввиду свойств сглаживающих операторов  $J_\delta^{-1}$  легко показывается, что младшие члены равенств (2.4) оцениваются снизу величинами, предел которых при  $\delta \rightarrow 0$  для любых  $c \geq 0, \lambda > 0$  равен нулю.

На основании проведенных преобразований и оценок и за счет выбора достаточно малых

значений параметра  $\tau > 0$  можно утверждать, что при каждом  $m$  и  $\delta > 0$  существуют независимые от  $c, \lambda, \delta$  постоянные  $c_m^* > 0$  и не зависящие от  $\lambda, \delta$  постоянные  $\tilde{c}_m^*(c, T) > 0$  такие, что равенства (2.4) дают неравенства

$$\begin{aligned} & \left[ (2m-1)c - (4m-1)c_1 - c_m^* \right] \times \\ & \times \int_0^T e^{-ct} \left| \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( e^{ct} \frac{d^m v_\delta}{dt^m} \right) \right|_{-m,t}^2 dt + \\ & + (\lambda c - \tilde{c}_m^*(c, T)) \int_0^T \left| \frac{d^{m-1} v_\delta}{dt^{m-1}} \right|_{-m,t}^2 dt + \\ & + T_4^{(\delta)} + T_5^{(\delta)} + T_6^{(\delta)} \leq 0, c \geq 0, m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где слагаемые  $T_i^{(\delta)}, i = \overline{4, 6}$  оцениваются снизу такими слагаемыми, часть из которых содержит производные от  $v_\delta$  порядка  $2m$ , положительны и поэтому при оценке снизу могут быть опущены, а остальные слагаемые содержат производные от  $v_\delta$  не выше порядка  $2m-1$  и поэтому в силу свойств сглаживающей задачи (2.1), (2.2) стремятся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Выбрав здесь сначала  $c = c_0^{(m)} = [(4m-1)c_1 + c_m^* + 1] / (2m-1)$ , а затем  $\lambda = \bar{\lambda}_m = \max \{ \tilde{c}_m^*(c_0^{(m)}, T) / c_0^{(m)}, \lambda_m \}$ , применив к  $T_i^{(\delta)}, i = \overline{4, 6}$ , соответствующие оценки, опуская положительные слагаемые и переходя в полученных неравенствах к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , в силу уравнения (2.1) получаем неравенства

$$\int_0^T e^{-c_0^{(m)} t} |u|_{-m,t}^2 dt \leq 0, m = 1, 2, \dots,$$

из которых следует, что  $u = 0$ . Теорема 2.1 доказана.

### 3 Гладкость слабых решений

Покажем, что для более гладких правых частей  $f \in \mathcal{H}$  уравнения (0.1) повышается гладкость слабых решений  $u \in \mathcal{H}$  граничной задачи (0.1), (0.2). Это мы осуществим методом вспомогательной краевой задачи, обобщающей вспомогательную задачу Коши в [6]. Сформулируем вспомогательную задачу.

**Определение 3.1.** Функция  $w \in \mathcal{H}$  называется слабым решением вспомогательной задачи к граничной задаче (0.1), (0.2) для  $\lambda > 0$  и  $\tilde{f} \in \mathcal{H}^-$ , если она является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( A^{-1}(t)w, (-1)^{m-1} \frac{d^{2m} w}{dt^{2m}} + \lambda A(t)\varphi \right) dt = \\ & = \int_0^T \langle \tilde{f}, \varphi \rangle_{(t)} dt, m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.1)$$

для любой функции  $\varphi$  множества  $\Phi_m$  из определения 1.1.

Можно доказать [2, с. 45–53], что при каждом  $t \in [0, T]$  операторы  $A^{1/2}(t)$  – изометрии  $H_t^+$  на  $H$ , их обратные  $A^{-1/2}(t)$  – изометрии  $H$  на  $H_t^+$ , их расширения  $\overline{A^{1/2}}(t)$  и  $\overline{A^{-1/2}}(t)$  по непрерывности с плотных множеств  $H_t^+$  и  $H$  – изометрии  $H$  на  $H_t^-$  и  $H_t^-$  на  $H$  соответственно и  $\overline{A^{1/2}}^{-1}(t) = \overline{A^{-1/2}}(t)$  – обратные операторы к  $\overline{A^{1/2}}(t)$ , расширения  $\overline{A}(t)$  и  $\overline{A^{-1}}(t)$  операторов  $A(t)$  и  $A^{-1}(t)$  по непрерывности с плотных множеств  $D(A(t))$  и  $H$  – изометрии  $H_t^+$  на  $H_t^-$  и  $H_t^-$  на  $H_t^+$  соответственно,  $\overline{A^{-1}}(t) = \overline{A}^{-1}(t)$  – обратные операторы к  $\overline{A}(t)$  и имеет место расщепление  $\overline{A^{-1}}(t) = A^{-1/2}(t)\overline{A^{-1/2}}(t)$  на  $H_t^-$ .

Пусть гильбертовы пространства  $W^\alpha(t)$  – множества значений дробных степеней  $A^{\alpha/2m}(t)$  операторов  $A^{-1}(t)$  с эрмитовыми нормами

$$|\cdot|_{\alpha,t} = |A^{\alpha/2m}(t)\cdot|, \quad -2m \leq \alpha \leq 0.$$

Справедлива следующая теорема повышения гладкости слабых решений.

**Теорема 3.1.** Если справедливы предположения теоремы 2.1, выполняется неравенство (1.2) с минусом в левой части и сильные производные

$$\begin{aligned} d^j A^{-1}(t) / dt^j \in L_\infty([0, T], \mathcal{L}(W^{-m+j}(t), H)), \\ j = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

то слабые решения  $u \in \mathcal{H}$  граничной задачи (0.1), (0.2) обладают следующими свойствами

$$u(t) \in D(A(t)), t \in [0, T], \frac{d^k u}{dt^k},$$

$$A(t)u \in \mathcal{H}, k = \overline{1, m-2}, m > 1;$$

$$u(t) \in D(A^{1/2}(t)), t \in [0, T], A^{1/2}(t)u \in \mathcal{H}, m = 1.$$

Сначала убедимся в существовании решений уравнения (3.1). В проекционной теореме Ж.-Л. Лионса в качестве гильбертова пространства  $F$  берем пространство

$$\begin{aligned} F_m = \{ v \in \mathcal{H} : d^k v / dt^k \in \mathcal{H}, \\ k = \overline{1, m-1}, d^m v / dt^m \in \mathcal{H}^- \} \end{aligned}$$

– замыкания множеств функций

$$\{ v \in \mathcal{H} : d^k v / dt^k \in \mathcal{H}, k = \overline{1, m} \}$$

по эрмитовым нормам

$$\|v\|_{F_m} = \left[ \int_0^T \left( \left| \overline{A^{-1/2}}(t) \frac{d^m v}{dt^m} \right|^2 + |v|^2 \right) dt \right]^{1/2}, m = 1, 2, \dots,$$

и в качестве предгильбертова пространства  $\Phi$  – множества  $\Phi_m$  из определения (1.1) с эрмитовыми нормами

$$\|\varphi\|_m = \left[ \int_0^T \left( \left| A^{-1/2}(t) \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right|^2 + |\varphi|^2 \right) dt \right]^{1/2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Пространства  $\Phi_m$  непрерывно вложены в пространство  $F_m$  с постоянной  $\hat{c}_1 = 1$ .

На произведениях  $F \times \Phi = F_m \times \Phi_m$  полуторалинейной формой  $E(v, \varphi)$  будут формы

$$E_m(v, \varphi) = \int_0^T e^{ct} \left( A^{-1}(t) \mathcal{J}v, (-1)^{m-1} \frac{d^{2m} \varphi}{dt^{2m}} + \lambda A(t) \varphi \right) dt, \\ c \geq 0.$$

Ввиду интерполяционного неравенства (1.3) при  $i = 0$  и формулы (1.4) следует их непрерывность по  $v$  на  $F_m$  при каждом  $\varphi \in \Phi_m$ .

При  $m = 1$  после использования неравенства (1.2) со знаком минус в левой части и элементарных оценок имеем неравенство

$$2\operatorname{Re} E_1(\varphi, \varphi) \geq \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|_{-1}^2 + (c - c_1) \left\| \sqrt{t} \frac{d\varphi}{dt} \right\|_{-1}^2 + \lambda \|\varphi\|_0^2 + \lambda c \|\sqrt{t}\varphi\|_0^2,$$

где  $\|\cdot\|_{-\alpha}$  – эрмитова норма гильбертовых пространств  $L_2(]0, T[, W^{-\alpha}(t))$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2m$ . Технически вывод несложный, но объемный, поэтому мы его опускаем. Из последнего неравенства видно, что при  $c = \tilde{c}_1 = c_1$  для любого  $\lambda_1 > 0$  вещественная часть формы  $E_1(\varphi, \varphi)$  и тем более ее модуль оцениваются снизу через

$$(1/2) \min\{1, \lambda_1\} \|\varphi\|_1^2 \quad \forall \varphi \in \Phi_1.$$

При  $m > 1$  доказательства проводятся аналогично.

В теореме Ж.-Л. Лионса за антилинейный функционал  $L$  на  $\Phi$  возьмём функционалы

$$L_m(\varphi) = \int_0^T (f, \varphi) dt, \quad \forall \varphi \in \Phi_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

которые очевидно непрерывны по  $\varphi$  на  $\Phi_m$ . Все остальные требования этой теоремы выполняются, и, следовательно, уравнение (3.1) имеет решение  $w = \exp\{\tilde{c}_m t\} \mathcal{J}v \in F_m$ .

Сравнив уравнения (3.1) и (1.1), благодаря теореме 2.1 единственности слабых решений  $u \in \mathcal{H}$  граничной задачи (0.1), (0.2) выводим представление

$$u = e^{\tilde{c}t} \overline{A^{-1}(t) \mathcal{J}v}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

При  $m > 1$  в этом представлении расширение операторов  $A^{-1}(t)$  можно опустить

$$u = \exp\{\tilde{c}_m t\} A^{-1}(t) \mathcal{J}v$$

и уже отсюда вывести свойства, указанные в теореме 3.1. При  $m = 1$  представление (3.2) имеет вид  $u = e^{\tilde{c}t} \overline{A^{-1/2}(t) A^{-1/2}(t) \mathcal{J}v}$ , из которого

следуют свойства, указанные в теореме 3.1. Теорема 3.1 доказана.

#### 4 Пример новой корректной задачи

Доказана корректность по Адамару новой смешанной задачи. В ограниченном прямоугольнике  $G = ]0, l[ \times ]0, l[$  независимых переменных  $t$  и  $x$  решается уравнение

$$-u_{tttt}(x, t) + \lambda_2 u_{xxxx}(x, t) + a_0(x, t) u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad \{x, t\} \in G, \quad (4.1)$$

с граничными условиями по  $x$

$$u_{xxx}(0, t) + \beta_1(t) u(0, t) = 0, \quad (4.2)$$

$$u_{xxx}(l, t) - \beta_2(t) u(l, t) = 0,$$

$$u_{xx}(0, t) - \beta_3(t) u_x(0, t) = 0, \quad (4.3)$$

$$u_{xx}(l, t) + \beta_4(t) u_x(l, t) = 0,$$

где коэффициенты  $\beta_i(t) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , и граничными условиями по  $t$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = 0, \quad (4.4)$$

$$u(x, l) = 0, \quad x \in ]0, l[.$$

Пусть  $W_2^{-2,t}(\Omega)$  – антидвойственные пространства с нормами  $\langle \cdot \rangle_{-2,t}$  к гильбертовым пространствам  $W_2^{2,t}(\Omega)$ , полученным замыканием всех функций  $v(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющих условиям (4.3), по нормам

$$\langle v \rangle_{2,t} = \left\| A^{1/2}(t) v \right\|_0 = \left[ \beta_1(t) |v(0)|^2 + \beta_2(t) |v(l)|^2 + \beta_3(t) |v_x(0)|^2 + \beta_4(t) |v_x(l)|^2 + \int_0^l |v_{xx}(x)|^2 dx \right]^{1/2}, \quad t \in [0, 1].$$

Проверкой предположений теоремы 2.1 доказывается

**Теорема 4.1.** Пусть коэффициенты граничных условий  $\beta_i(t) \in C^4[0, 1]$ ,  $\beta_i(t) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , и уравнения  $a_0(x, t) \in L_\infty(G)$ . Тогда существует  $\tilde{\lambda} > 0$  такое, что для каждого  $\lambda > \tilde{\lambda}$  и для каждого  $f \in L_2(]0, l[, W_2^{-2,t}(\Omega))$ , смешанная задача (4.1)–(4.2) имеет единственное слабое решение  $u \in L_2(G)$ , удовлетворяющее априорной оценке

$$\int_0^l \int_0^l |u(x, t)|^2 dx dt \leq \hat{c}_2^* \int_0^l \int_0^l [f(x, t)]_{(-t)}^2 dx dt, \quad \hat{c}_2^* > 0,$$

где нормы  $[\cdot]_{(-t)} = |A^{-1/2}(t) \cdot|$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф.Е. Граничная задача для дифференциальных уравнений четного порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов. / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 8. – С. 1412–1425.



2. Lions, J.-L. Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites / J.-L. Lions. – Berlin : Springer-Verlag, 1961. – 292 p.

3. Березанский, Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. – Киев : Наукова думка, 1965. – 798 с.

4. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М. : Наука, 1967. – 464 с.

5. Юрчук, Н.И. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с зависящими от параметра операторными коэффициентами. I. Априорные оценки / Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 9. – С. 1645–1661.

6. Ломовцев, Ф.Е. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873–886.

7. Ломовцев, Ф.Е. Граничные задачи для полных квазигиперболических дифференциальных уравнений с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. I. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 258–267; II. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 527–537.

Поступила в редакцию 26.12.12.

УДК 512.542

## О ЧАСТИЧНО СОПРЯЖЁННО-ПРЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.И. Мурашко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## ON PARTIALLY CONJUGATE-PERMUTABLE SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

V.I. Murashka

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть  $R$  – подгруппа группы  $G$ . Подгруппу  $H$  группы  $G$  назовём  $R$ -сопряжённо-перестановочной, если  $HN^r = H^rN$  для любого  $r \in R$ . В работе изучаются свойства и влияние  $R$ -сопряжённо-перестановочных подгрупп (максимальных, силовских, циклических примарных) на строение конечных групп. В качестве  $R$  рассматриваются подгруппа Фиттинга  $F(G)$ , квазинильпотентный радикал  $F^*(G)$  и обобщённая подгруппа Фиттинга  $\tilde{F}(G)$ , введенная П. Шмидом. В частности, было показано, что группа  $G$  нильпотентна тогда и только тогда, когда все её максимальные подгруппы  $\tilde{F}(G)$ -сопряжённо-перестановочны.

**Ключевые слова:** конечная группа, нильпотентная группа, сопряжённо-перестановочная подгруппа,  $R$ -сопряжённо-перестановочная подгруппа, подгруппа Фиттинга.

Let  $R$  be a subgroup of a group  $G$ . We shall call a subgroup  $H$  of  $G$  the  $R$ -conjugate-permutable subgroup if  $HN^r = H^rN$  for all  $r \in R$ . In this work the properties and the influence of  $R$ -conjugate-permutable subgroups (maximal, Sylow, cyclic primary) on the structure of finite groups are studied. As  $R$  we consider the Fitting subgroup  $F(G)$ , quasinilpotent radical  $F^*(G)$  and the generalized Fitting subgroup  $\tilde{F}(G)$  that was introduced by P. Shmid. In particular, it was shown that group  $G$  is nilpotent iff all its maximal subgroups are  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable.

**Keywords:** finite group, nilpotent group,  $R$ -conjugate-permutable subgroup, conjugate-permutable subgroup, the Fitting subgroup.

### Introduction

All groups considered here are finite. Recall [1] that subgroups  $H$  and  $K$  of a group  $G$  are said to permute if  $HK = KH$ , which is equivalent to that the set  $HK$  is a subgroup of  $G$ .

The classic area of group theory is the study of subgroups of a group  $G$  which permute with every subgroup of a dedicated system of subgroups of  $G$ . This trend goes back to O. Ore [2] who introduced the concept of quasinormal (permutable) subgroup in 1939. Recall that subgroup  $H$  of a group  $G$  is called quasinormal if it permutes with every subgroup of  $G$ . Every normal subgroup is quasinormal. It is known that every quasinormal subgroup is subnormal. There are examples showing that the converse is false.

Another important type of subgroups' permutability was proposed by O. Kegel [3] in 1962. A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called  $S$ -permutable ( $S$ -quasinormal,  $\pi$ -quasinormal) subgroup of  $G$ , if  $H$  permutes with every Sylow subgroup of  $G$ . Note that every  $S$ -permutable subgroup is subnormal. The converse need not hold. Currently, the

concept of quasinormal and  $S$ -permutable subgroups and their generalizations have been studied intensively by many authors (see monograph [4]).

In 1997 T. Foguel [5] noted in the proof that a quasinormal subgroup is subnormal, one only needs to show that it is permutable with all of its conjugates. This led him to the following concept of subgroups' permutability.

**Definition 0.1** [5]. A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called the conjugate-permutable subgroup of  $G$ , if  $HH^x = H^xH$  for all  $x \in G$ . Denoted by  $H <_{C-P} G$ .

Clearly, every quasinormal subgroup is conjugate-permutable. In [5] there is an example showing that the converse is not true. On the other hand, every 2-subnormal subgroup (i. e. subgroup is a normal subgroup of some normal subgroup of the group) is a conjugate-permutable.

Analyzing the proofs of some results of that works (for example see [5]) we have seen that we can replace conjugate-permutability by permutability with a smaller number of conjugates for proving that results. This observation led us to the following definition.

**Definition 0.2.** Let  $R$  be a subgroup of a group  $G$ . We shall call a subgroup  $H$  of  $G$  the  $R$ -conjugate-permutable subgroup of  $G$ , if  $HH^x = H^xH$  for all  $x \in R$ .

The goal of this paper is to study the influence and the properties of  $R$ -conjugate-permutable subgroups on the structure of finite groups.

**1 Preliminaries**

We use standard notation and terminology, which if necessary can be found in [1], [4], [6] and except through  $E$  we denote the unit group.

We recall the following well-known definitions and results (see [1], [6], [7]).

The Fitting subgroup  $F(G)$  is the maximal normal nilpotent subgroup of a group  $G$ .

**Definition 1.1.** A subgroup  $F^*(G)$  of a group  $G$  is defined by

$$F^*(G) / F(G) = Soc(C_G(F(G))F(G) / F(G)).$$

**Lemma 1.2.** Let  $G$  be a group. Then:

- (1)  $F^*(G)$  is the maximal normal quasinilpotent subgroup of  $G$ ;
- (2)  $C_G(F^*(G)) \subseteq F(G)$ ;
- (3)  $F(G) \subseteq F^*(G)$ .

**Definition 1.3** (see [6] or [8]). A subgroup  $\tilde{F}(G)$  of a group  $G$  is defined by

- 1)  $\Phi(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ ;
- 2)  $\tilde{F}(G) / \Phi(G) = Soc(G / \Phi(G))$ .

**Lemma 1.4.** Let  $G$  be a group. Then:

- (1)  $\tilde{F}(G / \Phi(G)) = \tilde{F}(G) / \Phi(G)$ ;
- (2)  $C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$ .

**Lemma 1.5.** Let  $G$  be a solvable group. Then:

- (1)  $\Phi(G) \subset F(G)$ ;
- (2)  $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ ;
- (3)  $\tilde{F}(G) = F^*(G) = F(G)$ .

**Lemma 1.6.** Let  $G$  be a group. Then  $F(G) \subseteq F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ .

*Proof.*  $F(G) \subseteq F^*(G)$  is well known. Now we will show that  $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$  for every group  $G$ . The idea of the proof of lemma 1.6 belongs to L. Shemetkov (see also [9]).

Let a group  $G$  be the minimal order counterexample for lemma 1.6. If  $\Phi(G) \neq E$  then for  $G / \Phi(G)$  the statement is true. From

$$F^*(G) / \Phi(G) \subseteq F^*(G / \Phi(G))$$

and

$$\tilde{F}(G / \Phi(G)) = \tilde{F}(G) / \Phi(G)$$

we have that  $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ . It is a contradiction with the choice of  $G$ .

Let  $\Phi(G) = E$ . Now  $\tilde{F}(G) = Soc(G)$ . By 13.14.X [7]  $F^*(G) = E(G)F(G)$ . Note  $\Phi(E(G)) = E$ . Since 13.7.X [7]  $E(G) / Z(E(G))$  is the direct product of simple nonabelian groups,  $Z(E(G)) = F(E(G))$ . From it and theorem 10.6.A [1] we conclude that  $E(G) = HZ(E(G))$  where  $H$  is the complement to  $Z(E(G))$  in  $E(G)$ . Now  $H$  is the direct product of simple nonabelian groups. Since  $H \text{ char } E(G) \triangleleft G$ , we have  $H \triangleleft G$ . From lemma 14.14.A [1] follows  $H \subseteq Soc(G)$ . Since  $Z(E(G)) \subseteq F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$  and  $H \subseteq Soc(G)$ , it follows that  $E(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ . Now

$$F^*(G) = E(G)F(G) \subseteq \tilde{F}(G).$$

It is a contradiction with the choice of  $G$ .

**Example 1.7** [9]. Let  $G \cong A_5$  be the alternating group of degree 5 and  $K = F_3$  be a field composed by three elements. We denote by  $A = A_K(G)$  the Frattini  $KG$ -module [10]. In view of [10],  $A$  is the faithful irreducible  $KG$ -module of the dimension 4. By the known Gaschutz theorem, there exists a Frattini extension  $A \twoheadrightarrow R \twoheadrightarrow G$  such that  $A \cong \Phi(R)$  and  $R / \Phi(R) \cong G$ . From the properties of module  $A$  it follows that  $\tilde{F}(G) = R$  and  $F^*(G) = \Phi(R)$ .

**2 Properties of R-conjugate-permutable subgroups**

First we begin with showing that if  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable subgroup then  $H$  need not to be  $\langle H, R \rangle$ -conjugate permutable.

**Example 2.1.** Let  $B = \langle (1,3,6), (2,4) \rangle$  and  $x = (1,2)(3,4)(5,6)$ ,  $B^x = \langle (2,4,5), (1,3) \rangle$ . One can check that  $B^x B = B B^x$  (the author did it with the help of GAP). Let  $R = \langle x \rangle$ . It is easy to see that  $|R| = 2$ . Thus  $B$  is  $R$ -conjugate-permutable. Consider  $G = \langle B, R \rangle$ . Let  $y = (2,4,5)$ . Again one can check that  $B B^y \neq B^y B$ . Thus  $B$  is not  $G$ -conjugate-permutable.

**Lemma 2.2 (Properties of R-conjugate-permutable subgroups).** Let  $H$  and  $R$  be a subgroups of a group  $G$  and  $N$  be a normal subgroup of  $G$ . Then:

- (1) If  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable and  $HR = RH$  then  $H$  is conjugate-permutable in  $RH$ , in particular subnormal in  $RH$ ;
- (2) If  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable then  $H^x$  is  $R^x$ -conjugate-permutable for all  $x \in G$ ;
- (3) If  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable then  $NH$  is  $NR$ -conjugate-permutable;

(4) If  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable then  $HN/N$  is  $RN/N$ -conjugate-permutable;

(5) If  $H/N$  is  $RN/N$ -conjugate-permutable then  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable;

(6) If  $H$  is a maximal  $R$ -conjugate-permutable subgroup then  $R \subseteq N_G(H)$ ;

(7) If  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable and  $r_1, \dots, r_n \in R$  then  $H^{r_1} \dots H^{r_n}$  is  $R$ -conjugate-permutable;

(8) If  $H$  is  $R$ -conjugate-permutable then  $H^R = H^{r_1} \dots H^{r_n}$  for some  $r_i \in R$ ;

(9) If  $H_i$  is  $R_i$ -conjugate-permutable subgroup of a group  $G_i$ , where  $i=1,2$ , then  $H_1 \times H_2$  is  $R_1 \times R_2$ -conjugate-permutable subgroup in the group  $G_1 \times G_2$ .

*Proof.* It is straightforward to check.

Recall that a subgroup  $H$  of a group  $G$  is the pronormal subgroup if  $H$  and  $H^x$  are conjugate in  $\langle H, H^x \rangle$ . Moreover if  $x \in \langle H, H^x \rangle$  for all  $x \in G$  then  $H$  is called abnormal. Note that every abnormal subgroup is pronormal.

**Lemma 2.3.** Let  $R$  be a subgroup of a group  $G$ . If a pronormal subgroup  $H$  of  $G$  is  $R$ -conjugate-permutable then  $R \subseteq N_G(H)$ . In particular, if  $H$  is also abnormal then  $R \subseteq H$ .

*Proof.* Let  $r \in R$ . Then  $H^r H = HH^r$ . Since  $H$  is pronormal in  $G$ ,  $H$  and  $H^r$  are conjugate in  $H^r H$ . Hence there is  $y \in HH^r$  such that  $HH^r = HH^y$ . But then there is  $h_1, h_2 \in H$  such that  $y = h_1 h_2^y$ . Hence  $y = h_2 h_1$ , ie  $H = H^y = H^r$ . Thus  $R \subseteq N_G(H)$ . It is easy to see that if  $H$  is abnormal in  $G$  then  $H = N_G(H)$ . Hence, if  $H$  is abnormal and  $R$ -conjugate-permutable in  $G$  then  $R \subseteq H$ .

### 3 Applications of $R$ -conjugate-permutable subgroups

The following example shows that  $F(G)$ -conjugate-permutable subgroup need not to be conjugate-permutable, even subnormal.

**Example 3.1.** Let  $G \cong S_4$  be the symmetric group of degree 4. Let  $H$  be Sylow 2-subgroup of  $G$ . Then  $H$  is a maximal subgroup of  $G$  which is not normal in  $G$ . Note that

$$\tilde{F}(G) = F^*(G) = F(G) \subseteq H.$$

Hence  $H$  is  $F(G)$ -conjugate-permutable in  $G$ . But  $H$  is abnormal maximal subgroup of  $G$ , hence  $H$  is neither conjugate-permutable nor subnormal subgroup of  $G$ . Now consider  $K = G \times S_4$ . Since  $S_4 \subseteq C_K(G)$ ,  $H$  is  $F(K)$ -conjugate-permutable in  $K$ . But  $F(K)$  is not subgroup of  $H$ . Also  $H$  is

not self-normalizing in  $K$  and not conjugate-permutable in  $K$ .

**Theorem 3.2.** A group  $G$  is nilpotent if and only if every maximal subgroup of  $G$  is  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable.

*Proof.* Let  $G$  be a nilpotent group. Then  $\tilde{F}(G) = G$ . Since  $G$  is nilpotent, every maximal subgroup of  $G$  is normal in  $G$ , and hence,  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable.

Conversely. Assume the result is false. Let a group  $G$  be a counterexample of minimal order. Then all maximal subgroups of  $G$  are  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable but  $G$  is not nilpotent group.

Suppose that  $\Phi(G) \neq E$ . Consider the quotient  $G/\Phi(G)$ . We have  $\tilde{F}(G/\Phi(G)) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$ . By lemma 2.2 it is easy to see that all maximal subgroups of  $G/\Phi(G)$  are  $\tilde{F}(G/\Phi(G))$ -conjugate-permutable. Since  $|G| > |G/\Phi(G)|$ , we have  $G/\Phi(G)$  is nilpotent. From Theorem 9.3(b) [1, p. 30] it follows that  $G$  is nilpotent, a contradiction.

Assume that  $\Phi(G) = E$ . Then  $\tilde{F}(G) = Soc(G)$ . Now assume that  $\tilde{F}(G)$  is not nilpotent. So there is a subgroup  $S \in Syl_p(\tilde{F}(G))$  such that  $S$  is not normal in  $\tilde{F}(G)$ . Let  $P \in Syl_p(G)$  and  $P \cap \tilde{F}(G) = S$ . Note that  $S^x = P^x \cap \tilde{F}(G)^x = P \cap \tilde{F}(G) = S$  for every  $x \in N_G(P)$ . It means that  $N_G(P) \subseteq N_G(S)$ . Since  $N_G(S) \neq G$ , we have  $N_G(P) \neq G$ . Let  $M$  be a maximal subgroup of  $G$  such that  $N_G(S) \subseteq M$ . By lemma 6.20 [1, p. 247]  $M$  is the abnormal subgroup of  $G$ . By Frattini's argument  $N_G(S)\tilde{F}(G) = M\tilde{F}(G) = G$ . Since  $M$  is the maximal and  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable subgroup,  $M$  is normal in  $G$  by lemmas 2.2 and 2.3, a contradiction.

Therefore we see that  $\tilde{F}(G)$  is nilpotent. Then  $\tilde{F}(G) = F(G) = Soc(G) = N_1 \times \dots \times N_t$  where  $N_i$  runs over all minimal normal subgroups of  $G$ . From  $\Phi(G) = E$  and nilpotency of  $\tilde{F}(G)$  it follows that  $N_i$  is an abelian subgroup for all  $i=1, \dots, t$ . Then there is a maximal subgroup  $M_i$  such that  $N_i M_i = G$  for all  $i=1, \dots, t$ . Note that  $M_i \tilde{F}(G) = G$ . Since  $M_i$  is  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable,  $M_i$  is normal in  $G$  for all  $i=1, \dots, t$  by lemmas 2.2 and 2.3. Since  $N_i$  is abelian subgroup, we have  $N_i \subseteq C_G(N_i)$  and  $N_i \cap M_i = E$ . Then  $M_i \triangleleft G$  implies  $M_i \subseteq C_G(N_i)$  for all  $i=1, \dots, t$ . We show that  $G = M_i N_i \subseteq C_G(N_i)$  for every  $i=1, \dots, t$ . Therefore

$N_i \subseteq Z(G)$  for all  $i = 1, \dots, t$ . Then  $\tilde{F}(G) \subseteq Z(G)$ . Hence  $G \subseteq C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$ . Thus  $G$  is nilpotent, a contradiction.

**Corollary 3.3.** *If  $G$  is not a nilpotent group then there is an abnormal maximal subgroup  $M$  of  $G$  such that  $\tilde{F}(G) \not\subseteq M$ .*

*Proof.* Assume the contrary. Then if  $\tilde{F}(G) \subseteq M$  for all abnormal maximal subgroups  $M$  of  $G$  then all of them are  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable. It means that all maximal subgroups of  $G$  are  $\tilde{F}(G)$ -conjugate-permutable. Thus  $G$  is nilpotent, a contradiction.

**Corollary 3.4** (Foguel, [5]). *If every maximal subgroup a group  $G$  is conjugate-permutable then  $G$  is nilpotent.*

From the example 1.7 it follows that we can not use  $F^*(G)$  in place of  $\tilde{F}(G)$  in theorem 3.2.

**Theorem 3.5.** *The following statements for a group  $G$  are equivalent:*

- (1)  $G$  is nilpotent;
- (2) Every abnormal subgroup of  $G$  is  $F^*(G)$ -conjugate-permutable subgroup of  $G$ ;
- (3) Normalizers of all Sylow subgroups of  $G$  are  $F^*(G)$ -conjugate-permutable subgroups of  $G$ ;
- (4) Sylow subgroups of  $G$  are  $F^*(G)$ -conjugate-permutable subgroups of group  $G$ .

*Proof.* Prove that (1) implies (2). Since  $G$  is nilpotent,  $F^*(G) = G$  and any subgroup of  $G$  is subnormal. It means that the subgroup  $G$  is the only one abnormal subgroup in  $G$ . It is clear that  $G$  is the  $F^*(G)$ -conjugate-permutable. Thus (1) implies (2).

It is well known that normalizers of all Sylow subgroups of  $G$  are abnormal in  $G$ . Therefore (2) implies (3).

Prove that (3) implies (4). By lemma 2.3 we see that  $F^*(G) \subseteq N_G(P)$  for every Sylow subgroup  $P$  of  $G$ . Hence every Sylow subgroup of  $G$  is the  $F^*(G)$ -conjugate-permutable subgroup of  $G$ . Thus (3) implies (4).

Finally we show that (4) implies (1). Assume that (1) is not true and  $G$  is a counterexample of least order.

By lemma 2.3 we have that  $F^*(G) \subseteq N_G(P)$  for every Sylow subgroup  $P$  of  $G$ . By Baers's result (see [11]),  $F^*(G) \subseteq Z_\infty(G)$  the hypercenter of  $G$ . Note that  $F(G) = F^*(G) = Z_\infty(G)$ .

Assume that  $\Phi(G) \neq E$ .

Let  $H/\Phi(G) = F^*(G/\Phi(G))$ .

Show that  $H/\Phi(G) = F^*(G)/\Phi(G)$ . It is clear that  $F^*(G)/\Phi(G) \subseteq H/\Phi(G)$ . Suppose that

$H/\Phi(G)/F^*(G)/\Phi(G) \simeq H/F^*(G) \neq E$ . Note that  $H/\Phi(G)$  and  $F^*(G)/\Phi(G)$  are quasinilpotent. It follows that  $H/F^*(G)$  is quasinilpotent. Now  $H/Z_\infty(G)/Z_\infty(H)/Z_\infty(G) \simeq H/Z_\infty(H)$  is quasinilpotent. By theorem 13.6 [7, p. 125]  $H$  is the normal quasinilpotent subgroup of  $G$ . Hence  $H \subseteq F^*(G)$ . We have the contradiction with  $H/F^*(G) \neq E$ . Thus  $F^*(G/\Phi(G)) = F^*(G)/\Phi(G)$ .

Let  $S/\Phi(G)$  be a Sylow subgroup of  $G/\Phi(G)$ . There is a Sylow subgroup  $P$  of  $G$  such that  $P\Phi(G)/\Phi(G) = S/\Phi(G)$ .

From  $F^*(G/\Phi(G)) = F^*(G)/\Phi(G)$  it follows that  $S/\Phi(G)$  is the  $F^*(G/\Phi(G))$ -conjugate-permutable subgroup of  $G/\Phi(G)$ . By minimality of  $G$  we have that  $G/\Phi(G)$  is nilpotent. Hence,  $G$  is nilpotent by theorem 9.3(b) [1, p. 30], a contradiction.

Suppose now that  $\Phi(G) = E$ . By theorems 8.6, 8.8 [6, p. 96–97] we have  $Z_\infty(G) = Z(G)$ . Therefore  $F^*(G) = Z(G)$ . Now we have

$$G = C_G(F^*(G)) \subseteq F(G).$$

Thus  $G$  is nilpotent. This is the final contradiction.

**Corollary 3.6.** *A group  $G$  is nilpotent if and only if the normalizers of all Sylow subgroups of  $G$  contains  $F^*(G)$ .*

*Proof.* If  $G$  is nilpotent then for every Sylow subgroup  $P$  of  $G$  we have  $F^*(G) = N_G(P) = G$ . Thus the normalizers of all Sylow subgroups of  $G$  contains  $F^*(G)$ . If the normalizers of all Sylow subgroups of  $G$  contains  $F^*(G)$  then they are  $F^*(G)$ -conjugate-permutable. Thus  $G$  is nilpotent.

**Corollary 3.7** (Foguel, [5]). *If every Sylow subgroup a group  $G$  is conjugate-permutable then  $G$  is nilpotent.*

**Theorem 3.8.** *If all cyclic primary subgroups of a group  $G$  are  $F^*(G)$ -conjugate-permutable then  $G$  is nilpotent.*

*Proof.* Let  $P \in \text{Syl}_p(G)$  and  $x \in P$ . Then the subgroup  $\langle x \rangle$  is the  $F^*(G)$ -conjugate-permutable subgroup. So  $\langle x \rangle \triangleleft \langle x \rangle F^*(G)$  by (1) of lemma 2.2. Note that  $\langle x \rangle \triangleleft P$ . Since  $\langle x \rangle \leq P \cap \langle x \rangle F^*(G)$ , by theorem 1.1.7 [4, p. 3]  $\langle x \rangle$  is the subnormal subgroup in the product  $P(\langle x \rangle F^*(G))$ . Since  $P$  is generated by its cyclic subnormal in  $PF^*(G)$  subgroups, by theorem 7.5 [6, p. 70] we have that  $P \triangleleft PF^*(G)$ . Thus every Sylow subgroup of  $G$  is  $F^*(G)$ -conjugate-permutable. Now theorem 3.8 immediately follows from theorem 3.5.

**Corollary 3.9** (Foguel, [5]). *If every cyclic primary subgroup of a group  $G$  is conjugate-permutable then  $G$  is nilpotent.*

As follows from example 1.2 [5] the converse of the theorem 3.8 are false.

**Remark.** In theorems 3.5 and 3.8 we can not use  $F(G)$  in place of  $F^*(G)$ . Let  $G \cong A_5$  be the alternating group of degree 5. Then  $F(G) = E$  and every subgroup of  $G$  is  $F(G)$ -conjugate-permutable. But  $G$  is not nilpotent.

**Acknowledgments.** The author is thankful to Dr. A.F. Vasil'ev for his kind help.

#### REFERENCES

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // J. Duke Math. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
3. Kegel, O. U. Sylow-Gruppen and Subnormalmalteiler endlicher Gruppen / O.U. Kegel // Math. Z. – 1962. – Bd. 78. – S. 205–221.
4. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Walter de Gruyter, 2010. – 348 p.
5. Foguel, T. Conjugate-Permutable Subgroups / T. Foguel // J. Algebra. – 1997. – № 191. – P. 235–239.
6. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, 1978. – 272 p. (In Russian).
7. Huppert, B. Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1982. – 454 p.
8. Schmid, P. Über die Automorphismengruppen endlicher Gruppen / P. Schmid // Arch. Math. – 1972. – Bd. 23, №3. – S. 236–242.
9. Vasil'ev, A.F. A Note on Intersections of Some Maximal Subgroups of Finite Groups / A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, A.V. Syrovkashin // Problems of physics, mathematics and technics. – 2012. – № 2 (11). – P. 62–64. (In Russian)
10. Griss, R.L. The Frattini module / R.L. Griss, P. Schmid // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30. – S. 256–266.
11. Baer, R. Group elements of prime power index / R. Baer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 20–47.

Поступила в редакцию 28.12.12.

УДК 512.572

## О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ $\mathfrak{F}$ -ПРОФРАТТИНИЕВЫХ ПОДАЛГЕБР МУЛЬТИКОЛЕЦ КЛАССУ $\mathfrak{F}$

С.П. Новиков

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

## ABOUT BELONGING OF $\mathfrak{F}$ -PREFRATTINI SUBALGEBRAS OF MULTIRINGS TO CLASS $\mathfrak{F}$

S.P. Novikov

*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Рассматриваются условия, при которых любая  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра мультикольца  $A$  принадлежат классу  $\mathfrak{F}$ .

**Ключевые слова:** мультикольцо,  $\mathfrak{F}$ -центральный фактор, фраттиниевый главный фактор,  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра,  $\mathfrak{F}$ -нормализатор.

Conditions at which any  $\mathfrak{F}$ -prefrattini subalgebra of multiring  $A$  belong to class  $\mathfrak{F}$ , are considered.

**Keywords:** multirings,  $\mathfrak{F}$ -central factor, frattini chief factor,  $\mathfrak{F}$ -prefrattini subalgebra,  $\mathfrak{F}$ -normalizer.

### **Введение**

Используются обозначения и определения из [1]. Все рассматриваемые мультикольца полагаются принадлежащими некоторой формации  $\varphi$ -разрешимых мультиколец с главными рядами.

В отличие от  $\mathfrak{F}$ -проекторов,  $\mathfrak{F}$ -полупроекторов,  $\mathfrak{F}$ -нормализаторов  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевы подалгебры не всегда принадлежат классу  $\mathfrak{F}$ . Это приводит к задаче, поставленной Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой в [1], – описать условия, при которых  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевы подалгебры мультикольца  $A$  принадлежат классу  $\mathfrak{F}$ . Настоящая работа посвящена рассмотрению условий, при которых все  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевы подалгебры мультикольца принадлежат классу  $\mathfrak{F}$ .

### **1 Критерий принадлежности $\mathfrak{F}$ -профраттиниевых подалгебр мультикольца классу $\mathfrak{F}$**

Для произвольного класса мультиколец  $\mathfrak{F}$  обозначим через  $\Psi(\mathfrak{F})$  класс мультиколец, у которых все  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевы подалгебры принадлежат  $\mathfrak{F}$ ; через  $\Upsilon(\mathfrak{F})$  – класс мультиколец, у которых любой фраттиниевый главный фактор  $\mathfrak{F}$ -централен.

**Лемма 1.1.** Для любой непустой формации мультиколец  $\mathfrak{F}$  класс  $\Psi(\mathfrak{F})$  – непустая формация.

**Доказательство.** Пусть  $A \in \Psi(\mathfrak{F})$ ,  $N$  – идеал в  $A$ ,  $M/N$  –  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра в  $A/N$ . Тогда по теореме 1 из [2]  $M = N + B$ ,

где  $B$  – некоторая  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра в  $A$ . Поэтому  $M/N = B + N/N \simeq B/B \cap N \in \mathfrak{F}$ .

Предположим, что  $N_1$  и  $N_2$  – идеалы мультикольца  $A$ ,  $A/N_1 \in \Psi(\mathfrak{F})$ ,  $A/N_2 \in \Psi(\mathfrak{F})$ ,  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ ,  $T$  –  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра в  $A$ , не принадлежащая  $\mathfrak{F}$ . По теореме 1 из [2]  $T + N_1/N_1$  и  $T + N_2/N_2$  –  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевы подалгебры в  $A/N_1$  и  $A/N_2$  соответственно. Следовательно,  $T + N_1/N_1 \in \mathfrak{F}$  и  $T + N_2/N_2 \in \mathfrak{F}$ . Поэтому  $T/T \cap N_1 \in \mathfrak{F}$  и  $T/T \cap N_2 \in \mathfrak{F}$ . Так как  $(T \cap N_1) \cap (T \cap N_2) = \{0\}$ , а  $\mathfrak{F}$  – формация, то  $T \in \mathfrak{F}$ . Получаем противоречие. Лемма доказана.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация мультиколец. Тогда любая  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра  $T$  произвольного мультикольца  $A$  принадлежит  $\mathfrak{F}$  тогда и только тогда, когда  $T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $A \in \Psi(\mathfrak{F})$ . Тогда  $A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$  и  $T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$ .

**Достаточность.** Пусть для любой  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевой подалгебры  $T$  мультикольца  $A$  выполняется условие  $T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$ . Так как  $A/A^{\Psi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{F}$ , а по теореме 1 из [2]  $T + A^{\Psi(\mathfrak{F})}/A^{\Psi(\mathfrak{F})}$  –  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра в  $A/A^{\Psi(\mathfrak{F})}$ , то  $T + A^{\Psi(\mathfrak{F})}/A^{\Psi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{F}$ . Следовательно,  $T \simeq T/\{0\} = T/T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} \simeq T + A^{\Psi(\mathfrak{F})}/A^{\Psi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{F}$ . Значит,  $A \in \Psi(\mathfrak{F})$ . Теорема доказана.

## 2 Пример класса мультиколец, у которых все $\mathfrak{F}$ -профраттиниевы подалгебры принадлежат $\mathfrak{F}$

**Лемма 2.1.** Если  $\mathfrak{F}$  – непустая формация мультиколец, то  $Y(\mathfrak{F})$  – непустая формация.

*Доказательство.* Пусть  $A \in Y(\mathfrak{F})$ ,  $N$  – идеал в  $A$ ,  $H/N/K/N$  – фраттиниевый главный фактор в  $A/N$ . Тогда фактор  $H/K$  фраттиниев в  $A$  и так как  $A \in Y(\mathfrak{F})$ , то  $H/K \times A/C_A(H/K) \in \mathfrak{F}$ .

Поэтому

$$(H/N/K/N) \times A/N/C_{A/N}(H/N/K/N) \in \mathfrak{F}.$$

Таким образом,  $A/N \in Y(\mathfrak{F})$  и, следовательно,  $Y(\mathfrak{F})$  – гомоморф.

Пусть теперь  $A$  – мультикольцо с наименьшей длиной главного ряда, для которого найдутся такие идеалы  $N_1$  и  $N_2$ , что  $A/N_1 \in Y(\mathfrak{F})$ ,  $A/N_2 \in Y(\mathfrak{F})$ , но  $A \notin Y(\mathfrak{F})$ . В силу соображений индукции можно полагать, что  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  – минимальные идеалы в  $A$ , содержащиеся в  $N_1$  и  $N_2$  соответственно. Тогда  $A/L_1/N_1/L_1 \in Y(\mathfrak{F})$  и  $A/L_1/L_1+N_2/L_1 \in Y(\mathfrak{F})$ . По индукции

$$A/L_1/(N_1/L_1 \cap (L_1+N_2)/L_1) =$$

$$A/L_1/N_1 \cap (L_1+N_2)/L_1 =$$

$$A/L_1/(L_1+(N_1 \cap N_2))/L_1 = A/L_1/L_1/L_1 \in Y(\mathfrak{F}).$$

Следовательно,  $A/L_1 \in Y(\mathfrak{F})$ . Аналогично показывается, что  $A/L_2 \in Y(\mathfrak{F})$ .

Если хотя бы один из факторов  $L_1/\{0\}$  или  $L_2/\{0\}$ , например  $L_1/\{0\}$ , нефраттиниев, то так как  $A/L_1 \in Y(\mathfrak{F})$ , любой фактор  $A$ -главного ряда, проходящего через  $L_1$ ,  $\mathfrak{F}$ -централен. Значит, ввиду леммы 3.34 из [1]  $A \in Y(\mathfrak{F})$ . Полученное противоречие означает, что факторы  $L_1/\{0\}$  и  $L_2/\{0\}$  фраттиниевы в  $A$ . Тогда фактор  $L_1+L_2/L_1/L_1/L_1$  фраттиниев в  $A/L_1$ . Так как  $A/L_1 \in Y(\mathfrak{F})$ , то фактор  $L_1+L_2/L_1/L_1/L_1$   $\mathfrak{F}$ -централен. А поскольку фактор  $L_1+L_2/L_1$  проективен фактору  $L_2/\{0\}$ , то последний фактор  $\mathfrak{F}$ -централен. Таким образом, любой фактор  $A$ -главного ряда, проходящего через  $L_2$ ,  $\mathfrak{F}$ -централен. Значит, ввиду леммы 3.34 из [1]  $A \in Y(\mathfrak{F})$ . Снова получили противоречие. Лемма доказана.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\mathfrak{X}$  – наследственная формация конечных мультиколец,  $\mathfrak{F}$  – непустая насыщенная в  $\mathfrak{X}$  формация и  $A \in \mathfrak{X} \cap Y(\mathfrak{F})$ . Если класс  $\mathfrak{X}$  регулярен в классе  $\mathfrak{F}$ , то любая  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра в  $A$  является  $\mathfrak{F}$ -нормализатором.

*Доказательство.* Пусть  $T$  –  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра в  $A$ . По теореме 13.8 из [1] в  $A$

найдется  $\mathfrak{F}$ -нормализатор  $H$ , содержащийся в  $T$ . Ввиду теорем 12.12 и 13.4 из [1], если  $A$ -главный фактор  $\mathfrak{F}$ -централен, то  $T$  и  $H$  его покрывают. Если  $A$ -главный фактор  $H/K$   $\mathfrak{F}$ -эксцентрален, то так как  $A \in Y(\mathfrak{F})$ , фактор  $H/K$  нефраттиниев. По лемме 1 из [3] фактор  $H/K$   $A$ -абелев. Значит, ввиду теорем 12.12 и 13.4 из [1]  $T$  и  $H$  его покрывают. По лемме 2 из [3] порядки  $T$  и  $H$  равны произведению порядков  $\mathfrak{F}$ -центральных факторов  $A$ -главного ряда. Следовательно,  $T = H$ . Теорема доказана.

**Замечание 2.1.** Так как  $\mathfrak{F}$ -нормализаторы мультиколец принадлежат классу  $\mathfrak{F}$ , из теоремы 2 автоматически вытекает следующий результат:

**Следствие 2.1.** Пусть  $\mathfrak{X}$  – наследственная формация конечных мультиколец,  $\mathfrak{F}$  – непустая насыщенная в  $\mathfrak{X}$  формация, класс  $\mathfrak{X}$  регулярен в классе  $\mathfrak{F}$ . Тогда  $\mathfrak{X} \cap Y(\mathfrak{F}) \subseteq \Psi(\mathfrak{F})$ .

**Замечание 2.2.** В классе конечных групп с  $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимым корадикалом условие регулярности класса  $\mathfrak{X}$  в классе  $\mathfrak{F}$  выполняется автоматически. Кроме того, каждая конечная группа  $\varphi$ -разрешима. Поэтому в этом случае из утверждений работы получаются новые результаты для конечных групп, имеющие более простой вид. Например, из теоремы 2.1 вытекает как частный случай следующее утверждение:

**Следствие 2.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая насыщенная формация конечных групп. Тогда  $Y(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \Psi(\mathfrak{F})$  и любая  $\mathfrak{F}$ -профраттиниева подалгебра группы  $A \in Y(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$  является  $\mathfrak{F}$ -нормализатором в  $A$ .

### Заключение

Таким образом, в работе получен критерий принадлежности  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевых подалгебр мультикольца классу  $\mathfrak{F}$  и приведен конструктивный пример класса мультиколец, у которых все  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевы подалгебры принадлежат  $\mathfrak{F}$ . Для конечных групп из утверждений статьи автоматически вытекают новые результаты, имеющие в этом случае более простой вид.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
2. Новиков, С.П. О  $\Omega$ -профраттиниевых подалгебрах мультиколец / С.П. Новиков // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во «Университетское», 1992. – № 6. – С. 7–12.
3. Новиков, С.П. Связь  $\mathfrak{F}$ -профраттиниевых подалгебр и  $\mathfrak{F}$ -нормализаторов мультиколец / С.П. Новиков // Вестник БГУ. Серия 1. – 1996. – № 1. – С. 46–48.

Поступила в редакцию 10.07.12.



УДК 517.538.52+517.538.53

## АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА-ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А.П. Старовойтов

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## HERMITE-PADE APPROXIMANTS OF THE SYSTEM MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS

A.P. Starovoitov

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

В работе изучаются асимптотические свойства интегралов Эрмита. В частности, при  $j=1,2,\dots,k$  и  $n \rightarrow \infty$  найдены асимптотики диагональных аппроксимаций Эрмита-Паде  $\pi_{kn,kn}^j(z; e^{jz})$  для системы экспонент  $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ . Аналогичные результаты получены и для системы вырожденных гипергеометрических функций  $\{{}_1F_1(1, \gamma; jz)\}_{j=1}^k$ .

**Ключевые слова:** интегралы Эрмита, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита-Паде, асимптотические равенства.

The paper deals with asymptotic properties of Hermite integrals. In particular, the asymptotics of diagonal Hermite-Pade approximations  $\pi_{kn,kn}^j(z; e^{jz})$  for the system of exponents  $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$  are determined when  $j=1,2,\dots,k$  and  $n \rightarrow \infty$ . Similar results are proved for the system of confluent hypergeometric functions  $\{{}_1F_1(1, \gamma; jz)\}_{j=1}^k$ .

**Keywords:** Hermite integrals, joint Pade approximations, Hermite-Pade approximations, asymptotic equality.

### Введение

Рассмотрим набор вырожденных гипергеометрических функций

$$\begin{aligned} F_\gamma^j(z) &= {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j=1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где  $\gamma$  – произвольное комплексное число, отличное от  $0, -1, -2, \dots$ ,  $(\gamma)_0 = 1$ ,  $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+p-1)$ ,  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – различные комплексные числа. Принимая во внимание равенство  $(\gamma)_p = \Gamma(\gamma+p)/\Gamma(\gamma)$ , где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера, видим, что гипергеометрические функции (0.1) являются функциями Миттаг-Леффлера [1, гл. 5, § 2.7, равенство 16]. При  $\gamma=1$  набор (0.1) представляет собой систему экспонент  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ .

В данной статье исследуется асимптотика совместных приближений функций (0.1) рациональными дробями с общим знаменателем (аппроксимациями Эрмита-Паде). Впервые такие конструкции рациональных функций (для системы экспонент  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ ) рассматривались Ш. Эрмитом [2] в связи с доказательством трансцендентности числа  $e$ . Строгое определение появилось позже [3], [4]. В настоящее время интерес к таким аппроксимациям значительно возрос [5]–[9].

Традиционными приложениями аппроксимаций Эрмита-Паде являются теория аппроксимации аналитических функций [10], [11] и теория диофантовых приближений чисел [12]. В частности, они активно применяются в исследованиях алгебраической природы математических констант (значений дзета функции Римана в натуральных точках, постоянной Эйлера и др. [12]). Вместе с тем, совместные рациональные аппроксимации оказались полезными в спектральной теории несимметричных разностных операторов [13], [14] и в теории случайных матриц [15]–[17].

Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа  $n, m_1, m_2, \dots, m_k$ . По определению полагаем  $m = \sum_{i=1}^k m_i$ ,  $n_j = n + m - m_j$ ,  $j=1, 2, \dots, k$ . Известно [4], что для любого набора  $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$  голоморфных в нуле функций при  $j=1, 2, \dots, k$  существуют такие многочлены  $Q_m(z)$ ,  $P_{n_j}^j(z)$ ,  $\deg Q_m \leq m$ ,  $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$ , для которых

$$\begin{aligned} R_{n,m}^j(z) &= Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = \\ &= A_j z^{n+m+1} + \dots \end{aligned} \quad (0.2)$$

Если  $k=1$ , то согласно теореме Паде [3, теорема 1.1.1] многочлены  $Q_m(z)$ ,  $P_n^1(z)$  определяются с точностью до однородной константы,

а их отношение задает единственную рациональную функцию  $\pi_{n,m}(z, f_1) = P_n^1(z) / Q_m(z)$ , которую называют *аппроксимацией Паде* для  $f_1(z)$ .

При  $k \geq 2$  дроби

$$\pi_{n,m}^j(z) = \pi_{n_j,m}^j(z; f_j) = P_{n_j}^j(z) / Q_m(z), \quad j = 1, 2, \dots, k$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества  $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^k$  его элементы называют *аппроксимациями Эрмита-Паде (совместными аппроксимациями Паде)* для системы функций  $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$ . Единственность имеет место, например, для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [4]). В частности, при  $\gamma = 1$  система  $F_1^j(z) = e^{\lambda_j z}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  является совершенной [4, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом.

Эрмит [2] ввел в рассмотрение интегралы, которые после небольших преобразований [4] приводят к решению системы (0.2) для набора экспонент  $\{F_1^j(z) = e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ :

$$Q_m(z) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^\infty [x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx,$$

$$P_{n_j}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_{\lambda_j}^\infty [x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx, \quad (0.3)$$

$$R_{n,m}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_j} [x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx.$$

В первых двух интегралах (0.3) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в  $+\infty$  и  $Re z > 0$ . При  $Re z \leq 0$  значения  $Q_m(z)$ ,  $P_{n_j}^j(z)$  находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем  $R_{n,m}^j(z)$ , интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и  $\lambda_j$ .

При  $\lambda_j = j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  и  $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$  значения  $Q_m(1)$ ,  $P_{n_j}^j(1)$  являются рациональными числами и легко вычисляются, а  $R_{n,m}^j(1)$  убывает к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Эти и другие свойства интегралов (0.3) были виртуозно использованы Эрмитом для обоснования трансцендентности числа  $e$  [2], [18]. Несколько усложнив рассуждения Эрмита, Линдеман (1882 год) доказал трансцендентность числа  $\pi$ , решив, тем самым, одну из самых старых задач математики – «задачу о квадратуре круга». Предложенное им доказательство [18] существенно опирается на соответствующие свойства интегралов (0.3), порожденных системой функций  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ , где  $\lambda_j$  – различные алгебраические числа.

Важным стимулом для дальнейшего изучения свойств интегралов Эрмита (0.3) стала задача Е.М. Никишина об исследовании сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде для системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [19], который описал асимптотику поведения первого из интегралов в (0.3) и, опираясь на полученный результат, показал, что при  $n+m \rightarrow +\infty$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$   $\pi_{n,m}^j(z; e^{\lambda_j z})$  сходится равномерно на компактах в  $\mathbb{C}$  к  $e^{\lambda_j z}$ . Ранее при  $k=1$  равномерная сходимость  $\pi_{n,m}(z; e^z)$  к  $e^z$  была доказана Перроном [20].

В [21] А.И. Аптекарев существенно обобщил предыдущие результаты. Он установил, что система  $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$  является совершенной при произвольном  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ , кроме того, для фиксированных  $n$  и  $m_j$  таких, что  $n \geq m_j - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , общий знаменатель  $\tilde{Q}_m(z)$  и остаток  $\tilde{R}_{n,m}^j(z)$  в этом случае имеют вид:

$$\tilde{Q}_m(z) = \frac{z^{kn+n+\gamma}}{\Gamma(kn+n+\gamma)} \times \quad (0.4)$$

$$\times \int_0^\infty [x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx,$$

$$\tilde{R}_{n,m}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{kn+n+1}}{(\lambda_j)^{\gamma-1} \Gamma(kn+n)} \times \quad (0.5)$$

$$\times \int_0^{\lambda_j} [x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx,$$

где интегралы имеют тот же смысл, что и в формулах (0.3). В [21], в частности, показано, что при  $|z| \leq L$  и  $n+m \rightarrow +\infty$

$$\tilde{Q}_m(z) = \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1} z\right\} \times \quad (0.6)$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right).$$

Здесь и далее  $L$  – положительная постоянная.

Из (0.6) вытекает [21] равномерная сходимость  $\pi_{n,m}^j(z; F_\gamma^j)$  к  $F_\gamma^j(z)$  на компактах в  $\mathbb{C}$  при  $n+m \rightarrow +\infty$  и  $j = 1, 2, \dots, k$ .

В данной работе изучаются асимптотические свойства обобщенных интегралов Эрмита, определяющих в (0.5) функции  $\tilde{R}_{n,m}^j(z)$ . В частности, при  $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$  и  $n \rightarrow \infty$  для произвольного набора  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  различных и отличных от нуля действительных чисел найдена асимптотика аппроксимаций Эрмита-Паде для системы функций Миттаг-Леффлера  $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$ .

В случае, когда  $k=1$  и  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  асимптотические свойства аппроксимаций Паде

$\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$  функций  $F_\gamma(z) = F_\gamma^1(z) = F_1(1, \gamma; z)$  исследовались в [22]. В этой работе установлено, что для любого  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \leq L$  при  $m \leq n$  и  $n+m \rightarrow \infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) = (-1)^m \frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (0.7)$$

При  $\gamma=1$  равенство (0.7) ранее было доказано Д. Браессом [23].

Первый результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита-Паде к набору из двух марковских функций был получен В.А. Калягиным [24]. Главный член асимптотики, а также сходимость аппроксимаций Эрмита-Паде для набора марковских функций, порожденных системой Анжелеско, были исследованы в работе А.А. Гончара и Е.А. Рахманова [25]. Вопросы единственности, а также свойства главного члена асимптотики аппроксимаций Эрмита-Паде марковских функций для системы Никишина интенсивно исследовались рядом авторов [26]–[32]. Отметим также работы А.И. Аптекарева [33], [34] и А.И. Аптекарева с соавторами [35], [36], в которых рассматривались близкие задачи.

### 1 Формулировка основных результатов

Далее, считаем, что  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – отличные от нуля различные действительные числа. Обозначим через  $\{\lambda_j^*\}_{j=0}^k$  множество чисел  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k \cup \{0\}$ , занумерованных в порядке возрастания, т.е.  $\lambda_0^* < \lambda_1^* < \dots < \lambda_k^*$ , и определим функции:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x - \lambda_0^*)(x - \lambda_1^*) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k^*) = \\ &= x(x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k), \end{aligned}$$

$$S(x) = \ln \left( (-1)^{k+i+1} \varphi(x) \right), x \in (\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*),$$

$$S(\lambda_i) = -\infty, i = 0, 1, \dots, k.$$

Многочлен  $\varphi(x)$  имеет нули в точках  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$ . Следовательно, на каждом из интервалов  $(\lambda_0^*, \lambda_1^*), (\lambda_1^*, \lambda_2^*), \dots, (\lambda_{k-1}^*, \lambda_k^*)$  производная  $\varphi'(x)$  обращается в ноль. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_k$  – нули  $\varphi'(x)$ , занумерованные в порядке возрастания, т.е.  $x_i \in (\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Так как  $\deg \varphi'(x) = k$ , то других нулей у  $\varphi'(x)$  нет. Нетрудно заметить, что на интервале  $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$  функция  $S(x)$  принимает наибольшее значение в точке  $x_i$ , т.е.  $S(x) < S(x_i)$  при  $x \in (\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*) \setminus \{x_i\}$ . На каждом из интервалов  $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$

$$S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$$S''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)} =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x - \lambda_1)^2} - \dots - \frac{1}{(x - \lambda_k)^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$S''(x_i) = \varphi''(x_i) / \varphi(x_i) < 0.$$

Сформулируем основные результаты работы.

**Теорема 1.1.** Пусть  $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$  и  $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{\lambda_j z})$  – аппроксимации Эрмита-Паде для системы экспонент  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ , где  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного  $z$ ,  $|z| \leq L$  при  $j = 1, 2, \dots, k$  и  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_j z} - \pi_{kn, kn}^j(z; e^{\lambda_j z}) &= \\ &= (-1)^{kn} \operatorname{sign}(\lambda_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_i^* (-1)^{(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} e^{nS(x_i)} e^{-zx_i} (1 + O_i(1/n)),$$

где в сумме  $\sum_i^*$  суммирование распространяется только на те значения  $i$  из  $\{1, 2, \dots, k\}$ , для которых  $x_i$  лежит в интервале с концами в точках 0 и  $\lambda_j$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$  и  $\pi_{kn, kn}^j(z; F_\gamma^j)$  – аппроксимации Эрмита-Паде для системы функций Миттаг-Леффлера  $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$ , где  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного  $z$ ,  $|z| \leq L$  при  $j = 1, 2, \dots, k$  и  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} F_\gamma^j(z) - \pi_{kn, kn}^j(z; F_\gamma^j) &= \\ &= (-1)^{kn} \operatorname{sign}(\lambda_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_i^* (-1)^{(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} \times$$

$$\times e^{nS(x_i)} e^{-zx_i} \left( \frac{x_i}{\lambda_j} \right)^{\gamma-1} (1 + O_i(1/n)),$$

где в сумме  $\sum_i^*$  суммирование распространяется только на те значения  $i$  из  $\{1, 2, \dots, k\}$ , для которых  $x_i$  лежит в интервале с концами в точках 0 и  $\lambda_j$ .

В частности, при  $k=1$  и  $\lambda_1=1$

$$\varphi(x) = x(x-1),$$

$$S(x) = \ln[-x(x-1)], \quad x \in (0, 1),$$

$$x_1 = 1/2, \quad S(x_1) = -\ln 4, \quad S''(x_1) = -8.$$

Поэтому из теоремы 1.2 следует, что

$$\begin{aligned} F_\gamma(z) - \pi_{n,n}(z; F_\gamma) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}} e^z \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}} (1 + O(1/n)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.)  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  называют эквивалентными ( $\alpha_n \sim \beta_n$ ), если  $\alpha_n / \beta_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

Применяя при действительных  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$  формулу Стирлинга и учитывая равенство  $(\gamma)_k = \Gamma(k + \gamma) / \Gamma(\gamma)$ , нетрудно показать, что при  $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{n!(\gamma)_n}{(\gamma)_{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}}.$$

Это значит, что при  $n = m$  и  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  асимптотические равенства (0.7) и (1.1) согласуются. Таким образом, в диагональном случае получено другое доказательство теоремы 1 из [22], которое, к тому же, справедливо и при  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ .

Подробнее остановимся на следствиях из теорем 1.1 и 1.2 в случае, когда  $k = 2, 3$ ,  $\lambda_j = j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Следствие 1.1.** Пусть  $\{e^z, e^{2z}\}$  – набор из двух экспонент и  $n = m_1 = m_2$ . Тогда для любого комплексного  $z$ ,  $|z| \leq L$  при  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^z) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}} (1 + o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{2z}) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times \\ &\times \left\{ e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Следствие 1.2.** Пусть  $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^3$  – набор из двух функций Миттаг-Леффлера при  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  и  $n = m_1 = m_2$ . Тогда для любого комплексного  $z$ ,  $|z| \leq L$  при  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} F_\gamma^1(z) - \pi_{2n,2n}^1(z; F_\gamma^1) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} (1 + o(1)), \\ F_\gamma^2(z) - \pi_{2n,2n}^2(z; F_\gamma^2) &= \frac{z^{3n+1}}{2^{\gamma-1}(\gamma)_{3n}} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times \\ &\times \left\{ e^{\frac{z}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} + (-1)^n e^{-\frac{z}{\sqrt{3}}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Для доказательства следствий 1.1 и 1.2 достаточно заметить, что при  $k = 2$ ,  $\lambda_j = j$ ,  $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x(x-1)(x-2), \\ x_1 &= 1 - 1/\sqrt{3}, \quad x_2 = 1 + 1/\sqrt{3}, \\ S(x_1) &= S(x_2) = \ln \left[ 2 / (3\sqrt{3}) \right], \\ S''(x_1) &= S''(x_2) = -9. \end{aligned}$$

При  $\gamma = 1$  равенства, аналогичные (1.2) и (1.3), ранее другим методом были получены в [37]. В них вместо б.м.  $\sqrt{2\pi/9n} \cdot [2/(3\sqrt{3})]^n$  в качестве множителя правой части стоит эквивалентная ей б. м.  $B((n+1)/2; n+1)$ , где  $B(\cdot; \cdot)$  – бета-функция Эйлера.

**Следствие 1.3.** Пусть  $\{e^{jz}\}_{j=1}^3$  – набор из трёх экспонент и  $n = m_1 = m_2 = m_3$ . Тогда для любого комплексного  $z$ ,  $|z| \leq L$  при  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{3n,3n}^1(z; e^z) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^z \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} (1 + o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{3n,3n}^1(z; e^{2z}) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} (1 + o(1)), \\ e^{3z} - \pi_{3n,3n}^1(z; e^{3z}) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^{3z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} \left\{ e^{\sqrt{5}z/2} + e^{-\sqrt{5}z/2} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

**Следствие 1.4.** Пусть  $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^3$  – набор из трёх функций Миттаг-Леффлера при  $\lambda_j = j$ ,  $j = 1, 2, 3$  и  $n = m_1 = m_2 = m_3$ . Тогда для любого комплексного  $z$ ,  $|z| \leq L$  при  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} F_\gamma^1(z) - \pi_{3n,3n}^1(z; F_\gamma^1) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^z \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\gamma-1} (1 + o(1)), \\ F_\gamma^2(z) - \pi_{3n,3n}^2(z; F_\gamma^2) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^{2z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^{\gamma-1} (1 + o(1)), \\ F_\gamma^3(z) - \pi_{3n,3n}^3(z; F_\gamma^3) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^{3z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} \times \\ &\times \left\{ e^{\frac{\sqrt{5}z}{2}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)^{\gamma-1} + e^{-\frac{\sqrt{5}z}{2}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^{\gamma-1} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Для доказательства следствий 1.3 и 1.4 достаточно заметить, что при  $k = 3$  и  $\lambda_j = j$ ,  $j = 1, 2, 3$  в теоремах 1.1 и 1.2

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x(x-1)(x-2)(x-3), \\ x_1 &= (3-\sqrt{5})/2, \quad x_3 = (3+\sqrt{5})/2, \\ x_2 &= 3/2, \quad S(x_1) = S(x_3) = 0, \quad S(x_2) = \ln(9/16), \\ S''(x_1) &= S''(x_3) = -10, \quad S''(x_2) = -80/9. \end{aligned}$$

## 2 Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_I f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (2.1)$$

называют интегралами Лапласа. Здесь  $I$  либо отрезок  $[a, b]$ , либо интервал  $(a, b)$ ,  $\lambda$  – большой параметр. Будем считать, что функция  $S(x)$  принимает только действительные значения. Функция  $f(x)$  может быть комплекснозначной. Считаем также, что  $f(x)$  и  $S(x)$  непрерывны при  $x \in I$ . Нас интересует асимптотическое поведение интеграла  $F(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Следующее утверждение [38, § 43, п. 1, лемма 1] дает грубую экспоненциальную оценку для интеграла Лапласа.

**Утверждение 2.1.** Пусть  $I = (a, b)$  – конечный или бесконечный интервал,  $S(x) \leq c$  при  $x \in I$  и интеграл (2.1) сходится абсолютно при некотором  $\lambda_0 > 0$ . Тогда при  $\text{Re} \lambda \geq \lambda_0$

$$|F(\lambda)| \leq c_1 e^{c \text{Re} \lambda},$$

где  $c_1$  – положительная постоянная.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда  $S(x)$  достигает наибольшего значения на отрезке  $I = [a, b]$  в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка. Справедливо [38, § 43, п. 4, теорема 2] следующее

**Утверждение 2.2.** Пусть  $S(x) < S(x_0)$ ,  $x \neq x_0$ ,  $a < x_0 < b$ ,  $S''(x_0) \neq 0$  и функции  $f(x)$ ,  $S(x)$  бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{(\lambda x_0)} \{f(x_0) + O(\lambda^{-1})\}. \quad (2.2)$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.2. Теорема 1.1 получается из теоремы 1.2, если положить  $\gamma = 1$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$  и  $\tilde{R}_{n,m}^j(z)$  – функции, определяемые равенством (0.5) для системы  $\{F_j^j(z)\}_{j=1}^k$ , где  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного  $z$ ,  $|z| \leq L$  при  $j = 1, 2, \dots, k$  и  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,m}^j(z) &= (-1)^{kn} \text{sign}(\lambda_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} \times \\ &\times \sum_i^* (-1)^{(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} e^{nS(x_i)} e^{-zx_i} \left(\frac{x_i}{\lambda_j}\right)^{\gamma-1} \times \\ &\times (1 + O_i(1/n)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где в сумме  $\sum_i^*$  суммирование распространяется только на те значения  $i$  из  $\{1, 2, \dots, k\}$ , для которых  $x_i$  лежит в интервале с концами в точках 0 и  $\lambda_j$ .

**Доказательство.** В условиях леммы

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,m}^j(z) &= \frac{z^{kn+n+1}}{(\lambda_j)^{\gamma-1} (\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} \times \\ &\times \int_0^{\lambda_j} x^n (x - \lambda_1)^n \dots (x - \lambda_k)^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Интеграл в правой части равенства (2.4) обозначим через  $I_j(z)$  и представим в виде

$$I_j(z) = \text{sign}(\lambda_j) \sum_i^* I_j^i(z), \quad (2.5)$$

где

$$I_j^i(z) = \int_{\lambda_{i-1}^*}^{\lambda_i^*} x^n (x - \lambda_1)^n \dots (x - \lambda_k)^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx$$

и сумма  $\sum_i^*$  состоит только из тех интегралов  $I_j^i$ ,

у которых область интегрирования  $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$  принадлежит промежутку с концами в точках 0 и  $\lambda_j$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_j^i(z) &= (-1)^{kn+(i+1)n} \times \\ &\times \int_{\lambda_{i-1}^*}^{\lambda_i^*} x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{n \ln[(-1)^{k+i+1} x(x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_k)]} dx = \\ &= (-1)^{kn+(i+1)n} \int_{\lambda_{i-1}^*}^{\lambda_i^*} x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{nS(x)} dx. \end{aligned}$$

В последнем интеграле разобьем область интегрирования  $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$  на три части:  $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_{i-1}^* + \tau]$ ,  $[\lambda_{i-1}^* + \tau, \lambda_i^* - \tau]$ ,  $[\lambda_i^* - \tau, \lambda_i^*)$ , где  $0 < \tau < 1$  и выбрано так, чтобы  $x_i \in [\lambda_{i-1}^* + \tau, \lambda_i^* - \tau]$ . Поскольку на интервале  $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$  функция  $S(x)$  принимает наибольшее значение в единственной точке  $x_i$ , то, в силу утверждения 2.1, несобственные интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с  $e^{nS(x_i)}$ . Асимптотика интеграла по отрезку  $[\lambda_{i-1}^* + \tau, \lambda_i^* - \tau]$  вычисляется по формуле (2.2), если положить в ней  $f(x) = x^{\gamma-1} e^{-zx}$ . Поэтому при  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} I_j^i(z) &= (-1)^{kn+(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} \times \\ &\times e^{nS(x_i)} x_i^{\gamma-1} e^{-zx_i} (1 + O_i(1/n)). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (2.4), (2.5) следует (2.3). Лемма 2.1 доказана.

Утверждения теоремы 1.2 легко получить, опираясь на лемму 2.1. Для этого нужно воспользоваться равенствами (0.2) и учесть, что при  $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$  и  $n \rightarrow +\infty$  из (0.6) следует, что

$$\tilde{Q}_m(z) = \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z\right\} (1 + o(1)).$$

Теорема 1.2 доказана.

В заключении заметим, что при целых  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  теорема 1.1 позволяет получать эффективные

оценки для совместных приближений рациональными числами значений показательной функции  $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_k}$ . В этом смысле полученные результаты могут быть полезными в теории диофантовых приближений [39].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981.
2. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.
4. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.
5. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 37–122.
6. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Эрмита-Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 123–190.
7. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.
8. *Boyd, J.P.* Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev-Hermite-Pade method / J.P. Boyd // J. of Comput. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 223, № 2 – P. 693–702.
9. *Beckermann, B.* How well does the Hermite-Pade approximation smooth the Gibbs phenomenon? / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.
10. *Сорокин, В.Н.* Циклические графы и теорема Апери / В.Н. Сорокин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 3 – С. 99–134.
11. *VanAssche, W.* Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W. VanAssche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.
12. *Аптекарев, А.И.* Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9 / А.И. Аптекарев (ред.) – М.: МИАН, 1988.
13. *Калягин, В.А.* Аппроксимации Эрмита-Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
14. *Aptekarev, A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.
15. *Bleher, P.M.* Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials / P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Int. Math. Res. Not. – 2004. – Vol. 3. – P. 109–129.
16. *Aptekarev, A.I.* Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II / A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Comm. Math. Phys. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.
17. *Аптекарев, А.И.* Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // ТМФ. – 2009. – Т. 159, № 1. – С. 34–57.
18. *Клейн, Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1 / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1933.
19. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
20. *Perron, O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin: Teubner, 1929.
21. *Аптекарев, А.И.* Об аппроксимациях Паде к набору  $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \}_{i=1}^k$  // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.
22. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.
23. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of  $e^x$ , II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.
24. *Калягин, В.А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1979. – Т. 110 (152), № 4. – С. 609–627.
25. *Гончар, А.А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов // Тр. МИАН СССР. – 1981. – Т. 157. – С. 31–48.
26. *Гончар, А.А.* Об аппроксимациях Эрмита-Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, В.Н. Сорокин // Матем. сборник. – 1997. – Т. 188, № 5. – С. 33–58.
27. *Никишин, Е.М.* Совместные аппроксимации Паде / Е.М. Никишин // Матем. сборник. – 1980. – Т. 155, № 4. – С. 499–519.
28. *Никишин, Е.М.* Асимптотика линейных форм для совместных аппроксимаций Паде / Е.М. Никишин // Изв. вузов. Сер. матем. – 1986. – № 2. – С. 33–41.

29. Бустаманте, Ж. Аппроксимации Эрмита-Паде для системы Никишина аналитических функций / Ж. Бустаманте, Лопес Г. Лагомасино // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 11. – С. 117–138.
30. Driver, K. Normality in Nikishin systems / K. Driver, H. Stahl // Indag. Math. (N.S.). – 1994. – Vol. 5, № 2. – P. 161–187.
31. Driver, K. Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. I / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 60. – P. 245–263.
32. Driver, K. Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. II / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 61. – P. 261–284.
33. Аптекарев, А.И. Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 1988. – Т. 136 (178), № 1. – С. 56–84.
34. Аптекарев, А.И. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для системы Никишина / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, № 5. – С. 3–44.
35. Аптекарев, А.И. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов // Матем. сборник. – 2010. – Т. 201, № 2. – С. 29–78.
36. Аптекарев, А.И. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.
37. Рябченко, Н.В. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 97–100.
38. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.
39. Шмидт, В. Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир, 1983.

Поступила в редакцию 23.01.13.

УДК 517.977

## МЕТОД КОРРЕКТИРОВКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ НЕРЕГУЛЯРНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА

Н.М. Федорцова

*Конструкторско-технический центр Белорусской железной дороги, Минск*

## CORRECTION METHOD FOR SOLVING PERTURBED PARAMETRIC LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEMS IN THE NEIGHBOURHOOD OF IRREGULAR PARAMETER VALUE

N.M. Fedartsova

*Design and Technology center of the Belarusian railway, Minsk*

Рассматривается семейство однопараметрических линейно-квадратичных задач оптимального управления с особыми участками. Приводится метод, позволяющий строить решения возмущенных задач в окрестности нерегулярного значения параметра при условии, что известно решение невозмущенной задачи.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, параметрическая оптимизация, возмущенные задачи, линейно-квадратичные задачи, особые участки.

A family of one-parametric linear-quadratic optimal control problems with singular arcs is considered. A method for solving perturbed problems in the neighbourhood of irregular parameter value on condition that unperturbed problem solution is known is given.

**Keywords:** optimal control, parametric optimization, perturbed problems, linear-quadratic problems, singular arcs.

### Введение

В последние годы наблюдается активное изучение параметрических задач оптимального управления, поскольку данного рода задачи возникают во многих приложениях. Так, их можно встретить в экономике, медицине, ядерной энергетике, робототехнике. Однако, несмотря на огромное количество публикаций (см., например, [1]–[6]) и достигнутые успехи, исследования в этой области не завершены, поскольку в основном они проводятся в предположении, что выполняются достаточно сильные условия регулярности, обеспечивающие устойчивость структуры решения и его регулярную зависимость от параметра. Хорошо известно, что нарушение этих условий существенно усложняет характер зависимости решений от параметра и тем самым затрудняет проведение анализа чувствительности. Часто на практике условия регулярности нарушаются. Так, при построении управлений типа обратной связи, при решении задач методом продолжения по параметру неизбежно возникают ситуации, когда значения параметров становятся нерегулярными. Поэтому исследование нерегулярных случаев, несомненно, является актуальной тематикой.

Цель настоящей работы – на основании исследований свойств решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления с особыми

участками в окрестности нерегулярного параметра, результаты которых отражены в работе [7], построить метод корректировки для решения возмущенных задач в окрестности нерегулярного параметра.

### 1 Постановка задачи

В классе измеримых функций  $u(t)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ , рассматривается семейство параметрических задач оптимального управления  $OY(\alpha)$ ,  $\alpha \in E(\alpha_0)$ :

$$OY(\alpha) : \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{t_*} x^T(t) D x(t) dt + c^T x(t_*) \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0(\alpha), \\ Hx(t_*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  – параметр семейства,  $x = x(t)$  –  $n$ -вектор состояния,  $u = u(t)$  – скалярное управление,  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $D$  – симметричная неотрицательно определенная матрица),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $g \in \mathbb{R}^m$  – заданные матрицы и векторы,  $x_0(\alpha) \in \mathbb{R}^n$  – заданная достаточно гладкая вектор-функция параметра  $\alpha$ ;  $b^T D b \neq 0$ ,



$\mathcal{E}(\alpha_0) = [\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ ,  $\alpha_0$  – фиксированное число. Здесь и далее  $\delta > 0$  – достаточно малое число, символ  $^T$  означает транспонирование.

**Предположение 1.1.** *Выполняется следующее включение:*

$$\begin{aligned} g &\in \text{int}\{z \in \mathbb{R}^m : z = Hx(t_*), \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), x(0) = x_0(\alpha_0), \\ |u(t)| &\leq 1, t \in T\}. \end{aligned}$$

Понятия допустимых и оптимальных управлений и соответствующих им траекторий вводятся стандартно [8]. Результаты из [8] позволяют утверждать, что задача (1.1) имеет решение, если существуют допустимые управления.

Пусть известно решение задачи ОУ( $\alpha_0$ ), которую будем называть невозмущенной. Требуется построить метод, позволяющий находить решение возмущенной задачи ОУ( $\alpha$ ), где  $\alpha$  принадлежит окрестности  $\mathcal{E}(\alpha_0)$  нерегулярного значения параметра  $\alpha_0$ , на основе известного решения невозмущенной задачи.

## 2 Условия оптимальности. Структура и определяющие элементы

Для задачи ОУ( $\alpha$ ) справедлив **Принцип максимума** [8], согласно которому для оптимальности в задаче ОУ( $\alpha$ ) допустимых управления  $u_\alpha(\cdot) = (u_\alpha(t), t \in T)$  и траектории  $x_\alpha(\cdot)$  необходимо и достаточно существование такого  $m$ -вектора  $y(\alpha)$ , что вдоль решения  $\psi_\alpha(t)$ ,  $t \in T$ , сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -A^T \psi(t) + Dx_\alpha(t), \\ \psi(t_*) &= H^T y(\alpha) - c, \end{aligned} \quad (2.1)$$

выполняются соотношения

$$\psi_\alpha^T(t) bu_\alpha(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi_\alpha^T(t) bu, t \in T. \quad (2.2)$$

Вектор  $y(\alpha)$ , удовлетворяющий (2.1)–(2.2), будем называть вектором Лагранжа.

Рассмотрим оптимальное управление  $u_\alpha(\cdot)$  и соответствующую ему траекторию  $x_\alpha(\cdot)$  задачи (1.1), а также вектор Лагранжа  $y(\alpha)$ . Найдем соответствующее им решение  $\psi_\alpha(t)$ ,  $t \in T$ , сопряженной системы (2.1) и построим функцию коуправления

$$\Delta_\alpha(t) = \psi_\alpha^T(t)b, t \in T. \quad (2.3)$$

В общем случае в задаче (1.1) функция (2.3) имеет изолированные нули, а также существуют особые участки, где она обращается тождественно в нуль:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(t) &\equiv 0, t \in [\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha)] \subset T, \\ \tau_i(\alpha) &< \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p(\alpha)}. \end{aligned}$$

Здесь  $p(\alpha)$  – количество отрезков  $[\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha)]$ , где функция (2.3) обращается тождественно в

нуль. Далее без ограничения общности будем считать, что  $\tau_1(\alpha) > 0$ ,  $\tau^{p(\alpha)}(\alpha) < t_*$ ,  $p(\alpha) \geq 1$ .

Из принципа максимума следует, что вне особых участков управление  $u_\alpha(\cdot)$  принимает граничные значения  $\pm 1$ , а на особых участках лежит в диапазоне от  $-1$  до  $+1$ .

Обозначим через

$$t_{ij}(\alpha), j = \overline{1, s_i(\alpha)}, i = \overline{0, p(\alpha)},$$

изолированные нули функции коуправления, которые упорядочим следующим образом

$$\tau^0(\alpha) \equiv 0, \tau_{p(\alpha)+1} \equiv t_*,$$

$$0 \leq t_{01}(\alpha), t_{p(\alpha)s_{p(\alpha)}(\alpha)}(\alpha) \leq t_*,$$

$$t_{ij}(\alpha) < t_{i+1}(\alpha), j = \overline{1, s_i(\alpha)-1}, i = \overline{0, p(\alpha)},$$

$$\tau^i(\alpha) < t_{i1}(\alpha), i = \overline{1, p(\alpha)},$$

$$t_{is_i(\alpha)}(\alpha) < \tau_{i+1}(\alpha), i = \overline{0, p(\alpha)-1}.$$

**Предположение 2.1.** *Верны соотношения:*  $p(\alpha) < \infty$ ,  $s_i(\alpha) < \infty$ ,  $i = \overline{0, p(\alpha)}$ .

**Определение 2.1.** *Значение параметра  $\alpha$  и оптимальное управление  $u_\alpha(\cdot)$  будем называть регулярными, если выполняются следующие условия*

a)  $\Delta_\alpha(0) \neq 0$ ,  $\Delta_\alpha(t_*) \neq 0$ ,

б)  $\partial \Delta_\alpha(\tau) / \partial t \neq 0$ ,

$$\tau \in \{t_{ij}(\alpha), j = \overline{1, s_i(\alpha)}, i = \overline{0, p(\alpha)}\},$$

в)  $|u_\alpha(t)| < 1$ ,  $t \in (\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha))$ ,

$$|u_\alpha(\tau_i(\alpha) + 0)| < 1,$$

$$|u_\alpha(\tau^i(\alpha) - 0)| < 1, i = \overline{1, p(\alpha)}.$$

Положим

$$P(\alpha) = \{0, 1, \dots, p(\alpha)\},$$

$$l_i(\alpha) = u_\alpha(\tau^i(\alpha) + 0), i \in P(\alpha), \phi(\alpha) = \psi_\alpha(0).$$

Рассмотрим совокупности параметров

$$S(\alpha) = \{p(\alpha), l_i(\alpha), s_i(\alpha), i \in P(\alpha)\},$$

$$\theta(\alpha) = (t_{ij}(\alpha), j = \overline{1, s_i(\alpha)}, i \in P(\alpha);$$

$$\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p(\alpha)}; \phi(\alpha); y(\alpha)).$$

**Определение 2.2.** *Множества  $S(\alpha)$  и  $\theta(\alpha)$  назовем структурой и определяющими элементами задачи ОУ( $\alpha$ ) соответственно.*

Зная множества  $S(\alpha)$  и  $\theta(\alpha)$ , можно однозначно восстановить управление  $u_\alpha(\cdot)$  задачи ОУ( $\alpha$ ) и проверить его оптимальность. Следовательно, задача построения решений возмущенных задач ОУ( $\alpha$ ) сводится к построению конечных наборов данных  $S(\alpha)$  и  $\theta(\alpha)$ .

Свойства решений параметрических задач ОУ( $\alpha$ ) в окрестности  $\alpha \in \mathcal{E}(\alpha_0)$  регулярного значения  $\alpha_0$  параметра исследованы в работе [9]. Показано, что в регулярном случае задачи ОУ( $\alpha$ ),

$\alpha \in \mathcal{E}(\alpha_0)$ , имеют постоянную структуру  $S(\alpha) \equiv S(\alpha_0)$ , функция определяющих элементов  $\theta(\alpha)$  является единственным решением системы нелинейных уравнений, которая однозначно задается структурой  $S(\alpha_0)$ .

В нерегулярном случае сколь угодно малые вариации параметра могут повлечь изменение структуры и вектора определяющих элементов:

$$S(\alpha_0 - 0) \neq S(\alpha_0) \neq S(\alpha_0 + 0),$$

$$\theta(\alpha_0 - 0) \neq \theta(\alpha_0) \neq \theta(\alpha_0 + 0).$$

В работе [7] доказаны теоремы, позволяющие, не решая явно возмущенные задачи, а используя только решение невозмущенной задачи, определить  $S(\alpha_0 \pm 0)$  и  $\theta(\alpha_0 \pm 0)$ . Целью данной работы является обоснование метода, который на основании теорем из [7] позволит строить решение возмущенной задачи ОУ ( $\alpha$ ) при  $\alpha$  из окрестности  $\mathcal{E}(\alpha_0)$  нерегулярного значения параметра  $\alpha_0$  путем корректировки известного решения невозмущенной задачи ОУ ( $\alpha_0$ ).

### 3 Свойства решений в окрестности нерегулярного значения параметра

Пусть для нерегулярного значения параметра  $\alpha_0$  известны структура и определяющие элементы задачи ОУ ( $\alpha_0$ ):

$$S(\alpha_0) = S^0 = \{p(\alpha_0) = p^0, l_i(\alpha_0) = l_i^0, \quad (3.1)$$

$$s_i(\alpha_0) = s_i^0, i \in P(\alpha_0) = P^0\},$$

$$\theta(\alpha_0) = \theta^0 = (t_{ij}(\alpha_0) = t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^0}, i \in P^0,$$

$$\tau_i(\alpha_0) = \tau_i^0, \tau^i(\alpha_0) = \tau^{i0}, i = \overline{1, p^0}; \varphi(\alpha_0); y(\alpha_0)).$$

Предполагается, что при  $\alpha = \alpha_0$  нарушается только одно из условий регулярности, приведенных в определении 2.1, и при  $\alpha = \alpha_0$  для точки  $\tilde{t} \in T$ , где нарушаются условия регулярности, выполняются условия

- 1) если  $\tilde{t} \in [\tau_{i_0}(\alpha), \tau^{i_0}(\alpha)]$ , где  $1 \leq i_0 \leq p(\alpha)$ , то:
  - а) при  $\tilde{t} \neq \tau_{i_0}(\alpha) \vee \tau^{i_0}(\alpha)$  из  $|u_\alpha(\tilde{t})| = 1$  следует, что  $\partial^2 u_\alpha(\tilde{t}) / \partial t^2 \neq 0$ ;
  - б) при  $\tilde{t} = \tau_{i_0}(\alpha)$  из  $|u_\alpha(\tau_{i_0}(\alpha) + 0)| = 1$  следует, что  $\partial u_\alpha(\tau_{i_0}(\alpha) + 0) / \partial t \neq 0$ ;
  - в) при  $\tilde{t} = \tau^{i_0}(\alpha)$  из  $|u_\alpha(\tau^{i_0}(\alpha) - 0)| = 1$  следует, что  $\partial u_\alpha(\tau^{i_0}(\alpha) - 0) / \partial t \neq 0$ ;
- 2) если  $\tilde{t} \in [\tau^{i_0}(\alpha), \tau_{i_0+1}(\alpha))$ , где  $0 \leq i_0 \leq p(\alpha)$ , то:
  - а) при  $\tilde{t} \neq 0 \vee t_*$  из  $\Delta_\alpha(\tilde{t}) = 0$ ,  $\partial \Delta_\alpha(\tilde{t}) / \partial t = 0$  следует, что  $\partial^2 \Delta_\alpha(\tilde{t}) / \partial t^2 \neq 0$ ;
  - б) при  $\tilde{t} = 0 \vee t_*$  из  $\Delta_\alpha(\tilde{t}) = 0$  следует, что  $\partial \Delta_\alpha(\tilde{t}) / \partial t \neq 0$ .

Введем необходимые обозначения. Пусть  $S = \{p, l_i, s_i, i \in P\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $l_i = \pm 1$ ,  $s_i \in \mathbb{N}$ ,  $i \in P = \{0, 1, \dots, p\}$ , – некоторая структура,  $\theta = (t_{ij}, j = \overline{1, s_i}, i \in P, \tau_i, \tau^i, i = \overline{1, p}; \phi; y)$  – соответствующий ей вектор определяющих элементов,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n \times n} \\ D & -A^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$q^T = -\beta^T \mathcal{A}_0^2 / (\beta^T \mathcal{A}_0 \gamma),$$

$$\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_0 + \gamma q^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Здесь  $\mathbb{O}_{k \times n}$  – нулевая  $k \times n$ -матрица,  $\mathbf{0}_n$  – нулевой  $n$ -вектор.

Обозначим через  $z(S, \theta, \alpha | t)$ ,  $t \in T$ , траекторию системы

$$\dot{z} = \begin{cases} \mathcal{A}_0 z + \gamma (-1)^j l_i, t \in [t_{ij}, t_{ij+1}[, j = \overline{0, s_i}, i \in P, \\ \mathcal{A}_* z, t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} x_0(\alpha) \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где  $t_{i0} := \tau^i$ ,  $t_{is, s+1} := \tau_{i+1}$ ,  $i \in P$ ,  $\tau^0 = 0$ ,  $\tau_{p+1} = t_*$ .

Рассмотрим  $d(S) := \left( m + n + 2p + \sum_{i=0}^p s_i \right)$ -вектор-функцию

$$\Psi(S, \theta, \alpha) = \begin{pmatrix} (H, \mathbb{O}_{m \times n})z(S, \theta, \alpha | t_*) - g \\ (\mathbb{O}_{n \times n}, \mathbb{E}_n)z(S, \theta, \alpha | t_*) - H^T y + c \\ \beta^T z(S, \theta, \alpha | t_{ij}), j \in V_i, i \in P \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbb{E}_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица, множества  $V_i, i \in P$ , строятся по структуре  $S$  по правилу

$$V_0 = \{1, \dots, s_0 + 1\},$$

$$V_i = \{0, \dots, s_i + 1\}, i = \overline{1, p-1}, \quad (3.4)$$

$$V_p = \{0, \dots, s_p\}.$$

Подчеркнем, что вид вектора  $\theta$  и вектор-функции  $\Psi(S, \theta, \alpha)$ , а также их размерности задаются параметрами  $l_i, s_i, i \in P$ , и  $p$ , которые определяются структурой  $S$ .

Рассмотрим случай, когда при  $\alpha = \alpha_0$  условие регулярности б) нарушается в точке  $\tilde{t} = t_{kr}^0$ :

$$\Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) = \partial \Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) / \partial t = 0,$$

$$\partial^2 \Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) / \partial t^2 \neq 0,$$

$$t_{kr}^0 \in (\tau^{k0}, \tau_{k+1}^0), r \in \{1, \dots, s_k^0\}, k \in P^0.$$

Для определенности и с целью упрощения изложения материала будем полагать, что  $k = p^0$ ,  $r = s_p^0$  (см. рисунок 3.1, сплошная линия).

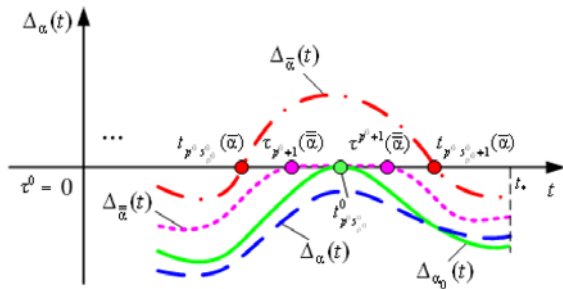


Рисунок 3.1 – Поведение функции коуправления при возмущении нерегулярного значения параметра  $\alpha_0$  в окрестности точки  $\tilde{t}$

При возмущении  $\alpha_0$  может реализоваться одна из следующих ситуаций.

I. При  $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$  структура  $S(\alpha) = S^I$  задач ОУ( $\alpha$ ) изменится по отношению к структуре  $S^0$  (см. (3.1)) задачи ОУ( $\alpha_0$ ), поскольку нуль коуправления  $\tilde{t} = t_{kr}^0$  не породит новой точки переключения управления (см. рисунок 3.1, крупнопунктирная линия). Новая структура будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} S^I &= \{p^I, l_i^I, s_i^I, i \in P^I\}, \\ p^I &= p^0, P^I = P^0, l_i^I = l_i^0, i \in P^I, \\ s_i^I &= s_i^0, i \in P^I \setminus P^0, s_{p^0}^I = s_{p^0}^0 - 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

II. При  $\bar{\alpha} \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$  структура  $S(\bar{\alpha}) = S^{II}$  задач ОУ( $\bar{\alpha}$ ) изменится по отношению к структуре  $S^0$  задачи ОУ( $\alpha_0$ ), поскольку нуль коуправления  $\tilde{t} = t_{kr}^0$  породит две новые точки переключения управления – изолированные нули функции коуправления (см. рисунок 3.1, штрихпунктирная линия). Новая структура будет иметь вид

$$\begin{aligned} S^{II} &= \{p^{II}, l_i^{II}, s_i^{II}, i \in P^{II}\}, \\ p^{II} &= p^0, P^{II} = P^0, l_i^{II} = l_i^0, i \in P^{II}, \\ s_i^{II} &= s_i^0, i \in P^{II} \setminus P^0, s_{p^0}^{II} = s_{p^0}^0 + 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

III. При  $\bar{\bar{\alpha}} \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$  структура  $S(\bar{\bar{\alpha}}) = S^{III}$  задач ОУ( $\bar{\bar{\alpha}}$ ) изменится по отношению к структуре  $S^0$  задачи ОУ( $\alpha_0$ ), поскольку нуль коуправления  $\tilde{t} = t_{kr}^0$  породит отрезок, на котором функция коуправления обращается тождественно в нуль (см. рисунок 3.1, мелкопунктирная линия). Новая структура будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} S^{III} &= \{p^{III}, l_i^{III}, s_i^{III}, i \in P^{III}\}, \\ p^{III} &= p^0 + 1, P^{III} = P^0 \cup p^{III}, \\ l_i^{III} &= l_i^0, i = 0, p^0, l_{p^0+1}^{III} = u_{\alpha_0}(\tilde{t} + 0), \\ s_i^{III} &= s_i^0, i = 0, p^0 - 1, s_{p^0}^{III} = s_{p^0}^0 - 1, s_{p^0+1}^{III} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Надо определить, какая из ситуаций – I, II или III – будет иметь место при возмущении параметра  $\alpha_0$ . Для этого по имеющейся в данный момент информации, используя структуру  $S^I$  (3.5), момент  $\tilde{t} = t_{kr}^0$  и вектор

$$\begin{aligned} \theta^{I0} &= (t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^I}, i = \overline{0, p^I}, \\ \tau_i^0, \tau^{i0}, i &= \overline{1, p^I}; \phi(\alpha_0); y(\alpha_0)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

подсчитаем вектор

$$Z^* = \left( \frac{\partial z(S^I, \theta^{I0}, \alpha_0 | \tilde{t})}{\partial \theta^I} \cdot \frac{d\theta^I(\alpha_0)}{d\alpha} + \frac{\partial z(S^I, \theta^{I0}, \alpha_0 | \tilde{t})}{\partial \alpha} \right).$$

Здесь  $z(S^I, \theta^I, \alpha | t)$  – решение системы (3.2),

$$\theta^I = (t_{ij}, j = \overline{1, s_i^I}, i \in P^I, \quad (3.9)$$

$$\tau_i, \tau^i, i = \overline{1, p^I}; \phi; y), \phi \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

вектор-функция

$$\begin{aligned} \theta^I(\alpha) &= (t_{ij}^I(\alpha), j = \overline{1, s_i^I}, i \in P^I, \\ \tau_i^I(\alpha), \tau^{iI}(\alpha), i &= \overline{1, p^I}; \phi^I(\alpha); y^I(\alpha)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

сформирована по структуре  $S^I$  и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \Psi(S^I, \theta^I(\alpha), \alpha) &\equiv \mathbf{0}_{d(S^I)}, \\ \alpha \in \mathcal{E}(\alpha_0), \theta^I(\alpha_0 + 0) &= \theta^{I0}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \xi &:= \frac{|\partial^2 \Delta_{\alpha_0}(\tilde{t}) / \partial t^2|}{2b^T Db} > 0, \\ \nu &:= \text{sign} \left( \frac{\partial^2 \Delta_{\alpha_0}(\tilde{t})}{\partial t^2} \right) \beta^T Z^*. \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Теорема 3.1** [7]. *Предположим, что задача ОУ( $\alpha_0$ ) имеет оптимальное управление со структурой  $S(\alpha_0)$  и определяющими элементами  $\theta(\alpha_0)$ , для которых нарушается условие регулярности  $\bar{\delta}$ ):  $\partial \Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) / \partial t = 0$ , и числа  $\nu \neq 0$ ,  $\xi \neq 1$ . Тогда при  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta]$ :*

1) задачи ОУ( $\alpha$ ) имеют постоянную структуру  $S(\alpha) = S^* = \{p^*, l_i^*, s_i^*, i \in P^*\}$ , где

$$S^* = S^I \text{ при } \nu > 0;$$

$$S^* = S^{II} \text{ при } \nu < 0, \xi > 1;$$

$$S^* = S^{III} \text{ при } \nu < 0, 0 < \xi < 1;$$

2) существует единственная непрерывно дифференцируемая функция

$$\theta^*(\alpha) = (t_{ij}^*(\alpha), j = \overline{1, s_i^*}, i \in P^*,$$

$$\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p^*}; \phi(\alpha); y(\alpha)),$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\Psi(S^*, \theta^*(\alpha), \alpha) = \mathbf{0}_{d(S^*)}, \quad (3.12)$$

$$\alpha \in [\alpha_0, \alpha_0 + \delta], \theta^*(\alpha_0) = \bar{\theta}^*,$$

где  $\bar{\theta}^* = \theta^{I0}$  при  $\nu > 0$ ,  $\bar{\theta}^* = \theta^{II0}$  при  $\nu < 0$ ,  $\xi > 1$

и  $\bar{\theta}^* = \theta^{III^0}$  при  $\nu < 0$ ,  $0 < \xi < 1$ , векторы  $\theta^{II^0}$ ,  $\theta^{III^0}$  строятся по данным  $\theta^0$ ,  $\tilde{t}$  и структурам  $S^{II}$ ,  $S^{III}$  соответственно.

3) оптимальное управление  $u_\alpha(\cdot)$  задачи ОУ( $\alpha$ ) находится по правилу

$$u_\alpha(t) = (-1)^j l_i^*,$$

$$t \in [t_{ij}(\alpha), t_{i,j+1}(\alpha)], \quad j = \overline{0, s_i^*}, \quad i \in P^*,$$

$$u_\alpha(t) = q^T z(S^*, \theta^*(\alpha), \alpha | t),$$

$$t \in [\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha)], \quad i = \overline{1, p^*},$$

где  $t_{i0}(\alpha) \equiv \tau^i(\alpha)$ ,  $t_{i, s_i^*+1}(\alpha) \equiv \tau_{i+1}(\alpha)$ ,  $i \in P^*$ ,  $\tau^0(\alpha) \equiv 0$ ,  $\tau_{p^*+1}(\alpha) \equiv t_*$ ,  $z(S^*, \theta^*(\alpha), \alpha | t)$ ,  $t \in T$ , – решение системы (3.2).

#### 4 Построение решения возмущенной задачи методом коррекции решения невозмущенной задачи

Пусть для невозмущенной задачи ОУ( $\alpha_0$ ) известно оптимальное управление со структурой и определяющими элементами (3.1), для которых нарушается условие регулярности б):  $\partial \Delta_{\alpha_0}(t_{kr}^0) / \partial t = 0$ ,  $k = p^0$ ,  $r = s_{p^0}^0$ . Опишем правила построения решения возмущенной задачи ОУ( $\alpha_0$ ), где  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta]$ , основываясь на Теореме 3.1.

##### 4.1 Конструктивные правила вычисления $\beta^T Z^*$

Сформируем набор параметров  $S^I$  (см. (3.5)), векторы параметров  $\theta^{I^0}$ ,  $\theta^I$  (см. (3.8), (3.9)), а также функцию

$$W(\tilde{\theta}, \alpha) = \begin{pmatrix} \Psi(S^I, \theta^I, \alpha) \\ \beta^T z(S^I, \theta^I, \alpha | \hat{t}) - \rho \\ \beta^T \partial z(S^I, \theta^I, \alpha | \hat{t}) / \partial t \end{pmatrix},$$

где  $\tilde{\theta} = (\rho, \hat{t}, \theta^I)$ ,  $\rho, \hat{t} \in \mathbb{R}$ .

Здесь функция  $\Psi(S^I, \theta^I, \alpha)$  определяется согласно (3.3),  $z(S^I, \theta^I, \alpha | \hat{t})$  – состояние системы (3.2) в момент времени  $\hat{t}$ . Подсчитаем матрицу Якоби

$$G^I = \frac{\partial W(\tilde{\theta}^0, \alpha_0)}{\partial \tilde{\theta}}$$

в точке  $\tilde{\theta}^0 = (0, \tilde{t}, \theta^{I^0})$ ,  $\alpha = \alpha_0$ . Она имеет вид

$$G^I = (d_1 \quad d_2 \quad G^{I*}),$$

где

$$d_1 = \frac{\partial W(\tilde{\theta}^0, \alpha_0)}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{d(S^I)} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \frac{\partial W(\tilde{\theta}^0, \alpha_0)}{\partial \hat{t}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{d(S^I)} \\ 0 \\ \frac{\partial^2 \Delta_{\alpha_0}(\tilde{t})}{\partial t^2} \end{pmatrix},$$

$$G^{I*} = \frac{\partial W(\tilde{\theta}^0, \alpha_0)}{\partial \theta^I} = \begin{pmatrix} G \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$G = \frac{\partial \Psi(S^I, \theta^{I^0}, \alpha_0)}{\partial \theta^I},$$

$$f_1 = \beta^T \frac{\partial z(S^I, \theta^{I^0}, \alpha_0 | \tilde{t})}{\partial \theta^I},$$

$$f_2 = \beta^T \frac{\partial^2 z(S^I, \theta^{I^0}, \alpha_0 | \tilde{t})}{\partial \theta^I \partial t}.$$

Правила вычисления матриц  $G$  и  $\partial z(S^I, \theta^{I^0}, \alpha_0 | \tilde{t}) / \partial \theta^I$  приведены в [9]. Там же доказано, что  $\det G \neq 0$ . С учетом этого и условия  $\partial^2 \Delta_{\alpha_0}(\tilde{t}) / \partial t^2 \neq 0$  легко показать, что  $\det G^I \neq 0$ .

Подсчитаем вектор

$$w^T = \frac{\partial W(\tilde{\theta}^0, \alpha_0)}{\partial \alpha} =$$

$$= (Z^T(t_*) (H, \mathbb{O}_{m \times n}), Z^T(t_*) (\mathbb{O}_{n \times n}, \mathbb{E}_n),$$

$$\beta^T Z(t_{ij}^0), j \in V_i^0, i = \overline{0, p^0 - 1};$$

$$\beta^T Z(t_{kj}^0), j \in V_k^0 \setminus r; \beta^T Z(\tilde{t}); \beta^T \dot{Z}(\tilde{t})),$$

где  $k = p^0$ ,  $r = s_{p^0}^0$ ,  $Z(t)$ ,  $t \in T$ , – решение системы

$$\dot{Z}(t) = \begin{cases} \mathcal{A}_0 Z(t), t \in [\tau^{i^0}, \tau_{i+1}^0], i = \overline{1, p^0}, \\ \mathcal{A}_r Z(t), t \in [\tau_i^0, \tau^{i^0}], i = \overline{1, p^0}, \\ Z(0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0(\alpha_0) \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\beta^T Z^* = -e_1^T (G^I)^{-1} w,$$

где  $e_1$  – единичный вектор с единицей на первом месте.

##### 4.2 Правила нахождения структуры и определяющих элементов решения возмущенной задачи ОУ( $\alpha$ )

Зная  $\beta^T Z^*$  и данные (3.1), легко вычислить  $\nu$  и  $\xi$  согласно (3.11).

Предположим, что  $\nu > 0$ . Согласно теореме 3.1, при  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta]$  решение возмущенной задачи будет иметь структуру  $S(\alpha) = S^I$ , соответствующий вектор определяющих элементов  $\theta^I(\alpha)$  будет решением системы определяющих

уравнений (3.12) при  $S^* = S^I$ . Можно показать, что матрица Якоби этой системы уравнений совпадает с матрицей  $G$ , определенной выше, и является невырожденной. Следовательно в данном случае вектор  $\theta^I(\alpha)$  можно найти, решая систему (3.12) с  $S^* = S^I$  методом Ньютона, используя в качестве начального приближения вектор  $\theta^{I0}$ , определенный в (3.8).

Предположим теперь, что  $\nu < 0$ ,  $\xi > 1$ . Сформируем структуру  $S^{II}$  по правилам (3.6). Согласно теореме 3.1, при  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta]$  решение возмущенной задачи будет иметь структуру  $S(\alpha) = S^{II}$ , соответствующий вектор определяющих элементов  $\theta^{II}(\alpha)$  будет решением системы (3.12), где  $S^* = S^{II}$ .

В отличие от случая I, в случае II матрица Якоби системы уравнений (3.12) при  $\theta = \theta^{II0}$  вырождена. Поэтому нет возможности использовать метод Ньютона для ее решения.

Чтобы преодолеть эти трудности, поступим следующим образом.

1. В векторе параметров

$$\theta^{II} = (t_{ij}, j = \overline{1, s_i^{II}}, i \in P^{II}, \tau_i, \tau^i, i = \overline{1, p^{II}}; \phi; y),$$

$$\phi \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

сформированном по структуре  $S^{II}$ , делается замена переменных  $t_{kr+1} \rightarrow t_{kr} + \Delta\tau$ . В результате искомым вектор определяющих элементов

$$\theta^{II}(\alpha) = (t_{ij}(\alpha), j = \overline{1, s_i^{II}}, i \in P^{II},$$

$$\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p^{II}}; \phi(\alpha); y(\alpha))$$

заменился на эквивалентный вектор

$$\hat{\theta}^{II}(\alpha) = (\Delta\tau(\alpha), t_{ij}(\alpha), j = \overline{1, s_i^{II}}, i = \overline{0, p^{II}},$$

$$(i, j) \neq (k, r+1),$$

$$\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p^{II}}; \phi(\alpha); y(\alpha)),$$

которому соответствует вектор параметров

$$\hat{\theta}^{II} = (\Delta\tau, t_{ij}, j = \overline{1, s_i^{II}}, i = \overline{0, p^{II}},$$

$$(i, j) \neq (k, r+1), \tau_i, \tau^i, i = \overline{1, p^{II}}; \phi; y).$$

Обозначим через

$$z(\hat{\theta}^{II}, \alpha | t) := z(S^{II}, \theta^{II}, \alpha | t), \quad t \in T,$$

траекторию системы (3.2). Здесь векторы параметров  $\hat{\theta}^{II}$  и  $\theta^{II}$  отличаются только заменой переменных  $t_{kr+1} \rightarrow t_{kr} + \Delta\tau$ .

2. В уравнениях (3.12) (при  $S^* = S^{II}$ ) равенство

$$\beta^T z(S^*, \theta^*(\alpha), \alpha | t_{kr+1}) = 0$$

заменим равенством

$$\beta^T (z(S^*, \theta^*(\alpha), \alpha | t_{kr} + \Delta\tau) -$$

$$- z(S^*, \theta^*(\alpha), \alpha | t_{kr})) / \Delta\tau = 0.$$

В результате получим систему

$$\hat{\Psi}(\hat{\theta}^{II}, \alpha) := \begin{pmatrix} (H, \mathbb{O}_{m \times n})z(\hat{\theta}^{II}, \alpha | t_*) - g \\ (\mathbb{O}_{n \times n}, \mathbb{E}_n)z(\hat{\theta}^{II}, \alpha | t_*) - H^T y + c \\ \phi_{ij}(\hat{\theta}^{II}, \alpha), j \in V_i^{II}, i \in P^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{d(S^{II})}, \quad (4.1)$$

где множества  $V_i^{II}, i \in P^{II}$ , построены согласно (3.4) по структуре  $S^{II}$ ,

$$\phi_{ij}(\hat{\theta}^{II}, \alpha) = \beta^T z(\hat{\theta}^{II}, \alpha | t_{ij}),$$

$$j \in V_i^{II}, i \in P^{II}, (i, j) \neq (k, r+1);$$

$$\phi_{kr+1}(\hat{\theta}^{II}, \alpha) =$$

$$= \beta^T (z(\hat{\theta}^{II}, \alpha | t_{kr} + \Delta\tau) - z(\hat{\theta}^{II}, \alpha | t_{kr})) / \Delta\tau.$$

Можно показать, что функция  $\phi_{kr+1}(\hat{\theta}^{II}, \alpha)$  и ее производные могут быть доопределены при  $\Delta\tau = 0$  по непрерывности.

Кроме того, можно показать, что матрица Якоби  $\partial \hat{\Psi}(\hat{\theta}^{II0}, \alpha_0) / \partial \hat{\theta}^{II}$ , где

$$\hat{\theta}^{II0} = (0, \theta^0), \quad (4.2)$$

является невырожденной. Формулы для ее подсчета аналогичны формулам, приведенным для случая I.

Следовательно, для нахождения вектора определяющих элементов возмущенной задачи ОУ( $\alpha$ ) вместо системы (3.12) можно решать систему нелинейных уравнений (4.1). Решение  $\hat{\theta}^{II}(\alpha)$  этой системы можно найти методом Ньютона, взяв в качестве начального приближения вектор (4.2). Зная  $\hat{\theta}^{II}(\alpha)$ , легко восстановить искомым вектор определяющих элементов  $\theta^{II}(\alpha)$  задачи ОУ( $\alpha$ ).

Рассмотрим теперь случай, когда  $\nu < 0$ ,  $0 < \xi < 1$ . Согласно теореме 3.1, при  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta]$  решение возмущенной задачи будет иметь структуру  $S(\alpha) = S^{III}$ , построенную по правилам (3.7), соответствующий вектор определяющих элементов  $\theta^{III}(\alpha)$  будет решением системы (3.12) при  $S^* = S^{III}$ . Матрица Якоби уравнений (3.12) при  $\theta = \theta^{III0}$  является вырожденной. Поэтому при решении этой системы уравнений возникают такие же трудности, как и в случае II. Для преодоления этих трудностей осуществим следующие действия.

1. В векторе параметров

$$\theta^{III} = (t_{ij}, j = \overline{1, s_i^{III}}, i \in P^{III}, \tau_i, \tau^i, i = \overline{1, p^{III}}; \phi; y),$$

$$\phi \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

сформированном по структуре  $S^{III}$ , сделаем замену переменных  $\tau^{\bar{k}} \rightarrow \tau_{\bar{k}} + \Delta\tau$ , где  $\bar{k} = p^{III}$ . В результате искомым вектор определяющих элементов

$$\theta^{III}(\alpha) = (t_{ij}(\alpha), j = \overline{1, s_i^{III}}, i \in P^{III},$$

$$\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p^{III}}; \phi(\alpha); y(\alpha))$$

заменится на эквивалентный вектор

$$\hat{\theta}^{III}(\alpha) = (\Delta\tau(\alpha), t_{ij}(\alpha), j = \overline{1, s_i^{III}}, i = \overline{0, p^{III}};$$

$$\tau_i(\alpha), \tau^i(\alpha), i = \overline{1, p^{III} - 1}, \tau_{p^{III}}(\alpha); \phi(\alpha); y(\alpha)),$$

которому соответствует вектор параметров

$$\hat{\theta}^{III} = (\Delta\tau, t_{ij}, j = \overline{1, s_i^{III}}, i = \overline{0, p^{III}},$$

$$\tau_i, \tau^i, i = \overline{1, p^{III} - 1}, \tau_{p^{III}}; \phi; y).$$

Обозначим через

$$z(\hat{\theta}^{III}, \alpha | t) := z(S^{III}, \theta^{III}, \alpha | t), \quad t \in T,$$

траекторию системы (3.2). Здесь векторы параметров  $\hat{\theta}^{III}$  и  $\theta^{III}$  отличаются только заменой переменных  $\tau^{\bar{k}} \rightarrow \tau_{\bar{k}} + \Delta\tau$ .

2. В уравнениях (3.12) при  $S^* = S^{III}$  равенство

$$\beta^T z(S^{III}, \theta^{III}(\alpha), \alpha | \tau^{\bar{k}}) = 0$$

заменяется равенством

$$\beta^T (z(S^{III}, \theta^{III}(\alpha), \alpha | \tau_{\bar{k}} + \Delta\tau) -$$

$$- z(S^{III}, \theta^{III}(\alpha), \alpha | \tau_{\bar{k}})) / \Delta\tau = 0.$$

В результате получаем систему

$$\hat{\Psi}(\hat{\theta}^{III}, \alpha) = \mathbf{0}_{d(S^{III})}, \quad (4.3)$$

где функция  $\hat{\Psi}(\hat{\theta}^{III}, \alpha)$  формируется по правилам (4.1) с заменой  $\hat{\theta}^{II}, P^{II}$  на  $\hat{\theta}^{III}, P^{III}$ ;

$$\phi_{ij}(\hat{\theta}^{III}, \alpha) =$$

$$= \beta^T z(\hat{\theta}^{III}, \alpha | t_{ij}), j \in V_i^{III}, i \in P^{III}, (i, j) \neq (p^{III}, 0);$$

$$\phi_{\bar{k}0}(\hat{\theta}^{III}, \alpha) =$$

$$= \beta^T (z(\hat{\theta}^{III}, \alpha | \tau_{\bar{k}} + \Delta\tau) - z(\hat{\theta}^{III}, \alpha | \tau_{\bar{k}})) / \Delta\tau$$

при  $\bar{k} = p^{III}$ .

Можно показать, что функция  $\phi_{\bar{k}0}(\hat{\theta}^{III}, \alpha)$  и ее производные могут быть доопределены при  $\Delta\tau = 0$  по непрерывности. Кроме того, можно показать, что матрица

$$\frac{\partial \hat{\Psi}(\hat{\theta}^{III0}, \alpha^0)}{\partial \hat{\theta}^{III}},$$

где

$$\hat{\theta}^{III0} = (0, t_{ij}^0, j = \overline{1, s_i^{III}}, i = \overline{0, p^{III}}, \quad (4.4)$$

$$\tau_i^0, \tau^{i0}, i = \overline{1, p^{III} - 1}, t_{kr}^0; \phi(\alpha_0); y(\alpha_0)),$$

является невырожденной. Формулы для ее подсчета аналогичны формулам, приведенным для случая I. Следовательно, для нахождения вектора определяющих элементов возмущенной задачи ОУ( $\alpha$ ) вместо системы (3.12) можно решать систему нелинейных уравнений (4.3). Решение  $\hat{\theta}^{III}(\alpha)$  этой системы можно найти методом

Ньютона, взяв в качестве начального приближения вектор (4.4). Очевидно, что зная вектор  $\hat{\theta}^{III}(\alpha)$ , легко восстановить вектор определяющих элементов  $\theta^{III}(\alpha)$  задачи ОУ( $\alpha$ ).

### 4.3 Правила построения решения возмущенной задачи

В результате описанных выше действий для возмущенной задачи ОУ( $\alpha$ ) будут найдены структура решения

$$S^* := \{p^*, l_i^*, s_i^*, i \in P^*\} = S^I$$

и вектор определяющих элементов

$$\theta^* := (t_{ij}^*, j = \overline{1, s_i^*}, i \in P^*, \tau_i^*, \tau^{i*}, i = \overline{1, p^*}, \phi^*, y^*) = \theta^I(\alpha),$$

где  $i = I$ , либо  $i = II$ , либо  $i = III$  в зависимости от того, какая из ситуаций I–III реализовалась.

Зная структуру  $S^*$  и вектор  $\theta^*$ , найдем решение  $z^*(t) = z(S^*, \theta^* | t), t \in T$ , системы (3.2).

Оптимальное управление  $u_\alpha(\cdot)$  задачи ОУ( $\alpha$ ) находится по правилу

$$u_\alpha(t) = (-1)^j l_i^*, t \in [t_{ij}^*, t_{ij+1}^*], j = \overline{0, s_i^*}, i \in P^*,$$

$$u_\alpha(t) = q^T z^*(t), t \in [\tau_i^*, \tau^{i*}], i = \overline{1, p^*},$$

где  $t_{i0}^* = \tau^{i*}$ ,  $t_{is_i^*+1}^* = \tau_{i+1}^*$ ,  $i \in P^*$ ,  $\tau^{0*} = 0$ ,  $\tau_{p^*+1}^* = t_*$ .

Можно проверить, что данное управление является допустимым в задаче ОУ( $\alpha$ ) и для него выполняются достаточные условия оптимальности (2.2), где  $\psi_\alpha(t), t \in T$ , – решение сопряженной системы (2.1) при  $y(\alpha) = y^*$ .

### Заключение

В работе рассмотрено семейство однопараметрических линейно-квадратичных задач оптимального управления с особыми участками. Приведен метод корректировки для построения решений возмущенных задач в окрестности нерегулярного значения параметра при условии, что известно решение невозмущенной задачи. Результаты работы могут быть использованы в задачах идентификации, при построении управляющих воздействий типа обратной связи, для обоснования алгоритмов построения решений методом продолжения решения по параметру и т. д.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Felgenhauer, U. Optimality and sensitivity for semilinear bang-bang type optimal control problems / U. Felgenhauer // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. – 2004. – Vol. 14, № 4. – P. 447–454.
2. Felgenhauer, U. Structural stability investigation of bang-singular-bang optimal controls / U. Felgenhauer // J. Optimization Theory and Applications. – 2012. – Vol. 152 (3). – P. 605–631.

3. Костюкова, О.И. Исследование свойств решений параметрической задачи оптимального управления в нерегулярной точке / О.И. Костюкова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2003. – Т. 3. – С. 68–79.

4. Bonnans, F. Perturbation analysis of Optimization problems / F. Bonnans, A. Shapiro. – New York, Berlin : Springer, 2000. – 601 p.

5. Malanowski, K. Sensitivity analysis of optimal control problems subject to higher order state constraints / K. Malanowski, H. Maurer // Annals of Operations Research. – 2001. – Vol. 101 (Operation with Perturbations II). – P. 43–73.

6. Maurer, H. Second order optimality conditions for bang-bang control problems / H. Maurer, N. Osmolovskii // Control and Cybernetics. – 2003. – Vol. 32, № 3. – P. 555–584.

7. Костюкова, О.И. Исследование свойств решений линейно-квадратичных параметрических задач оптимального управления / О.И. Костюкова, Н.М. Федорцова // Информационно-управляющие системы. – 2012. – № 4 (59). – С. 43–51.

8. Ли, Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л.М. Маркус. – М. : Наука, 1972. – 576 .

9. Костюкова, О.И. Исследование решений параметрических задач оптимального управления с особыми участками / О.И. Костюкова, М.А. Курдина // Computer Modelling and New Technologies. – 2006. – Vol. 10, № 2. – P. 57–66.

Поступила в редакцию 01.02.13.

УДК 004.942

## ЭТАПЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ СТАНЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА НОРМАТИВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРОСТОЕВ ВАГОНОВ

Е.А. Ерофеева

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## TECHNOLOGICAL STAGES OF IMITATING MODELING TRAFFIC VOLUME PROCESSING BY RAILWAY STATION

E.A. Erofeeva

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Дано определение и особенности технологической линии переработки (поездо) вагонопотока. Сформулированы основные требования, которым должны удовлетворять разрабатываемые средства имитационного моделирования работы сортировочной станции. Приведен состав разработанного программного комплекса. Описана технология применения программного комплекса для решения производственных задач.

**Ключевые слова:** имитационное моделирование, сортировочная станция.

In the paper the definition and features of the technological line of processing of train a traffic volume are presented. The basic requirements with which the developed means of imitating modeling of work of a switchyard should satisfy are formulated. The structure of the developed program complex is given. The technology of application of a program complex for the solution of production tasks is described.

**Keywords:** simulation of complex engineering systems, switchyard.

### Введение

Технологический процесс работы сортировочной станции разделяется на следующие технологические линии обслуживания транспортного потока: пропуск всех категорий пассажирских и пригородных поездов; обработка и пропуск транзитных грузовых поездов без изменения массы и длины; обработка и пропуск частично перерабатываемых поездов; сортировка вагонопотоков в соответствии с установленным планом формирования поездов; переработка и отправление местного вагонопотока.

В качестве предмета исследования выбран технологический процесс сортировки вагонопотоков, как наиболее важный для решения задач, связанных с расчетом плана формирования.

Перечень и порядок выполнения технологических операций, производимых на сортировочной станции Белорусской железной дороги, изложен в типовом технологическом процессе сортировочной станции. В общем виде переработку вагонопотока на станции можно представить следующим образом. Поезда, прибывшие на станцию, обрабатываются и разбиваются на группы вагонов в соответствии с назначениями, формируемыми станцией, и правилами технической безопасности. Вагоны накапливаются на путях сортировочного парка. Когда на одном из назначений плана формирования накопится достаточное для создания состава поезда число вагонов, производится формирование поезда для отправления со станции. На станции также формируются

местные назначения, окончание накопления вагонов на состав местных назначений производится по графику в фиксированные моменты времени.

Специализация путей сортировочного парка определяется назначениями, формируемыми станцией, которые, в свою очередь, регламентируются планом формирования поездов и схемой регулировки порожних вагонов.

Для выполнения ряда технологических операций используются станционные ресурсы. Выделены три типа ресурсов: путевые, маневровые, людские. Особенностью путевых и маневровых ресурсов является то, что один и тот же путевой (маневровый) ресурс может использоваться последовательно и параллельно в нескольких технологических операциях. Кроме того, одна технологическая операция может использовать последовательно несколько путевых ресурсов.

Сформулируем основные требования, которым должны удовлетворять разрабатываемые средства имитационного моделирования работы сортировочной станции при исследовании технологии обработки транзитного вагонопотока с переработкой, планировании поездообразования и прогнозирования показателей работы станции:

1. Автоматизация процесса построения модели работы станции (процессы поездообразования). Предоставление последовательности выполнения технологических операций в виде графа типового технологического процесса с возможностью исключения некоторых операций.



2. Возможность изменения вероятностных характеристик структуры и интенсивности входного потока на уровне отдельных вагонов.
3. Возможность настройки приоритета и времени выполнения каждой операции.
4. Возможность ввода количественных показателей ресурсов, используемых на станции.
5. Возможность корректировки списка ресурсов, необходимых для выполнения каждой операции, и настроек последовательного использования ресурса одним транзактом в разных операциях.
6. Возможность управления технологией работы станции посредством изменения назначений плана формирования и специализации путей накопления.
7. Предоставление как качественных, так и количественных оценок технологии работы станции, используемых в предметной области.
8. Возможность анализа и интерпретации состояний некоторых компонентов модели во времени (временные диаграммы, графики);
9. Автоматическое документирование результатов моделирования.

### 1 Состав программного комплекса

Программный комплекс состоит из двух приложений. Первое представляет собой мониторинг и обработку данных о структуре входящего потока поездов (СМВП). Второе реализует построение имитационной модели, настройку и проведение имитационного эксперимента, обработку выходных данных и построение отчетов (СИМ ТП ПТВ ЖДС). Структура программного комплекса представлена на рисунке 1.1.

Исходными данными для СМВП являются файлы сообщения 02 автоматизированной системы управления станцией. В результате СМВП формирует табличные функции распределения параметров структуры сложносоставного транзакта, которые являются исходными данными для генерирования входного потока модели. Средствами СИМ ТП ПТВ ЖДС настраивается модель работы конкретной станции. Для построенной модели задаются параметры и производится реализация плана эксперимента. Во время реализации плана эксперимента производится сбор статистик по информационным транзактам, технологическим операциям и ресурсам. Итогом реализации являются файлы отчетов.

Если в настройках проведения эксперимента указано выводить верификационные данные, то в рабочие директории выводятся верификационные данные динамики проведения эксперимента в файлы формата xml. Также для верификации выводятся статистики по входящим и исходящим составным транзактам. Основным результатом эксперимента представляет структурированный текстовый файл с агрегированными векторами откликов имитационной модели. Кроме структурированных текстовых файлов, в процессе выполнения эксперимента могут формироваться файлы векторной графики с отображением динамики выполнения операций, использования пулов физического и логического накопления. Также выходными данными являются временные диаграммы состояния пулов физического и логического накопления на каждый  $i$ -й период моделирования.

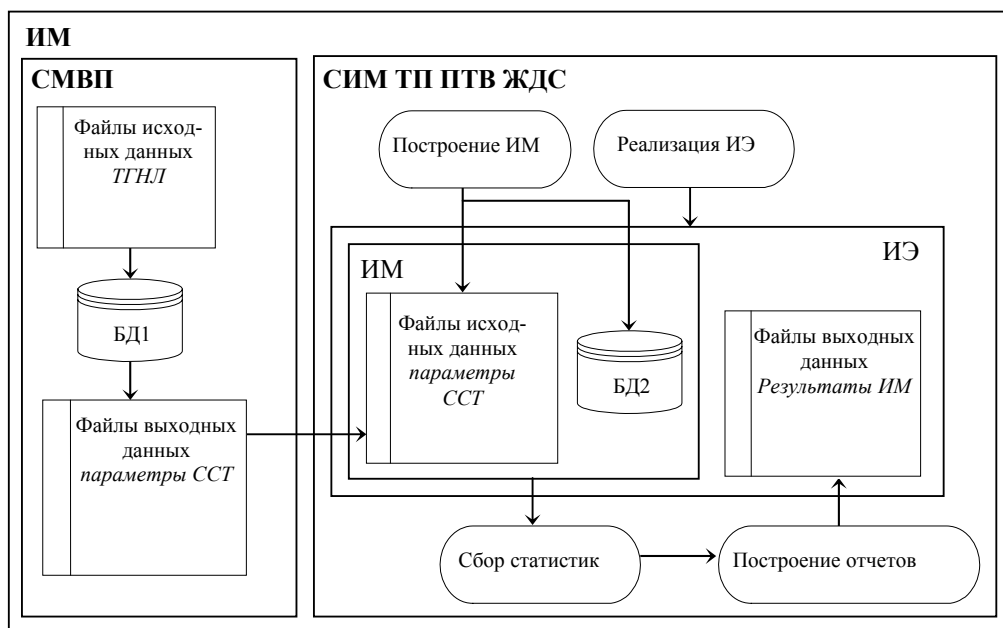


Рисунок 1.1 – Структура программного комплекса

## 2 Адаптация имитационной модели к выбранной станции

Для построения модели выбранной железнодорожной сортировочной станции необходимо выполнить следующие шаги:

- в соответствии с технологией работы станции преобразовать последовательность выполнения операций;
- для каждой операции задать параметры моделирования времени выполнения;
- сформировать таблицу ресурсов станции;
- для каждой операции указать состав, последовательность захвата и количество единиц ресурсов, требуемых для выполнения;
- заполнить таблицы путей сортировочного парка и назначений плана формирования станции с указанием их специализации;
- подготовить файлы увязки назначений плана формирования с путями сортировочного парка;
- подготовить исходные файлы для моделирования входного потока при помощи средства мониторинга и преобразования входного потока.

## 3 Состав задач апробации

Применение разработанной модели предлагается в области решения производственных задач, относящихся к категории «что – если». То есть в ситуациях, когда имеется план (прогноз) изменения входного потока или требуется оценить показатели работы при этих изменениях. Выделен ряд эксплуатационных задач, решение которых достигается применением разработанных средств имитационного моделирования работы станции:

- определение ограничивающих элементов технологического процесса при заданных параметрах;
- исследование варьирования показателей работы станции при изменении параметров технологического процесса или входного потока;
- исследование влияния интенсивности входного потока на показатели работы станции;
- исследование влияния числа и состава ресурсов на показатели работы станции при различной интенсивности входного потока;
- установление зависимости времени нахождения вагонов на станции от изменения нормы длины формируемых поездов;
- установление зависимости времени нахождения вагонов на станции от числа назначений плана формирования;
- нормирование показателей работы станции при различных вариантах организации технологического процесса.

Основные этапы технологии решения выделенных задач приведены на рисунке 3.1 и состоят в следующем. При помощи средств имитационного моделирования формируется модель выбранной железнодорожной сортировочной станции. Далее для модели проводится исследование

чувствительности и решается задача определения ограничивающих элементов. На основании проведенного исследования чувствительности модели и найденных ограничивающих элементов формируется список значимых управляемых параметров (переменных) модели. Затем для каждой задачи исследования строится план эксперимента с учетом интересующих исследователя факторов. На основании реализованных планов эксперимента для каждой задачи производится анализ результатов.

Все управляемые параметры моделирования разделяются на три группы. В первую группу выделены интенсивность и характеристики структуры входного потока. К характеристикам составных транзактов относятся: канал прибытия (DIRID); число вагонов в составе поезда (m); состояние вагона: груженный, порожний (STATUS); код ЕСП станции назначения (ESR); код рода подвижного состава (kind); код администрации принадлежности (adm). Во вторую группу вынесены количество и состав ресурсов, время выполнения технологических операций. К третьей группе отнесены количество и структура назначений плана формирования станции, специализация путей назначения, нормы веса и длины формируемых составов. В зависимости от выбранной задачи часть параметров принимает роль переменных имитационного эксперимента, остальные параметры фиксируются.

Таким образом, для решения выделенной эксплуатационной задачи параметры одной из трех выделенных групп (полностью или часть из них) становятся переменными, остальные параметры модели фиксируются. Для переменных устанавливаются варианты изменения и строится план имитационного эксперимента.

Для решения выделенных типов задач в качестве переменных могут быть использованы каждая из трех групп параметров.

## 4 Технология изменения выделенных групп параметров

Табличная функция распределения интервала прибытия составных транзактов находится в файле Flow\_int.td. В средствах построения модели также предусмотрена возможность задавать интенсивность входящего потока (интервал прибытия), выбрав один из законов распределения: равномерное, нормальное (гаусовское), логнормальное, экспоненциальное, распределение Пуассона, Эрланга. Функции табличного распределения параметров структуры ССТ находятся в следующих файлах:

- канал прибытия (Flow\_dir.td); канал прибытия определяется вручную специалистом-экспертом на основании кода станции формирования поезда;
- для каждого канала прибытия число вагонов в составе поезда (Flow\_cVag[i].td);

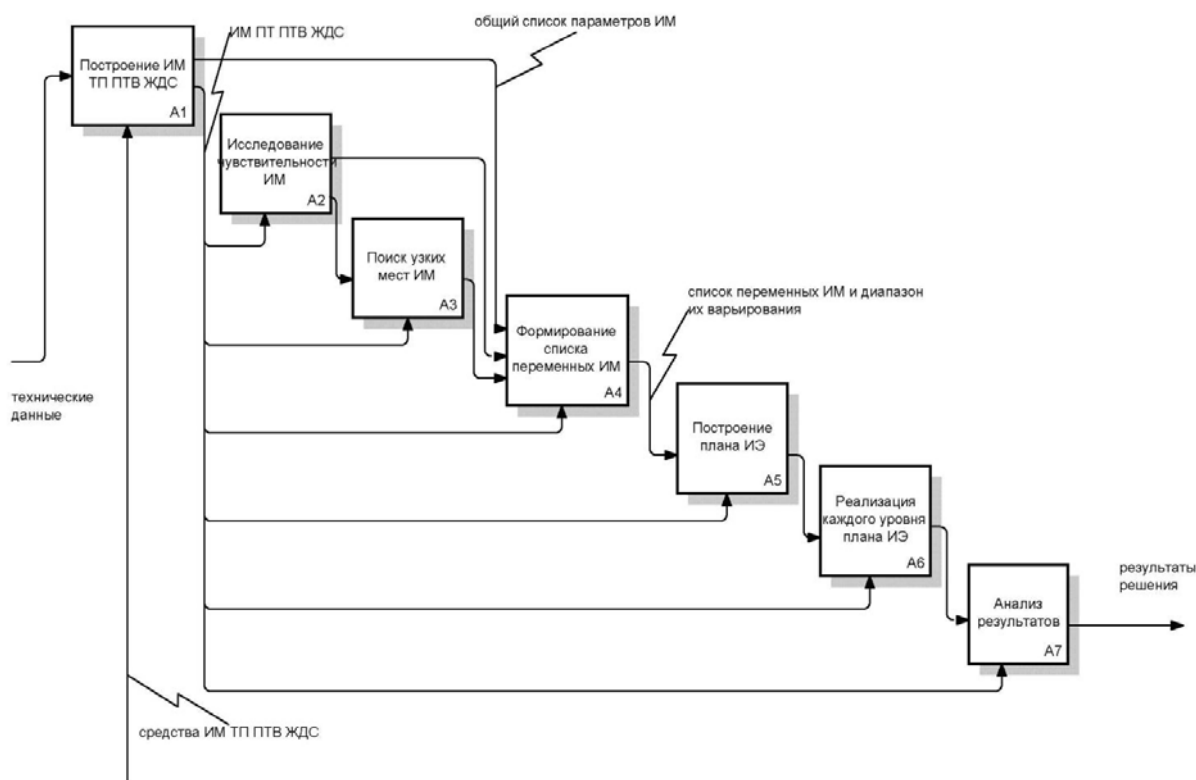


Рисунок 3.1 – Основные этапы технологии применения средств имитационного моделирования для решения эксплуатационных задач

- состояние вагона ( $Flow\_status[i].td$ );
- для каждого канала прибытия: для грузовых вагонов – распределение станции назначения вагона ( $Flow\_ESR1[i].td$ ); для порожних вагонов – распределение рода подвижного состава и администрации принадлежности вагона ( $Flow\_ESR0[i].td$ ).

Требуемые файлы параметров входного потока формируются программным средством мониторинга входного потока. Помимо получения параметров из существующих данных о входном потоке, это программное средство позволяет направленно изменять структуру входного потока на уровне назначения каждого вагона в соответствии с разработанной методикой обработки статистических данных мониторинга потока поездов, поступающих на станцию в расформирование. Например, увеличить долю вагонопотока на направлении «Россия – Калининград» в среднем на 35%, увеличив число вагонов назначением на соответствующие станции в таблице «Распределение ESR».

Данные о составе и структуре ресурсов находятся в базе данных. При первичном решении задачи поиска узких мест предлагается в качестве переменных использовать ресурсы станции, то есть для каждого ресурса задать максимальное и минимальное количество и провести эксперимент,

меня поочередно каждый ресурс при фиксации остальных.

Разработанное техническое средство имитационного моделирования позволяет создавать и использовать конфигурационные файлы состояния ресурсов станции.

Под управляющими характеристиками понимается план формирования и норма длины формируемых составов по назначениям.

Методика построения вариантов плана формирования:

- выделяются назначения плана формирования станции, по которым формируется более 3-х составов в сутки;
- проводят анализ вагонопотоков выбранного назначения с целью выявить вагонопотоки, мощность которых позволяет формировать не менее 0,7 состава в сутки;
- если таковых не обнаружено, вагонопотоки объединяются в струи с уменьшением дальности следования;
- иначе найденные струи вагонопотоков выделяются в самостоятельное назначение и исключаются из исходного.

Влияние изменения нормы длины формируемых составов целесообразно исследовать при изменении интенсивности и структуры входного потока.

### **Заключение**

Общая методика исследования технологического процесса переработки транзитного вагонного потока железнодорожной сортировочной станции состоит в следующем. На первом шаге решается задача поиска узких мест. На основании проведенного исследования чувствительности модели и найденных узких мест формируется список значимых управляемых параметров модели. Затем для каждой задачи исследования строится план имитационного эксперимента с учетом интересующих исследователя факторов. На основании реализованных планов эксперимента для каждой задачи производится анализ результатов. Предложено разделение параметров модели на 3 группы. Для каждой группы предложена методика планирования эксперимента в условиях, когда эта группа становится переменной, остальные параметры фиксируются. Впервые в методиках решения эксплуатационных задач предложены способы изменения структуры входного потока на высоком уровне детализации. Предложены методики планирования ИЭ: при изменении интенсивности входящего потока и/или структуры его динамических единиц; числа и состава ресурсов; управляющих параметров технологического процесса (назначения плана

формирования, длины формируемых поездов, специализации путей сортировочного парка).

Имитационные модели технологии работы станций использованы в системе планирования работы на железнодорожном транспорте, методике факторного анализа простоя вагонов на железнодорожных станциях различных категорий, при организации эксплуатационной работы Центра управления перевозками Белорусской железной дороги.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Применение математических методов и вычислительной техники в эксплуатации железных дорог*: учеб. пособие / В.М. Акулиничев [и др.]; под ред. В.М. Акулиничева. – М.: Транспорт, 1973. – 208 с.

2. *Ерофеева, Е.А.* Решение задач оценки показателей работы железнодорожной сортировочной станции методом имитационного моделирования / Е.А. Ерофеева // Информационные технологии в промышленности: материалы 6 междунар. научно-технич. конф. – Минск, 2010, С. 23–24.

*Поступила в редакцию 31.01.13.*

УДК 004.021

## АЛГОРИТМ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В РЕЧЕВОЙ СИСТЕМЕ БЕЗОПАСНОСТИ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Д.В. Пекарь, В.С. Садов

*Белорусский государственный университет, Минск*

## DECISION MAKING ALGORITHM IN THE SAFETY SYSTEM BASED ON THE FUZZY LOGIC

D.V. Pekar, V.S. Sadov

*Belarusian State University, Minsk*

В настоящее время происходит стремительный рост количества передаваемой информации. Обработка значительных объемов голосовой информации невозможна без вовлечения в процесс анализа различных автоматических речевых систем с возможностью принятия решения на основе результатов анализа речевого сигнала и языковой компоненты сообщения. В настоящей работе предлагается алгоритм принятия решений с использованием методов нечеткой логики, достоинствами которого являются такие качества как гибкость, легкость составления нечетких правил на естественном языке, вычислительная эффективность, схожесть с процессом принятия решения у человека.

*Ключевые слова:* принятие решений, нечеткая логика, обработка речи.

At the present time the volume of handled data is rapidly growing. A large volume of voice data processing is impossible without usage of automatic speech systems with the ability to make decision based on speech signal analysis and lingual component processing. In this paper fuzzy logic based decision making algorithm is proposed. Described algorithm has a lot of advantages such as ability to be configured to meet certain requirements, easiness of creating a set of fuzzy rules, computational effectiveness and similar decision making process as in human beings.

*Keywords:* decision making, fuzzy logic, speech processing.

### **Введение**

Уровень потенциальной опасности, вообще говоря, является абстрактным понятием, и оно не может быть применено в своем первоначальном виде для машинной обработки или автоматического принятия решений. Таким образом, формализация и придание количественной оценки уровню потенциальной опасности являются ключевыми вопросами при разработке экспертных и анализирующих речевых систем.

В данной работе за уровень потенциальной опасности принята степень соответствия информационного содержания и характеристик речевого сигнала некоторым заданным значениям, которые априорно принимаются в качестве индикатора или предпосылки появления потенциальной опасности, угрозы или деструктивного поведения говорящего человека. Под информационным содержанием сообщения понимается смысловая составляющая фраз, выраженная естественным языком, а также значение параметров речевого сигнала, отражающих эмоциональную окраску речевого сигнала и несущих невербальную информацию о внутреннем эмоциональном состоянии говорящего.

Поскольку не существует объективной возможности задания или строгого определения количественной меры степени потенциальной опасности исходя из анализа речевого фрагмента, то оправданно использование ее словесных

определений типа «малая опасность», «средняя опасность», «высокая опасность» для отражения качественной стороны этой характеристики. Для решения подобного рода задач успешно применяются методы принятий решений на основе нечеткой логики. Можно отметить следующие прикладные сферы, в которых целесообразно использование нечеткой логики:

- сложные процессы, для которых нет простой математической модели;
- обработка словесно сформулированных экспертных знаний.

В решаемой задаче сложность процесса принятия решения выражается тем, что необходимо анализировать разнородную информацию, которая является результатом обработки физических параметров речевого сигнала и языковой составляющей сообщения. Дополнительной особенностью рассматриваемого вопроса является то, что при анализе поведения человека эксперты-психоаналитики обычно оперируют качественными оценками, например: «повышенное эмоциональное возбуждение, ведущее к возможному проявлению агрессии». Таким образом, методы принятий решений на основе нечеткой логики, благодаря наличию лингвистических переменных (рассмотрены ниже) и «мягких» условий, позволяют использовать результаты специализированных исследований, характеризующих качественную сторону поведения человека.

### 1 Принятие решений на основе нечеткой логики

Необходимо отметить, что существует сложность в принятии окончательного решения человеком в случаях, когда нет четкого разграничения между свойствами или значениями атрибутов различных классов решений. Примером может служить выбор одежды по погоде – теплой или холодной. Что является теплой погодой, а что можно считать холодной? Какое значение температуры окружающего воздуха позволяет объективно разграничить два класса решений?

Для решения подобного рода задач может быть применен математический аппарат принятий решений на основе нечеткой логики, который вместе с теорией нечетких множеств составляют раздел математики, представляющий собой обобщение классической логики и теории множеств. Понятие нечеткой логики было впервые введено Л. Заде [1]. Согласно классической теории множеств непустое подмножество  $A$  из универсального множества  $U$  однозначно определяется характеристическим функционалом  $I_A$  следующего вида:

$$I_A(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \in U; \\ 0, & \text{если } u \notin U. \end{cases} \quad (1.1)$$

Нововведением в существующие классические представления было то, что для описания множества применяется не функционал вида (1.1), а характеристическая функция, отражающая степень принадлежности элемента к тому или иному множеству. Эта функция может принимать любые значения в интервале  $[0;1]$ , включая фиксированные значения 0 или 1, характеризующие принадлежность или ее отсутствие.

Основным положением в разработанной теории является понятие нечеткого множества. Под данным термином понимается строгая формализация нечеткой информации при построении математической модели, основой которой является утверждение о том, что составляющие данное множество элементы обладают общим свойством, которое выражено в той или иной степени  $\alpha$ , следовательно, и принадлежат к тому или иному множеству с различной мерой. При использовании приведенных понятий теряют смысл выражения типа «к какому множеству или классу относится данный элемент» и в то же время приобретают смысл выражения типа «в какой мере или степени данный элемент принадлежит к тому или иному множеству, классу». В таком случае определение нечеткого множества может быть сформулировано следующим образом: нечетким множеством  $\hat{A}$  на универсальном множестве  $U$  является множество пар вида:

$$\hat{A} = \{u, MF(u) | u \in U\},$$

где значение функции принадлежности  $MF(u)$  отражает степень принадлежности элемента

$u \in U$  к нечеткому множеству  $\hat{A}$ . Функция принадлежности может иметь треугольную, трапециевидную, кусочно-линейную, сигмоидную форму или вид распределения Гаусса. Поскольку функция  $MF(u)$  показывает меру принадлежности элемента к тому или иному множеству, то ее область значений находится в диапазоне  $[0;1]$ . Универсальное множество  $U$  может быть как дискретным, так и непрерывным.

Одним из основополагающих понятий теории нечеткой логики является термин лингвистическая переменная. Согласно Л. Заде, лингвистической переменной называется такая переменная, значениями которой являются слова или выражения естественного языка. Такие переменные не могут иметь точного количественного значения или строгой формализации. Примером лингвистической переменной могут служить выражения типа «температура воздуха», а также и «уровень потенциальной опасности», «эмоциональная окраска речи». Лингвистическая переменная может принимать набор допустимых значений – термов, которые образуют терм-множество данной лингвистической переменной. В рассматриваемом алгоритме термами для лингвистической переменной «эмоциональная окраска речи» являются выражения «негативная эмоциональная окраска», «нейтральная эмоциональная окраска», «позитивная эмоциональная окраска». На рисунке 1.1 представлен пример функций принадлежности для описания эмоциональной окраски речи.

Характеристический коэффициент эмоции численно характеризует эмоциональную окраску речевого фрагмента и вычисляется согласно следующему выражению:

$$K_{emotion} = \frac{\sum_i^N I_i \cdot S_i \cdot P_i}{N \cdot \sum_i^N P_i} = \frac{\sum_i I_i \cdot S_i \cdot P_i}{N},$$

где  $N$  – число возможных эмоций;  $P_i$  – вероятность того, что анализируемый фрагмент принадлежит  $i$ -ой эмоции;  $I_i$  – вес  $i$ -ой эмоции, отражающий ассоциированный с ней уровень потенциальной опасности;  $S_i$  – полярность  $i$ -ой эмоции, принимающая значения 1 или  $-1$ , поскольку, согласно современной трактовке эмоций, положительный и отрицательный типы эмоций принимаются как противоположные, и человек, в отдельный взятый момент, может находиться либо в радостном, либо в грустном эмоциональном состоянии [2]. На рисунке 1.1 представлены три различные функции принадлежности, описывающие различные значения лингвистической переменной «эмоциональная окраска речи». Приведенный пример хорошо иллюстрирует реальную ситуацию, а именно:

отсутствие объективной возможности разграничить различные типы эмоциональной окраски на основе неких количественных параметров речевого сигнала. Подобным образом задается описание лингвистической переменной «смысловая близость сообщения», отражающей смысловую близость речевого сообщения к некоторому заданному целевому контексту (рисунок 1.2).

Основой для проведения семантического анализа языковой компоненты речевого сообщения является контекстный граф, узлы которого представляют собой множества слов семантически связанных с априорно заданными понятиями, задающими некий интересующий целевой контекст. Связи между отдельными узлами подобного графа отражают реальные семантические связи между понятиями.

Процесс семантического анализа заключается в поиске общих понятий из семантического графа и исследуемого речевого сообщения с определением их положения в иерархии и смысловых связей с исходными априорно заданными понятиями. Логично положить, что слова с разных уровней контекстного графа, а также понятия, связанные разными семантическими связями, имеют различную близость к исходному смыслу, а следовательно, они должны иметь и разные веса. Таким образом, каждый отдельно взятый узел контекстного графа имеет свой собственный вес.

Для придания разрабатываемому алгоритму дополнительной гибкости предусмотрена возможность задания различных весовых коэффициентов различным частям речи при прочих равных условиях. Таким образом, в качестве результирующего коэффициента смысловой близости, характеризующего найденные семантические признаки, принимается средний вес, вычисленный по всем признакам согласно выражению:

$$w = \frac{\sum_{i=1}^{N_{SemFeatures}} w_i}{N_{SemFeatures}},$$

где  $N_{SemFeature}$  – число найденных семантических признаков,  $w_i$  – вес  $i$ -ого семантического признака с учетом его положения в контекстном графе и части речи, к которой принадлежит слово.

Функции принадлежности для описания лингвистической переменной «уровень потенциально опасной ситуации», отражающие вероятность наступления некой целевой ситуации, изображены на рисунке 1.3.

Важно отметить, что вид функций принадлежности, а также мощность терм-множества для любой лингвистической переменной может задаваться произвольно, исходя из конкретных решаемых задач и условий.

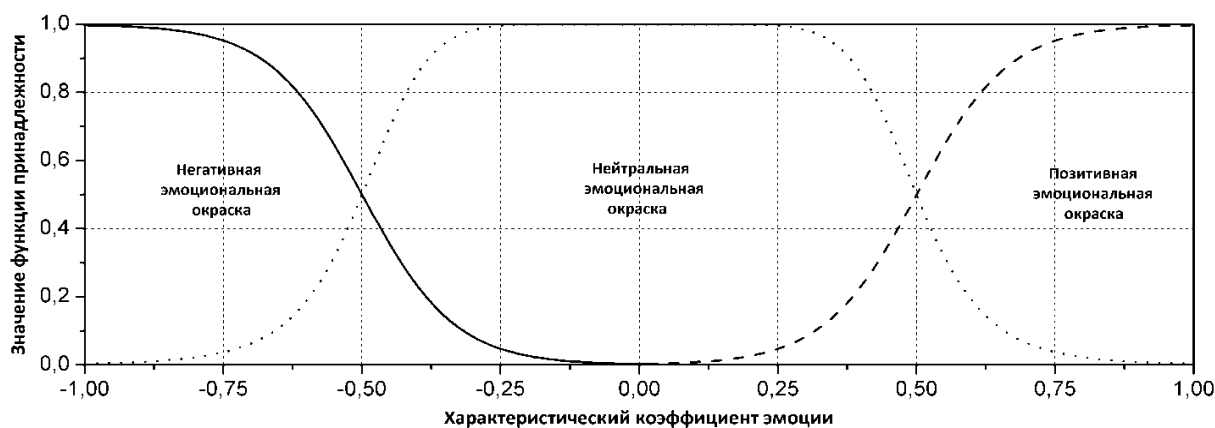


Рисунок 1.1 – Функции принадлежности лингвистической переменной «эмоциональная окраска речи»

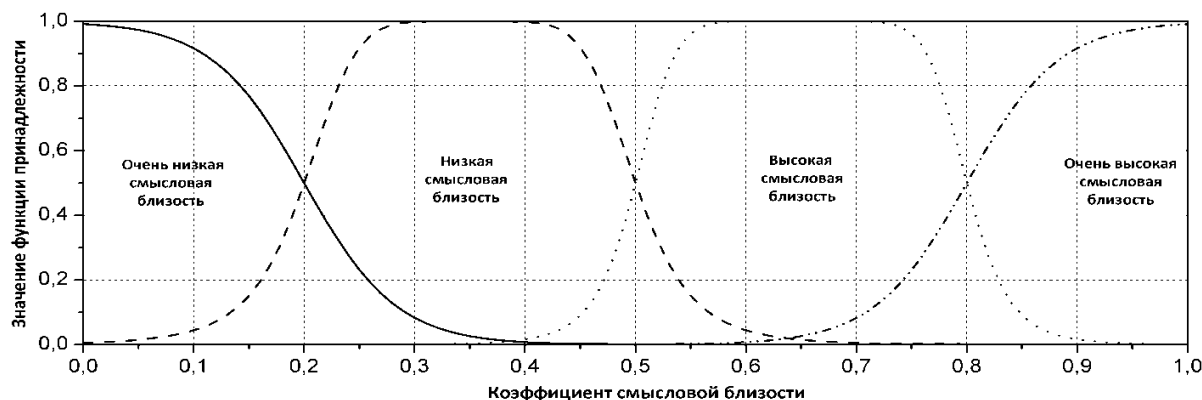


Рисунок 1.2 – Функции принадлежности лингвистической переменной «смысловая близость сообщения»

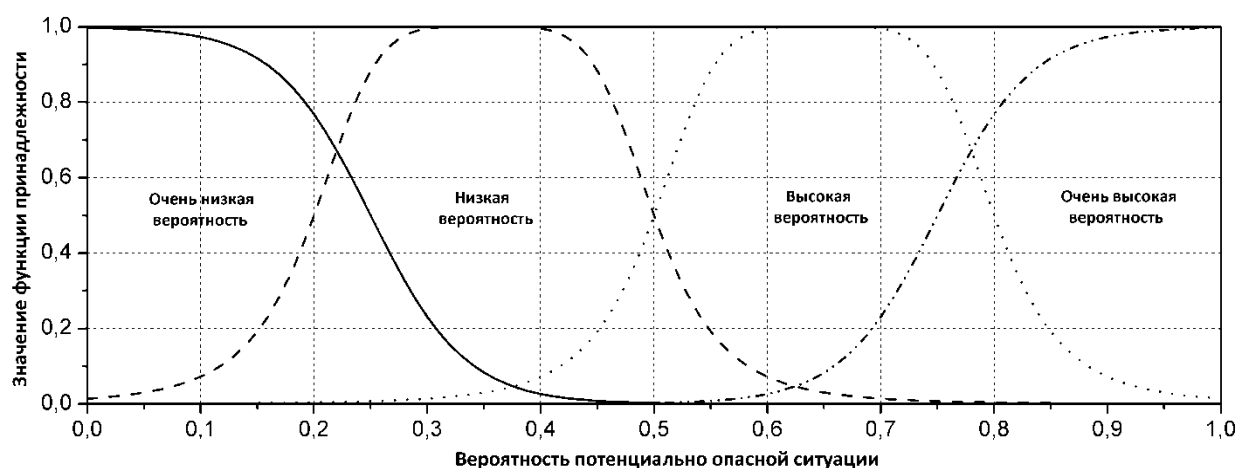


Рисунок 1.3 – Функции принадлежности лингвистической переменной «уровень потенциально опасной ситуации»

Таблица 1.1 – Множество нечетких правил

Значение термы для лингвистической переменной «эмоциональная окраска речи»	Логическая операция	Значение термы для лингвистической переменной «смысловая близость сообщения»	Значение термы для лингвистической переменной «уровень потенциальной опасности»
негативная эмоциональная окраска	И	очень высокая смысловая близость	очень высокая вероятность
негативная эмоциональная окраска	И	высокая смысловая близость	очень высокая вероятность
негативная эмоциональная окраска	И	низкая смысловая близость	высокая вероятность
нейтральная эмоциональная окраска	И	очень высокая смысловая близость	очень высокая вероятность
нейтральная эмоциональная окраска	И	высокая смысловая близость	высокая вероятность
нейтральная эмоциональная окраска	И	низкая смысловая близость	низкая вероятность
позитивная эмоциональная окраска	ИЛИ	очень низкая смысловая близость	очень низкая вероятность

Первым шагом алгоритма принятия решений на основе нечеткой логики является процесс фазификации входных значений, то есть представление четкого значения в нечетком виде путем вычисления для каждой функции принадлежности значения соответствующей лингвистической переменной. Полученные значения отражают степень принадлежности входных данных к той или иной терме лингвистической переменной.

Следующим шагом алгоритма является процесс составления нечетких правил, которые позволяют найти результирующее нечеткое значение. В таблице 1.1 приведены правила, которые использовались при построении рассматриваемого алгоритма.

При анализе приведенных нечетких правил можно заметить, что они отображают процесс принятия решения человеком, когда исходным является некое множество параметров и возможных

решений. Дополнительным преимуществом такого рода правил является то, что они выражены на естественном человеческом языке, с помощью которого можно легко отразить качественные значения этих параметров, а также производить их анализ. Правила могут модифицироваться и составляться исходя из конкретной решаемой задачи.

Для оценки значения принадлежности каждого из правил используются специальные математические операции для работы с нечеткой логикой. Логическое И при составлении нечетких правил эквивалентно пересечению соответствующих нечетких множеств, а результирующее значение принадлежности равно минимальному значению функций принадлежности для каждого множества:

$$MF_{A \cap B}(u) = \min[MF_A(u), MF_B(u)].$$



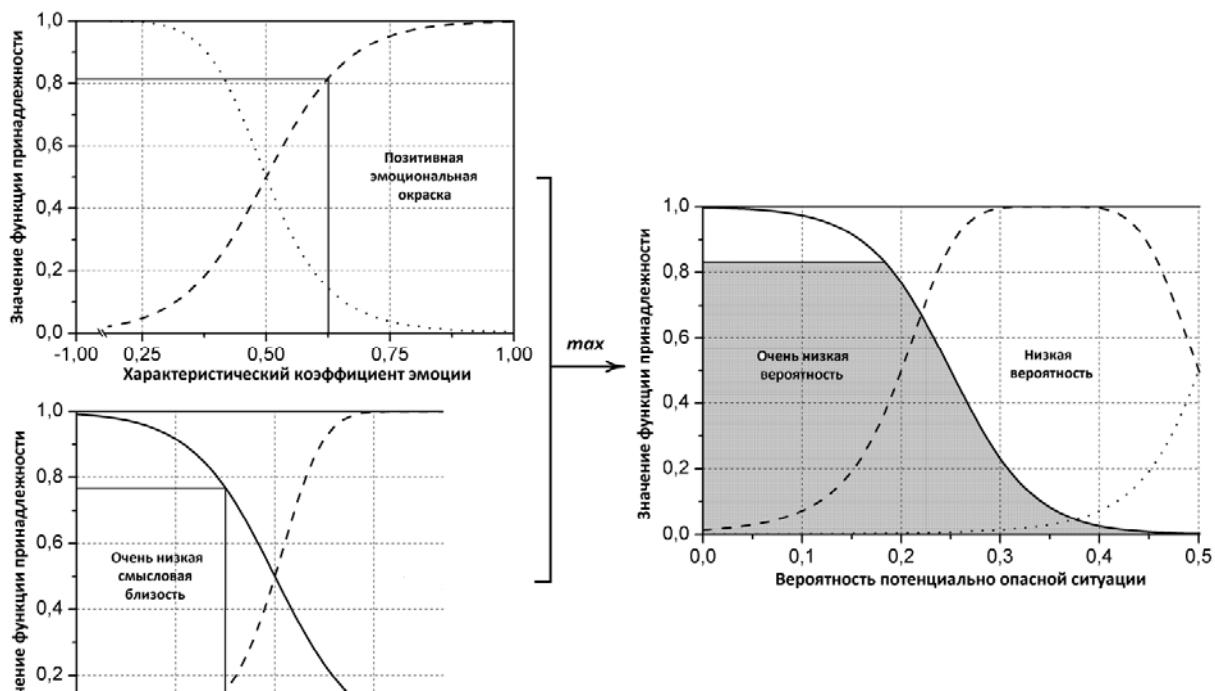


Рисунок 1.4 – Иллюстрация процесса ограничения нечеткого множества финальной лингвистической переменной

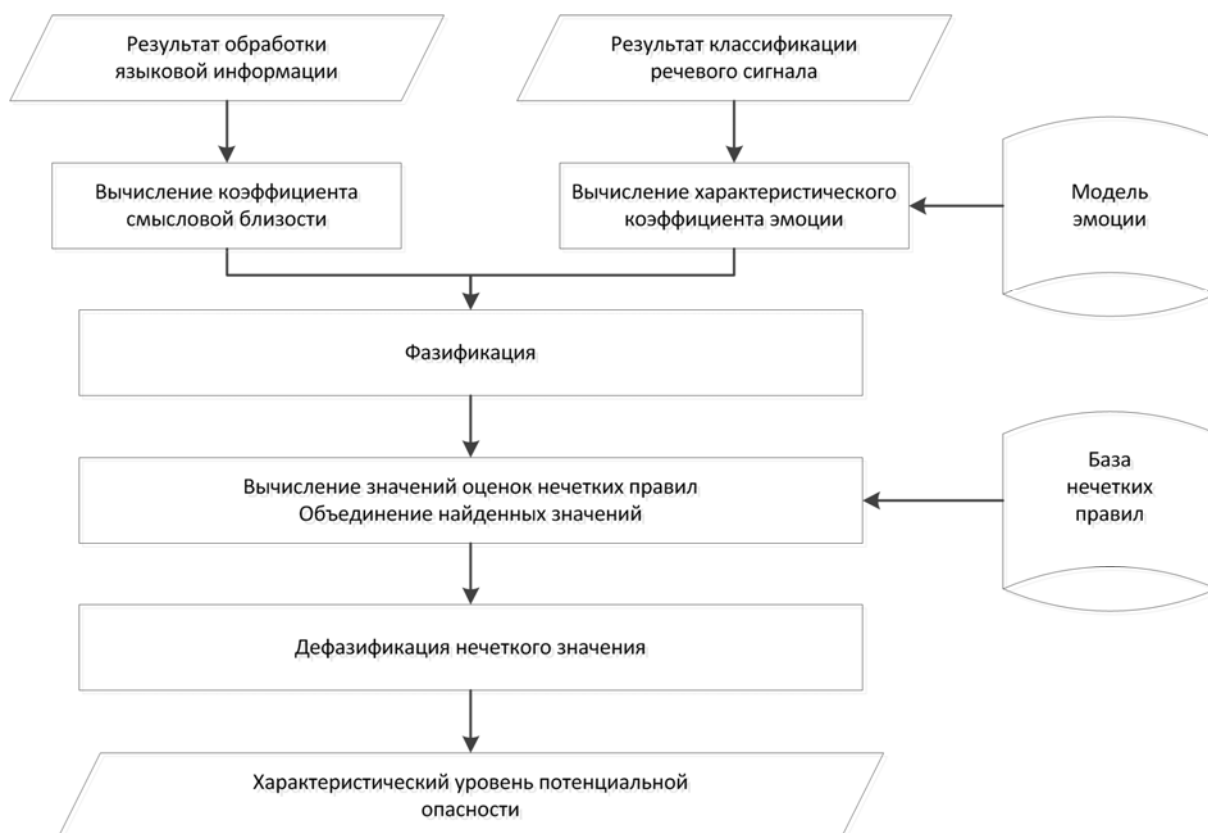


Рисунок 1.5 – Структурная схема алгоритма принятия решений на основе нечеткой логики

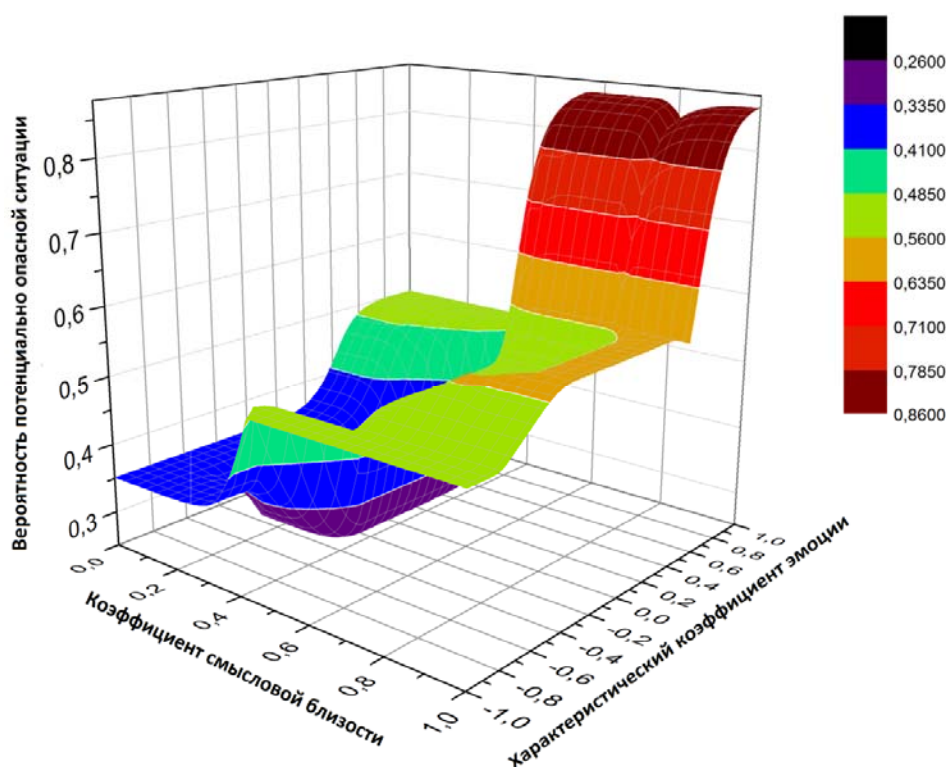


Рисунок 2.1 – Поверхность решений

Логическое *ИЛИ* соответствует объединению нечетких множеств, а результирующее значение принадлежности равно максимальному значению функций принадлежности для каждого множества:

$$MF_{A \cup B}(u) = \max[MF_A(u), MF_B(u)].$$

Важно отметить, что все правила выполняются последовательно, для получения значения оценки принадлежности каждого правила, которое используется для ограничения соответствующего нечеткого множества финальной лингвистической переменной «уровень потенциальной опасности».

Графической иллюстрацией такой операции для последнего нечеткого правила является рисунок 1.4.

Процесс ограничения нечеткого множества для целевой лингвистической переменной осуществляется для каждого правила с последующим объединением всех найденных решений.

Заключительным шагом процесса принятия решения на основе нечеткой логики является дефазификация найденного нечеткого множества, то есть преобразование нечеткого значения в четкое. Существуют различные методы дефазификации, однако наибольшее применение получил метод на основе вычисления центра тяжести, с использованием следующего выражения:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^K u_i \cdot MF(u_i)}{\sum_{i=1}^K MF(u_i)},$$

где  $K$  – число элементов в дискретном нечетком множестве. Таким образом, на выходе предложенного алгоритма на основе нечеткой логики имеется дискретное значение, отражающее количественную меру вероятности наступления потенциально опасной ситуации. На рисунке 1.5 представлена структурная схема рассмотренного выше алгоритма.

## 2 Результаты испытания алгоритма принятия решений

Как можно видеть из выше изложенного, предложенный алгоритм обладает высокой гибкостью и способностью быть адаптированным к конкретным решаемым задачам и условиям, а следовательно, вычисленный уровень потенциальной опасности будет зависеть от текущих настроек алгоритма.

Для оценки результатов работы алгоритма на основе нечеткой логики можно использовать поверхность решений – множество решений при всех допустимых значениях входных параметров. Отдельно взятая точка подобной поверхности соответствует значению уровня потенциальной опасности при фиксированных значениях входных параметров.

На рисунке 2.1 представлена поверхность решений для рассмотренных параметров алгоритма.

### **Заключение**

В представленной работе предложен алгоритм принятий решений на основе использования математического аппарата нечеткой логики. Также был предложен подход к формализации понятия уровня потенциальной опасности, эмоции и смысловой близости речевого сообщения с целевым контекстом. Конкурентным преимуществом предложенного алгоритма является его гибкость и схожесть с процессом принятия решения человеком, отсутствие predetermined пороговых значений и наличие «мягких» условий, небольшие вычислительные затраты.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Zadeh, L.A.* Fuzzy Sets / L.A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – № 8. – P. 338–353.
2. *Ильин, Е.П.* Эмоции и чувства / Е.П. Ильин. – СПб. : Питер, 2001. – 752 с.
3. *Open Source Fuzzy Logic library and FCL language implementation* [Electronic source] / Open Source Fuzzy Logic library and FCL language implementation. – Mode of access : <http://jfuzzylogic.sourceforge.net/html/index.html>. – Date of access : 21.08.2012.

*Поступила в редакцию 22.01.13.*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25 % в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ютя).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It pro-

vides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).