

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 4 (13) 2012

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (13) 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Андреев В.В., Чеботарева Е.С. Поиск критических значений параметра полурелятивистской кулоновской задачи	7
Капшай В.Н., Шамына А.А. Прохождение плоских электромагнитных волн через многослойную биизотропную структуру	10
Константинова А.Ф., Головина Т.Г., Евдищенко Е.А., Набатов Б.В., Константинов К.К. Особые случаи низкосимметричных поглощающих кристаллов	15
Макаревич В.В., Котяшёв Е.О. Моделирование фемтосекундных импульсов в полупроводниковом лазере при постоянном токе накачки методом FDTD	21
Малютина-Бронская В.В., Залесский В.Б., Леонова Т.Р., Поликанин А.М., Мудрый В.А., Семченко А.В., Сидский В.В. Активные слои легированные редкоземельными металлами для повышения эффективности солнечных элементов	26
Пилипович В.А., Залесский В.Б., Конойко А.И., Малевич Н.А., Поликанин А.М., Седнев Р.Г. Двухканальный виброустойчивый интерферометр с совмещенными каналами зондирования	30
Пинчук В.Г., Короткевич С.В., Бобович С.О., Морозов В.Н. Исследование кинетики упрочнения и разрушения поверхностного слоя металла при трении	35

МАТЕМАТИКА

Гальмак А.М. Сопряженные вектор-матрицы и пространственные матрицы	40
Коржик Р.И., Жогаль С.П. Режимы функционирования неавтономного осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием при внешнем гармоническом воздействии	50
Кравченко Ю.В. О параллельных прямых, заданных на n -арной группе	54
Семенчук В.Н., Велесницкий В.Ф. О конечных группах, факторизуемых обобщенно субнормальными подгруппами	58
Синюгина Ю.В. О времени ожидания в системе с ограниченным шлюзовым обслуживанием и адаптивными отдыхами	61
Старовойтов А.Н. Система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием, выходом прибора из строя и восстановлением	66
Тютянов В.Н. Произведение двух разрешимых подгрупп 3'-индексов	70
Якубович О.В., Дудовская Ю.Е. Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок	74

ИНФОРМАТИКА

Быховцев В.Е., Бондарева В.В., Прокопенко Д.В., Торгонская С.В. Аналитический алгоритм построения и исследования математической модели нелинейных деформаций грунтовых оснований фундаментов	78
Ерофеев В.Т., Шушкевич Г.Ч., Куц А.И. Исследование свойств плоского экрана из композитных материалов при воздействии низкочастотного поля магнитного диполя	83
Сукач Е.И., Ратобильская Д.В., Маслович С.Ф., Каморникова Т.Я. Об одном подходе к оценке надёжности сетевых структур	87

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 12.12.12. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,4. Уч.-изд. л. 9,9. Тираж 100 экз. Заказ № 675.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (13) 2012

CONTENTS

PHYSICS

Andreev V.V., Chebotareva E.S. The search of critical parameter values for semirelativistic coulomb problem	7
Kapshai V.N., Shamyna A.A. Transmission of plane electromagnetic waves trough a multilayer biisotropic structure	10
Konstantinova A.F., Golovina T.G., Evdischenko E.A., Nabatov B.V., Konstantinov K.K. Special cases of low symmetry absorbing crystals	15
Makarevich V.V., Katsiashou Y.O. FDTD simulation of femtosecond pulses in semiconductor laser under DC pumping current	21
Malyutina-Bronskaya V.V., Zaleskiy V.B., Leonova T.R., Polikanin A.M., Mudryy V.A., Semchenko A.V., Sidsky V.V. Active layers doped with rare-earth metals for increased efficiency solar cells	26
Pilipovich V.A., Zaleski V.B., Konojko A.I., Malevich N.A., Polikanin A.M., Sednev R.G. Two channel vibration resistant interferometer with superposed probing channels	30
Pinchuk V.G., Korotkevich S.V., Bobovich S.O., Morozov V.N. Investigation of the kinetics of hardening and destruction of the surface layer of nickel at friction loading	35

MATHEMATICS

Gal'mak A.M. The conjugate vector-matrix and spacematrix	40
Korzhik R.I., Zhogal S.P. The regimes functioning of non-autonomous van der Pol oscillator with delay and external harmonic effect	50
Kravchenko Yu.V. On parallel straight lines designated on an n -ary group	54
Semenchuk V.N., Veliasnitski V.F. On the finite groups factorizable by generalized subnormal subgroups	58
Sinyugina J.V. On the waiting time in the system with limited gated service and adaptive vacations	61
Starovoitov A.N. Queueing system with batch arrivals, batch service, failing server and regaining	66
Tyutyanov V.N. Product of two solvable subgroups of 3^l index	70
Yakubovich O.V., Dudovskaya Y.E. Multiregime queueing network with random staying time of different types of negative customers	74

INFORMATION SCIENCE

Bykhautsau V.E., Bondareva V.V., Prokopenko D.V., Torgonskaya S.V. Analytical algorithm of construction and research of the mathematical model of nonlinear deformations of the earth bases of the bases	78
Erofeenko V.T., Shushkevich G.Ch., Kuts A.I. Investigation of the composite plane screen properties with impact of a low-frequency magnetic field	83
Sukach E.I., Ratobylyskaya D.V., Maslovich S.F., Kamornikova T.Y. An approach to the assessment of reliability of networks	87

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

УДК 530.1; 539.12

ПОИСК КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА ПОЛУРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КУЛОНОВСКОЙ ЗАДАЧИ

В.В. Андреев¹, Е.С. Чеботарева²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, филиал в Новозыбкове, Россия

THE SEARCH OF CRITICAL PARAMETER VALUES FOR SEMIRELATIVISTIC COULOMB PROBLEM

V.V. Andreev¹, E.S. Chebotareva²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²I.G. Petrovsky Bryansk State University, Russia

В статье представлена новая методика получения верхней оценки критических значений в полурелятивистской кулоновской задаче с пробными волновыми функциями псевдокулоновского типа.

Ключевые слова: критические значения, кулоновский потенциал, пробные волновые функции, уравнение Солпитера.

The paper presents a new calculation method of upper bounds of critical values for the semirelativistic Coulomb problem with the trial pseudo-Columbian wave functions.

Keywords: critical value, Coulomb potential, trial wave functions, Salpeter equation.

Введение

Одной из основных задач релятивистской квантовой механики является решение уравнения Солпитера

$$H\Phi_n = \left[\sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} + V(|\vec{r}|) \right] \Phi_n = E_n \Phi_n, \quad (0.1)$$

которое описывает систему двух частиц с полной энергией E_n , взаимодействие которых определяется центрально симметричным потенциалом $V(|\vec{r}|)$.

Наиболее распространенным методом решения уравнения (0.1) является вариационный метод. В этом подходе решение уравнения (0.1) сводится к задаче на собственные значения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\langle \Psi_k \mid \hat{H} \mid \Psi_{k'} \right\rangle \equiv \langle H \rangle_{k,k'} = E a_{k'}. \quad (0.2)$$

с использованием разложения исходной волновой функции (ВФ) Φ по некоторому полному набору состояний пробных ВФ Ψ :

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Psi_k. \quad (0.3)$$

Для приближенного решения уравнения ряд (0.3) обрывают на некотором значении $n-1$ и получают задачу на собственные значения

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left\langle \Psi_k \mid \hat{H} \mid \Psi_{k'} \right\rangle = \hat{E}_n a_{k'}. \quad (0.4)$$

для матрицы $\langle H \rangle_{n,n'}$. При этом, согласно вариационной технике Рэлея-Ритца для спектра с $E_0 \leq E_1 \leq \dots$, выполняется условие

$$E_k \leq \hat{E}_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Другими словами, решение системы уравнений (0.4) позволяет найти верхние границы E_n для (0.1).

Элементы матрицы

$$\left\langle \Psi_n \mid \hat{H} \mid \Psi_{n'} \right\rangle = \langle H \rangle_{n,n'}$$

после вычисления угловой части с помощью пробных ВФ

$$\begin{aligned} \Psi_{n,\ell m}(r) &= \psi_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\Omega_r), \tilde{\Psi}_{n,\ell m}(k) = \\ &= \tilde{\psi}_{n\ell}(k) Y_{\ell m}(\Omega_k) \end{aligned} \quad (0.5)$$

представляют интегралы вида

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{m,m'} &= \int_0^{\infty} \tilde{\psi}_{n\ell}^*(k) \left[\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} \right] \tilde{\psi}_{n\ell}(k) k^2 dk + \\ &+ \int_0^{\infty} \psi_{n\ell}^*(r) V(r) \psi_{n\ell}(r) r^2 dr, \\ r &= |\vec{r}|, k = |\vec{k}|. \end{aligned} \quad (0.6)$$

Здесь $\tilde{\psi}_{n\ell}(k)$ – фурье-образ ВФ $\psi_{n\ell}(r)$.

Очевидно, что для наиболее точного решения уравнения (0.1) необходимы матричные элементы с большими n и n' .

Целью данной работы является поиск критических значений параметра α для кулоновского потенциала

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0$$

для уравнения (0.1) с равными массами, т. е. $m_1 = m_2 = m$, используя пробные ВФ псевдокулоновского типа

$$\begin{aligned} \psi_{n\ell}^C(r, \beta) &= N_{n\ell}^C (2\beta)^{3/2} (2\beta r)^\ell e^{-\beta r} L_n^{2\ell+2}(2\beta r), \\ N_{n\ell}^C &= \sqrt{\frac{n!}{(n+2\ell+2)!}}, \\ \tilde{\psi}_{n\ell}^C(k, \beta) &= \tilde{N}_{n\ell}^C \left(\frac{\beta}{k^2 + \beta^2} \right)^{\ell+2} (k)^\ell \times \\ &\times P_n^{\ell+3/2, \ell+1/2} \left(\frac{k^2 - \beta^2}{k^2 + \beta^2} \right), \quad (0.7) \\ \tilde{N}_{n\ell}^C &= \frac{2\sqrt{\beta n!(n+2\ell+2)!}}{\Gamma(n+\ell+3/2)}. \end{aligned}$$

В формуле (0.7) $L_n^\ell(z)$ – полиномы Лагерра; $P_n^{\mu, \nu}(z)$ – полиномы Якоби; числа $n, \ell \geq 0$, а β – вариационный параметр ВФ.

1 Методика поиска критических значений α

В квантовых системах с кулоновским потенциалом имеется критическое значение параметра α , при котором не существует дискретного энергетического спектра. В работе [1] (см. также ссылки в [2]) было показано, что и релятивистское обобщение уравнения Шредингера (0.1) – бесспиновое уравнение Солпитера – будет также иметь критическое значение. Изложим новую методику оценки критических значений на основе решения вариационной задачи.

Использование вариационного метода с пробными ВФ (0.7) для уравнения (0.4) с кулоновским потенциалом и равными массами $m_1 = m_2 = m$ приводит к задаче на собственные значения

$$\text{Det} \left\| \langle H(\alpha, \beta) \rangle - I \times E \right\| = 0. \quad (1.1)$$

Произведем переход к безразмерным переменным посредством соотношений:

$$\langle H \rangle \rightarrow \beta \langle \tilde{H} \rangle \quad \text{и} \quad E \rightarrow \beta \tilde{E},$$

где β – параметр ВФ (0.7). Тогда задача (1.1) переходит в решение уравнения

$$\text{Det} \left\| \left\langle \tilde{H} \left(\alpha, \frac{m}{\beta} \right) \right\rangle - I \times \tilde{E} \right\| = 0, \quad (1.2)$$

поскольку $\beta \neq 0$.

Критическому значению кулоновского параметра $\alpha = \alpha_{crit.}$ соответствует предельный переход при $\beta \rightarrow \infty$ [2]. В этом случае не существует

минимального значения функции $E(\beta)$, и спектр гамильтониана уравнения (0.1) дает отрицательные значения. Выполняя предельный переход $\beta \rightarrow \infty$ в (1.2), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \text{Det} \left\| \left\langle \tilde{H}(\alpha_{crit.}, 0) \right\rangle \right\| &= \\ &= \text{Det} \left\| \left\langle \tilde{T}((m/\beta) = 0) + \tilde{V}(\alpha_{crit.}) \right\rangle \right\| = 0, \quad (1.3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H} \rangle_{n, n'} &= \frac{2}{\beta} \int_0^\infty \tilde{\psi}_{n\ell}^C(k, \beta) \tilde{\psi}_{n'\ell}^C(k, \beta) k^3 dk - \\ &- \frac{\alpha_{crit.}}{\beta} \int_0^\infty \psi_{n\ell}^C(r, \beta) \psi_{n'\ell}^C(r, \beta) r dr. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Можно показать, что формула (1.4) для $\langle \tilde{H} \rangle_{n, n'}$ в явном виде не зависит от вариационного параметра β . Действительно, выполняя замену к безразмерным переменным

$$\tilde{r} = \beta r, \quad \tilde{k} = k / \beta,$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H} \rangle_{n, n'} &= 2 \int_0^\infty \tilde{\psi}_{n\ell}^C(\tilde{k}) \tilde{\psi}_{n'\ell}^C(\tilde{k}) \tilde{k}^3 d\tilde{k} - \\ &- \alpha_{crit.} \int_0^\infty \psi_{n\ell}^C(\tilde{r}) \psi_{n'\ell}^C(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \quad (1.5) \end{aligned}$$

с безразмерными волновыми функциями

$$\begin{aligned} \psi_{n\ell}^C(\tilde{r}) &= \sqrt{\frac{8n!}{(n+2\ell+2)!}} (2\tilde{r})^\ell e^{-\tilde{r}} L_n^{2\ell+2}(2\tilde{r}), \\ \tilde{\psi}_{n\ell}^C(\tilde{k}) &= \frac{2\sqrt{n!(n+2\ell+2)!}}{\Gamma(n+\ell+3/2)} \left(\frac{1}{\tilde{k}^2 + 1} \right)^{\ell+2} (\tilde{k})^\ell \times \\ &\times P_n^{\ell+3/2, \ell+1/2} \left(\frac{\tilde{k}^2 - 1}{\tilde{k}^2 + 1} \right). \quad (1.6) \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (1.3) с матричными элементами (1.5) определяет набор n критических значений $\alpha_{crit.}$ для n уровней энергии E . Для решения этого уравнения необходимы матричные элементы с различными n и n' с ВФ (0.7) или (1.6).

2 Расчет матричных элементов $\langle \tilde{H} \rangle_{n, n'}$

Для пробных ВФ псевдокулоновского типа (0.7) потенциальная часть уравнения (0.6) с $V(r) = r^p$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle r^p \rangle_{n\ell, n'\ell} &= \int_0^\infty \psi_{n\ell}^C(r, \beta) r^p \psi_{n'\ell}^C(r, \beta) r^2 dr = \\ &= N_{n\ell}^C N_{n'\ell}^C (2\beta)^{2\ell+3} \times \\ &\times \int_0^\infty dr r^{2\ell+2+p} e^{-2\beta r} L_n^{2\ell+2}(2\beta r) L_{n'}^{2\ell+2}(2\beta r). \quad (2.1) \end{aligned}$$

После замены переменных $z = 2\beta r$ в (2.1) приходим к выражению

$$\langle r^p \rangle_{n\ell, n'} = \frac{N_{n\ell}^C N_{n'\ell}^C}{(2\beta)^p} \times \quad (2.2)$$

$$\int_0^\infty dz z^{2\ell+2+p} e^{-z} L_n^{2\ell+2}(z) L_{n'}^{2\ell+2}(z).$$

Далее, используя соотношение Чу-Вандермонде (Chu-Vandermonde) [3]

$$L_{n-1}^\alpha(z) = \sum_{j=1}^n \frac{(\alpha - \beta)_{n-j}}{(n-j)!} L_{j-1}^\beta(z),$$

где $(z)_N$ – символ Похгаммера с параметрами

$$\alpha = \ell + \frac{1}{2}, \quad \beta = \ell + \frac{1}{2} + \frac{p}{2},$$

и соотношение ортогональности для полиномов Лагерра

$$\int_0^\infty dz z^\beta e^{-z} L_j^\beta(z) L_{j'}^\beta(z) = \frac{\Gamma(j + \beta + 1)}{j!} \delta_{jj'},$$

получаем общее соотношение для интеграла (2.1)

$$\langle r^p \rangle_{n\ell, n'} = \frac{1}{(2\beta)^p} \sqrt{\frac{n! n'}{(n' + 2\ell + 2)(n + 2\ell + 2)!}} \times \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-p)_{n+1-j} (-p)_{n'+1-j}}{(n+1-j)!(n'+1-j)!} \frac{\Gamma(2\ell + 1 + p + j)}{(j-1)!}, \quad (2.3)$$

$n \leq n'$.

Формула (2.3) обобщает соотношения работы [4], где вычисления были проведены для частных случаев с $p = -1$ и $p = 1$. Для случая $\ell = 0$ и $p = -1$ имеем

$$\langle 1/r \rangle_{n, n'} = \beta \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{(n'+1)(n'+2)}}, \quad n \leq n'. \quad (2.4)$$

Часть, связанная с кинетической энергией, также может быть вычислена точно. Для примера, приведем ответы для случая $n = \ell = 0$ и $n' = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{k} \rangle_{n=\ell=0, n'=\{0,1,2,3\}} &= \\ &= \int_0^\infty \tilde{\psi}_{n\ell}^C(\tilde{k}) \tilde{\psi}_{n'\ell}^C(\tilde{k}) \tilde{k}^3 d\tilde{k} = \\ &= \frac{8}{3\pi} \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

3 Расчет критических значений

Для простейшего случая $n = \ell = 0, n' = 0$ верхняя граница $\alpha_{crit.}$ может быть легко рассчитана аналитически. Полученное значение $\alpha_{crit.} = 16 / (3\pi)$ совпадает с результатом работы [2], что косвенно подтверждает правильность методики.

Проведенные расчеты для различных n и n' вплоть до $n = n' = 30$ с использованием (2.3) и (2.5) показали, что существует сходимость результатов и относительная ошибка вычислений

$$\delta_n = \frac{\alpha_{crit.}(n-2) - \alpha_{crit.}(n)}{\alpha_{crit.}(n)} \quad (3.1)$$

и для $n = 30$ составляет $\delta_{30} = 1,11\%$.

Оценка для критического значения при этом равна

$$\alpha_{crit.} \leq 1,09, \quad (3.2)$$

что приблизительно согласуется с оценкой $\alpha_{crit.} \leq 1$, полученной в работе [5].

Заключение

В работе представлена методика расчета верхней границы критического значения кулоновского параметра α для бесспинового уравнения Солпитера (0.1). В отличие от работы [2] (см. также и другие работы этих авторов), в данном подходе не требуется вычисления собственных значений $E = E(\beta)$ с последующим расчетом предела $\lim_{\beta \rightarrow \infty} E(\beta)$ с целью получения уравнения для критического значения $\alpha_{crit.}$. В предлагаемой методике решение уравнения (1.3) сразу позволяет найти оценку $\alpha_{crit.}$, что существенно упрощает затраты на вычисления. Очевидно, что для случая разных масс, как следует из вывода формул (1.3) и (1.5), оценка критического значения остается такой же, как и для случая равных масс, поскольку уравнения (1.3) и (1.5) остаются неизменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herbst, I.* Spectral Theory of the operator $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2 / r$ / I. Herbst // Commun. Math. Phys. – 1977. – Vol. 53. – P. 285–294.
2. *Lucha, W.* Relativistic Coulomb problem: Energy levels at the critical coupling constant analytically / W. Lucha, F.F. Schoberl // Phys. Lett. – 1996. – Vol. B387. – P. 573–576.
3. *Градштейн, И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е переработанное. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.
4. *Fulcher, L.P.* Energies of quark – anti-quark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation / L.P. Fulcher, Z. Chen, K.C. Yeong // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D47. – P. 4122–4132.
5. *Martin, A.* Semirelativistic stability and critical mass of a system of spinless bosons in gravitational interaction / A. Martin, S.M. Roy // Phys. Lett. – 1989. – Vol. B233. – P. 407–412.

Поступила в редакцию 30.08.12.

УДК 537.87

ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ БИЗОТРОПНУЮ СТРУКТУРУ

В.Н. Капшай, А.А. Шамына

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

TRANSMISSION OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVES TROUGH A MULTILAYER BIISOTROPIC STRUCTURE

V.N. Kapshai, A.A. Shamyna

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Задача о нормальном падении плоской электромагнитной волны на систему биизотропных слоёв в общем случае решена методом многократных отражений и матричным методом. Полученные формулы применены для численного расчёта периодических структур биизотропных слоёв. Обнаружены периодически повторяющиеся пики и провалы модуля коэффициента прохождения с изменением толщины биизотропных слоёв.

Ключевые слова: материальные уравнения, биизотропная среда, слой, коэффициенты прохождения и отражения, периодическая структура.

The problem of normal incidence of a plane electromagnetic wave on a system of biisotropic layers is solved in general case using the multiple reflection method as well as the matrix method. The resulting formulas are applied in order to numerically calculate periodic structures of biisotropic layers. Periodically repeating peaks and troughs for the transmission coefficient modulus with the changing thickness of biisotropic layers are found.

Keywords: constitutive equations, biisotropic medium, layer, transmission and reflection coefficients, periodic structure.

Introduction

The problem of electromagnetic wave propagation in biisotropic media [1-6] takes an important place in modern electrodynamics. The constitutive relations of such media

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \\ \vec{B} &= (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H}\end{aligned}$$

lead to the fact that only circularly polarized waves with refractive indices $n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \pm \alpha$ can propagate in such media. It should be noted that in literature, since the mid-90s of the last century to the present, there is a discussion about “recognizable existence” of biisotropic media [7]–[13]. Consideration of the problem of reflection and refraction of electromagnetic waves at planar and spherical boundaries can help to find and investigate effects that allow to explicitly demonstrate how to recognize the biisotropic media [14]–[18]. The problem of reflection and transmission with two flat boundaries was considered in [19]. This paper is devoted to an analogous problem with many flat boundaries, namely to the problem of normal incidence of an electromagnetic circularly polarized wave on a structure of planar biisotropic layers.

1 The problem of normal incidence on a structure of biisotropic layers

Suppose that the area $z \leq 0$ is filled with biisotropic medium 1 with parameters $\varepsilon_1, \mu_1, \alpha_1, \chi_1$,

the area $\sum_{i=2}^{p-1} d_i < z \leq \sum_{i=2}^p d_i$ where $3 \leq p \leq N-1$ (N

is the whole number of layers, d_i is the thickness of the i -th layer) is filled with biisotropic medium i with parameters $\varepsilon_p, \mu_p, \alpha_p, \chi_p$, and the area

$z > \sum_{i=2}^{N-1} d_i$ is filled with biisotropic medium with

parameters $\varepsilon_N, \mu_N, \alpha_N, \chi_N$. Assuming the incident electromagnetic wave is circularly polarized we can write expressions for its electric and magnetic fields as

$$\begin{aligned}\vec{E}_v^{\uparrow 1} &= (\vec{i} + iv\vec{j}) E_v^{\uparrow 1} \exp(ik_v^1 z - i\omega t); \\ \vec{H}_v^{\uparrow 1} &= -b_v^1 \vec{E}_v^{\uparrow 1},\end{aligned}\quad (1.1)$$

where \vec{i}, \vec{j} are unit vectors directed along the axes Ox, Oy . Therefore, the wave propagating in the p -th medium (except $p = N$ where $E_{-v}^{\downarrow N} = 0$) is a superposition of two following waves (Figure 1.1):

$$\begin{aligned}\vec{E}_v^{\uparrow p} &= (\vec{i} + iv\vec{j}) E_v^{\uparrow p} \exp\left(ik_v^p \left(z - \sum_{s=2}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right); \\ \vec{H}_v^{\uparrow p} &= -b_v^p \vec{E}_v^{\uparrow p}; \\ \vec{E}_{-v}^{\downarrow p} &= (\vec{i} + iv\vec{j}) E_{-v}^{\downarrow p} \exp\left(-ik_{-v}^p \left(z - \sum_{s=2}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right); \\ \vec{H}_{-v}^{\downarrow p} &= -b_{-v}^p \vec{E}_{-v}^{\downarrow p};\end{aligned}\quad (1.2)$$

$1 \leq p \leq N.$

Proportionality coefficients between the electric and magnetic fields b_σ^p and wave numbers k_σ^p ($\sigma = \pm\nu$) have the following form

$$\begin{aligned} b_\sigma^p &= \left(\chi_p + i\sigma\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p^2} \right) \frac{1}{\mu_p}; \\ k_\sigma^p &= \left(\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p^2} + \sigma\alpha_p \right) \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

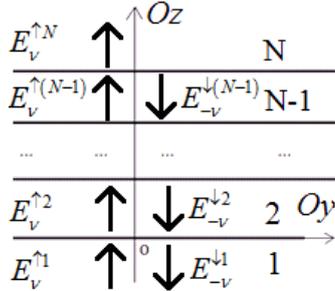


Figure 1.1 – Wave propagation through biisotropic layers

It is clear from (1.1)–(1.3) that in medium N there is no wave incident on the structure from $z \rightarrow +\infty$, so the amplitude coefficients $\bar{E}_v^{\uparrow N}$ and $\bar{E}_v^{\downarrow 1}$ determine the transmission coefficients $T_v^{1N} = E_v^{\uparrow N} / E_v^{\uparrow 1}$ and reflection coefficients $R_v^{1N} = E_v^{\downarrow 1} / E_v^{\uparrow 1}$ for the problem. In the same way we can define the transmission and reflection coefficients for the case when there is only p ($p < N$) layers: T_σ^{1p} , R_σ^{1p} for the incident wave polarization σ ($\sigma = \pm\nu$) and analogous coefficients for the wave incident in medium p from $z \rightarrow +\infty$: T_σ^{p1} , R_σ^{p1} .

2 The multiple reflection method

We first consider the problem at $N = 3$, that is, find the transmission and reflection coefficients for the wave propagation from biisotropic medium 1 to medium 3 through medium 2 in the absence of all the other layers. A similar problem with equal parameters of media 1 and 3 was solved in [19]. We carry out analogous discussion for the case of arbitrary parameters of media 1 and 3. Let

$$\tau_\sigma^{ps} = (b_\sigma^p - b_{-\sigma}^p) / (b_\sigma^s - b_{-\sigma}^s)$$

and

$$\rho_v^{ps} = (b_v^p - b_v^s) / (b_v^s - b_{-\nu}^s)$$

be the transmission and reflection coefficients, respectively, for the interface of the adjacent semi-infinite p -th and s -th media for the incident wave polarization σ ($\sigma = \pm\nu$) [15], and $\eta_\sigma^p = \exp(ik_\sigma^p d_p)$ be the coefficient which takes into account the phase change during the propagation in the layer p of the

thickness d_p . Let the subscript to the left indicate the serial number of transmitted (reflected) wave [19], then:

$$\begin{aligned} {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} &= E_v^{\uparrow 1} \rho_v^{12}; \quad {}_1E_v^{\uparrow 3} = E_v^{\uparrow 1} \tau_v^{12} \eta_v^2 \tau_v^{23}; \\ {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1} &= E_v^{\uparrow 1} \tau_v^{12} \eta_v^2 \rho_v^{23} \eta_v^2 \tau_v^{21}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Introducing the denotation $q_v = \rho_v^{23} \rho_{-\nu}^{21} \eta_v^2 \eta_{-\nu}^2$, it is easy to see that

$${}_pE_v^{\uparrow 3} = {}_1E_v^{\uparrow 3} \cdot q_v^{p-1}; \quad {}_pE_{-\nu}^{\downarrow 1} = {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1} \cdot q_v^{p-1}.$$

Using these formulae, and (2.1), one can find $E_v^{\uparrow 3}$ and $E_{-\nu}^{\downarrow 1}$ as

$$\begin{aligned} E_v^{\uparrow 3} &= \sum_{s=1}^{\infty} {}_sE_v^{\uparrow 1} = {}_1E_v^{\uparrow 3} \sum_{s=1}^{\infty} q_v^{s-1} = {}_1E_v^{\uparrow 3} \frac{1}{1-q_v}; \\ E_v^{\uparrow 3} &= E_v^{\uparrow 1} \tau_v^{12} \eta_v^2 \tau_v^{23} \frac{1}{1-q_v} = E_v^{\uparrow 1} \cdot T_v^{13}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$E_{-\nu}^{\downarrow 1} = {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1} \sum_{s=1}^{\infty} q_v^{s-1} = {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + \frac{{}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{1-q_v};$$

$$E_{-\nu}^{\downarrow 1} = E_v^{\uparrow 1} \rho_v^{12} + \frac{E_v^{\uparrow 1} \tau_v^{12} \eta_v^2 \rho_v^{23} \eta_v^2 \tau_v^{21}}{1-q_v} = E_v^{\uparrow 1} \cdot R_v^{13}. \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} R_v^{13} &= \rho_v^{12} + \frac{\tau_v^{12} \eta_v^2 \rho_v^{23} \eta_v^2 \tau_v^{21}}{1 - \rho_v^{23} \rho_{-\nu}^{21} \eta_v^2 \eta_{-\nu}^2} = \\ &= \frac{\rho_v^{12} \left[1 - (\rho_v^{12} \rho_{-\nu}^{21} - \tau_v^{12} \tau_{-\nu}^{21}) \frac{\rho_v^{21}}{\rho_v^{12}} \frac{\rho_v^{23}}{\rho_v^{21}} \eta_v^2 \eta_{-\nu}^2 \right]}{1 - \rho_v^{23} \rho_{-\nu}^{21} \eta_v^2 \eta_{-\nu}^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

By using similar arguments and taking into account the identity $(\rho_v^{12} \rho_{-\nu}^{21} - \tau_v^{12} \tau_{-\nu}^{21}) \frac{\rho_v^{21}}{\rho_v^{12}} = 1$ [19] one can obtain ($\sigma = \pm\nu$)

$$\begin{aligned} T_\sigma^{13} &= \eta_\sigma^2 \frac{\tau_\sigma^{12} \tau_\sigma^{23}}{1 - \rho_\sigma^{23} \rho_{-\sigma}^{21} \eta_\sigma^2 \eta_{-\sigma}^2}; \\ R_\sigma^{13} &= \frac{\rho_\sigma^{12} \left[1 - \eta_\sigma^2 \eta_{-\sigma}^2 (\rho_\sigma^{23} / \rho_\sigma^{21}) \right]}{1 - \rho_\sigma^{23} \rho_{-\sigma}^{21} \eta_\sigma^2 \eta_{-\sigma}^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$T_\sigma^{31} = \eta_\sigma^2 \frac{\tau_\sigma^{32} \tau_\sigma^{21}}{1 - \rho_\sigma^{21} \rho_{-\sigma}^{23} \eta_\sigma^2 \eta_{-\sigma}^2};$$

$$R_\sigma^{31} = \frac{\rho_\sigma^{32} \left[1 - \eta_\sigma^2 \eta_{-\sigma}^2 (\rho_\sigma^{21} / \rho_\sigma^{23}) \right]}{1 - \rho_\sigma^{21} \rho_{-\sigma}^{23} \eta_\sigma^2 \eta_{-\sigma}^2}.$$

Let us turn to the case $N = 4$. The following identities for the transmission and reflection coefficients τ_σ^{13} , ρ_σ^{13} , τ_σ^{31} , ρ_σ^{31} can be proved for the case of electromagnetic wave transmission through the planar interface between media 1 and 3 when medium 2 is absent [15]:

$$\begin{cases} \tau_\sigma^{13} \rho_\sigma^{31} + \rho_\sigma^{13} \tau_\sigma^{31} = 0; \\ \tau_\sigma^{13} \tau_\sigma^{31} + \rho_\sigma^{13} \rho_\sigma^{31} = 1; \\ \tau_\sigma^{31} \rho_\sigma^{13} + \rho_\sigma^{31} \tau_\sigma^{13} = 0; \\ \tau_\sigma^{31} \tau_\sigma^{13} + \rho_\sigma^{31} \rho_\sigma^{13} = 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Similarly one can prove that the coefficients $T_\sigma^{13}, R_\sigma^{13}, T_\sigma^{31}, R_\sigma^{31}$ (2.5) (medium 2 is present) satisfy the same identities:

$$\begin{cases} T_\sigma^{13} R_\sigma^{31} + R_\sigma^{13} T_\sigma^{13} = 0; \\ T_\sigma^{13} T_\sigma^{31} + R_\sigma^{13} R_\sigma^{13} = 1, \\ T_\sigma^{31} R_\sigma^{13} + R_\sigma^{31} T_\sigma^{31} = 0; \\ T_\sigma^{31} T_\sigma^{13} + R_\sigma^{31} R_\sigma^{31} = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

This means that we can effectively remove the layer between media 1 and 3, with corresponding changes to the coefficients:

$$\tau_\sigma^{13} \rightarrow T_\sigma^{13}, \rho_\sigma^{13} \rightarrow R_\sigma^{13}, \tau_\sigma^{31} \rightarrow T_\sigma^{31}, \rho_\sigma^{31} \rightarrow R_\sigma^{31}.$$

Therefore, the problem for $N = 4$ can be reduced to the problem for $N = 3$ by replacing the section between the first and third media with the boundary plane containing the transmission and reflection coefficients $T_\sigma^{13}, R_\sigma^{13}, T_\sigma^{31}, R_\sigma^{31}$ in the corresponding directions. As a result, the following formulas for the coefficients $T_\sigma^{14}, R_\sigma^{14}, T_\sigma^{41}, R_\sigma^{41}$ are obtained:

$$\begin{aligned} T_\sigma^{14} &= \eta_\sigma^3 \frac{T_\sigma^{13} \tau_\sigma^{34}}{1 - \rho_\sigma^{34} R_\sigma^{31} \eta_\sigma^3 \eta_\sigma^3}; \\ R_\sigma^{14} &= \frac{R_\sigma^{13} [1 - \eta_\sigma^3 \eta_\sigma^3 (\rho_\sigma^{34} / R_\sigma^{31})]}{1 - \rho_\sigma^{34} R_\sigma^{31} \eta_\sigma^3 \eta_\sigma^3}; \\ T_\sigma^{41} &= \eta_\sigma^3 \frac{\tau_\sigma^{43} T_\sigma^{31}}{1 - R_\sigma^{31} \rho_\sigma^{34} \eta_\sigma^3 \eta_\sigma^3}; \\ R_\sigma^{41} &= \frac{\rho_\sigma^{43} [1 - \eta_\sigma^3 \eta_\sigma^3 (R_\sigma^{31} / \rho_\sigma^{34})]}{1 - R_\sigma^{31} \rho_\sigma^{34} \eta_\sigma^3 \eta_\sigma^3}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Coefficients $T_\sigma^{14}, R_\sigma^{14}, T_\sigma^{41}, R_\sigma^{41}$ (2.8) also satisfy the identities of the type (2.6)–(2.7). Summarizing these arguments, one can obtain recurrence formulas and using them step-by-step find all of the transmission and reflection coefficients in both directions ($3 \leq p \leq N - 1$):

$$\begin{aligned} T_\sigma^{1(p+1)} &= \eta_\sigma^p \frac{T_\sigma^{1p} \tau_\sigma^{p(p+1)}}{1 - \rho_\sigma^{p(p+1)} R_\sigma^{p1} \eta_\sigma^p \eta_\sigma^p}; \\ R_\sigma^{1(p+1)} &= \frac{R_\sigma^{1p} [1 - \eta_\sigma^p \eta_\sigma^p (\rho_\sigma^{p(p+1)} / R_\sigma^{p1})]}{1 - \rho_\sigma^{p(p+1)} R_\sigma^{p1} \eta_\sigma^p \eta_\sigma^p}; \\ T_\sigma^{(p+1)1} &= \eta_\sigma^p \frac{\tau_\sigma^{(p+1)p} T_\sigma^{p1}}{1 - R_\sigma^{p1} \rho_\sigma^{p(p+1)} \eta_\sigma^p \eta_\sigma^p}; \\ R_\sigma^{(p+1)1} &= \frac{\rho_\sigma^{(p+1)p} [1 - \eta_\sigma^p \eta_\sigma^p (R_\sigma^{p1} / \rho_\sigma^{p(p+1)})]}{1 - R_\sigma^{p1} \rho_\sigma^{p(p+1)} \eta_\sigma^p \eta_\sigma^p}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

All of the above coefficients satisfy the identities of the type (2.6)–(2.7).

3 The matrix method

Now consider the problem of the normal incidence of an electromagnetic wave on the structure of biisotropic layers in the matrix method [19]. Introducing the notations

$$E_p = \begin{pmatrix} E_v^{\uparrow p} \\ E_v^{\downarrow p} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq p \leq N - 1; \quad E_N = \begin{pmatrix} E_v^{\uparrow N} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (3.1)$$

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b_v^p & -b_{-v}^p \end{pmatrix}; \quad 1 \leq p \leq N;$$

$$\Phi_p = \begin{pmatrix} \exp(ik_v^p d_p) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_{-v}^p d_p) \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

$$2 \leq p \leq N - 1,$$

it is easy to show that boundary conditions of continuity of the tangential components of vectors \vec{E} and \vec{H} can be represented as the following system of matrix equations (assuming that $\Phi_1 = 1$):

$$M_{p+1} E_{p+1} = M_p \Phi_p E_p, \quad p = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.3)$$

Expressing E_p through E_{p+1} one can find expression E_1 through E_N :

$$E_1 = \left[\prod_{p=1}^{N-1} (\Phi_p^{-1} M_p^{-1} M_{p+1}) \right] E_N = \Lambda E_N, \quad (3.4)$$

where Λ , introduced in (3.4), is a 2×2 matrix with the elements Λ_{ij} , that is,

$$\begin{pmatrix} E_v^{\uparrow 1} \\ E_v^{\downarrow 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_v^{\uparrow N} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Representing (3.5) in the form of equations for the unknown coefficients $E_v^{\uparrow N}, E_v^{\downarrow 1}$ one can obtain expressions for T_v, R_v .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ \Lambda_{21} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_v \\ R_v \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} T_v \\ R_v \end{pmatrix} = \frac{1}{\Lambda_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda_{21} & -\Lambda_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

It is easy to see that the coefficients T_v, R_v (3.6) satisfy identity (2.6).

4 A numerical example: a periodic structure of layers

Suppose that the area $z \geq 0$ has a periodic structure: layers of biisotropic media 2 of thickness d_2 imbedded in medium 1 with distance d_1 between them. Let us investigate the dependence of the modulus of the transmission coefficient (the incident wave has the right circular polarization) on distance d_1 . Figure 4.1 shows plots for the following media parameters:

$$\varepsilon_1 = 1.3, \quad \mu_1 = 1.2, \quad \chi_1 = 0.2, \quad \alpha_1 = 0.1;$$

$$\varepsilon_2 = 3.2, \quad \mu_2 = 1.3, \quad \chi_2 = 0.4, \quad \alpha_2 = 0.4; \quad d_2 = 1.2.$$

(Numerical results obtained using the method of multiple reflections and the matrix method, are identical).

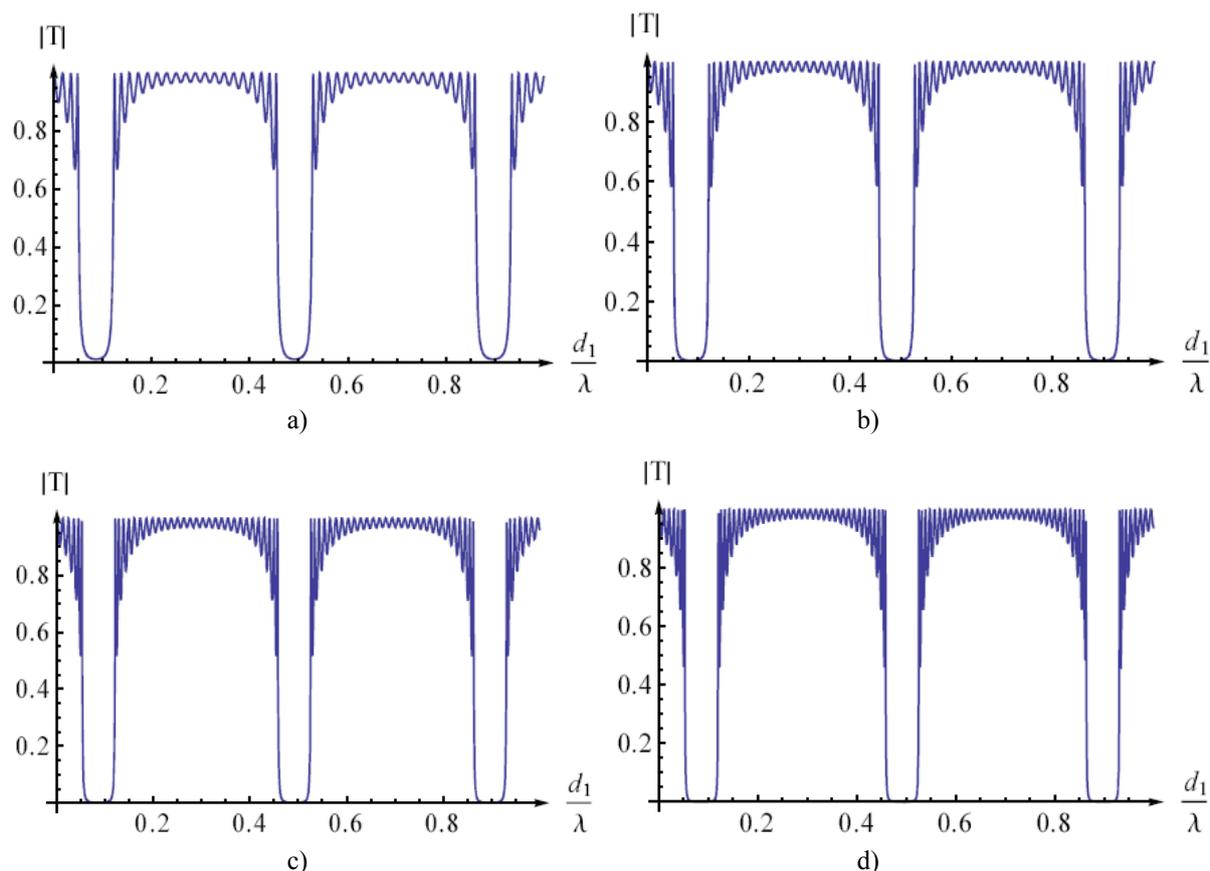


Figure 4.1 – The dependence of the transmission coefficient on distance d_1 .
Number of layers 2: a) 20, b) 25, c) 30, d) 35

Graphs represent sequences of symmetric “allowed” zones, in which the transmission coefficient varies around unity, divided by “forbidden” zones in which the transmission coefficient is close to 0. Increasing number of layers leads to the fact that the minimum value of the transmission coefficient in the troughs approaches 0. The number of maximums in an “allowed” zone equals the number of layers of media 2 minus one. The value of the transmission coefficient at each maximum is equal to 1, that is, there is a complete penetration.

Conclusion

Thus, the problem of transmission and reflection of electromagnetic waves for the multilayer biisotropic structure is solved by two different methods: the method of multiple reflections and the matrix method. Both methods yield the results which coincide with each other with a very high degree of accuracy. At the same time these methods have different advantages. The advantage of the multiple reflections method is comparatively small numerical values, which increases the stability of the numerical solutions. This also significantly accelerates the calculation of periodic structures by re-using pre-calculated transmission and reflection coefficients. The advantage of the matrix method is the ease of

implementation and a significant speed increase compared to the method of multiple reflections in the case of non-periodic layered medium structure.

REFERENCES

1. *Sihvola, A.H.* Bi-isotropic constitutive relations / A.H. Sihvola, I.V. Lindell // *Microwave and Opt. Technol. Lett.* – 1991. – Vol. 4, № 8. – P. 295–297.
2. *Sihvola, A.H.* Electromagnetic modeling of bi-isotropic media / A.H. Sihvola // *Progress In Electromagnetics Research (PIER)*. – 1994. – Vol. 9. – P. 45–86.
3. *Semchenko, I.V.* Research on chiral and bi-anisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // *Progress in Electromagnetics Research (PIER)*. – 1996. – Vol. 12. – P. 335–370.
4. *Bolioli, S.* Advances in Complex Electromagnetic Materials / S. Bolioli. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. – P. 33–51.
5. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston and London : Artech House, 1994. – 500 p.
6. *Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications* / A. Serdyukov [et al.]. – Overseas Publishers Association, 2001. – 400 p.

7. Weiglhofer, W.S. On the non-existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / W.S. Weiglhofer, A.J. Lakhtakia // J. Phys. A.: Math. Gen. – 1997. – Vol. 30. – P. 2597–2600.
8. Лакхтакия, А. Замечание о не существовании линейной среды Теллегена / А. Лакхтакия, В.С. Вейгльхофер // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 494–495.
9. Raab, R.E. On the existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / R.E. Raab, A.H. Sihvola // J. Phys. A.: Math. Gen. – 1997. – Vol. 30. – P. 1335–1344.
10. Hehl, F.W. Linear media in classical electrodynamics and the Post constraint / F.W. Hehl, Y.N. Obuhov // Physics Letters A. – 2005. – Vol. 334. – P. 249–259.
11. Lakhtakia, A. Boundary-value problems and the validity of the Post constraint in modern electromagnetism / A. Lakhtakia // Optik. – 2006. – Vol. 117. – P. 188–192.
12. Sihvola, A. Comments on boundary problems and electromagnetic constitutive parameters / A. Sihvola, S. Tretyakov // Optik. – 2008. – Vol. 120. – P. 247–249.
13. Obukhov, Y.N. On the boundary-value problems and the validity of the Post constraint in the modern electromagnetism / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // Optik. – 2009. – Vol. 120. – P. 418–421.
14. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на границе раздела с биизотропной средой / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – № 4 (55), Ч. 2. – С. 113–122.
15. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела биизотропных сред / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 129–133.
16. Капшай, В.Н. Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ВУЗов. Физика. – Томск. – 2000. – № 11. – С. 79–84.
17. Капшай, В.Н. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.
18. Капшай, В.Н. Резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции в проблеме Ми для биизотропного шара / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 28–32.
19. Капшай, В.Н. Прохождение плоских электромагнитных волн через биизотропный слой в биизотропной среде / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, А.Н. Годлевская // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 80–87.

Поступила в редакцию 17.10.12.

УДК 548.55

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ НИЗКОСИММЕТРИЧНЫХ
ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛОВА.Ф. Константинова, Т.Г. Головина, Е.А. Евдищенко,
Б.В. Набатов, К.К. Константинов

Институт кристаллографии им. В.А. Шубникова РАН, Москва, Россия

SPECIAL CASES OF LOW SYMMETRY ABSORBING CRYSTALS

A.F. Konstantinova, T.G. Golovina, E.A. Evdishenko,
B.V. Nabatov, K.K. Konstantinov

A.V. Shubnikov Institute of Crystallography, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Изучены особенности поведения собственных волн в поглощающих низкосимметричных кристаллах. Как было показано Ф.И. Федоровым и А.М. Гончаренко, существенные различия наблюдаются в моноклинных кристаллах. В настоящей работе подробно рассмотрены шесть возможных вариантов числа изотропных и круговых оптических осей в таких кристаллах, изучено изменение эллиптичностей собственных волн и показана существенная разница между этими вариантами. Эти различия отчетливо проявляются в зависимостях эллиптичности и интенсивности прошедшего света от угла падения, если на кристалл падает свет с правой и левой круговой поляризацией.

Ключевые слова: низкосимметричные кристаллы, моноклинные кристаллы, поглощение, собственные волны.

Peculiarities of eigenwaves in absorbing low symmetry crystals were investigated. As it was shown by F.I. Fedorov and A.M. Goncharenko, there are substantial differences in monoclinic crystals. Six variants of existence of optical axes in such crystals were considered in details. Changes in ellipticity of eigenwaves were investigated. Substantial difference between these cases is shown. This difference can be clearly seen on dependencies of ellipticity and intensity of the transmitted light from the angle of incidence in the cases when the incident light has right or left circular polarization.

Keywords: low symmetry crystals, monoclinic crystals, absorption, eigenwaves.

Введение

В книге Ф.И. Федорова [1] с помощью ковариантных методов была изложена общая теория распространения света в поглощающих кристаллах и приведен вид тензора ε^{-1} для всех классов таких кристаллов. Исследования были продолжены А.М. Гончаренко и отражены в [2]–[4], где, в частности, приведены сечения поверхностей рефракции и абсорбции для таких кристаллов.

В настоящей работе на основании [1] будут рассмотрены шесть вариантов возможных сочетаний изотропных и круговых оптических осей только в моноклинных поглощающих кристаллах.

К моноклинным относят кристаллы классов 2 , m , $2/m$, к ромбическим – кристаллы классов 222 , $mm2$, $m\bar{3}m$. Пусть для моноклинного кристалла ось 2 параллельна оси Z , а плоскость симметрии m перпендикулярна оси Z . Комплексный тензор диэлектрической проницаемости ε и обратный ему тензор ε^{-1} для поглощающих низкосимметричных кристаллов не всегда приводятся к диагональному виду [1], [8]. Поэтому для нахождения направлений оптических осей и решения граничной задачи особенно удобно использовать ковариантные формы записи тензоров ε и ε^{-1} [1].

Тензор ε^{-1} для моноклинного кристалла в ковариантной форме записывается в виде [1]:

$$\varepsilon^{-1} = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'), \quad (0.1)$$

где a – одно из собственных значений тензора ε^{-1} , $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''$ – диада [1], [8], \mathbf{c}' , \mathbf{c}'' – комплексные векторы, определяющие положение оптических осей кристалла. Векторы \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' лежат в основной плоскости. Под основной плоскостью моноклинного кристалла понимается плоскость симметрии m или плоскость, перпендикулярная к оси симметрии второго порядка [1]. Здесь рассматривается только случай, когда основная плоскость – плоскость XOY , поэтому векторы \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' представимы в виде:

$$\mathbf{c}' = \{c'_1, c'_2, 0\}, \quad \mathbf{c}'' = \{c''_1, c''_2, 0\}. \quad (0.2)$$

Направляющие векторы \mathbf{n}_{\pm} оптических осей кристалла определяются из соотношения:

$$\mathbf{n}_{\pm} = \frac{\sqrt{(\mathbf{c}^*)^2 \mathbf{c} + \sqrt{\mathbf{c}^2 \mathbf{c}^* \pm i \cdot [\mathbf{c} \mathbf{c}^*]}}}{|\mathbf{c}'|^2 + |\mathbf{c}''|^2}, \quad (0.3)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ или $\mathbf{c} = \mathbf{c}''$. Вектор \mathbf{c} , т. е. любой из векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' , является линейным, если $[\mathbf{c} \mathbf{c}^*] = 0$; круговым, если $\mathbf{c}^2 = 0$; эллиптическим, если $[\mathbf{c} \mathbf{c}^*] \neq 0$ и $\mathbf{c}^2 \neq 0$ [1].

Оптические оси, определяемые направляющими векторами \mathbf{n}_{\pm} и соответствующие одному и тому же вектору $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ (или $\mathbf{c} = \mathbf{c}''$), называют сопряженными оптическими осями.

Обозначим $\varepsilon^{-1} = \beta$. Тогда, используя (0.1), (0.2) и матричную запись комплексного тензора ε^{-1} [1], получим

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2bc'_1 c''_1 & b(c'_1 c''_2 + c'_2 c''_1) & 0 \\ b(c'_1 c''_2 + c'_2 c''_1) & a + 2bc'_2 c''_2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (0.4)$$

Из равенства матриц (0.4) следуют четыре уравнения:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= a + 2bc'_1 c''_1; \\ \beta_{12} &= b(c'_1 c''_2 + c'_2 c''_1); \\ \beta_{22} &= a + 2bc'_2 c''_2; \quad \beta_{33} = a. \end{aligned} \quad (0.5)$$

Еще два уравнения для компонентов векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' можно записать, задавая каждый из них линейным, круговым или эллиптическим вектором. Из полученных шести уравнений определяются значения a и b , а также компоненты векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' .

В настоящей работе посредством решения граничной задачи с учетом многократных отражений исследована эллиптичность собственных волн k_1, k_2 для различных моноклинных поглощающих кристаллов, а также эллиптичность Elt и коэффициент пропускания T кристаллической пластинки при условии правой и левой круговой поляризации падающего света. Приведенные результаты получены с использованием реализованной в системе «Mathematica» программы, основанной на матричном методе Д. Берремана [5] и описанной в [6], [7] и ковариантном методе Ф.И. Федорова [1].

1 Виды поглощающих моноклинных кристаллов

Ф.И. Федоров показал [1], что существуют шесть вариантов моноклинных поглощающих кристаллов, различающихся числом и расположением изотропных и круговых оптических осей: в кристалле может быть от одной до четырех оптических осей в зависимости от того, является ли каждый из векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' линейным, круговым или эллиптическим.

Вид обратного тензора диэлектрической проницаемости в каждом из этих шести вариантов представлен на фрагментах $a_1 - e_1$ рисунков 1.1 и 1.2. Для кристалла с одной круговой оптической осью вид тензора ε^{-1} заимствован в [1], а для остальных вариантов кристаллов – получен в результате решения системы уравнений (0.5).

Рассмотрим более подробно возможные варианты сочетаний оптических осей разного типа в поглощающих моноклинных кристаллах.

Одна круговая оптическая ось (рисунок 1.1, фрагменты $a_1 - a_5$). Если $\mathbf{c}' = \mathbf{c}'' = \mathbf{c}$ и $\mathbf{c} -$ круговой

вектор, то есть $\mathbf{c}^2 = 0$ и, в соответствии с (0.3), кристалл имеет одну круговую оптическую ось, перпендикулярную к основной плоскости [1]. В этом случае все три главных значения тензора ε^{-1} (как и тензора ε) одинаковы, и он не приводится к диагональному виду. В таком кристалле распространяются обыкновенная (показатель преломления волны не зависит от направления распространения) и необыкновенная волны [1]. На фрагменте a_2 рисунка 1.1 показаны зависимости эллиптичностей собственных волн от угла падения ϕ и угла φ поворота плоскости падения вокруг оси Z , совпадающей с нормалью к плоскости пластинки.

При нормальном падении волны вдоль оптической оси ($\phi = 0$) в кристалле распространяется круговая волна с эллиптичностью $k_1 = k_2 = \pm 1$. При наклонном падении ($\phi \neq 0$) эллиптичность зависит от угла падения только для одной из собственных волн (пунктир на рисунке 1.1 a_3), а для другой – постоянна и равна единице при любом угле падения (сплошная прямая на рисунке 1.1 a_3).

При нормальном падении ($\phi = 0$) на кристалл вдоль его оптической оси волны правой круговой поляризации эллиптичность Elt прошедшей волны не изменяется, то есть остается равной +1, а при падении волны левой круговой поляризации прошедший свет поляризован эллиптически (рисунок 1.1 a_4). Коэффициенты пропускания T кристаллической пластинки при падении волны правой и левой круговой поляризации существенно отличаются (рисунок 1.1 a_5).

Одна круговая и одна изотропная оптические оси (рисунок 1.1, фрагменты $b_1 - b_5$). В этом случае один из векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' круговой, а другой – линейный: $\mathbf{c}'^2 = 0, \mathbf{c}''^2 = 1, \mathbf{c}'' = (\mathbf{c}')^*$ и тензор ε^{-1} (и ε) не приводится к диагональному виду. Из (0.3) видно, что круговая оптическая ось перпендикулярна к основной плоскости, а изотропная ось лежит в ней. Вид тензора ε^{-1} приведен на рисунке 1.1 b_1 . На рисунке 1.1 b_2 направлению круговой оптической оси соответствует максимальное значение эллиптичностей собственных волн. Видно, что при $\phi \neq 0$ эллиптичности для разных собственных волн разные. Эллиптичности собственных волн при падении света вдоль круговой оптической оси ($\phi = 0$) равны +1 (рисунок 1.1 b_3). При падении на кристалл вдоль оптической оси ($\phi = 0$) волны правой круговой поляризации прошедшая волна также имеет правую круговую поляризацию, а при падении волны левой круговой поляризации прошедший свет поляризован эллиптически (рисунок 1.1 b_4). При падении на кристалл света правой и левой круговой поляризации коэффициенты пропускания T кристаллической пластинки значительно отличаются (рисунок 1.1 b_5). Изотропная оптическая ось на приведенных рисунках не видна, так как она перпендикулярна круговой оси.

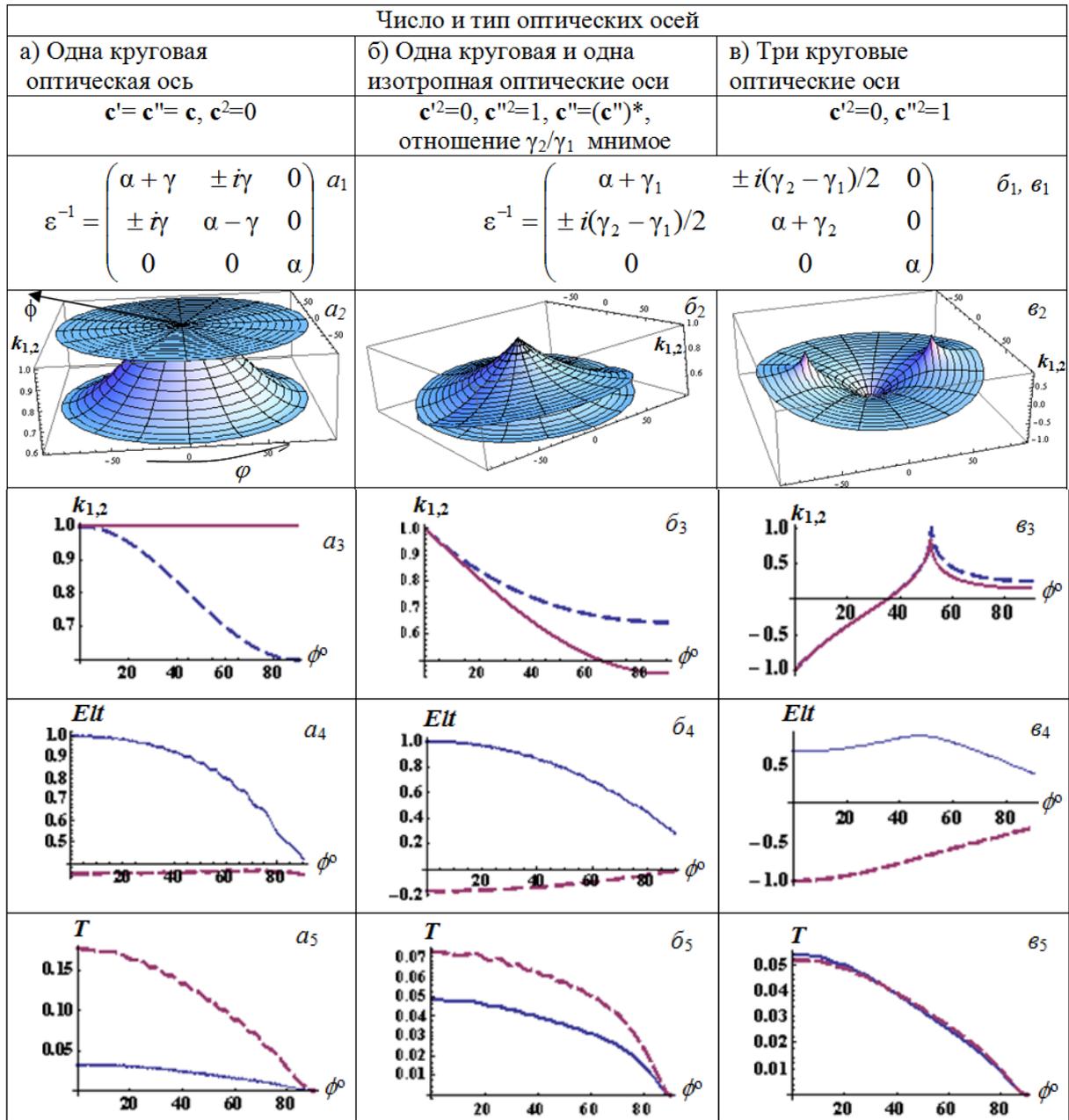


Рисунок 1.1 – Вид тензора ε^{-1} для разных вариантов поглощающих моноклинных кристаллов (a_1, b_1, v_1), $\alpha, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – комплексные числа

Зависимость эллиптичностей собственных k_1, k_2 волн от угла падения ϕ и угла поворота кристалла φ вокруг оси Z в цилиндрической системе координат (a_2, b_2, v_2); угол падения ϕ отсчитывается вдоль радиуса горизонтального сечения фигуры, а угол φ – как угол поворота этого радиуса.

Зависимость эллиптичностей собственных k_1, k_2 волн от угла падения ϕ (a_3, b_3, v_3); одна из круговых оптических осей лежит в плоскости падения.

Зависимость эллиптичности прошедшего света Ell от угла падения ϕ при правой (сплошная кривая) и левой (пунктирная кривая) круговой поляризации падающего света (a_4, b_4, v_4); одна из круговых оптических осей лежит в плоскости падения.

Зависимость коэффициента пропускания T кристаллической пластинки от угла падения ϕ при правой (сплошная кривая) и левой (пунктирная кривая) круговой поляризации падающего света (a_5, b_5, v_5).

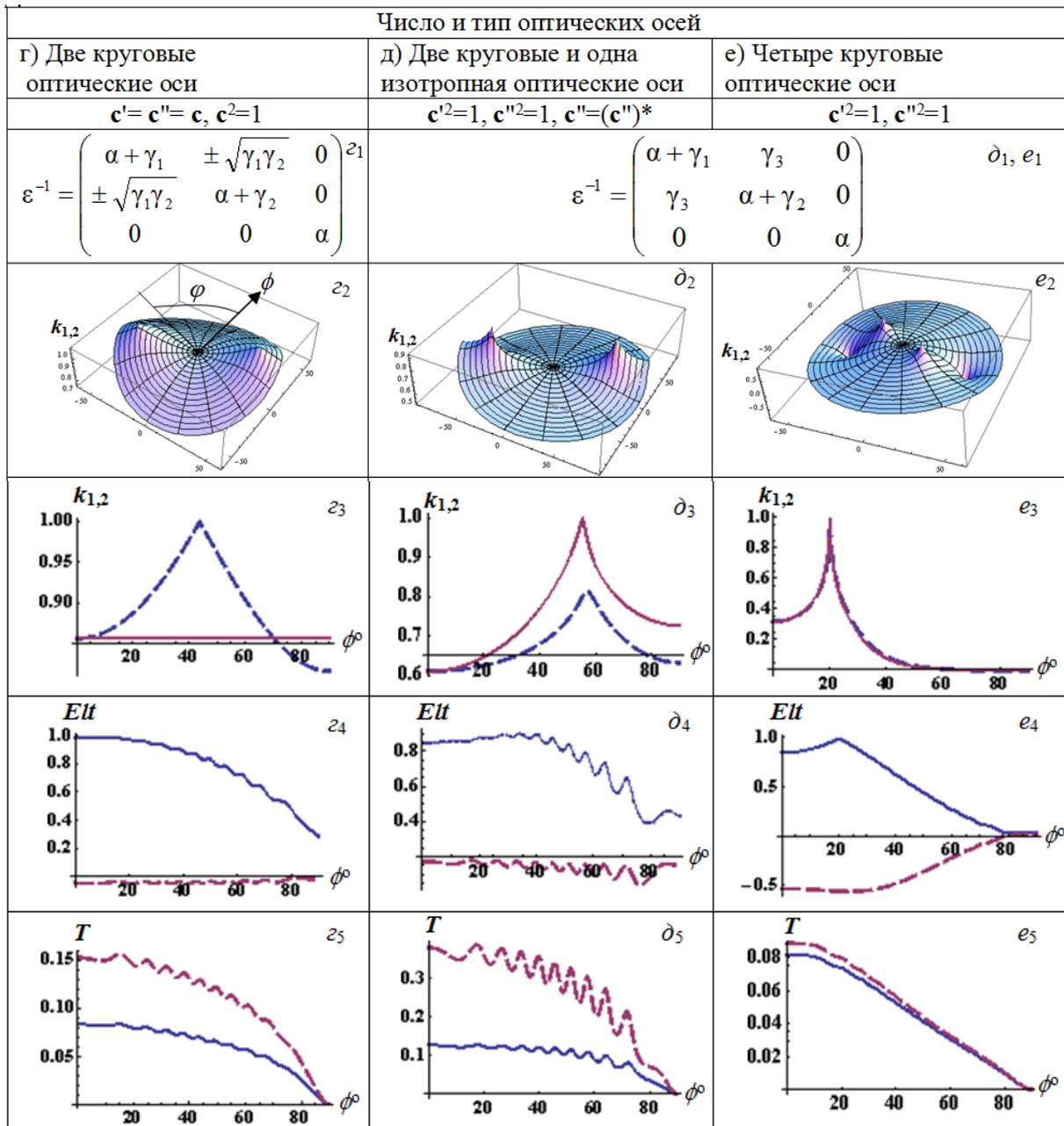


Рисунок 1.2 – Вид тензора ε^{-1} для разных вариантов поглощающих моноклинных кристаллов (z_1, d_1, e_1); $\alpha, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – комплексные числа

Зависимость эллиптичностей собственных волн k_1, k_2 от угла падения ϕ и угла поворота кристалла φ вокруг оси Z в цилиндрической системе координат (z_2, d_2, e_2); угол падения ϕ отсчитывается вдоль радиуса горизонтального сечения фигуры, а угол φ – как угол поворота этого радиуса.

Зависимость эллиптичностей собственных волн k_1, k_2 от угла падения ϕ (z_3, d_3, e_3); одна из круговых оптических осей лежит в плоскости падения.

Зависимость эллиптичности прошедшего света Ell от угла падения ϕ при правой (сплошная кривая) и левой (пунктирная кривая) круговой поляризации падающего света (z_4, d_4, e_4); одна из круговых оптических осей лежит в плоскости падения.

Зависимость коэффициента пропускания T кристаллической пластинки от угла падения ϕ при правой (сплошная кривая) и левой (пунктирная кривая) круговой поляризации падающего света (z_5, d_5, e_5).

Три круговые оптические оси (рисунок 1.1, фрагменты $\epsilon_1 - \epsilon_5$). Если один из векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' круговой, а другой – эллиптический: $\mathbf{c}'^2 = 0$, $\mathbf{c}''^2 = 1$, $\mathbf{c}'' \neq (\mathbf{c}'')^*$, то тензор ϵ^{-1} (ϵ) не приводится к диагональному виду и, как следует из (0.3), в кристалле имеются три круговые оптические оси, лежащие в одной плоскости. Оптическая ось, соответствующая круговому вектору, перпендикулярна к основной плоскости и расположена симметрично между двумя другими оптическими осями, соответствующими эллиптическому вектору. Вид тензора ϵ^{-1} приведен на рисунке 1.1 ϵ_1 . На рисунке 1.1 ϵ_2 приведена зависимость эллиптичности только одной из собственных волн от углов ϕ и φ ; максимумы и минимумы эллиптичности соответствуют значениям углов ϕ и φ , определяющим направление круговых оптических осей. Анализируя рисунок 1.1 ϵ_2 , видим также, что для оптической оси, соответствующей круговому вектору, собственной является левая круговая поляризация, а для обеих оптических осей, соответствующих эллиптическому вектору, собственная поляризация – правая. Эллиптичность другой собственной волны отличается мало, что видно на рисунке 1.1 ϵ_3 . На рисунке 1.1 ϵ_3 видны две круговые оси. При падении волны вдоль оптической оси, соответствующей круговому вектору, $\phi = 0$ и эллиптичности обеих собственных волн равны -1 . Для одной из двух других осей, соответствующих эллиптическому вектору, $\phi \neq 0$ и эллиптичность равна $+1$ для одной из собственных волн, а для другой незначительно отличается от указанного значения. Для второй из двух осей, соответствующих эллиптическому вектору, картина симметрична относительно вертикали.

При падении вдоль оптической оси при $\phi = 0$ волны правой круговой поляризации прошедшая волна эллиптически поляризована, а при падении волны левой круговой поляризации прошедшая волна тоже имеет левую круговую поляризацию. Но при наклонном падении вдоль другой оптической оси волн обеих ортогональных форм циркулярной поляризации прошедшая волна эллиптически поляризована (рисунок 1.1 ϵ_4). Коэффициенты пропускания T кристаллической пластинки при правой и левой круговой поляризации падающего света отличаются значительно меньше, чем в двух рассмотренных ранее вариантах сочетания осей (рисунок 1.1 ϵ_5).

Две круговые оптические оси (рисунок 1.2, фрагменты $\epsilon_1 - \epsilon_5$). Если $\mathbf{c} = \mathbf{c}' = \mathbf{c}''$, $\mathbf{c}^2 = 1$, \mathbf{c} – эллиптический вектор, то тензор ϵ приводится к диагональному виду, и кристалл имеет две круговые оптические оси. Вид тензора ϵ^{-1} приведен на рисунке 1.2 ϵ_1 . В кристалле такого типа распространяются обыкновенная и необыкновенная волны [1]. На рисунке 1.2 ϵ_2 приведена зависимость эллиптичности одной из собственных волн от угла падения ϕ и угла поворота φ плоскости оптических осей вокруг оси координат Z (нормали к

пластинке). Максимумы эллиптичности достигаются в точках выхода круговых оптических осей. Эллиптичность одной из собственных волн при распространении вдоль оптической оси равна единице (пунктир на рисунке 1.2 ϵ_3). Эллиптичность другой собственной волны постоянно при любом угле падения, но не равна единице (рисунок 1.2 ϵ_3 , сплошная линия). При падении на кристалл волны правой и левой круговой поляризации в обоих случаях прошедший свет имеет эллиптическую поляризацию – как при распространении в произвольном направлении, так и вдоль оптической оси (рисунок 1.2 ϵ_4), при этом коэффициенты пропускания T кристаллической пластинки значительно отличаются (рисунок 1.2 ϵ_5).

Две круговые и одна изотропная оптические оси (рисунок 1.2, фрагменты $\delta_1 - \delta_5$). Если один из векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' эллиптический, а другой – линейный: $\mathbf{c}'^2 = 1$, $\mathbf{c}''^2 = 1$, $\mathbf{c}'' = (\mathbf{c}'')^*$, то тензор ϵ^{-1} приводится к диагональному виду, и у кристалла есть две круговые и одна изотропная оптические оси. Изотропная оптическая ось соответствует линейному вектору \mathbf{c} и лежит в основной плоскости. Эллиптическому вектору соответствуют две круговые оптические оси. Общий вид тензора ϵ^{-1} приведен в фрагменте δ_1 рисунка 1.2. На рисунке 1.2 δ_2 изображена зависимость эллиптичности одной из собственных волн от углов ϕ и φ . На этом рисунке видны точки выхода круговых оптических осей – вдоль них эллиптичности прошедших волн максимальны. Для разных собственных волн эллиптичность различны, и вдоль оптических осей эллиптичность равна единице только для одной из собственных волн (рисунок 1.2 δ_3). При падении на кристалл под любым углом волны правой и левой круговой поляризации прошедший свет имеет эллиптическую поляризацию (рисунок 1.2 δ_4), и коэффициенты пропускания T кристаллической пластинки в этих ситуациях различны (рисунок 1.2 δ_5). Изотропная оптическая ось на приведенных фрагментах рисунка 1.2 не видна.

Четыре круговые оптические оси (рисунок 1.2, фрагменты $\epsilon_1 - \epsilon_5$). Самый общий и самый распространенный случай – тот, когда оба вектора \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' эллиптические, тензор ϵ^{-1} приводится к диагональному виду и кристалл имеет четыре круговые оси. Общий вид тензора ϵ представлен на фрагменте ϵ_1 рисунка 1.2. На рисунке 1.2 ϵ_2 приведена зависимость эллиптичности одной из собственных волн от углов ϕ и φ . Максимумы и минимумы эллиптичности соответствуют положениям круговых оптических осей. На рисунке 1.2 ϵ_2 видно, что углы между парами оптических осей, имеющих одинаковые положительные и отрицательные значения эллиптичности, разные. Эллиптичности разных собственных волн отличаются очень мало (рисунок 1.2 ϵ_3). Если вдоль оптической оси на кристалл падает волна правой круговой поляризации, то прошедшая волна имеет поляризацию, близкую к круговой (эллиптичность

ее близка к единице). При падении в указанных условиях волн левой круговой поляризации прошедший свет эллиптически поляризован (рисунок 1.2 e_4). Коэффициенты пропускания T кристаллической пластинки при падении волн правой и левой круговой поляризации разные, но отличаются мало (рисунок 1.2 e_5).

Более подробно все результаты, полученные для моноклинных кристаллов, описаны в [9].

2 Ромбические поглощающие кристаллы

Тензор ϵ ромбических поглощающих кристаллов приводится к диагональному виду в вещественной ортогональной системе координат. Для кристаллов этой сингонии возможно существование или двух изотропных, или четырех круговых оптических осей. В последнем случае для каждой пары сопряженных оптических осей угол между осями один и тот же, чем поглощающий ромбический кристалл и отличается от соответствующего кристалла моноклинной сингонии.

Заключение

Для частных случаев моноклинных поглощающих кристаллов классов 2 , m , $2/m$ рассмотрена эллиптичность собственных волн, а также эллиптичность и интенсивность прошедшего света при падении волны правой и левой круговой поляризации. Проведено сравнение результатов, полученных для указанных кристаллов и ромбических кристаллов классов 222 , mmm , mmm .

Если моноклинный поглощающий кристалл имеет только одну круговую оптическую ось, то эллиптичность одной из собственных волн постоянна и при любом угле падения равна единице. Для другой собственной волны эллиптичность равна единице только при ее распространении вдоль оптической оси. Для кристалла с двумя круговыми оптическими осями эллиптичность одной из собственных волн также постоянна, но в отличие от кристалла с одной круговой оптической осью, не равна единице.

При наклонном падении светового пучка эллиптичности разных собственных волн различны, и только для одной из собственных волн эллиптичность равна единице – в направлении оптической оси. При этом для кристаллов, имеющих три или четыре круговые оптические оси, различие эллиптичностей собственных волн гораздо меньше, чем для остальных моноклинных кристаллов. При падении волн правой и левой круговой поляризации на моноклинные кристаллы с указанным числом круговых оптических осей интенсивности прошедших волн также значительно меньше отличаются друг от друга, чем в других кристаллах этой же сингонии.

Углы между сопряженными осями ромбического поглощающего кристалла с четырьмя круговыми оптическими осями одинаковы для обеих пар сопряженных оптических осей, в то время как для разных пар сопряженных оптических осей моноклинного кристалла эти углы разные.

Эллиптичности собственных волн, распространяющихся в направлении сопряженных оптических осей ромбического и моноклинного кристалла, имеют одинаковые знаки.

Таким образом, рассмотрены шесть вариантов поглощающих моноклинных кристаллов, в которых число и свойства возможных оптических осей зависит от вида комплексного тензора диэлектрической проницаемости. Для реализации всех этих вариантов, кроме самого общего случая четырех круговых оптических осей, необходимо соблюдение достаточно жестких ограничений на величину компонентов комплексного тензора диэлектрической проницаемости. Тем не менее, так как коэффициенты преломления и показатели поглощения кристалла зависят от длины волны, толщины кристалла, наличия различных примесей и других параметров, можно предположить, что такие кристаллы могут существовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фёдоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Фёдоров. – Мн. : Из-во АН БССР, 1958. – 380 с.
2. Гончаренко, А.М. Исследование оптических свойств поглощающих кристаллов на основе инвариантного метода : дисс. канд. физ.-матем. наук: / А.М. Гончаренко. – Минск, 1960. – 159 л.
3. Гончаренко, А.М. Поверхности рефракции и абсорбции поглощающих кристаллов моноклинной и триклинной сингоний. / А.М. Гончаренко // Кристаллография. – 1959. – Т. 4, вып. 3. – С. 393–398.
4. Гончаренко, А.М. О некоторых особенностях поведения показателей преломления и коэффициентов поглощения поглощающих кристаллов / А.М. Гончаренко // Кристаллография. – 1959. – Т. 4, вып. 5. – С. 727–731.
5. Berreman, D.W. Optics in stratified and anisotropic media: 4×4-matrix formulation / D.W. Berreman // J. Opt. Soc. Am. – 1972. – Vol. 62, № 4. – P. 502–510.
6. Использование современных математических пакетов для точного решения задач о распространении света в анизотропных слоистых средах. I. Общее решение граничных задач кристаллооптики / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2002. – Т. 47, № 4. – С. 702–710.
7. Использование современных математических пакетов для точного решения задач о распространении света в анизотропных слоистых средах. II. Оптически активные кристаллы / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2002. – Т. 47, № 5. – С. 879–887.
8. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М. : Наука, 1965. – 428 с.
9. Оптические оси в различных поглощающих кристаллах / Т.Г. Головина [и др.] // Кристаллография. – 2012. – Т. 57, № 6. – С. 886–896.

Поступила в редакцию 22.06.12.

УДК 535:621.373.8;535:621.375.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ЛАЗЕРЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ НАКАЧКИ МЕТОДОМ FDTD

В.В. Макаревич, Е.О. Котяшёв

Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев

FDTD SIMULATION OF FEMTOSECOND PULSES IN SEMICONDUCTOR LASER UNDER DC PUMPING CURRENT

V.V. Makarevich, Y.O. Katsiashou

A.A. Kuleshov Mogilev State University, Mogilev

Представлены результаты моделирования динамики излучения полупроводникового лазера на базе уравнений Максвелла-Блоха с использованием метода конечных разностей во временной области (FDTD). Для GaAs поверхностно-излучающих лазеров с вертикальным резонатором с длиной волны 628 нм при постоянной токовой накачке обнаружена возможность существования периодической последовательности фемтосекундных импульсов, длительностью ~ 100 фс.

Ключевые слова: метод конечных разностей во временной области, полупроводниковый лазер, фемтосекундные импульсы, когерентное взаимодействие.

Simulation results of semiconductor laser dynamics using finite-differences time domain (FDTD) method of solving Maxwell-Bloch equations are presented. The ~ 100 fs pulse train regimes under continuous pumping were found to be possible for GaAs vertical cavity surface emitting lasers in the 628 nm wavelength region.

Keywords: finite-difference time domain method, semiconductor laser, femtosecond pulses, coherent interaction.

Introduction

Over the last decades generation of ultrashort laser pulses has attracted the interest of many scientists due to their different applications in various spheres of human life.

The expensive mode-locked solid-state lasers of complex design are normally used to achieve ultrashort pulses. However, cheaper semiconductor lasers can also be used to generate ultrashort pulses. In general a mode-locked setup is used in ultrashort semiconductor lasers. In [1] the optically pumped InP-based mode-locked vertical external cavity surface emitting laser (VECSEL) with the semiconductor saturable absorber mirror (SESAM) generated 1.7 ps pulses in 1.56 μm wavelength region. In [2] the optically pumped mode-locked semiconductor disk laser with fast saturable absorber was used to achieve 190 fs pulses at ≈ 1045 nm. In [3] 784-fs pulse duration at 1 W of average output power was achieved in optically pumped quantum dot VECSEL with SESAM. In [4] a new type of mode-locked laser with spatially separated gain medium was simulated.

Numerical methods are usually involved to simulate laser behaviour. The finite-difference time domain (FDTD) method was used in [5] and [6]. In [5] Maxwell-Bloch system was solved with the help of an iterative predictor-corrector FDTD method to study self-induced transparency effect. In [6] Maxwell-Bloch system was used to model VECSEL.

In this paper we introduce FDTD modeling of femtosecond pulses in vertical cavity surface-emitting laser (VCSEL) with small cavity lengths under dc pumping current.

1 Laser model and parameters

Coherent interaction of radiation with active particles of gain medium is described by a system of Maxwell-Bloch equations:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E} + 2n_a \mathbf{d}_{ab} P, \\ \ddot{P} + 2\gamma \dot{P} + \omega_0^2 P &= \frac{\omega_0^2}{\Omega} \frac{1}{\hbar} \mathbf{d}_{ab} \mathbf{E} N, \\ \dot{N} &= -2\Lambda - \gamma_{nr} (N - N_0) - 4 \frac{\Omega}{\hbar \omega_0^2} \mathbf{d}_{ab} \mathbf{E} \dot{P}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

where γ – the relaxation frequency of polarization, γ_{nr} – the relaxation frequency of inversion, n_a – the density of active particles, ω_0 – the two-level transition frequency, N_0 – the inversion at the thermal equilibrium state, N – the inversion rate (–1 at totally excited state and 1 at the ground state), P – the polarization degree of active particles, \mathbf{E} – the electric field, \mathbf{D} – the electric displacement field, \mathbf{H} – the magnetic field, ε_0 – the vacuum electric permittivity, ε – the electric permittivity, μ_0 – the vacuum magnetic permeability, μ – the magnetic permeability, $\Omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$, Λ – the pumping rate, \mathbf{d}_{ab} – the

electric dipole moment [6]. All symbols in bold represent vector quantities.

A laser active medium consists of a large number of particles with two energy levels. If the external electric field is not strong enough, all the particles behave independently. Otherwise there is cooperative behaviour. Each active particle presents an electric dipole moment \mathbf{d}_{ab} that interacts with strong electric field of intracavity laser radiation. As a result of the cooperative interaction, a “giant dipole”, consisting of a large number of phased dipole moments of each particle, comes into being, and radiation rate is becoming proportional to square of interacting particles.

The vector system (1.1) was applied to our one dimensional laser model (figure 1.1) with electric field and dipole moments vectors were parallel and perpendicular to the axis of light propagation. Set of equations of one spatial variable and time was solved numerically using auxiliary differential equation (ADE)-FDTD method [7] on equally spaced grid with spatial step $a = 0.005\lambda$ (λ – the wavelength) and temporal step $0.5a/c$ (c – the speed of light in vacuum). Figure 1.1 illustrates the laser model used for calculations. The gain medium of VCSEL occupied the whole space inside the cavity formed by the facets of a planar structure with dielectric permittivity $\epsilon = 16$. Electric field values were sampled at point near the right side of medium.

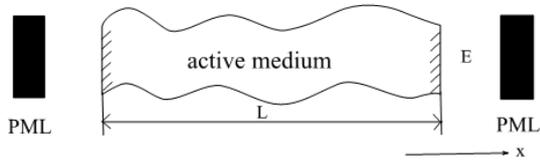


Figure 1.1 – Laser model, used in numerical calculations. PML – perfectly matched layer

The initial conditions were defined as follows. Electric and magnetic fields were set to be zero. Initial incoherent state of medium polarization along spatial coordinate x was calculated as

$$P(x) = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(\omega_0 \cdot x/c + 2\pi \cdot rnd), \quad (1.2)$$

where rnd is real random value uniformly distributed within [0;1] range, generated for every space grid point separately.

Random polarization distribution takes some time to establish the state of phased medium dipoles. Therefore the time delay of emergence of laser radiation is higher than in the case of a specific non-random form of polarization distribution. The initial value of medium inversion is equal to 1, which corresponds to the main unexcited state of particles.

There were used invariable parameters of semiconductor GaAs medium: $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15}$ Hz, $\gamma_{nr} = 3 \cdot 10^8$ Hz, $\gamma = 1 \cdot 10^{13}$ Hz, $d_{ab} = -1.9 \cdot 10^{-29}$ A·s·m, $N_0 = 1$, $n_a = 5 \cdot 10^{26}$ m⁻³, $\lambda = 2\pi c/\omega_0 \approx 628$ nm [6, 8].

The lengths of laser active media ranged from $L = 0.5\lambda$ to $L = 2.5\lambda$. Pumping rates ranged from $\Lambda = 4 \cdot 10^{10}$ s⁻¹ to $\Lambda = 9 \cdot 10^{12}$ s⁻¹.

2 Results and discussion

Three regimes of laser radiation were found during simulation, each of them existed within the subspace of L (active medium length) and Λ (pumping rate) values. Figure 2.1 shows distribution of all the calculated pairs pumping rate/active media length units. Squares-points depict periodic pulse train regimes (Figure 2.2 (a)). Above the line stars-points depict single frequency regimes (Figure 2.2 (b)), and circle-point depicts frequency beating regime (Figure 2.2 (c)).

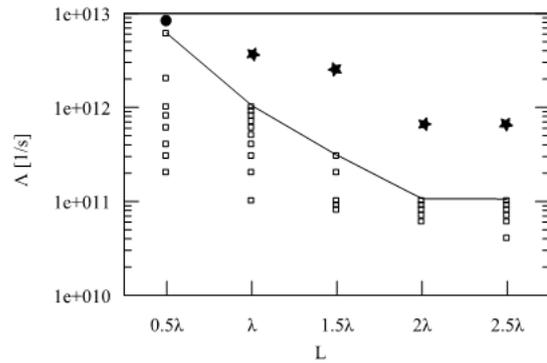


Figure 2.1 – Pumping rate – active medium length diagram

Spectra of the mentioned regimes are represented on figures 2.3 (a), 2.3 (b) and 2.3 (c).

Figure 2.2 (a) shows the time evolution of electric field in the form of a stationary femtosecond pulse train. Pulse duration is 190 fs. Stability of the pulses was observed within temporal interval of calculation, which was 235.6 ps.

The shortest pulses duration of 52 fs were obtained at $L = 0.5\lambda$ and $\Lambda = 6 \cdot 10^{12}$ s⁻¹.

Some modeling researches were carried out to find out the influence of active medium length and pumping rate on the pulse duration and the pulse repetition time. Figure 2.4 shows rising pulse duration with higher medium lengths, with saturation at $L > 1.75\lambda$.

Figures 2.5 (a) and 2.5 (b) illustrate steady decrease of pulse duration value for greater pumping values at two different media lengths.

For fixed lengths of active media, pulse repetition time inversely depends on pumping rate. It is determined by the external pumping rate (Figure 2.6 (a) and 2.6 (b)). In the case when laser cavity is ranged from 0.5λ to 2.5λ , pulse repetition time does not satisfy the mode-locked equation

$$T = \frac{2L}{c}$$

because numerical values of T obtained from the equation are less (9 fs – 34 fs) than FDTD calculated ones (> 1 ps).

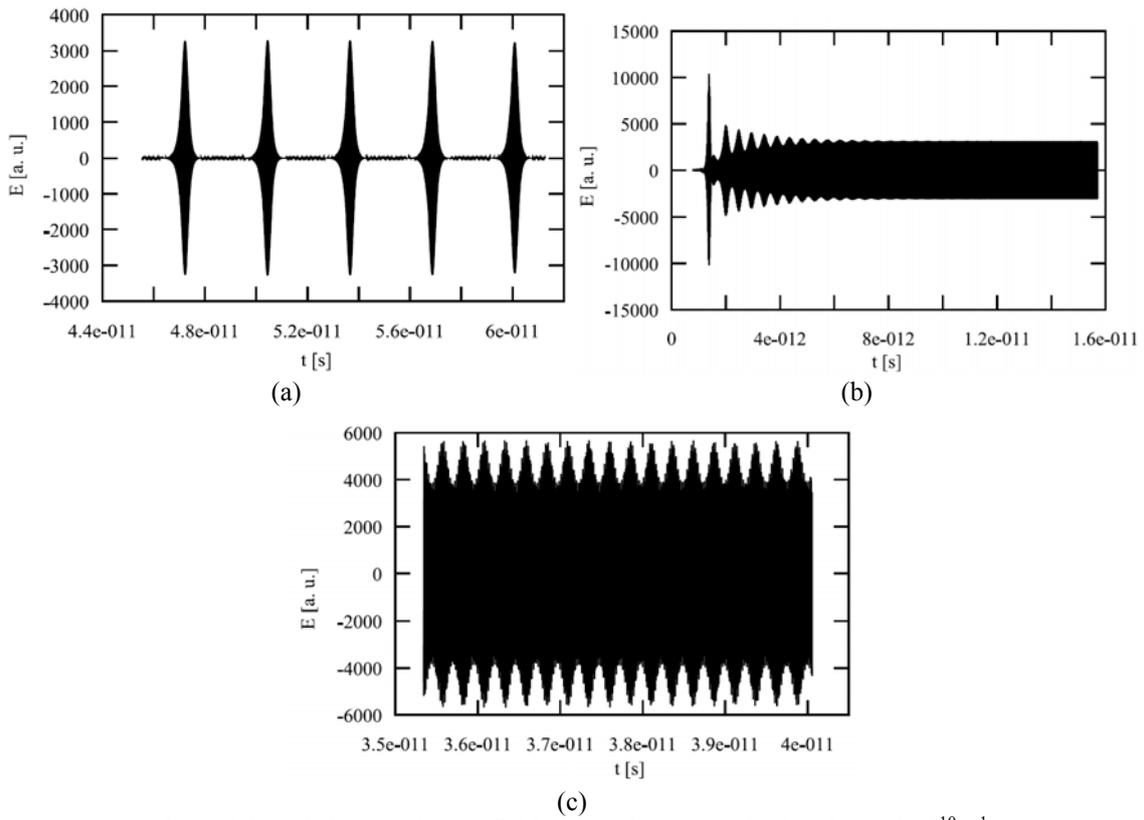


Figure 2.2 – (a) Output electric field versus time at $L = 2.5\lambda$ and $\Lambda = 6 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$.
 (b) 2.5λ and $\Lambda = 8 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$. (c) 0.5λ and $\Lambda = 9 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$

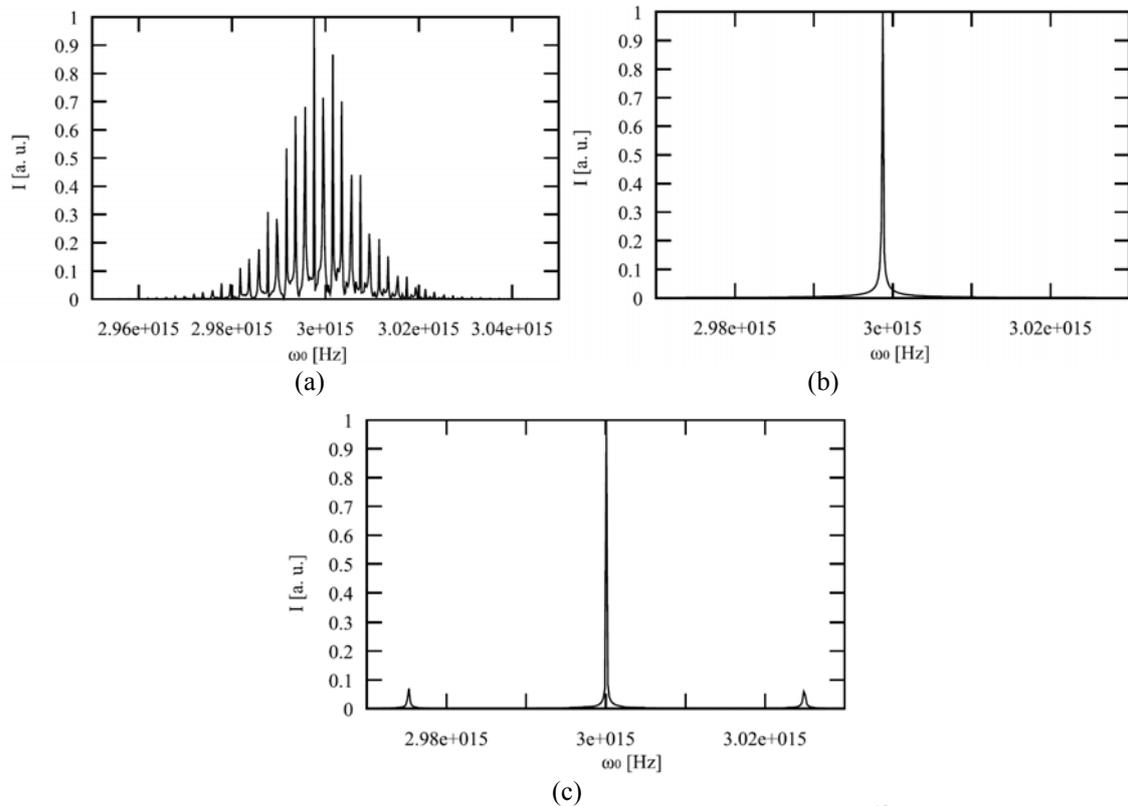


Figure 2.3 – (a) Spectrum of pulse train. Spectral width is $2 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$.
 (b) Single frequency spectrum. (c) Triple frequency spectrum

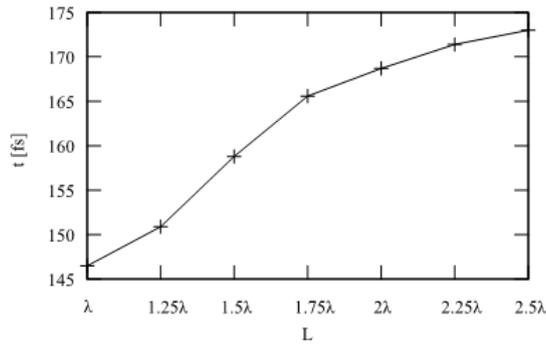


Figure 2.4 – Laser pulse duration versus active medium length at $\Lambda = 1 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$

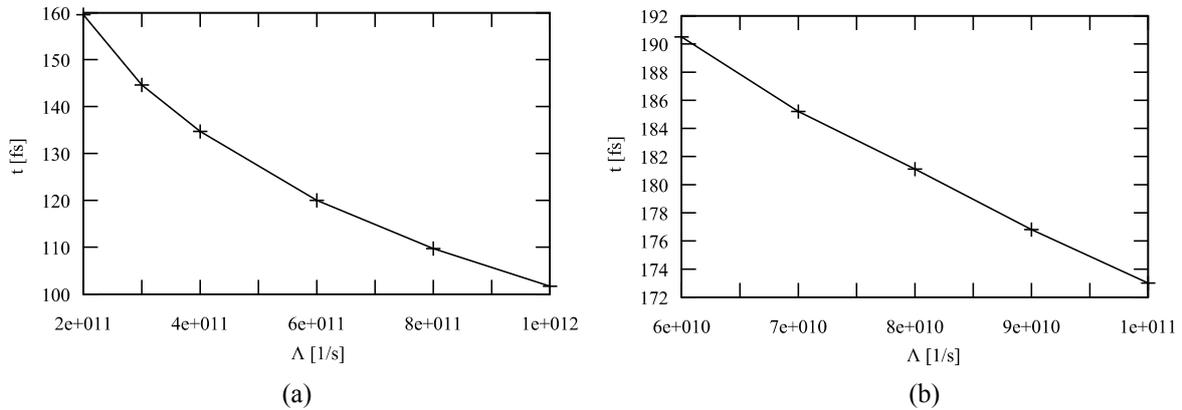


Figure 2.5 – (a) – Laser pulse duration versus pumping rate at $L = 0.5\lambda$ and (b) $L = 2.5\lambda$

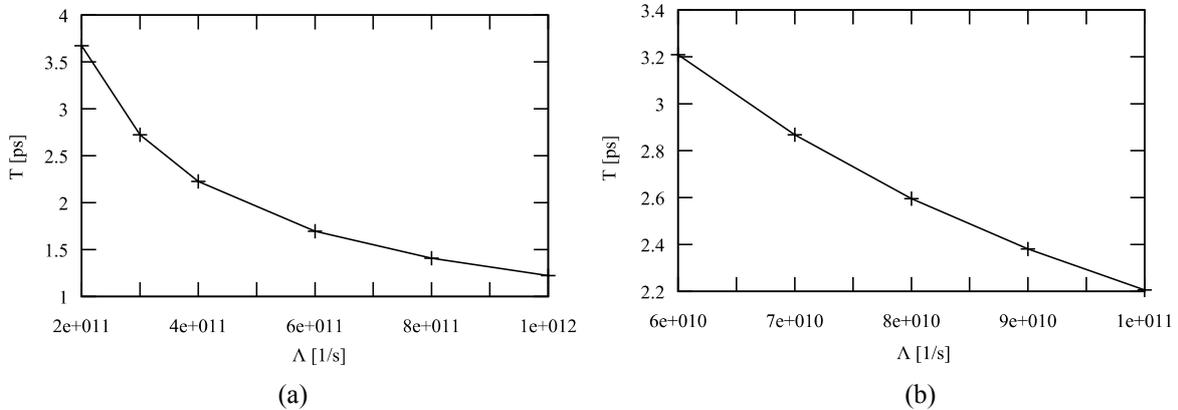


Figure 2.6 – (a) – Pulse repetition time versus pumping rate at $L = 0.5\lambda$ and (b) $L = 2.5\lambda$

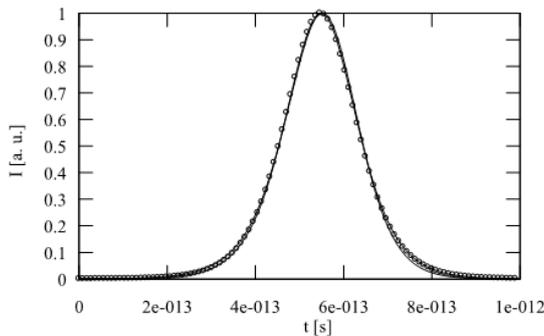


Figure 2.7 – Pulse shape fitting. Solid line indicates the simulated pulse shape, solid line with circles indicates the calculated on (2.1) pulse shape

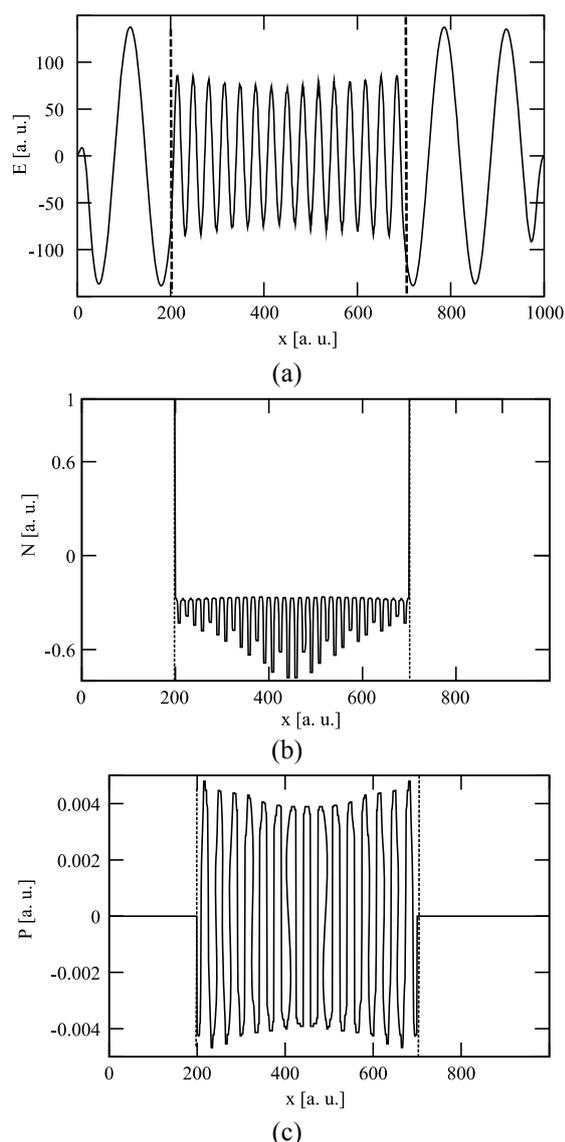


Figure 2.8 – (a) Electric field, (b) inversion and (c) polarization versus coordinate for pulsed regime on figure 2.2 (a). Dashed lines indicate edges of active medium

Laser pulse fitting was performed using equation

$$I = \text{sech}^2[(t - t_0) / \tau], \quad (2.1)$$

where τ determines pulse width, t_0 determines initial position of the pulse (Figure 2.7). FDTD simulated intensity envelope of pulse (Figure 2.2 (a)) almost coincides with the one calculated on (2.1). sech^2 -shaped pulse is a common form of a superfluorescence pulse [9].

Figure 2.8 shows spatial distribution of electric field, inversion and polarization when laser is generating femtosecond pulses. Such deterministic distribution of polarization points at cooperative interaction between active particles of medium and laser radiation.

Conclusion

Periodic pulsed regime of laser radiation was found as a result of FDTD simulations of VCSEL radiation with pulse durations of 52–190 fs and pulse repetition times of 1.3–3.7 ps. The intensity envelope of an individual pulse has sech^2 shape. Central wavelength is 628 nm.

This regime has cooperative nature because of well-correlated state of polarization and strongly oscillating inversion.

Our simulations showed the possibility of generation femtosecond pulses from VCSELs under dc pumping current.

Parameters of modeled laser can be used to create femtosecond VCSEL without the passive modulator under dc pumping current.

Pulse repetition time and pulse duration are determined by pumping rate. This can be used in optical networking, signal processing and transmission.

REFERENCES

1. *Ultrashort pulse generation from 1.56 μm mode-locked VCSEL at room temperature* / A. Khadour [et al.] // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18, № 19. – P. 19902–19913.
2. *Mode-locked InGaAs-AlGaAs disk laser generating sub-200-fs pulses, pulse picking and amplification by a tapered diode amplifier* / P. Klopp [et al.] // *Opt. Express.* – 2009. – Vol. 17, № 13. – P. 10820–10834.
3. *Femtosecond high-power quantum dot vertical external cavity surface emitting laser* / M. Hoffmann [et al.] // *Opt. Express.* – 2011. – Vol. 19, № 9. – P. 8108–8116.
4. *Modeling of mode locking in a laser with spatially separate gain media* / R.M. Oldenbeuving [et al.] // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18, № 22. – P. 22996–23008.
5. *Ultrafast pulse interactions with two-level atoms* / R. W. Ziolkowski [et al.] // *Phys. Rev. A.* – 1995. – Vol. 52, № 4. – P. 3082–3094.
6. *Klaedtke, A. Spatio-Temporal Non-Linear Dynamics of Lasing in Micro-Cavities. Full Vectorial Maxwell-Bloch FDTD Simulations*: Ph. D. thesis / A. Klaedtke. – Stuttgart, 2004. – 158 p.
7. *Taflove, A. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* / A. Taflove. – 2nd ed. – Boston, London: Artech House, Inc., 2000 – 852 p.
8. *Васильев, П.П. Роль сильного усиления среды в возникновении сверхизлучения и наблюдении когерентных эффектов в полупроводниковых лазерах* / П.П. Васильев // *Квантовая электроника.* – 1999. – Т. 29, № 1. – С. 4–8.
9. *Андреев, А.В. Оптическое сверхизлучение: новые идеи и эксперименты* / А.В. Андреев // *УФН.* – 1990. – Т. 160, № 12. – С. 1–46.

Поступила в редакцию 25.06.12.

УДК 517.977

АКТИВНЫЕ СЛОИ ЛЕГИРОВАННЫЕ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫМИ МЕТАЛЛАМИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.В. Малютина-Бронская¹, В.Б. Залесский¹, Т.Р. Леонова¹,
А.М. Поликанин¹, В.А. Мудрый¹, А.В. Семченко², В.В. Сидский²

¹Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск
²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ACTIVE LAYERS DOPED WITH RARE-EARTH METALS FOR INCREASED EFFICIENCY SOLAR CELLS

V.V. Malyutina-Bronskaya¹, V.B. Zalesskiy¹, T.R. Leonova¹,
A.M. Polikanin¹, V.A. Mudryy¹, A.V. Semchenko², V.V. Sidskiy²

¹B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk
²F. Scorina Gomel State University, Gomel

В данной работе представлены фотоэлектрические характеристики структур Al-Ni/ZnO:Er/Si, полученных методом магнетронного напыления, и структур Al-Ni/ZnO:Tb/Si, полученных комбинированным методом с использованием электрохимического осаждения и магнетронного напыления.

Ключевые слова: золь-гель, ZnO, фотоэлектрические характеристики, электрохимическое осаждение, магнетронное напыление.

This paper presents the characteristics of photovoltaic structures Al-Ni/ZnO:Er/Si, obtained by magnetron sputtering, and structures Al-Ni/ZnO:Tb/Si, obtained by the combined method using electrochemical deposition and magnetron sputtering.

Keywords: sol-gel, ZnO, photoelectric characteristics, electrochemical deposition, magnetron sputtering.

Введение

Наиболее существенными механизмами, понижающими эффективность фотоэлементов, являются неполное поглощение солнечного спектра и термализация фотоэлектронов, возбужденных фотонами с энергией, существенно превышающей ширину запрещенной зоны полупроводника. Два этих механизма ответственны за потерю почти 50% солнечной энергии. Устранить эти потери возможно несколькими способами, например, за счет более эффективного использования солнечного спектра. Для этого можно использовать несколько гетеропереходов с разной шириной запрещенной зоны, максимально перекрывающих солнечный спектр, – так называемые «тандемные» солнечные элементы. Также возможна ситуация, когда каждому индивидуальному элементу соответствует определенный гетеропереход, использующий соответствующую часть солнечного спектра. Еще один способ – это трансформировать широкий солнечный спектр в спектр с узким распределением фотонов по энергии вблизи оптимального для конкретного полупроводника значения, например 1,1 эВ для кремния [1].

Обычные фотоэлементы эффективно преобразуют энергию солнечного излучения видимого и ближнего инфракрасного диапазонов (500–900 нм). Имеется возможность повысить КПД фотоэлемента в области ниже 500 нм и выше 900 нм.

В новейших СЭ повышение КПД достигается за счет расширения спектра «действенного» солнечного излучения. Идея конверсии длин волн излучения в фотоэлектричестве заключается в возможности, используя необходимые материалы, изменить солнечный спектр с тем, чтобы задействовать фотоны, энергии которых не соответствуют диапазону поглощения фотоэлектрических приборов. Поглощение фотона, а затем испускание одного или нескольких фотонов с более низкой энергией называется преобразованием с повышением частоты, или «даун-конверсией», в то время как поглощение двух и более фотонов, а затем испускание одного фотона с более высокой энергией называется преобразованием с понижением частоты, или «ап-конверсией» [2], [3].

Один из методов повышения эффективности солнечных фотоэлементов связан с достижениями в синтезе нанокристаллов [4], [5]. Варьируя размеры кристаллов, можно управлять длиной волны испускаемого излучения. Тем не менее, в процессе синтеза нанокристаллов всегда имеется некоторое распределение размеров кристаллов, отсюда возникает распределение в общем спектре поглощения и испускания.

Материалами, являющимися альтернативой полупроводниковым кристаллам, могут быть смеси редкоземельных металлов (РЗМ), которые характеризуются сильной люминесценцией в

видимом диапазоне [6]. Люминесцентные преобразователи солнечного излучения используют люминесцентную среду для изменения длины волны фотонов, энергия которых превышает допустимый диапазон энергий полупроводникового прибора. Использование люминесцентных преобразователей обладает рядом преимуществ по сравнению с другими способами повышения эффективности солнечных батарей. Прежде всего, преобразователи являются внешними дополнительными приспособлениями, поэтому не требуется модификация самих фотоэлементов. Преобразователь способен поглощать как прямое, так и рассеянное излучение, тем самым значительно повышая используемую спектральную плотность.

Используя один или оба из этих процессов, можно повысить ток, накапливаемый в солнечном элементе. Одним из уникальных преимуществ данной концепции является его совместимость со множеством существующих технологий производства солнечных элементов, так как модифицируется только поступающий спектр солнечной энергии (рисунок 0.1).

В данной статье рассматриваются свойства люминесцентных плёнок ZnO, легированных редкоземельными металлами.

1 Методика эксперимента

Слои ZnO, легированные Er, формировались на кремнии методом реактивного магнетронного распыления цинковой мишени с добавлением Er в среде аргона с кислородом (10% Ar, 90% O₂) при различных технологических параметрах. В качестве подложек использовался кремний КДБ-1. После синтеза проводились термические отжиги в температурном диапазоне 600⁰C – 1000⁰C.

Для получения плёнок ZnO, легированного Tb, использовали электрохимическое осаждение ионов тербия из 0,01 М солянокислого раствора, который получали из карбоната тербия.

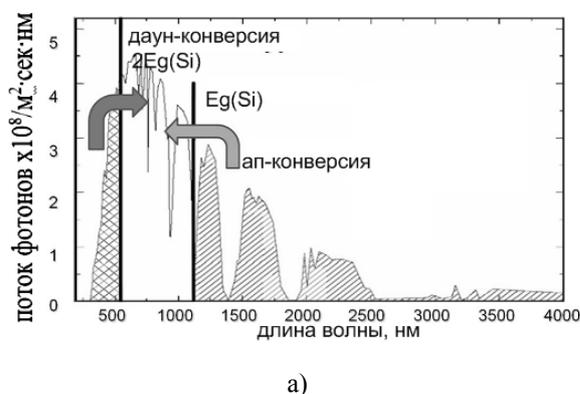
В электрохимической ячейке использовали проволочный платиновый анод, где в качестве катода были использованы пластины кремния. Осаждение проводили при плотностях тока 0,15 А/дм². Напряжение ячейки 15 В. Образцы после осаждения сушили в течение 10 минут в термостате при температуре 85⁰C. На поверхность кремниевых пластин осаждали оксид цинка магнетронным распылением. Напыление Ni–Al контактов проводилось на стандартной промышленной установке методом термического напыления в едином процессе через биметаллические маски круглой формы площадями 1 мм² и 0,2 мм².

Исследования фотолюминесценции (ФЛ) проводились с помощью ксеноновой лампы мощностью 1000 Вт в качестве источника возбуждения, в комбинации с дифракционным монохроматором (600 линий/мм, фокусное расстояние ~ 0.3 м). Измерение ФЛ проводилось при комнатной температуре.

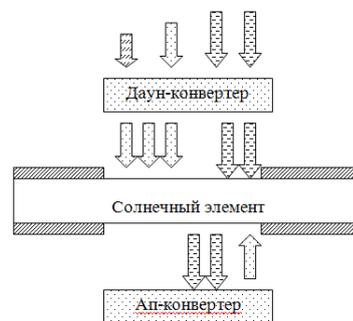
При исследовании образцов на фоточувствительность использовался метод LBIC (Light Beam Induced Current) – сканирующая лазерная микроскопия. Данный метод включает пошаговое сканирование поверхности опытных образцов фотоприемников по координатам X и Y с использованием в качестве источника излучения полупроводникового лазера, а в качестве измерителя фотоотклика и, соответственно, распределенной чувствительности в виде множества значений токов $X \cdot Y$ – цифрового мультиметра.

2 Результаты и их обсуждение

Спектры ФЛ плёнок ZnO, легированных Er³⁺, отожженных на воздухе при разных температурах, приведены на рисунке 2.1 а). Для всех плёнок ZnO, легированных Er³⁺ после термообработки в интервале 600–900 C, на спектрах ФЛ обнаружено желтое излучение. Замечено, что данное желтое свечение уменьшается с увеличением температуры отжига.



а)



б)

Рисунок 0.1 – Спектр солнечного света (а) и образцовая структура для преобразования спектра солнечного элемента (б)

Одной из причин этого, вероятно, является образование связей $\text{Er}-\text{V}_\text{O}$ в пленках $\text{ZnO}:\text{Er}$. Другая причина изменения интенсивности желтой полосы 1.94 эВ состоит в локализации примесных состояний Er при $\text{Er}-\text{O}_\text{i}$. Хорошо известно, что ионы Er^{3+} дают видимую люминесценцию в спектральной области 500–600 нм (2.07–2.48 эВ). Поскольку интенсивность излучения, обусловленного собственными точечными дефектами такими, как O_i и V_O , в ZnO достаточно велика, то обнаружить узкие линии, связанные с Er в зеленой области спектра, не удалось. Однако, из рисунка 2.1 а) отчетливо видно, что пленки $\text{ZnO}:\text{Er}$ обладают люминесценцией в области 1.54 мкм. Этот результат однозначно подтверждает то, что ионы Er^{3+} были внедрены в решетку ZnO в процессе магнетронного распыления.

На рисунке 2.1 б) показаны спектры ФЛ пленок ZnO , легированных тербием при напылении на подложки Si и отожженных при 900 °С и 1000 °С. Как видно, для образцов характерно наличие трех хорошо разрешаемых полос 1.93, 2.27 и 2.56 эВ с доминирующей полосой 2.27 эВ (зеленая люминесценция). Эти полосы могут быть отнесены к оптическим переходам $^5\text{D}_4 \rightarrow ^7\text{F}_j$

($j = 3, 5, 6$) ионов Tb^{3+} в матрице ZnO . В этом случае, в отличие от пленок $\text{ZnO}:\text{Er}$, не наблюдалось эффекта исчезновения полос и перераспределения их относительной интенсивности из-за перестройки дефектов структуры, а был достигнут реальный эффект легирования пленок ZnO ионами РЗМ.

Наличие неоднородностей параметров материала (концентрации носителей, плотности дефектов и т. п.) приводит к разбросу электрических и оптических характеристик элементов. LBIC регистрирует неоднородности, обусловленные структурными дефектами фоточувствительных слоев исследуемой структуры. Данные LBIC (рисунок 2.2) показали, что практически вся поверхность исследуемых структур, за исключением областей, где нанесены контактные площадки, фоточувствительна. Разные значения фототока в зависимости от пространственного положения лазерного луча могут объясняться присутствием в образцах макроскопических потенциальных барьеров, связанных с микроструктурной [7] и различными неоднородностями пленки.

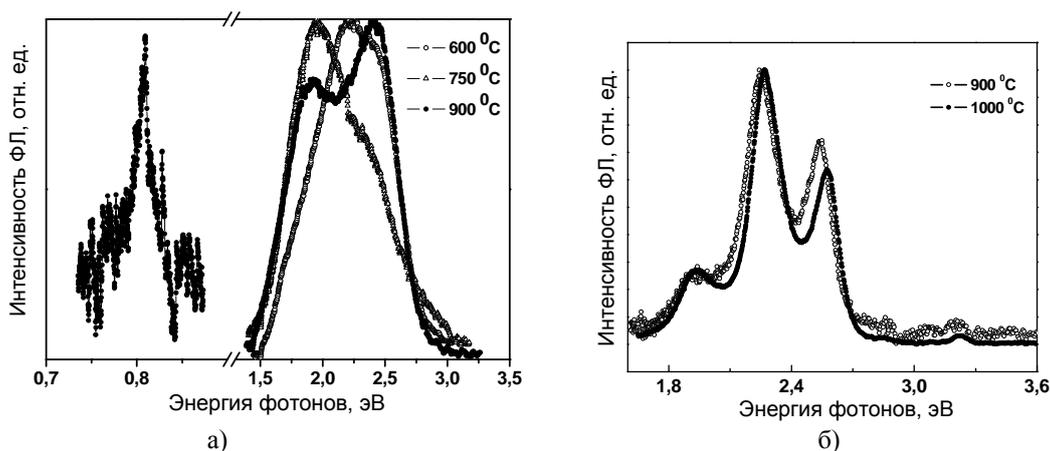


Рисунок 2.1 – Спектры ФЛ пленок $\text{ZnO}:\text{Er}/\text{Si}$ (а) и пленок $\text{ZnO}:\text{Tb}/\text{Si}$ (б) для различных температур отжига

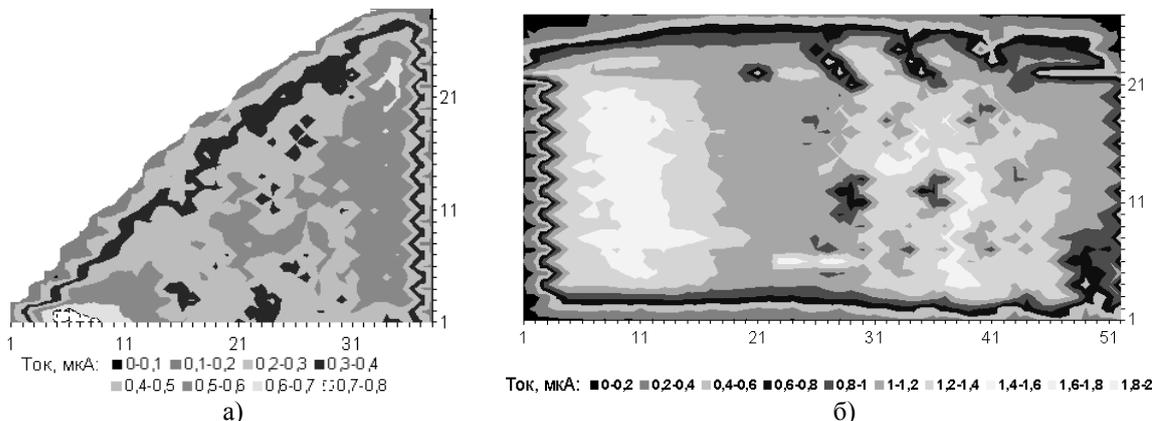


Рисунок 2.2 – Распределение чувствительности по площади (LBIC) для структур $\text{ZnO}:\text{Er}/\text{Si}$ (а) и $\text{ZnO}:\text{Tb}/\text{Si}$ (б)

На рисунке 2.3 представлен спектр фото-ЭДС структур ZnO:RE/Si. Максимальное значение фото-ЭДС приходится на длину волны 800 нм и 750 нм для структур Al-Ni/ZnO:Er/Si и Al-Ni/ZnO:Tb/Si, соответственно. Это свидетельствует о том, что основной вклад в возникновение фото-ЭДС вносят носители заряда в результате примесного поглощения. В диапазоне длин волн от 400 нм до 600 нм появляется хвост, связанный с вкладом в фотопроводимость окиси цинка.

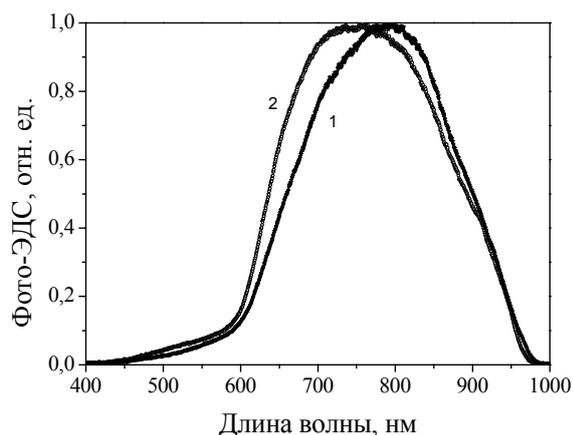


Рисунок 2.3 – Спектральное распределение фото-ЭДС для структур Al-Ni/ZnO:Er/Si (1) и Al-Ni/ZnO:Tb/Si (2)

Выводы

Таким образом, в ходе исследования было обнаружено, что структуры ZnO:RE/Si являются чувствительными к излучению широкого спектрального диапазона. Эксперименты по обнаружению высокоинтенсивной видимой люминесценции и фото-ЭДС, обусловленной примесными ионами РЗМ в пленках ZnO, указывают на возможность создания высокоэффективных

люминесцирующих покрытий для использования их в качестве даунконвертеров как в солнечных элементах на основе кремния, так и для соответствующего совершенствования технологии изготовления солнечных элементов на основе халькопиритных полупроводников CIGS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Green, M. Third Generation Photovoltaics / M. Green. – Springer. – 2003.
2. Trupke, T. Improving Solar Cell Efficiencies by Up-Conversion of Sub – Band – Gap Light / T. Trupke, M. Green, P.P. Würfel // J. Appl. Phys. – 2002. – Vol. 92, № 7. – P. 4117–4122.
3. Trupke, T. Improving solar cell efficiency by down – conversion of high-energy photons / T. Trupke, M. Green, P.P. Würfel // J. Appl. Phys. – 2002. – Vol. 92. – P. 1668–1679.
4. Nanocrystalline Luminescence Solar Converters / B. Jones [et. al.] // Photovoltaic Material. – 2004. – Vol. 3. – P. 65–72.
5. Chen, J. Upconversion Nanomaterials: Synthesis, Mechanism, and Applications in Sensing // J. Chen, J.X. Zhao // Sensors. – 2012. – Vol. 12. – P. 2414–2435
7. Холодков, А.В. Особенности люминесценции Er^{3+} в легированном галогенами аморфном диоксиде кремния / А.В. Холодков, К.М. Голант, Л.Д. Исакова // Труды института общей физики им. А.М. Прохорова. – 2008. – Т. 64. – С. 66–80.
8. Малютина-Бронская, В.В. Электрические свойства пленок оксида цинка легированных редкоземельными элементами / В.В. Малютина-Бронская, В.Б. Залесский, Т.Р. Леонова // Доклады БГУИР. – 2011. – № 6. – С. 39–43.

Поступила в редакцию 05.07.12.

УДК 534.511.1

ДВУХКАНАЛЬНЫЙ ВИБРОУСТОЙЧИВЫЙ ИНТЕРФЕРОМЕТР С СОВМЕЩЕННЫМИ КАНАЛАМИ ЗОНДИРОВАНИЯ

**В.А. Пилипович, В.Б. Залесский, А.И. Конойко,
Н.А. Малевич, А.М. Поликанин, Р.Г. Седнев**

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

TWO CHANNEL VIBRATION RESISTANT INTERFEROMETER WITH SUPERPOSED PROBING CHANNELS

**V.A. Pilipovich, V.B. Zalesski, A.I. Konojko,
N.A. Malevich, A.M. Polikanin, R.G. Sednev**

B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk

В работе предлагается метод трансляции световых потоков на базе двулучепреломляющих элементов и поляризационных преобразований, который позволяет, во-первых, исключить влияние дестабилизирующих воздействий за счет того, что в предлагаемом интерферометре световые пучки проходят через одни и те же оптические элементы, во-вторых, совместить два канала зондирования.

Ключевые слова: интерференция, поляризация, двулучепреломляющие элементы, разность фаз, вращатель поляризации, анизотропия.

The method of transmission of light fluxes based on the birefringent elements and the polarization transformations is considered. The method allows to exclude the effect of destabilizing influence, since, light beams of the interferometer pass through the same optical elements. This method allows to combine two probing channels.

Keywords: interference, polarization, birefringent element, phase difference, the rotational polarization, anisotropy.

Введение

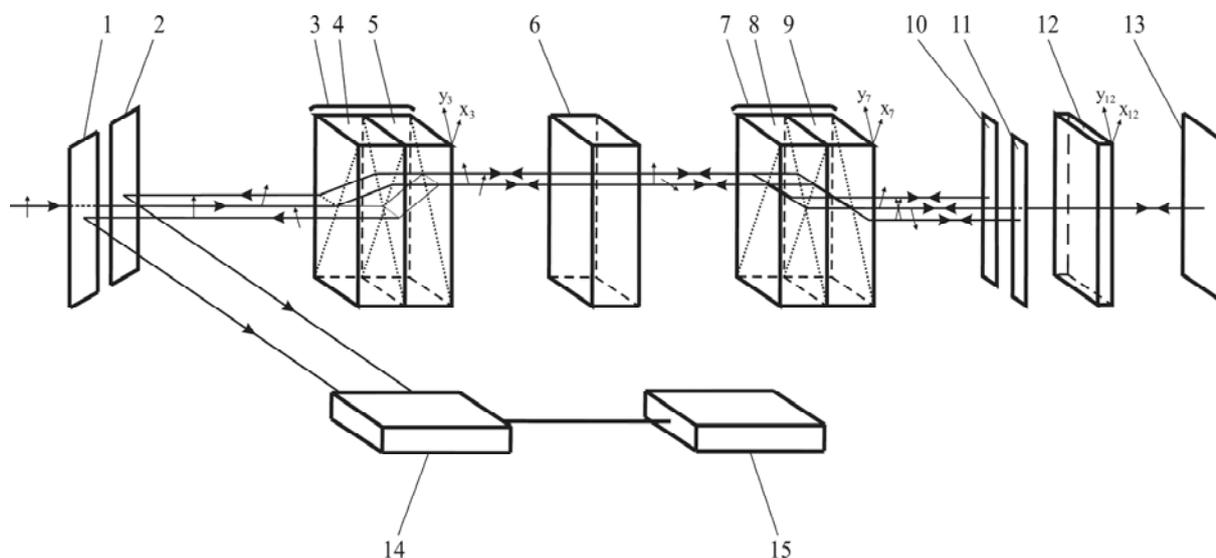
Развитие наноиндустрии невозможно без точных и надёжных диагностических инструментов. Сканирующая зондовая микроскопия является одной из немногих методик, позволяющих исследовать наноразмерные структуры и визуализировать поверхность материалов с атомарным разрешением. Причем, в отличие от электронных, они не требуют вакуумирования для осуществления измерений [1]. Целесообразность использования интерферометрических методов обусловлена высокой чувствительностью и точностью. Для достижения максимальной точности интерферометрических измерений необходима минимизация воздействия внешних факторов таких, как вибрации, флуктуации температуры и т. п. Виброустойчивые интерферометрические системы, образованные линзовой оптикой, обладают весьма небольшим диапазоном измерения линейных перемещений. Кроме того, для высокоточных измерений в широком линейном диапазоне требуется исключение неоднозначности интерференционных измерений, возникающей вследствие функциональной зависимости интенсивности излучения от величины относительного смещения интерферирующих пучков, которая является периодической гармонической функцией. Поэтому задача синтеза новых методов трансляции световых пучков в интерферометрических системах с целью решения вышеперечисленных проблем является актуальной.

1 Функциональная схема двухканального виброустойчивого интерферометра с совмещенными каналами зондирования

Функциональная схема двухканального виброустойчивого интерферометра с совмещенными каналами зондирования представлена на рисунке 1.1. Устройство содержит первый (1) и второй (2) отражатели, оптически связанные с первым светоделителем, состоящим из первой и второй плоскопараллельных кристаллических призм, развернутых друг относительно друга на угол 90° .

Первый светоделиТЕЛЬ оптически связан через вращатель поляризации со вторым светоделителем, состоящим из третьей и четвертой плоскопараллельных кристаллических призм, развернутых друг относительно друга на угол 90° , и одинаково ориентированным с первым светоделителем.

Второй светоделиТЕЛЬ оптически связан, во-первых, напрямую с третьим и четвертым отражателями, а во-вторых, через фазовый элемент $\lambda/8$ – с пятым отражателем. Причем, оси анизотропии фазового элемента $\lambda/8$ параллельны плоскостям, в которых лежат оптические оси кристаллических призм второго светоделителя. Двухканальный фотоприемник оптически связан с первым и вторым отражателями, а электрически – с измерительным устройством.



1, 2, 10, 11, 13 – первый, второй, третий, четвертый и пятый отражатели;
 3, 7 – первый и второй светоделители; 4, 5, 8, 9 – первая, вторая, третья и четвертая плоскопараллельные кристаллические призмы, оптическая ось которых ориентирована под углом к входной и выходной грани; 6 – вращатель поляризации; 12 – фазовый элемент $\lambda/8$;
 14 – двухканальный фотоприемник; 15 – измерительное устройство.

Рисунок 1.1 – Функциональная схема двухканального виброустойчивого интерферометра с совмещенными каналами зондирования

2 Метод трансляции световых потоков на базе двулучепреломляющих элементов и поляризационных преобразований для двухканальной виброустойчивой интерферометрии

Виброустойчивый двухканальный интерферометр с совмещенными каналами работает следующим образом. В исходном состоянии плоскополяризованный световой пучок проходит между первым и вторым отражателями и поступает на вход первого светоделителя, состоящего из первой и второй плоскопараллельных кристаллических призм. Так как плоскости, в которых лежат оптические оси первой и второй плоскопараллельных кристаллических призм, ортогональны друг другу и ориентированы под углом 45° к плоскости поляризации входного светового пучка, то при ее прохождении падающий световой пучок делится на два ортогонально поляризованных равных по амплитуде световых пучка. Эти световые пучки проходят в первом светоделителе одинаковые оптические пути, так как в первой плоскопараллельной кристаллической призме один является обыкновенным, другой – необыкновенным, а во второй плоскопараллельной кристаллической призме, наоборот, первый является необыкновенным, а второй – обыкновенным. Поэтому на выходе первого светоделителя мы имеем две когерентные ортогонально поляризованные световые волны, амплитуды которых можно определить из следующего выражения:

$$\begin{cases} E_{x_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{y_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)], \end{cases} \quad (2.1)$$

где E_0 – амплитуда входной световой волны; ν – частота световой волны; t – время существования световой волны; ϕ – фаза световой волны.

Далее при прохождении вращателя поляризации эти ортогонально поляризованные световые волны испытывают поворот плоскости поляризации на угол 45° , например, по часовой стрелке. После чего они поступают на вход второго светоделителя, состоящего из третьей и четвертой плоскопараллельных кристаллических призм. Так как плоскости, в которых лежат оптические оси третьей и четвертой плоскопараллельных кристаллических призм, ортогональны друг другу и ориентированы под углом 45° к плоскостям поляризации поступающих световых пучков, то при прохождении падающие световые пучки делятся на четыре попарно ортогонально поляризованных равных по амплитуде световых пучка. Эти световые пучки проходят во втором светоделителе одинаковые оптические пути, так как в третьей плоскопараллельной кристаллической призме два являются обыкновенными, другие два – необыкновенными, а в четвертой плоскопараллельной кристаллической призме, наоборот, первые являются необыкновенными, а вторые

– обыкновенными. Поэтому на выходе второго светоделителя имеют место две пары когерентных ортогонально поляризованных световых волн (E_{x7I} , E_{y7I} , E_{x7II} , E_{y7II}), амплитуды которых можно определить из следующего выражения:

$$\begin{cases} E_{x7I} = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{y7I} = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{x7II} = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{y7II} = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Причем, канал y -волны первой (левой) пары E_{y7I} будет совмещен с каналом x -волны второй (правой) пары E_{x7II} . Далее x -волна первой (левой) пары E_{x7I} поступает на третий отражатель, а y -волна второй (правой) пары E_{y7II} – на четвертый отражатель. В то время как совмещенные волны, испытав на фазовом элементе $\lambda/8$ соответствующий фазовый сдвиг относительно друг друга, поступают на пятый отражатель, где после отражения идут в обратном направлении. На фазовом элементе $\lambda/8$ они приобретают дополнительную разность фаз $\pi/4$, что в сумме с разностью фаз, наведенной в прямом ходе, составит $\pi/2$, то есть наведенная оптическая разность хода между этими ортогонально поляризованными волнами в прямом и обратном ходе составит $\lambda/4$. Поэтому на второй светоделитель в обратном ходе поступают две пары когерентных ортогонально поляризованных световых волн (E_{x7I}^* , E_{y7I}^* , E_{x7II}^* , E_{y7II}^*), амплитуды которых можно определить из следующего выражения:

$$\begin{cases} E_{x7I}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{y7I}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(\phi_{12} + \Delta\phi_{12} + \Delta\phi_{13})] \times \\ \quad \times \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{x7II}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(\phi_{12} + \Delta\phi_{13})] \times \\ \quad \times \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{y7II}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)], \end{cases} \quad (2.3)$$

где ϕ_{12} – фазовый сдвиг, вносимый в прямом и обратном ходе фазовым элементом $\lambda/8$ в световую волну, плоскость поляризации которой параллельна оси x_{12} ; $\phi_{12} + \Delta\phi_{12}$ – фазовый сдвиг, вносимый в прямом и обратном ходе фазовым элементом $\lambda/8$ в световую волну, плоскость поляризации которой параллельна оси y_{12} ; $\Delta\phi_{12} = \pi/2$; – разность фаз, приобретенная ортогонально поляризованными световыми волнами в прямом и обратном ходе при прохождении через фазовый элемент $\lambda/8$; $\Delta\phi_{13}$ – сдвиг фазы ортогонально поляризованных волн вследствие прохождения в прямом и обратном

ходе зазора между фазовым элементом $\lambda/8$ и пятым отражателем. Подставляя в выражение (2.3) значение разности фаз, приобретенной ортогонально поляризованными световыми волнами в прямом и обратном ходе при прохождении через фазовый элемент $\lambda/8$, получим:

$$\begin{cases} E_{x7I}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{y7I}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp\left[i\left(\phi_{12} + \Delta\phi_{13} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \times \\ \quad \times \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{x7II}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(\phi_{12} + \Delta\phi_{13})] \times \\ \quad \times \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]; \\ E_{y7II}^* = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Волны каждой пары, пройдя второй светоделитель в обратном направлении, совмещаются и интерферируют между собой. Результат их интерференции выражается в изменении их суммарной поляризации в каждой паре. Выражения для нахождения величин векторов напряженности электрического поля световых волн, идущих в обратном ходе после второго светоделителя E_{I0} , E_{II0} , параллельных $E_{I\perp}$, $E_{II\perp}$ и перпендикулярных плоскостям поляризации световых пучков, падающих на светоделитель в прямом ходе, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} E_{I0} = \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{x7I}^* + E_{y7I}^*) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)] \times \\ \quad \times \left\{ 1 + \exp\left[i\left(\phi_{12} + \Delta\phi_{13} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \right\}; \\ E_{I\perp} = \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{x7I}^* - E_{y7I}^*) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)] \times \\ \quad \times \left\{ 1 - \exp\left[i\left(\phi_{12} + \Delta\phi_{13} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \right\}; \\ E_{II0} = \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{x7II}^* + E_{y7II}^*) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)] \times \\ \quad \times \left\{ 1 + \exp[i(\phi_{12} + \Delta\phi_{13})] \right\}; \\ E_{II\perp} = \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{x7II}^* - E_{y7II}^*) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 \exp[i(2\pi\nu t + \phi)] \times \\ \quad \times \left\{ 1 - \exp[i(\phi_{12} + \Delta\phi_{13})] \right\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Далее при прохождении вращателя поляризации эти ортогонально поляризованные световые волны испытывают поворот плоскости поляризации на угол -45° против часовой стрелки. После чего они поступают на светоделитель, который направляет световые потоки, соответствующие $E_{I\perp}$, $E_{II\perp}$, на первый и второй отражатели соответственно. Выражения для нахождения величины интенсивностей этих пучков имеют следующий вид:

$$\begin{cases} I_{I\perp} = \frac{1}{4} I_0 \left[1 - \cos \left(\phi_{12} + \Delta\phi_{13} + \frac{\pi}{2} \right) \right]; \\ I_{II\perp} = \frac{1}{4} I_0 \left[1 - \cos \left(\phi_{12} + \Delta\phi_{13} \right) \right], \end{cases} \quad (2.5)$$

где I_0 – интенсивность излучения входного светового пучка.

Далее излучение поступает на двухканальный фотоприемник, который преобразует световые сигналы в электрические. В измерительном устройстве, электрические сигналы поступают на входы двухканального высокоскоростного аналого-цифрового преобразователя, где осуществляется их оцифровка. При дальнейшей обработке сигналов осуществляется вычисление значения величины смещения пятого отражателя относительно третьего и четвертого отражателей для каждого цифрового отсчета в отдельности. Высокая точность измерений достигается тем, что в любой момент времени они ведутся на практически линейном участке зависимости интенсивности излучения от оптической разности хода интерферирующих между собой световых пучков. Вследствие того, что в предлагаемом интерферометре световые пучки проходят через одни и те же оптические элементы, разность их оптических путей остается постоянной независимо от возникающих смещений элементов. Таким образом, приведенная схема трансляции световых потоков позволяет исключить влияние дестабилизирующих воздействий (например, механических вибраций). При смещении пятого отражателя происходит изменение начального сдвига фазы ортогонально поляризованных волн $\delta\phi_3$ вследствие прохождения в прямом и обратном ходе зазора между фазовым элементом $\lambda/8$ и пятым отражателем, что вызовет на выходе, согласно выражениям (2.6), изменение интенсивности выходного излучения. Далее излучение поступает на двухканальный фотоприемник, который преобразует световые сигналы в электрические. В измерительном устройстве электрические сигналы поступают на входы двухканального высокоскоростного аналого-цифрового преобразователя, где осуществляется их оцифровка. При дальнейшей обработке сигналов осуществляется вычисление величины изменения смещения пятого отражателя относительно третьего и четвертого отражателей для каждого цифрового отсчета в отдельности. Однозначность и высокая точность

измерения величины смещения пятого отражателя относительно третьего и четвертого отражателей достигается благодаря тому, что каждый раз в одном из двух каналов измерения производится в области практически линейного участка функциональной зависимости интенсивности излучения от величины относительного смещения пятого отражателя. В другом же канале в этот момент времени измерения производится в области экстремума. В зависимости от «верхнего» или «нижнего» уровня экстремума на программном уровне определяется, на каком из «склонов» функциональной зависимости другого канала производятся измерения. В свою очередь, это позволяет исключить неоднозначность измерений, так как функциональная зависимость интенсивности излучения от величины относительного смещения третьего, четвертого и пятого отражателей является периодической гармонической функцией.

Был изготовлен экспериментальный образец двухканального виброустойчивого интерферометра с совмещенными каналами зондирования, работающего с излучением видимого диапазона (длина волны $\lambda = 0,632$ мкм). Его общий вид представлен на рисунке 2.1 а. Для изменения оптической длины совмещенных каналов использовался пьезоэлектрический преобразователь, смещающий под воздействием синусоидального электрического сигнала пятый отражатель в линейном диапазоне, равном порядку длины волны света, о чем свидетельствуют осциллограммы световых сигналов в каналах измерения.

Расчеты показывают, что экспериментальный образец двухканального виброустойчивого интерферометра с совмещенными каналами зондирования позволяет получать точность измерения линейных перемещений порядка $0,1\lambda$ (λ – длина волны света) в широком диапазоне линейных перемещений, определяемом длиной когерентности используемого источника излучения.

Заключение

Предлагается метод трансляции световых потоков на базе двулучепреломляющих элементов и поляризационных преобразований, который позволяет, во-первых, исключить влияние дестабилизирующих воздействий за счет того, что в предлагаемом интерферометре световые пучки проходят через одни и те же оптические элементы, во-вторых, совместить два канала зондирования. Причем, оптическая разность хода между каналами зондирования составляет величину $\lambda/4$, что позволяет, с одной стороны, вести измерения в любой момент времени на практически линейном участке зависимости интенсивности излучения от оптической разности хода интерферирующих между собой световых пучков, с другой – исключить неоднозначность интерференционных измерений.

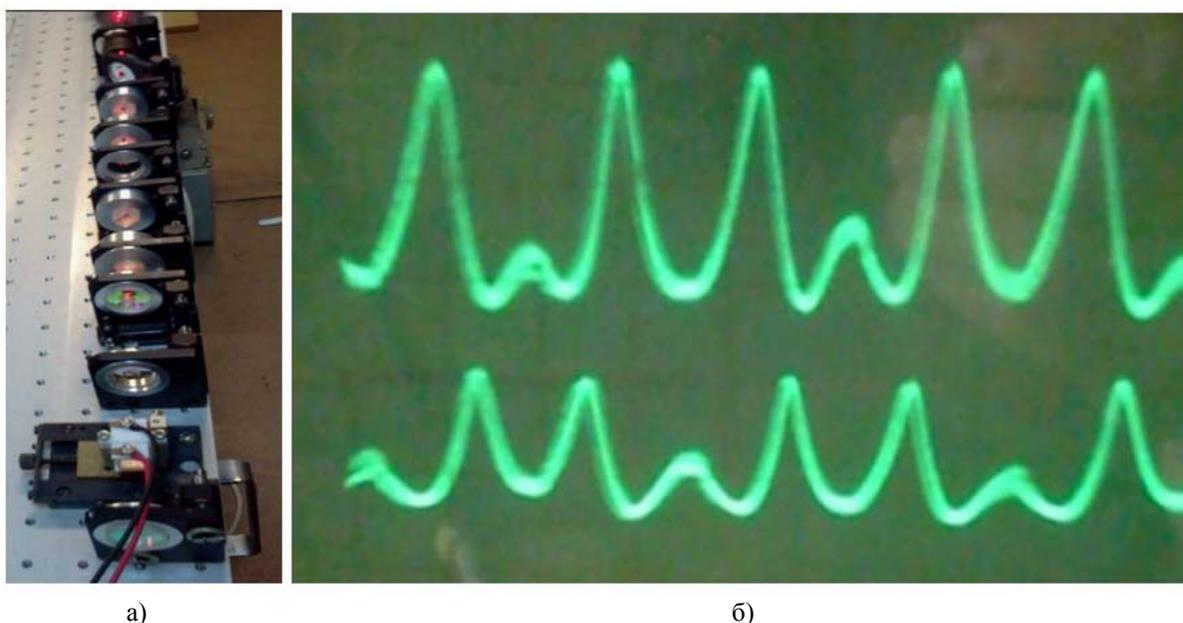


Рисунок 2.1 – а) общий вид экспериментального образца двухканального виброустойчивого интерферометра с совмещенными каналами зондирования; б) осциллограммы световых сигналов в каналах измерения

Научная новизна полученных результатов заключается в разработке метода трансляции световых потоков на базе двулучепреломляющих элементов и поляризационных преобразований для двухканальной виброустойчивой интерферометрии, отличительной особенностью которого является высокая стабильность характеристик. Кроме того, он, в отличие от известных методов, позволяет минимизировать внешние факторы на процесс измерения и получить точность измерения линейных перемещений порядка $0,1\lambda$ (λ – длина волны света) в широком диапазоне линейных перемещений, определяемом длиной когерентности используемого источника излучения.

Практическая новизна полученных результатов заключается в том, что на основе предложенного метода могут быть созданы виброустойчивые интерферометры, обладающие более высокой точностью измерения линейных перемещений, чем существующие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Binnig, G. Atomic Force Microscope / G. Binnig, C.F. Quate, Ch. Gerber // Physical Review Letters. – 1986. – Vol. 56. – P. 930–936.

Поступила в редакцию 18.06.12.

УДК 620.17.660.8/09

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ УПРОЧНЕНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ МЕТАЛЛА ПРИ ФРИКЦИОННОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Г. Пинчук¹, С.В. Короткевич², С.О. Бобович², В.Н. Морозов¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²РУП «Гомельэнерго», Гомель

INVESTIGATION OF THE KINETICS OF HARDENING AND DESTRUCTION OF THE SURFACE LAYER OF NICKEL AT FRICTION LOADING

V.G. Pinchuk¹, S.V. Korotkevich², S.O. Bobovich², V.N. Morozov¹

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Republican Unitary Enterprise of Power Industry, Gomel

Методом ферромагнитного резонанса (ФМР), электронной микроскопии и рентгеноструктурного анализа исследована кинетика упрочнения поверхностного слоя никеля при трении. Установлен циклический характер изменения плотности дислокаций со временем испытания. Определены характерные этапы упрочнения при трении. Изучены процессы, обуславливающие цикличность прочностных свойств материала поверхностного слоя. Определены основные механизмы упрочнения и разрушения. Исследована взаимосвязь кинетики прочностных характеристик и изнашивания металла при трении. Установлен циклический лепестково-послойный характер изнашивания.

Ключевые слова: действующие зоны скольжения, деформация сдвига, ячеистая структура, зонное расслоение, транскристаллитное и интеркристаллитное разрушение.

The authors investigated the kinetics of hardening of the surface layer of nickel at friction by the method of ferromagnetic resonance (FMR), electron microscopy and X-ray analysis. The cyclical changes in the dislocation density with time trials were determined. The characteristic stages of hardening at friction were defined. The processes that cause cycling of the material strength properties of the surface layer were studied. The basic mechanisms of hardening and destruction were determined. The interrelation of the kinetics of the strength characteristics and wear of metal at friction were investigated. The radar-cyclical nature of the wear layer by layer was determined.

Keywords: effective slipping zones (areas), shear deformation, cellular structure, zone stratification, transcrystalline and intercrystalline destruction.

Введение

Основным направлением исследований современной трибологии является увеличение износостойкости конструкционных материалов. Осуществление проблемы износостойкости тесно связано с исследованием процессов упрочнения и разрушения поверхностных слоёв металлов при фрикционном взаимодействии их поверхностей. Эта проблема может быть решена на основе изучения закономерностей изменения структур поверхностного слоя. В этом плане первостепенное значение приобретают последовательные исследования кинетики дислокационной структуры при фрикционном нагружении. Проблематичным является вопрос кинетики изнашивания и её взаимосвязи с процессами пластической деформации поверхностного слоя. Установление закономерностей взаимовлияния этих процессов может определить пути управления износостойкостью материалов.

Решение проблемы разрушения материалов фрикционного контакта сдерживается отсутствием информации о процессах образования микротрещин и других разрушений сплошности материала. В связи с этим, большое значение имеют

прямые экспериментальные исследования микроструктуры на различных этапах фрикционного нагружения и её анализ в соответствии с кинетическими закономерностями прочностных и фрикционных характеристик.

1 Материалы и методика эксперимента

Методическое и техническое обеспечение исследований предусматривало использование комплекса методов: ферромагнитного резонанса (ФМР), просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ), рентгеноструктурного анализа и микродифракции. Применение ФМР для исследования дислокационной структуры в настоящее время общепринято. Согласно теоретическим и экспериментальным разработкам [1]–[4], ширина линии ФМР (ΔH) пропорциональна плотности дислокаций (ρ). Применение ФМР для исследования дислокационной структуры ферромагнетиков обусловлено его прецизионностью и высокой чувствительностью. Разработанная установка ФМР базировалась на созданном радиоспектрометре СВЧ ($\nu = 9400$ МГц) [4]. В отличие от обычных мостовых схем, использующих двойной тройник, в конструкции созданного

радиоспектрометра применён ферритовый циркулятор типа ВВЦ-100, обеспечивающий максимальную развязку между измерительными плечами и высокую чувствительность измерительной схемы. Линия резонансного поглощения энергии СВЧ поля регистрировалась синхронно с изменением внешнего магнитного поля. Применение объёмного резонатора на «отражение» позволило достигнуть высокой селективности и чувствительности регистрации спектров ФМР. Фрикционные испытания, препарирование образцов в виде тонких фольг никеля и электронномикроскопические исследования аналогичны описанным в работе [5].

Исследование прочностных характеристик при «мягком» режиме фрикционного нагружения ($P = 84$ кПа, $v = 0,4$ м/с) осуществлялось по точкам с интервалом 0,9 кс.

2 Результаты исследования и их обсуждение

Развитие микроструктуры при фрикционном взаимодействии поверхностей контактируемых тел рассматривалось и обсуждалось в соответствии с осцилляционным характером её кинетики [6], [7]. Этот методологический аспект исследования обусловлен тем, что каждый цикл изменения прочностных характеристик является результатом комплекса структурных превращений, связанных с накоплением поверхностным слоем скрытой энергии деформации определённой величины, достаточной для реализации критического упругонапряжённого состояния кристаллической решётки, обуславливающего потерю её устойчивости и последующее разрушение. Данные положения объясняют послойное изнашивание материала при фрикционном нагружении. Эта характерная закономерность изменения прочностных свойств при трении требует экспериментальной осторожности и корректности в выборе временного масштаба испытания образцов, исследования их структуры, её анализа и реализации выводов. При неправильном выборе временного масштаба исследования можно получить набор случайных результатов изменения микроструктуры, соответствующих аналогичным моментам её осцилляционной зависимости.

Согласно [8] длительность цикла прочностных характеристик в сильной мере зависит от режима трения. Например, увеличение нагрузки в два раза приводит к соответствующему уменьшению длительности циклов кинетики структурных изменений в приповерхностных слоях. Таким образом, каждому режиму трения соответствует свой временной масштаб исследования прочностных характеристик.

Комплексное изучение физических закономерностей эволюции дислокационной структуры поверхностного слоя металла при трении скольжения, его кинетика упрочнения и изнашивания установили циклический характер изменения

прочностных характеристик, что выразилось: 1) в циклическом характере кинетических зависимостей плотности дислокаций поверхностных слоёв (рисунок 2.1), проявляющемся для различных металлов (Ni, α -Fe, Cu) и режимов фрикционного нагружения, а также в качественном подтверждении этих зависимостей прямыми и косвенными методами исследования [6]–[8]; 2) в циклическом изменении текстуры, изученной с помощью электронографии [9]; 3) в периодическом изменении картины дислокационных конфигураций, выявленном при анализе электронномикроскопических снимков микроструктурных превращений поверхностного слоя при трении [7]; 4) в периодическом изменении интенсивности изнашивания со временем нагружения поверхностей трения [6].

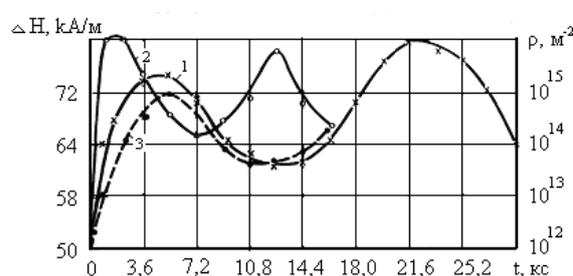


Рисунок 2.1 – Зависимость ширины линии ФМР (ΔH) и плотности дислокаций (ρ) в никеле от времени испытания при трении: 1 – нагрузка 84 кПа; 2 – 168 кПа; 3 – изменение ρ при нагрузке 84 кПа

Исследования ФМР, электронной микроскопии и рентгено-структурного анализа установили, что периодичность структурных изменений в поверхностных слоях при трении связана с развитием пластических и пластически-деструкционных стадий деформирования, протекающих сначала с упрочнением и последующим максимальным диспергированием материала, а затем – с его разрушением и изнашиванием. Электронографические исследования отмечают периодичность в развитии деформационной текстуры, совпадающей с периодичностью прочностных свойств.

Количественные оценки плотности дислокаций прямыми и косвенными методами показали, что среднее значение ρ , соответствующее максимумам и минимумам осцилляций $\Delta H = f(t)$, отличается на три-четыре порядка. Согласно данным работы [7] и экспериментальным результатам последних наших исследований, плотность дислокаций исходного образца ($\rho = 5 \cdot 10^{12}$ м⁻²) увеличилась на три порядка ($\rho = 10^{15}$ м⁻²) после испытания образцов в течение 5,4 кс (рисунок 2.1). Для микроструктуры характерно сильное измельчение зерна из 20 мкм до 0,1–0,2 мкм и появление высокодисперсной поликристаллической фазы размером 5–10 нм. Эта мелкодисперсная

микроструктура состоит из дислокационных кластеров, квазиравномерно распределённых по объёму поверхностного слоя (рисунок 2.2). Согласно современным представлениям она определяет высокие физико-механические свойства материала поверхностного слоя, что выражается в пластичности при сохранении высокой прочности за счёт зернограничного проскальзывания мелких блоков, в возрастании предела макроскопической упругости, в понижении вероятности зарождения и роста усталостных зернограничных и внутризёрнных микротрещин, ввиду исключения локальных очагов разрушения, из-за равномерного распределения микронапряжений по объёму поверхностного слоя. Однако проявляются и негативные качества этой микроструктуры. Микродифракция (рисунок 2.2, вставка) отмечает высокую разориентацию границ субзёрен, сравнимую с зернограничным рассогласованием $\approx 10^\circ$ и выше. Эта высокоугловая разориентация обуславливает барьерную роль границ при движении дислокаций, способствуя образованию плоских скоплений и полос скольжения и формированию из них микротрещин при заторможенном сдвиге [10]. Этот механизм зернограничного разрушения заключается в накоплении дислокаций высокоугловыми границами при пересечении их полосами скольжения и раскрытии зародышевых микротрещин с последующим их объединением в местах дислокационных скоплений.

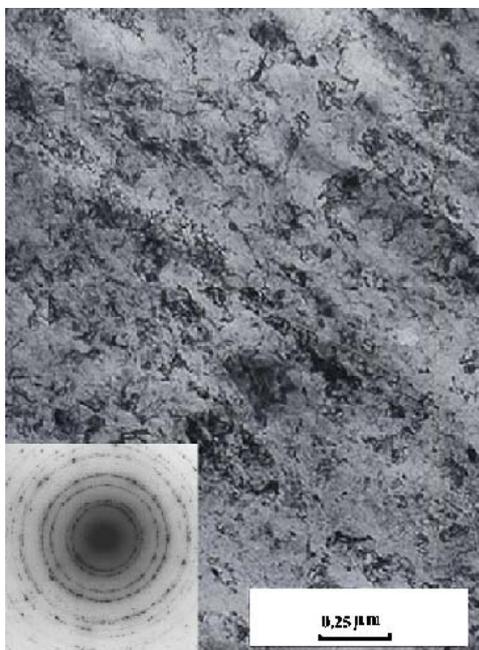


Рисунок 2.2 – Микроструктура субмикронанокристаллических размеров. Микродифракция микроструктуры

На последующей стадии фрикционного нагружения, соответствующей интервалу времени $t = 5,4\text{--}10,8$ кс, наблюдается релаксация упругой

энергии деформации до минимального значения (ΔH_{\min}). Этот спад скрытой энергии деформации составляет 52% первоначального уширения линии ФМР. Как показали электронномикроскопические исследования, дислокационная структура на этом участке осцилляционной кривой приближается к структуре недеформированного материала [7].

Дальнейшие исследования осцилляционной зависимости прочностных характеристик никеля со временем нагружения методом ФМР и электронной микроскопии, а также интенсивности изнашивания с помощью электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) и ядерного магнитного резонанса [11] показали, что периодически повторяющиеся выбросы интенсивности изнашивания совпадают по времени с участками минимума плотности дислокаций. Эти результаты, а также исследования дислокационной структуры просвечивающей электронной микроскопией дают основание утверждать о локализации во времени процесса образования продуктов изнашивания, обусловленной спецификой упруго-пластического деформирования поверхностных слоёв твёрдых тел при трении.

Заслуживает особого внимания кинетика трансформации сформированной при трении наноструктуры в другие дислокационные конфигурации и дальнейшее её разрушение. Анализ микроснимков, отражающих кинетику микроструктуры никеля, отмечает, что сформированная на начальных этапах фрикционного нагружения наноструктура претерпевает существенные изменения уже на стадии нагружения, составляющей 25% продолжительности периода разрушения поверхностного слоя ($t=3,6$ кс). Наблюдается склонность дислокационных скоплений к выстраиванию в одном направлении и появлению объёмных конфигураций в виде вытянутых жгутов, состоящих из дислокационных петель и диполей (рисунок 2.3). Отмечается возрастание количества этих образований субструктуры в объёме, являющихся началом формирования полос скольжения. В сформированных полосах скольжения появляются очень мелкие микротрещины с характерными размерами: 0,01 мкм по диаметру и 0,10 мкм по длине (рисунок 2.3, вставка). Природа этих микротрещин, по-видимому, связана с локальными вспышками температуры в местах фактического контакта, приводящих к объединению вакансий в микропоры, из которых зарождаются очаги разрушения.

Наличие устойчивых полос скольжения как зон локализованной деформации определяет дальнейшую кинетику упрочнения и разрушения поверхностного слоя металла при трении. Из анализа микроснимка (рисунок 2.4) видно, что имеет место преобразование этих полос в фрагменты своеобразной пластинчатой микроструктуры с резко очерченными границами. По интерференционным

изображениям этих граничных прослоек (рисунок 2.4, стрелки) их можно отождествить с дефектами упаковки кристаллической структуры, обуславливающими элементы нестыковки кристаллических плоскостей и большие напряжения. Согласно [12], процессы разрушения материала стимулируются образованием полос скольжения, ввиду концентрации в них больших упругих напряжений. Суперпозиция полей при взаимодействии линий скольжения в полосе приводит к усилению концентрации напряжений в 2,5–3 раза. Силовая картина упруго-напряжённого состояния поверхностного слоя при фрикционном нагружении становится более разнообразной. В этом случае возрастает возможность термоактивированного зарождения очагов разрушения в поле совместного действия растягивающих, сдвиговых и ротационных напряжений, создаваемых линиями скольжения в полосе, флуктуациями температуры и усталостными процессами. Локализация пластической деформации в граничных прослойках, обуславливает формирование расщелин вдоль границ полос скольжения по причине ослабления сил межатомной связи (рисунок 2.4, вставка, показана белой стрелкой).

Эти процессы усиливаются при повышении температуры. Полосы пластинчатой структуры появляются при достижении критического уровня внутренних искажений решётки на стадии фрикционного нагружения, составляющей 60–70% продолжительности периода разрушения поверхностного слоя (7,2 кс). Вероятно, наличие локализованного расслоения и усиление сдвига может вызвать образование магистральных микротрещин, объединяющихся посредством разрушения разделяющего их материала (рисунок 2.5). Этот процесс может стимулироваться присутствием микропор.

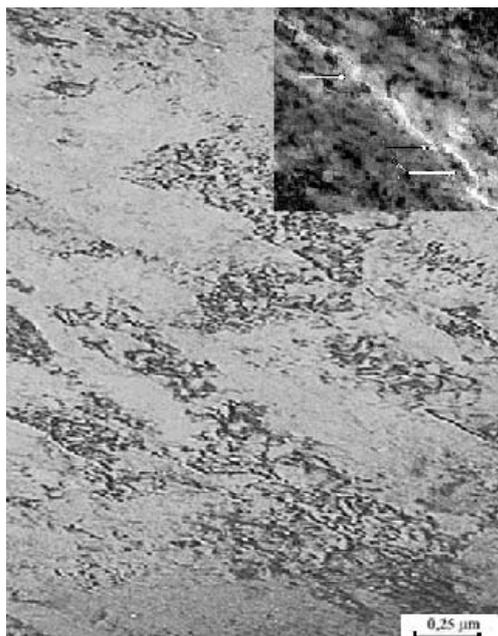


Рисунок 2.3 – Формирование полос скольжения

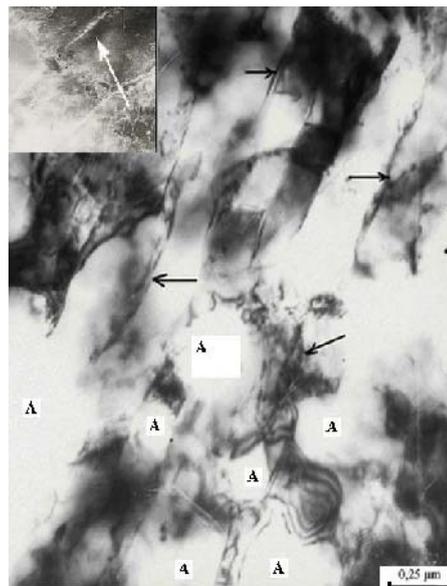


Рисунок 2.4 – Преобразование полос скольжения в пластинчатую микроструктуру. Дефекты упаковки (стрелки)



Рисунок 2.5 – Транскристаллитное разрушение поверхностного слоя никеля посредством слияния магистральных микротрещин по границам полос скольжения

Появление многочисленных микропор внутри и по границам блоков (рисунок 2.4, поз. А) связано с термическим циклированием в областях фрикционного контакта, диффузионной подвижностью вакансий и их коагуляцией. Под действием приложенных напряжений микропоры становятся концентраторами напряжений и могут обусловить транскристаллитное разрушение.

Заключение

Исследования кинетики дислокационной структуры и процессов разрушения поверхностного слоя металлов (никеля) при фрикционном нагружении установили осцилляционный характер

изменения прочностных характеристик. Каждому циклу изменения плотности дислокаций соответствует цикл послыстного микроразрушения. При этом нагружении происходит сильное измельчение зёрен до нанокристаллических размеров, квазиравномерно распределённых по объёму поверхностного слоя. С течением фрикционного нагружения эта микроструктура трансформируется, сначала – в текстурные элементы в форме тонких жгутов, затем – в полосы скольжения и своеобразную пластинчатую структуру. По границам этих полос образуются микротрещины, объединяющиеся в магистральные трещины, формируя фрагменты разрушения материала. Многочисленные микропоры внутри зёрен и по их границам а также коагуляция пор формируют очаги транскристаллитного и интеркристаллитного разрушения. Фрикционное нагружение приводит к прогрессирующему разрыхлению поверхностного слоя металла, связанному с возрастанием числа очагов разрушения. На стадии максимального диспергирования это разрыхление в сочетании с развитой хрупкостью обуславливает резкое возрастание отслаивающейся массы материала в виде целого слоя. Этот процесс приобретает лавинообразный характер и приводит к селективным выбросам продуктов разрушения из зоны фрикционного контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барьяхтар, В.Г. Влияние дислокаций на ширину линий однородного ферро-антиферромагнитного резонансов / В.Г. Барьяхтар, М.А. Савченко, В.В. Тарасенко // ЖЭТФ. – 1968 (54), вып. 5. – С. 1603–1612.
2. Булатов, А.С. Зависимость ширины линии ФМР от плотности дислокаций в никеле / А.С. Булатов, В.Г. Пинчук, М.Б. Лазарева // Физика металлов и металловедение. – 1972. – Т. 34, вып. 5. – С. 1066–1069.
3. Пинчук, В.Г. Применение магнитного резонанса для диагностики и прогнозирования технического состояния узлов трения / В.Г. Пинчук, В.Ф. Стельмах, В.П. Толстых // Применение магнитного резонанса в нар. хозяйстве: Тез. Докладов Всесоюзной конф. Казань. – 1988. – Т. 2. – С. 151.
4. Исследование дислокационной структуры ферромагнетиков методом ферромагнитного резонанса / В.Г. Пинчук [и др.] // Приборы, инструменты, материалы. – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 108–112.
5. Пинчук, В.Г. Микроструктурные механизмы разрушения металла при фрикционном нагружении / В.Г. Пинчук, С.В. Короткевич, С.О. Бобович // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1 (1). – С. 15–20.
6. Пинчук, В.Г. Взаимосвязь микроструктурных изменений с кинетикой износа поверхностного слоя металла при трении / В.Г. Пинчук, Е.Г. Шидловская // Трение и износ. – 1989. – Т. 10. – № 6. – С. 965–972.
7. Пинчук, В.Г. Особенности изменения дислокационной структуры никеля при трении / В.Г. Пинчук, Б.А. Савицкий, А.С. Булатов // Поверхность. Физика, химия, механика. – 1983. – № 9. – С. 72–75.
8. Пинчук, Р.Г. Взаимосвязь кинетики изнашивания со структурными изменениями на фрикционном контакте / Р.Г. Пинчук, В.Г. Пинчук, В.В. Харитонов // Трение и износ. – 1984. – Т. 5, № 4. – С. 670–676.
9. Дислокационная структура никеля при трении / В.Г. Пинчук [и др.] // Трение и износ. – 1981. – Т. 2, № 3. – С. 389–392.
10. Рыбин, В.В. Пересечение границ зёрен полосами скольжения как механизм вязкого зернограничного разрушения / В.В. Рыбин, В.А. Лихачёв, А.Н. Вергазов // Физика металлов и металловедение. – 1973. – Т. 36, вып. 5. – С. 1071–1078.
11. А.С. № 1000845 СССР. МКЛ ОI № 3/56. Способ определения износа материалов при трении со смазкой / Р.Г. Пинчук, В.Г. Пинчук, В.В. Харитонов, Е.М. Шишкин – 1982. – Бюл. № 8.
12. Пинчук, В.Г. Распределение напряжений в полосах скольжения и некоторые структурные предпосылки трещинообразования при трении / В.Г. Пинчук, Е.А. Дей // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 4, ч. 2. – С. 157–164.

Поступила в редакцию 19.06.12.

СОПРЯЖЕННЫЕ ВЕКТОР-МАТРИЦЫ
И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МАТРИЦЫ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

THE CONJUGATE VECTOR-MATRIX AND SPACEMATRIX

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье определяются и изучаются комплексно сопряженные и эрмитово сопряженные вектор-матрицы и пространственные матрицы.

Ключевые слова: матрица, вектор-матрица, пространственная матрица.

The conjugate vector-matrix and spacematrix are defined and studied in this paper.

Keywords: matrix, vector-matrix, spacematrix.

Введение

Многоместные операции на множествах упорядоченных наборов обычных матриц изучали Э. Пост [1] и А.К. Слипенко [2]. Упорядоченные наборы матриц, имеющие k компонент, в дальнейшем будем называть k -компонентными вектор-матрицами. В [3] для произвольных целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ из S_k на множестве всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом была определена частичная l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая является l -арным аналогом бинарной операции умножения обычных матриц. В [4] аналогичные l -арные операции были определены для пространственных матриц. В данной работе определяются и изучаются комплексно сопряженные и эрмитово сопряженные вектор-матрицы и пространственные матрицы.

1 Сопряженные вектор-матрицы

Сумма вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ и $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k)$ одинаковых размеров над кольцом P , а также произведение элемента $\lambda \in P$ на вектор-матрицу \mathbf{A} определяются покомпонентно:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, \dots, A_k + B_k),$$

$$\lambda \mathbf{A} = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_k).$$

Определение 1.1. Для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над \mathbb{C} назовем комплексно сопряженной вектор-матрицу $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_k)$, у которой каждая компонента \bar{A}_j является комплексно сопряженной с компонентой A_j вектор-матрицы \mathbf{A} .

Определение 1.2. Для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над \mathbb{C} назовем эрмитово сопряженной вектор-матрицу $\mathbf{A}^* = (A_1^*, \dots, A_k^*)$,

у которой каждая компонента A_j^* является эрмитово сопряженной с компонентой A_j вектор-матрицы \mathbf{A} .

Ясно, что для действительной вектор-матрицы \mathbf{A} , то есть вектор-матрицы, у которой все компоненты являются действительными матрицами, вектор-матрицы \mathbf{A}^* и \mathbf{A}' совпадают, где \mathbf{A}' – транспонированная вектор-матрица [5].

Замечание 1.1. Так как всякий элемент $\lambda \in \mathbb{C}$ можно рассматривать как квадратную матрицу первого порядка, то упорядоченный набор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ из \mathbb{C} является вектор-матрицей первого порядка, для которой, согласно определениям 1.1 и 1.2,

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k), \quad \boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*).$$

Каждое из восьми равенств в следующем предложении является следствием соответствующего равенства для обычных матриц.

Предложение 1.1. Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} – произвольные k -компонентные вектор-матрицы над \mathbb{C} . Тогда:

1) если \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют одинаковые размеры, то $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$;

2) если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\overline{\lambda \mathbf{A}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{A}}$, $(\lambda \mathbf{A})^* = \bar{\lambda} \mathbf{A}^*$;

3) операция транспонирования перестановочна и с операцией комплексного сопряжения, и с операцией эрмитового сопряжения, то есть

$$\overline{\mathbf{A}'} = \bar{\mathbf{A}}', \quad (\mathbf{A}')^* = (\mathbf{A}^*)';$$

4) операции комплексного сопряжения и эрмитового сопряжения инволютивны, то есть

$$\overline{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}.$$

Теорема 1.1. Пусть σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l \quad (1.1)$$

такие вектор-матрицы над \mathbb{C} , что определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} \quad (1.2)$$

Тогда определены вектор-матрицы

$$[\overline{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, k}, [\overline{\mathbf{A}_1} \overline{\mathbf{A}_2} \dots \overline{\mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, k}, \quad (1.3)$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}^*, [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l, \sigma^{-1}, k} \quad (1.4)$$

и верны равенства

$$[\overline{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, k} = [\overline{\mathbf{A}_1} \overline{\mathbf{A}_2} \dots \overline{\mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, k}, \quad (1.5)$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}^* = [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l, \sigma^{-1}, k}. \quad (1.6)$$

Доказательство. Так как $\overline{UV} = \overline{U}\overline{V}$ для обычных матриц, то

$$\overline{A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}} = \overline{A_{1j}} \overline{A_{2\sigma(j)}} \dots \overline{A_{l\sigma^{l-1}(j)}} \quad (1.7)$$

для любого $j = 1, \dots, k$. Левая (правая) часть последнего равенства является j -ой компонентой первой (второй) вектор-матрицы из (1.3), то есть обе указанные вектор-матрицы существуют. Равенство (1.5) вытекает из (1.7).

Существование первой матрицы в (1.4) является следствием существования матрицы (1.2).

Выпишем j -ую компоненту вектор-матрицы (1.2):

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)} = \\ = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{lj}, j = 1, \dots, k.$$

Если положить $\tau = \sigma^{-1}$, то из условия $\sigma^l = \sigma$ получаем

$$\tau = \sigma^{l-2}, \dots, \tau^{l-2} = \sigma, \tau^{l-1} = \varepsilon, \tau^l = \tau. \quad (1.8)$$

Обозначив j -ую компоненту вектор-матрицы в левой части (1.6) через U_j , и используя соответствующий бинарный результат и (1.8), получим

$$U_j = Y_j^* = (A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{lj})^* = \\ = A_{lj}^* A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}^* \dots A_{2\sigma(j)}^* A_{1j}^* = \\ = A_{lj}^* A_{(l-1)\tau(j)}^* \dots A_{2\tau^{l-2}(j)}^* A_{1j}^*,$$

то есть

$$U_j = A_{lj}^* A_{(l-1)\tau(j)}^* \dots A_{2\tau^{l-2}(j)}^* A_{1j}^*. \quad (1.9)$$

Так как

$$\mathbf{A}_i^* = (A_{i1}^*, \dots, A_{ik}^*), i = 1, \dots, l,$$

то из (1.9) вытекает, что определена вторая вектор-матрица из (1.4), j -ая компонента которой совпадает с правой частью (1.9). Так как для любого $j = 1, \dots, k$ j -ые компоненты в левой и правой частях равенства (1.6) совпадают, то указанное равенство верно. Теорема доказана.

Замечание 1.2. Равенство (1.6) может быть получено как следствие равенства (1.5) и равенства (2.4) из [5] для транспонированных вектор-матриц.

2 Следствия из теоремы 1.1

Если k -компонентные квадратные вектор-матрицы

$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, \dots, A_{1k}), \dots, \mathbf{A}_l = (A_{l1}, \dots, A_{lk})$ над \mathbb{C} таковы, что для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)} \quad (2.1)$$

имеют одинаковый порядок, то существует вектор-матрица (1.2). Поэтому из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 2.1. Пусть σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, вектор-матрицы (1.1) являются квадратными и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы (2.1) имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства (1.5) и (1.6).

Следствие 2.2. Пусть σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы над \mathbb{C} одного и того же порядка n . Тогда верны равенства (1.5) и (1.6).

Если σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$, $l = mt + 1$, то $\sigma^l = \sigma$. Поэтому имеют место следующие три следствия.

Следствие 2.3. Пусть σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, mt + 1 \quad (2.2)$$

такие вектор-матрицы над \mathbb{C} , что определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{mt+1}]_{mt+1, \sigma, k}$. Тогда определены вектор-матрицы

$$[\overline{\mathbf{A}_1} \dots \overline{\mathbf{A}_{mt+1}}]_{mt+1, \sigma, k}, [\mathbf{A}_{mt+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{mt+1, \sigma^{-1}, k}$$

и верны равенства

$$[\overline{\mathbf{A}_1} \dots \overline{\mathbf{A}_{mt+1}}]_{mt+1, \sigma, k} = [\overline{\mathbf{A}_1} \dots \overline{\mathbf{A}_{mt+1}}]_{mt+1, \sigma, k}, \quad (2.3)$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{mt+1}]_{mt+1, \sigma, k}^* = [\mathbf{A}_{mt+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{mt+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (2.4)$$

В частности, если $m = 1$, то

$$[\overline{\mathbf{A}_1} \dots \overline{\mathbf{A}_{t+1}}]_{t+1, \sigma, k} = [\overline{\mathbf{A}_1} \dots \overline{\mathbf{A}_{t+1}}]_{t+1, \sigma, k}, \quad (2.5)$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{t+1}]_{t+1, \sigma, k}^* = [\mathbf{A}_{t+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{t+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (2.6)$$

Следствие 2.4. Пусть σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$, вектор-матрицы (2.2) являются квадратными, и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(mt)\sigma^{m-1}(j)}, A_{(mt+1)\sigma^m(j)} = A_{(mt+1)j}$$

имеют один и тот же порядок. Тогда верны равенства (2.3) и (2.4). В частности, если $m = 1$, то верны равенства (2.5) и (2.6).

Следствие 2.5. Пусть σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{mt+1}$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы над \mathbb{C} одного и того же порядка n . Тогда верны равенства (2.3) и (2.4). В частности, если $m = 1$, то верны равенства (2.5) и (2.6).

Полагая в следствиях 2.3–2.5 $t = k$, получим еще три следствия.

Следствие 2.6. Пусть σ – цикл длины k из S_k , $m \geq 1$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, mk + 1 \quad (2.7)$$

такие вектор-матрицы над \mathbb{C} , что определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{mk+1}]_{mk+1, \sigma, k}$. Тогда определены вектор-матрицы

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1, \sigma, k}, [\mathbf{A}_{mk+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{mk+1, \sigma^{-1}, k}$$

и верны равенства

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1, \sigma, k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1, \sigma, k}, \quad (2.8)$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{mk+1}]_{mk+1, \sigma, k}^* = [\mathbf{A}_{mk+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{mk+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (2.9)$$

В частности, если $t = 1$, то

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k}, \quad (2.10)$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k}^* = [\mathbf{A}_{k+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{k+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (2.11)$$

Следствие 2.7. Пусть σ – цикл длины k из S_k , $t \geq 1$, вектор-матрицы (2.7) являются квадратными и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(mk)\sigma^{m-1}(j)}, A_{(mk+1)\sigma^m(j)} = A_{(mk+1)j}$$

имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства (2.8) и (2.9). В частности, если $t = 1$, то верны равенства (2.10) и (2.11).

Следствие 2.8. Пусть σ – цикл длины k из S_k , $t \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{mk+1}$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы над \mathbb{C} одного и того же порядка n . Тогда верны равенства (2.8) и (2.9). В частности, если $t = 1$, то верны равенства (2.10) и (2.11).

Полагая в следствиях 2.6–2.8 $\sigma = (12 \dots k)$, получим еще три следствия.

Следствие 2.9. Пусть $\sigma = (12 \dots k)$, $t \geq 1$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, mk+1 \quad (2.12)$$

такие вектор-матрицы над \mathbb{C} , что определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{mk+1}]_{mk+1, (12 \dots k), k}$. Тогда определены вектор-матрицы

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1, (12 \dots k), k}, [\mathbf{A}_{mk+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{mk+1, (k \dots 21), k}$$

и верны равенства

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1, (12 \dots k), k} = \\ & = [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1, (12 \dots k), k}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{mk+1}]_{mk+1, (12 \dots k), k}^* = \\ & = [\mathbf{A}_{mk+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{mk+1, (k \dots 21), k}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В частности, если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k} = \\ & = [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k}^* = \\ & = [\mathbf{A}_{k+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{k+1, (k \dots 21), k}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Следствие 2.10. Пусть $\sigma = (12 \dots k)$, $t \geq 1$, вектор-матрицы (2.12) являются квадратными и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(mk)\sigma^{m-1}(j)}, A_{(mk+1)\sigma^m(j)} = A_{(mk+1)j}$$

имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства (2.13) и (2.14). В частности, если $t = 1$, то верны равенства (2.15) и (2.16).

Следствие 2.11. Пусть $\sigma = (12 \dots k)$, $t \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{mk+1}$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы над \mathbb{C} одного и того же порядка n . Тогда верны равенства (2.13) и (2.14). В частности, если $t = 1$, то верны равенства (2.15) и (2.16).

Так как для любой транспозиции $\sigma \in S_k$ верно $\sigma = \sigma^{-1}$, то, полагая в следствиях 2.3–2.5 $t = 2$, получим еще три следствия.

Следствие 2.12. Пусть σ – транспозиция из S_k , $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= (A_{11}, \dots, A_{1k}), \dots, \\ \mathbf{A}_{2m+1} &= (A_{(2m+1)1}, \dots, A_{(2m+1)k}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

такие вектор-матрицы над \mathbb{C} , что определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{2m+1}]_{2m+1, \sigma, k}$. Тогда определены вектор-матрицы

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1, \sigma, k}, [\mathbf{A}_{2m+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{2m+1, \sigma, k}$$

и верны равенства

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1, \sigma, k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1, \sigma, k}, \quad (2.18)$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{2m+1}]_{2m+1, \sigma, k}^* = [\mathbf{A}_{2m+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{2m+1, \sigma, k}. \quad (2.19)$$

В частности, если $t = 1$, то

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{A}}_3]_{3, \sigma, k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{A}}_3]_{3, \sigma, k}, \quad (2.20)$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3]_{3, \sigma, k}^* = [\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1]_{3, \sigma, k}. \quad (2.21)$$

Следствие 2.13. Пусть σ – транспозиция из S_k , $t \geq 1$, вектор-матрицы (2.17) являются квадратными, и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{2m\sigma^{2m-1}(j)}, A_{(2m+1)\sigma^{2m}(j)} = A_{(2m+1)j}$$

имеют один и тот же порядок. Тогда верны равенства (2.18) и (2.19). В частности, если $t = 1$, то верны равенства (2.20) и (2.21).

Следствие 2.14. Пусть σ – транспозиция из S_k , $t \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{2m+1}$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы над \mathbb{C} одного и того же порядка n . Тогда верны равенства (2.18) и (2.19). В частности, если $t = 1$, то верны равенства (2.20) и (2.21).

Полагая в следствиях 2.12–2.14 $k = 2$, получим еще три следствия.

Следствие 2.15. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $t \geq 1$,

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, A_{12}), \dots, \mathbf{A}_{2m+1} = (A_{(2m+1)1}, A_{(2m+1)2}) \quad (2.22)$$

такие вектор-матрицы над \mathbb{C} , что определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{2m+1}]_{2m+1, (12), 2}$. Тогда определены вектор-матрицы

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1, (12), 2}, [\mathbf{A}_{2m+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{2m+1, (12), 2}$$

и верны равенства

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1, (12), 2} = \\ & = [\bar{\mathbf{A}}_1 \dots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1, (12), 2}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{2m+1}]_{2m+1, (12), 2}^* = [\mathbf{A}_{2m+1}^* \dots \mathbf{A}_1^*]_{2m+1, (12), 2}. \quad (2.24)$$

В частности, если $m = 1$, то

$$[\overline{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3}]_{3, (12), k} = [\overline{\mathbf{A}_1} \overline{\mathbf{A}_2} \overline{\mathbf{A}_3}]_{3, (12), k}, \quad (2.25)$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3]_{3, (12), 2}^* = [\mathbf{A}_3^* \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{3, (12), 2}. \quad (2.26)$$

Следствие 2.16. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$, 2-компонентные вектор-матрицы (2.22) являются квадратными, компоненты $A_{11}, A_{22}, A_{31}, \dots, \dots, A_{(2m)2}, A_{(2m+1)1}$ имеют один и тот же порядок, один и тот же порядок имеют также компоненты $A_{12}, A_{21}, A_{32}, \dots, A_{(2m)1}, A_{(2m+1)2}$. Тогда верны равенства (2.23) и (2.24). В частности, если $m = 1$, то верны равенства (2.25) и (2.26).

Следствие 2.17. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{2m+1}$ – 2-компонентные квадратные вектор-матрицы над \mathbb{C} одного и того же порядка n . Тогда верны равенства (2.23) и (2.24). В частности, если $m = 1$, то верны равенства (2.25) и (2.26).

Замечание 2.1. Следствия 2.15 – 2.17 могут быть получены из следствий 2.9–2.11 при $k = 2$.

Пример 2.1. Пусть $k = 3, l = 4, \sigma = (123) \in S_3, P = \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= ((-1 \ 0 \ i), \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}), \\ \mathbf{A}_2 &= (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, (1 \ -1)), \\ \mathbf{A}_3 &= (\begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}, (i \ 1 \ -1), \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix}), \\ \mathbf{A}_4 &= ((-i \ i), \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4]_{4, (123), 3} = \\ &((-1 \ 0 \ i) \begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix} (-i \ i), \\ &\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -1) \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (i \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}) = \\ &= ((1 \ -1), \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3-2i \\ 1+5i \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4]_{4, (123), 3}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (1 \ i), (-3+2i \ 1-5i). \quad (2.27)$$

Так как

$$\mathbf{A}_1^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, (-i \ 1), \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2^* = ((1 \ 0), \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

$$\mathbf{A}_3^* = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (1-i \ i),$$

$$\mathbf{A}_4^* = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}, (-i \ i \ i), (1-i \ -i \ 1+i),$$

то, ввиду $\sigma^{-1} = (132)$, имеем

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A}_4^* \mathbf{A}_3^* \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{4, (132), 3} = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix} (1-i \ i) \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \\ &(-i \ i \ i) \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-i \ 1), \\ &(1-i \ -i \ 1+i) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 0) \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (1 \ i), (-3+2i \ 1-5i), \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{A}_4^* \mathbf{A}_3^* \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{4, (132), 3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (1 \ i), (-3+2i \ 1-5i). \quad (2.28)$$

Сравнивая (2.27) и (2.28), видим, что

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4]_{4, (123), 3}^* = [\mathbf{A}_4^* \mathbf{A}_3^* \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{4, (132), 3}.$$

3 Связь между сопряженными и косыми вектор-матрицами

Обозначим через $\mathbf{GL}_n(k, P)$ множество всех k -компонентных квадратных вектор-матриц n -го порядка над полем P , у которых определитель каждой компоненты отличен от нуля. Ясно, что $\mathbf{GL}_n(k, P)$ совпадает с декартовой степенью $\underbrace{\mathbf{GL}_n(P) \times \dots \times \mathbf{GL}_n(P)}_k$ полной линейной группы

$\mathbf{GL}_n(P)$. Так как $\mathbf{GL}_n(P)$ – группа с операцией умножения матриц, то, полагая в теореме 3.6.2 из [6] $\mathbf{A} = \mathbf{GL}_n(P)$, получим следующий результат.

Предложение 3.1. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Замечание 3.1. Из соответствующих результатов книги [6] следует, что l -арная группа $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ не имеет единиц, а при $n \geq 2$ является непоуабелевой, в частности, неабелевой.

Замечание 3.2. Пост рассматривал [1] частный случай l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ при $P = \mathbb{C}$, $l = k + 1$, $\sigma = (12 \dots k)$. $(k + 1)$ -Арную группу $\langle \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C}), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ он называл полной линейной $(k + 1)$ -арной группой.

В следующей теореме обобщаются равенства

$$\overline{(\mathbf{A}^{-1})} = \overline{(\overline{\mathbf{A}})^{-1}}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1},$$

справедливые для квадратных невырожденных матриц. Символ $\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{l, \sigma, k}}}$ используется для обозначения косога элемента вектор-матрицы \mathbf{A} l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.1. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то для любой вектор-матрицы \mathbf{A} из $\mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$ верны равенства

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{l, \sigma, k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{l, \sigma, k}}}}, \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{l, \sigma, k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{l, \sigma^{-1}, k}}}, \quad (3.1)$$

то есть в $\mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$ операция взятия косога элемента перестановочна и с операцией комплексного сопряжения, и с операцией эрмитового сопряжения.

Доказательство. Докажем второе равенство. Положим

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k), \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{l, \sigma, k}}})^* = (D_1, \dots, D_k),$$

$$(\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{l, \sigma^{-1}, k}}} = (C_1, \dots, C_k).$$

Так как по лемме 2.5.1 [6]

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{l, \sigma, k}}} = (B_1, \dots, B_k),$$

где

$$B_j = A_{\sigma^{-1}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1}$$

для любого $j = 1, \dots, k$, то, используя соответствующий бинарный результат, получим

$$D_j = B_j^* = (A_{\sigma^{-1}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1})^* = (A_{\sigma(j)}^{-1})^* \dots (A_{\sigma^{-1}(j)}^{-1})^*,$$

то есть

$$D_j = (A_{\sigma(j)}^{-1})^* \dots (A_{\sigma^{-1}(j)}^{-1})^*, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

С другой стороны, так как $\mathbf{A}^* = (A_1^*, \dots, A_k^*)$, то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$, и используя (1.8), лемму 2.5.1 [6] и соответствующий бинарный результат (операции эрмитового сопряжения и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$\begin{aligned} C_j &= (A_{\tau(j)}^*)^{-1} \dots (A_{\tau(j)}^*)^{-1} = \\ &= (A_{\sigma(j)}^*)^{-1} \dots (A_{\sigma^{-1}(j)}^*)^{-1} = (A_{\sigma(j)}^{-1})^* \dots (A_{\sigma^{-1}(j)}^{-1})^*, \end{aligned}$$

то есть

$$C_j = (A_{\sigma(j)}^{-1})^* \dots (A_{\sigma^{-1}(j)}^{-1})^*, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) вытекает (3.1).

Первое равенство из (3.1) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3.3. Второе равенство в (3.1) может быть получено как следствие первого равенства в (3.1) и равенства (4.2) из [5] для транспонированных вектор-матриц.

Следствие 3.1. Если σ – цикл длины t из S_k , $t \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tm+1, \sigma, k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tm+1, \sigma, k}}}},$$

$$(\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tm+1, \sigma, k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{tm+1, \sigma^{-1}, k}}}.$$

В частности, если $t = 1$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, \sigma, k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, \sigma, k}}}}, \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, \sigma, k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{k+1, \sigma^{-1}, k}}}.$$

Следствие 3.2. Если σ – цикл длины k из S_k , $t \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tmk+1, \sigma, k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tmk+1, \sigma, k}}}},$$

$$(\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tmk+1, \sigma, k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{tmk+1, \sigma^{-1}, k}}}.$$

В частности, если $t = 1$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, \sigma, k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, \sigma, k}}}}, \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, \sigma, k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{k+1, \sigma^{-1}, k}}}.$$

Следствие 3.3. Если $\sigma = (12 \dots k)$, $t \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tmk+1, (12 \dots k), k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tmk+1, (12 \dots k), k}}}},$$

$$(\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{tmk+1, (12 \dots k), k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{tmk+1, (k \dots 21), k}}}.$$

В частности, если $t = 1$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, (12 \dots k), k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, (12 \dots k), k}}}},$$

$$(\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{k+1, (12 \dots k), k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{k+1, (k \dots 21), k}}}.$$

Следствие 3.4. Если σ – транспозиция из S_k , $t \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{2m+1, \sigma, k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{2m+1, \sigma, k}}}}, \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{2m+1, \sigma, k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{2m+1, \sigma, k}}}.$$

В частности, если $t = 1$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{3, \sigma, k}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{3, \sigma, k}}}}, \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{3, \sigma, k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{3, \sigma, k}}}.$$

Следствие 3.5. Если $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(2, \mathbb{C})$, то

$$\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{\mathbf{b}, (12), 2}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{\mathbf{b}, (12), 2}}}}, \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\overline{[]_{\mathbf{b}, (12), 2}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{\mathbf{b}, (12), 2}}}.$$

4 Вектор-определители и определители сопряженных вектор-матриц

Если $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ – квадратная вектор-матрица над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, то есть вектор-матрица, у которой все компоненты A_1, \dots, A_k являются квадратными матрицами над P , не обязательно одного порядка, то для неё определены [7] вектор-определитель

$$\det \mathbf{A} = (\det A_1, \dots, \det A_k) \in P^k$$

и определитель

$$\det \mathbf{A} = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_k \in P.$$

Ясно, что при $k=1$ понятия вектор-определителя и определителя совпадают: $\det \mathbf{A} = \det A$.

Предложение 4.1. Пусть $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ – квадратная вектор-матрица над C . Тогда

$$\det \bar{\mathbf{A}} = \overline{\det \mathbf{A}}, \quad \det \bar{\mathbf{A}} = \overline{\det \mathbf{A}},$$

$$\det \mathbf{A}^* = \overline{\det \mathbf{A}}, \quad \det \mathbf{A}^* = \overline{\det \mathbf{A}}.$$

Доказательство. Докажем второе и третье равенства.

Используя соответствующие равенства для обычных матриц, получим:

$$\begin{aligned} \det \bar{\mathbf{A}} &= \det(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_k) = \\ &= \det(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_k) = \det \bar{A}_1 \dots \det \bar{A}_k = \\ &= \overline{\det A_1} \dots \overline{\det A_k} = \\ &= \overline{\det A_1 \dots \det A_k} = \overline{\det \mathbf{A}}, \end{aligned}$$

то есть верно второе равенство;

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}^* &= \det(A_1^*, \dots, A_k^*) = \\ &= \det(A_1^*, \dots, A_k^*) = (\det A_1^*, \dots, \det A_k^*) = \\ &= (\det A_1, \dots, \det A_k) = \\ &= \overline{\det A_1, \dots, \det A_k} = \overline{\det \mathbf{A}}, \end{aligned}$$

то есть верно третье равенство.

Первое и четвертое равенства доказываются аналогично. Предложение доказано.

5 Полиадические операции на множестве пространственных матриц

Для обозначения множества всех пространственных матриц размера $m \times n \times p$ над P будем использовать символ $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$.

Зафиксируем целое $m \geq 1$ и выделим во множестве всех пространственных матриц над кольцом P три подмножества:

множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации (i) равно m ;

множество $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации (j) равно m ;

множество $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации (k) равно m .

Зафиксируем целое $l \geq 2$, подстановку $\sigma \in S_m$, и пусть P – ассоциативное кольцо. Если

$$A_1 = (a_{ijk})_1, A_2 = (a_{ijk})_2, \dots, A_l = (a_{ijk})_l$$

такие пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$, что число сечений ориентации (k) предыдущей пространственной матрицы равно числу сечений ориентации (j) последующей пространственной матрицы, то определены произведения

$$(a_{1jk})_1 (a_{\sigma(1)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(1)jk})_{l-1} (a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l = U_1,$$

$$\dots (a_{mj k})_1 (a_{\sigma(m)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(m)jk})_{l-1} (a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l = U_m.$$

Полагая $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P)$, где

$$(a_{1jk}) = U_1, \dots, (a_{mj k}) = U_m,$$

видим, что на $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ определена частичная l -арная операция

$$[A_1 A_2 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} = A = (a_{ijk}), \quad (5.1)$$

где

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1 (a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1} (a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l, \quad (5.2)$$

$$r = 1, \dots, m.$$

Таким образом, для любых целых $p_0 \geq 1, \dots, p_l \geq 1$ и любых пространственных матриц

$$A_1 = (a_{ijk})_1 \in \mathbf{M}_{m \times p_0 \times p_1}(P),$$

$$A_2 = (a_{ijk})_2 \in \mathbf{M}_{m \times p_1 \times p_2}(P), \dots$$

$$\dots, A_{l-1} = (a_{ijk})_{l-1} \in \mathbf{M}_{m \times p_{l-2} \times p_{l-1}}(P),$$

$$A_l = (a_{ijk})_l \in \mathbf{M}_{m \times p_{l-1} \times p_l}(P)$$

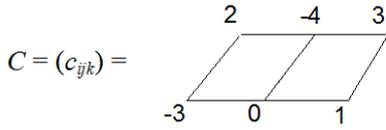
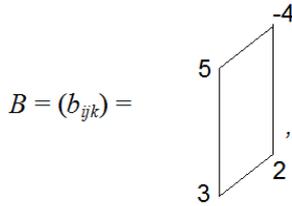
определена пространственная матрица (5.1) из $\mathbf{M}_{m \times p_0 \times p_l}(P)$, у которой для любого $r = 1, \dots, m$ r -ое сечение ориентации (i) определяется равенством (5.2). Все сечения ориентации (i) пространственной матрицы A являются матрицами размера $p_0 \times p_l$. Ясно, что на множестве $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$ частичная l -арная операция $[]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ совпадает с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ из [4].

Если в определении частичной l -арной операции $[]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (j) , а множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ – множеством $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$, то получим определение частичной l -арной операции $[]_{l, \sigma, m}^{(j)}$, частным случаем которой является l -арная операция $[]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ из [4].

Если в определении частичной l -арной операции $[]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (k) , а множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ – множеством $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$, то получим определение частичной l -арной операции $[]_{l, \sigma, m}^{(k)}$, частным случаем которой является l -арная операция $[]_{l, \sigma, m}^{(k)}$ из [4].

Пример 5.1. Рассмотрим три пространственные матрицы над Z :

$$A = (a_{ijk}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -4 & 2 \\ 3 & \square & 2 \\ & -5 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & & \\ -2 & & -1 \\ & & \end{array} \end{array},$$



соответственно размеров $2 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 1$ и $2 \times 1 \times 3$, для которых найдем матрицу

$$D = (d_{ijk}) = [ABC]_{3, (12), 2}^{(i)}$$

Так как

$$(a_{1jk}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (a_{2jk}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(b_{1jk}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (b_{2jk}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

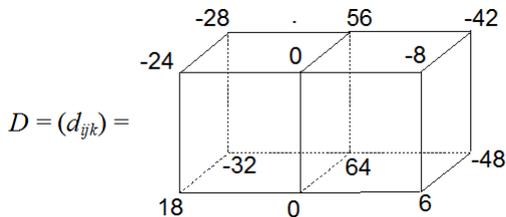
$$(c_{1jk}) = (-3 \ 0 \ 1), \quad (c_{2jk}) = (2 \ -4 \ 3),$$

то, согласно определению операции $[]_{l, \sigma, m}^{(i)}$, имеем

$$(d_{1jk}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} (-3 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} (3 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} -24 & 0 & -8 \\ 18 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(d_{2jk}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ -4 \ 3) = \begin{pmatrix} -14 \\ -16 \end{pmatrix} (2 \ -4 \ 3) = \begin{pmatrix} -28 & 56 & -42 \\ -32 & 64 & -48 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,



Зафиксируем целое $m \geq 1$ и выделим во множестве $\mathbf{M}(m, P)$ всех m -компонентных вектор-матриц над кольцом P множество $\mathbf{K}(m, P)$ всех вектор-матриц, у которых все компоненты имеют один и тот же размер. Заметим, что у разных вектор-матриц из $\mathbf{K}(m, P)$ размеры компонент не обязаны совпадать.

Для каждой вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in \mathbf{K}(m, P) \quad (5.3)$$

положим

$$A_1 = (a_{1jk}), \dots, A_m = (a_{mjk}), \quad (5.4)$$

то есть отождествим компоненты вектор-матрицы (5.3) с соответствующими сечениями ориентации (i) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P). \quad (5.5)$$

В этом случае отображение

$$\Phi_{(i)}: ((a_{1jk}), \dots, (a_{mjk})) \rightarrow (a_{ijk})$$

является биекцией множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$.

Если для вектор-матриц (5.3) положить

$$A_1 = (a_{i1k}), \dots, A_m = (a_{i1mk}), \quad (5.6)$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (5.3) с соответствующими сечениями ориентации (j) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \quad (5.7)$$

то получим биекцию

$$\Phi_{(j)}: ((a_{i1k}), \dots, (a_{i1mk})) \rightarrow (a_{ijk})$$

множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$.

Если для вектор-матриц (5.3) положить

$$A_1 = (a_{ij}), \dots, A_m = (a_{ijm}), \quad (5.8)$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (5.3) с соответствующими сечениями ориентации (k) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(k)}(m, P), \quad (5.9)$$

то получим биекцию

$$\Phi_{(k)}: ((a_{ij1}), \dots, (a_{ijm})) \rightarrow (a_{ijk})$$

множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$.

Ясно, что сужения отображений $\Phi_{(i)}$, $\Phi_{(j)}$ и $\Phi_{(k)}$ на множество $\mathbf{M}_{s \times t}(m, P)$ всех m -компонентных вектор-матриц порядка $s \times t$ над P совпадают с биекциями

$$\Phi_{(i)}: \mathbf{M}_{s \times t}(m, P) \rightarrow \mathbf{M}_{m \times s \times t}(P),$$

$$\Phi_{(j)}: \mathbf{M}_{s \times t}(m, P) \rightarrow \mathbf{M}_{s \times m \times t}(P),$$

$$\Phi_{(k)}: \mathbf{M}_{s \times t}(m, P) \rightarrow \mathbf{M}_{s \times t \times m}(P)$$

из [8].

Ясно, что отображение $\Psi_{(i)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (5.5) вектор-матрицу (5.3) с компонентами (5.4), является биекцией $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$. Аналогично, отображение $\Psi_{(j)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (5.7) вектор-матрицу (5.3) с компонентами (5.6), является биекцией $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$; отображение $\Psi_{(k)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (5.9) вектор-матрицу (5.3) с компонентами (5.8), является биекцией $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$.

Имеет место

Предложение 5.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) для любого $r \in \{i, j, k\}$ отображения $\Phi_{(r)}$ и $\Psi_{(r)}$ являются взаимнообратными, то есть для любых $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(m, P)$, $A \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P)$ верны равенства

$$\Psi_{(r)}(\Phi_{(r)}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}, \Phi_{(r)}(\Psi_{(r)}(A)) = A;$$

2) если для вектор-матриц $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l \in \mathbf{K}(m, P)$ определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}$, то для любого $r \in \{i, j, k\}$ определена пространственная матрица

$$[\Phi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \dots \Phi_{(r)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\Phi_{(r)}([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}) = [\Phi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \dots \Phi_{(r)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(r)};$$

3) если для пространственных матриц

$$A_1, \dots, A_l \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P), r \in \{i, j, k\}$$

определена пространственная матрица $[A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)}$, то определена вектор-матрица $[\Psi_{(r)}(A_1) \dots \Psi_{(r)}(A_l)]_{l, \sigma, m}$ и верно равенство

$$\Psi_{(r)}([A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)}) = [\Psi_{(r)}(A_1) \dots \Psi_{(r)}(A_l)]_{l, \sigma, m}.$$

Следующую теорему можно доказать непосредственно, а можно получить как следствие ассоциативности соответствующей l -арной операции на множестве вектор-матриц, используя предложение 5.1.

Теорема 5.1. Пусть P – ассоциативное кольцо, $r \in \{i, j, k\}$, σ – подстановка из S_m , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, $A_1, A_2, \dots, A_{2l-1}$ – пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$. Тогда, если для некоторого $s = 0, 1, \dots, l-1$ определена пространственная матрица

$$[A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{s+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)} \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P),$$

то для любого $t = 0, 1, \dots, l-1$ определена пространственная матрица

$$[A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{t+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)} \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P)$$

и верно равенство

$$[A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{s+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)} = [A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{t+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)}.$$

Далее P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Выделим во множестве $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ множество $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ всех пространственных матриц, у которых все сечения ориентации (i) являются обратимыми матрицами в $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что множество $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ совпадает с множеством всех пространственных матриц, у которых определители всех сечений ориентации (i) являются обратимыми в P . Аналогично множеству $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ определяются множества $\mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P)$ и $\mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P)$.

Имеет место

Теорема 5.2. Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальные алгебры $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$, $\langle \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$ и $\langle \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$ являются непоуабелевыми l -арными группами, изоморфными l -арной

группе $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$. Если σ – нетождественная подстановка, то в этих l -арных группах нет единицы.

Замечание 5.1. Теорему 5.2 можно конкретизировать следующим образом. Сужения отображений $\Phi_{(i)}$, $\Phi_{(j)}$ и $\Phi_{(k)}$ на множество $\mathbf{GL}_n(m, P)$ являются изоморфизмами l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$ вектор-матриц на соответствующие l -арные группы пространственных матриц из формулировки теоремы 5.2; сужения отображений $\Psi_{(i)}$, $\Psi_{(j)}$ и $\Psi_{(k)}$ соответственно на те же l -арные группы пространственных матриц являются их изоморфизмами на l -арную группу $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$.

Для обозначения косога элемента для пространственной матрицы A из l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ будем использовать символ $A^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}}}$. Аналогично, $A^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(j)}}}$ – косога элемент для пространственной матрицы A из l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$; $A^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(k)}}}$ – косога элемент для пространственной матрицы A из l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$.

Так как при изоморфизме l -арных групп косога элемент переходит в косога элемент, то из теоремы 5.2, ввиду замечания 5.1, вытекает

Следствие 5.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) если $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(m, P)$, то

$$\Phi_{(i)}(\mathbf{A}^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}}}) = (\Phi_{(i)}(\mathbf{A}))^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}}} \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P),$$

$$\Phi_{(j)}(\mathbf{A}^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}}}) = (\Phi_{(j)}(\mathbf{A}))^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(j)}}} \in \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P),$$

$$\Phi_{(k)}(\mathbf{A}^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}}}) = (\Phi_{(k)}(\mathbf{A}))^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(k)}}} \in \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P);$$

2) если

$A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, $B \in \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P)$, $C \in \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P)$, то

$$\Psi_{(i)}(A^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}}}) = (\Psi_{(i)}(A))^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}}} \in \mathbf{GL}_n(m, P),$$

$$\Psi_{(j)}(B^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(j)}}}) = (\Psi_{(j)}(B))^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(j)}}} \in \mathbf{GL}_n(m, P),$$

$$\Psi_{(k)}(C^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(k)}}}) = (\Psi_{(k)}(C))^{\overline{[\]_{l, \sigma, m}^{(k)}}} \in \mathbf{GL}_n(m, P).$$

6 Сопряженные пространственные матрицы

Определение 6.1. Пространственная матрица $B = (b_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times p}(C)$ называется (i) -комплексно сопряжённой для пространственной матрицы $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times p}(C)$, если все её сечения ориентации (i) являются комплексно сопряжёнными матрицами для соответствующих сечений ориентации (i) пространственной матрицы A , то есть

$$(b_{ijk}) = \overline{(a_{ijk})}, t = 1, \dots, m.$$

Аналогично определяются (j) -комплексно сопряжённые пространственные матрицы и

(k)-комплексно сопряжённые пространственные матрицы.

Для обозначения (r)-комплексно сопряжённой пространственной матрицы для пространственной матрицы A , где $r \in \{i, j, k\}$, будем употреблять следующее обозначение:

$$A^{(\bar{\cdot}, r)} = (a_{ijk})^{(\bar{\cdot}, r)}.$$

Определение 6.2. Пространственная матрица $B = (b_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times p \times n}(\mathbb{C})$ называется (i)-эрмитово сопряжённой для пространственной матрицы $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times p}(\mathbb{C})$, если все ее сечения ориентации (i) являются эрмитово сопряжёнными матрицами для соответствующих сечений ориентации (i) пространственной матрицы A , то есть

$$(b_{ijk}) = (a_{ijk})^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Аналогично определяются (j)-эрмитово сопряжённые пространственные матрицы и (k)-эрмитово сопряжённые пространственные матрицы.

Для обозначения (r)-эрмитово сопряжённой пространственной матрицы для пространственной матрицы A , где $r \in \{i, j, k\}$, будем употреблять следующее обозначение: $A^{(*, r)} = (a_{ijk})^{(*, r)}$.

Предложение 6.1. Справедливы следующие утверждения:

1) если вектор-матрица \mathbf{B} комплексно сопряжена (эрмитово сопряжена) с вектор-матрицей \mathbf{A} , то для любого $r \in \{i, j, k\}$ пространственная матрица $\varphi_{(r)}(\mathbf{B})$ (r)-комплексно сопряжена ((r)-эрмитово сопряжена) с пространственной матрицей $\varphi_{(r)}(\mathbf{A})$;

2) если для некоторого $r \in \{i, j, k\}$ пространственная матрица B (r)-комплексно сопряжена ((r)-эрмитово сопряжена) с пространственной матрицей A , то вектор-матрица $\psi_{(r)}(B)$ комплексно сопряжена (эрмитово сопряжена) с вектор-матрицей $\psi_{(r)}(A)$.

Предложение 6.1 можно переформулировать следующим образом.

Предложение 6.2. Для любого $r \in \{i, j, k\}$ и любых $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(m, \mathbb{C})$, $A \in \mathbf{M}^{(r)}(m, \mathbb{C})$ верны равенства

$$(\varphi_{(r)}(\mathbf{A}))^{(\bar{\cdot}, r)} = \varphi_{(r)}(\bar{\mathbf{A}}), \quad \overline{\psi_{(r)}(A)} = \psi_{(r)}(A^{(\bar{\cdot}, r)}),$$

$$(\varphi_{(r)}(\mathbf{A}))^{(*, r)} = \varphi_{(r)}(\mathbf{A}^*), \quad (\psi_{(r)}(A))^* = \psi_{(r)}(A^{(*, r)}).$$

Замечание 6.1. Для транспонированных вектор-матриц и транспонированных пространственных матриц имеют место формулы, аналогичные формулам из предложения 6.2:

$$(\varphi_{(r)}(\mathbf{A}))^{(\cdot, r)} = \varphi_{(r)}(\mathbf{A}'), \quad (\psi_{(r)}(A))' = \psi_{(r)}(A^{(\cdot, r)}).$$

Теорема 6.1. Пусть подстановка σ из S_m удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $r \in \{i, j, k\}$, A_1, \dots, A_l – такие пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(r)}(m, \mathbb{C})$, что определена пространственная матрица $[A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)}$. Тогда определены пространственные матрицы

$$[A_1^{(\bar{\cdot}, r)} \dots A_l^{(\bar{\cdot}, r)}]_{l, \sigma, m}^{(r)}, \quad [A_1^{(*, r)} \dots A_l^{(*, r)}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(r)}$$

и верны равенства

$$([A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)})^{(\bar{\cdot}, r)} = [A_1^{(\bar{\cdot}, r)} \dots A_l^{(\bar{\cdot}, r)}]_{l, \sigma, m}^{(r)},$$

$$([A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)})^{(*, r)} = [A_1^{(*, r)} \dots A_l^{(*, r)}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(r)}.$$

Доказательство. Последовательно используя 1) из предложения 5.1, 4-ое равенство из предложения 6.2, 3) из предложения 5.1, теорему 1.1, 4-ое равенство из предложения 6.2, 2) из предложения 5.1 и 1) из предложения 5.1, получим

$$\begin{aligned} ([A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)})^{(*, r)} &= \\ &= \varphi_{(r)}(\psi_{(r)}([A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)})^{(*, r)}) = \\ &= \varphi_{(r)}(\psi_{(r)}([A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)}))^* = \\ &= \varphi_{(r)}([\psi_{(r)}(A_1) \dots \psi_{(r)}(A_l)]_{l, \sigma, m}^* = \\ &= \varphi_{(r)}([\psi_{(r)}(A_1)]_{l, \sigma^{-1}, m}^* \dots [\psi_{(r)}(A_l)]_{l, \sigma^{-1}, m}^*) = \\ &= \varphi_{(r)}([\psi_{(r)}(A_1^{(*, r)}) \dots \psi_{(r)}(A_l^{(*, r)})]_{l, \sigma^{-1}, m}) = \\ &= [\varphi_{(r)}(\psi_{(r)}(A_1^{(*, r)})) \dots \varphi_{(r)}(\psi_{(r)}(A_l^{(*, r)}))]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(r)} = \\ &= [A_1^{(*, r)} \dots A_l^{(*, r)}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(r)}, \end{aligned}$$

то есть верно второе равенство из формулировки теоремы.

Первое равенство доказывается аналогично. Теорема доказана.

Для теоремы 6.1 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.1–2.17 из теоремы 1.1.

Теорема 6.2. Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(\mathbb{C})$, то

$$(A^{[\bar{1}]_{l, \sigma, m}^{(i)}})^{(\bar{\cdot}, i)} = (A^{(\bar{\cdot}, i)})^{[\bar{1}]_{l, \sigma, m}^{(i)}},$$

$$(A^{[\bar{1}]_{l, \sigma, m}^{(i)}})^{(*, i)} = (A^{(*, i)})^{[\bar{1}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)}},$$

то есть в $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(\mathbb{C})$ операция взятия косога элемента перестановочна и с операцией комплексного сопряжения, и с операцией эрмитового сопряжения.

Доказательство. Последовательно используя 1) из предложения 5.1, 4-ое равенство из предложения 6.2, 4-ое равенство из следствия 5.1, теорему 3.1, первое равенство из следствия 5.1, третье равенство из предложения 6.2 и 1) из предложения 5.1, получим

$$\begin{aligned} (A^{[\bar{1}]_{l, \sigma, m}^{(i)}})^{(*, i)} &= \varphi_{(i)}(\psi_{(i)}((A^{[\bar{1}]_{l, \sigma, m}^{(i)}})^{(*, i)})) = \\ &= \varphi_{(i)}(\psi_{(i)}(A^{[\bar{1}]_{l, \sigma, m}^{(i)}}))^* = \varphi_{(i)}(\psi_{(i)}(A))^{[\bar{1}]_{l, \sigma, m}^{(i)*}} = \\ &= \varphi_{(i)}(\psi_{(i)}(A))^{[\bar{1}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)*}} = (\varphi_{(i)}(\psi_{(i)}(A)))^{[\bar{1}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)*}} = \\ &= ((\varphi_{(i)}(\psi_{(i)}(A)))^{(*, i)})^{[\bar{1}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)*}} = (A^{(*, i)})^{[\bar{1}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)*}}, \end{aligned}$$

то есть верно второе равенство из формулировки теоремы. Первое равенство доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 6.2. Для теоремы 6.2 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 3.1–3.5 из теоремы 3.1.

Замечание 6.3. Для ориентаций (j) и (k) справедливы теоремы, аналогичные теореме 6.2.

Напомним [8], что определителем ориентации (i) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации (i) , обозначаемое символом $\det^{(i)}A$; определителем ориентации (j) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации (j) , обозначаемое символом $\det^{(j)}A$; определителем ориентации (k) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации (k) , обозначаемое символом $\det^{(k)}A$.

Таким образом, если $A = (a_{ijk})$, то, согласно определению,

$$\begin{aligned} \det^{(i)}(a_{ijk})_{m \times n \times n} &= \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) \dots \det(a_{mjk}), \\ \det^{(j)}(a_{ijk})_{n \times m \times n} &= \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) \dots \det(a_{imk}), \\ \det^{(k)}(a_{ijk})_{n \times n \times m} &= \det(a_{ij1})\det(a_{ij2}) \dots \det(a_{ijm}). \end{aligned}$$

Понятно, что для кубической матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ определены все три определителя $\det^{(i)}A$, $\det^{(j)}A$ и $\det^{(k)}A$. Полным определителем кубической матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ называется [8] произведение ее определителей ориентаций (i) , (j) и (k) , обозначаемое символом $\det A$, то есть $\det A = \det^{(i)}A \cdot \det^{(j)}A \cdot \det^{(k)}A$.

Предложение 6.3. Пусть $r \in \{i, j, k\}$, A – пространственная матрица над \mathbb{C} , у которой сечения ориентации (r) являются квадратными. Тогда

$$\det^{(r)}\bar{A} = \overline{\det^{(r)}A}, \quad \det^{(r)}A^* = \overline{\det^{(r)}A}.$$

Доказательство. Пусть для определенности $r = i$,

$$A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times n}(\mathbb{C}).$$

Согласно определению 6.2, $A^* = (b_{ijk})$, где

$$(b_{ijk}) = (a_{ijk})^*, \quad t = 1, \dots, m.$$

Используя соответствующие бинарные результаты, получим

$$\begin{aligned} \det^{(i)}A^* &= \det(a_{1jk})^* \dots \det(a_{mjk})^* = \\ &= \overline{\det(a_{1jk}) \dots \det(a_{mjk})} = \\ &= \overline{\det(a_{1jk}) \dots \det(a_{mjk})} = \overline{\det^{(i)}A}, \end{aligned}$$

то есть верно второе равенство при $r = i$.

Первое равенство для ориентации (i) доказывается аналогично.

Аналогично доказываются и оба равенства для ориентаций (j) и (k) . Предложение доказано.

Следствие 6.1. Если A – кубическая матрица над \mathbb{C} , то

$$\det \bar{A} = \overline{\det A}, \quad \det A^* = \overline{\det A}.$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \det A^* &= \det^{(i)}A^* \cdot \det^{(j)}A^* \cdot \det^{(k)}A^* = \\ &= \overline{\det^{(i)}A} \cdot \overline{\det^{(j)}A} \cdot \overline{\det^{(k)}A} = \\ &= \overline{\det^{(i)}A \cdot \det^{(j)}A \cdot \det^{(k)}A} = \overline{\det A}, \end{aligned}$$

то верно второе равенство.

Первое равенство доказывается аналогично. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208–350.
2. Слипенко, А.К. Абстрактная характеристика матричных операций / А.К. Слипенко // Укр. мат. журнал. – 1974. – Т. 26, №1. – С. 112–114.
3. Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 1 (37), серия В. – С. 30–37.
4. Гальмак, А.М. Полиадические операции на множестве пространственных матриц / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2011. – № 2 (62). – С. 15–21.
5. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.
6. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
7. Гальмак, А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 1–5.
8. Гальмак, А.М. О вектор-матрицах и пространственных матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 75–86.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА – 002).

Поступила в редакцию 07.03.12.

УДК 517.9:530.182

РЕЖИМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ВНЕШНЕМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Р.И. Коржик, С.П. Жогаль

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE REGIMES FUNCTIONING OF NON-AUTONOMOUS VAN DER POL OSCILLATOR WITH DELAY AND EXTERNAL HARMONIC EFFECT

R.I. Korzhik, S.P. Zhogal

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Исследованы режимы функционирования неавтономного осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием при внешнем гармоническом воздействии. Построены карты режимов функционирования системы с наличием запаздывания и без него.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля, стационарные состояния, запаздывание, укороченное уравнение, внешнее периодическое воздействие, бифуркации.

The effect of delay on the dynamical regimes of non-autonomous van der Pol oscillator with an external harmonic influence was investigated. The maps of dynamical regimes for oscillator with delay and without delay were presented.

Keywords: van der Pol oscillator, stationary states, delays, abridged equation, external periodic effect, bifurcation.

Введение

В статье [1] было проведено исследование влияния запаздывания на стационарные состояния укороченного уравнения осциллятора Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием. Из модельного уравнения

$$\ddot{x}_t - (\lambda - \beta x_{t-\delta}^2) \dot{x}_{t-\delta} + x_t = b \sin(\omega t) \quad (0.1)$$

была получена система, соответствующая укороченному уравнению:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= (R - R^3) \cos \theta - \varepsilon \cos \phi, \\ \dot{\phi} &= -(1 - R^2) \sin \theta + (\varepsilon / R) \sin \phi - \Delta. \end{aligned} \quad (0.2)$$

При переходе от системы (0.1) к системе (0.2) использовалась замена:

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda \omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda\sqrt{\lambda/\beta}}, \quad \theta = \delta\omega. \quad (0.3)$$

В системе (0.1) пять параметров (b и ω – соответственно амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия, δ – неотрицательное запаздывание, λ и β – управляющие параметры). Такое количество параметров затрудняет исследование системы, поэтому при исследовании системы удобно использовать укороченное уравнение (0.2), в котором параметров уже три.

1 Укороченное уравнение осциллятора Ван дер Поля

Для укороченного уравнения построены линии бифуркаций (рисунок 1.1). Для каждой из

полученных областей был определен режим функционирования системы в ней.

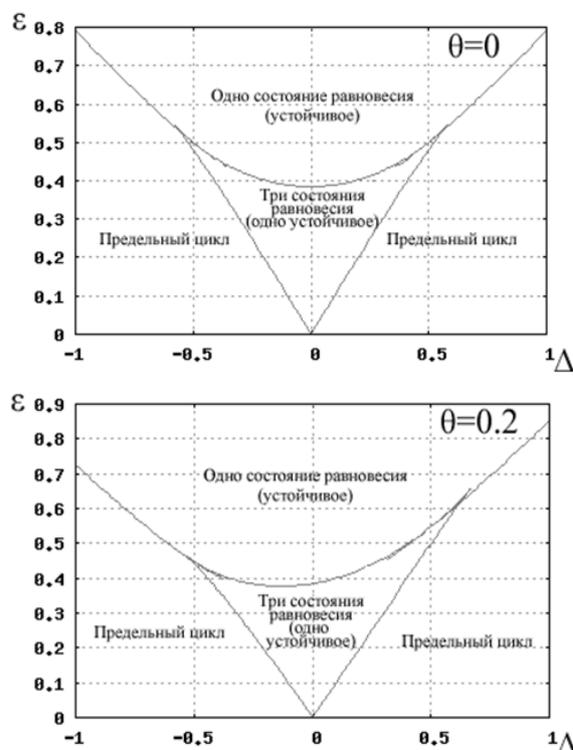


Рисунок 1.1 – Линии бифуркации для укороченного уравнения

На рисунке 1.1 линии бифуркации разделяют плоскость параметров $\Delta - \varepsilon$ на шесть частей. На рисунке отчетливо видны четыре основные области, для каждой области определен режим функционирования. Подробное описание всех областей можно найти в работе [1].

2 Функционирование осциллятора Ван дер Поля при отсутствии запаздывания

Из рисунка 1.1 видно, что во всех областях есть устойчивое состояние равновесия или устойчивый предельный цикл. Это означает, что и в исходном уравнении (0.1) должен наблюдаться периодический режим работы. При помощи численных методов можно построить карту динамических режимов, зафиксировав некоторые параметры. Вид карты динамических режимов с зафиксированными параметрами $\delta = 0$, $\beta = 1.5$, $b = 0.5$ приведен на рисунке 2.1.

Оттенком серого цвета на рисунке 2.1 обозначена характеристика периода предельного цикла. Так как система подвержена внешнему гармоническому воздействию с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, то в целях упрощения тон обозначает не сам период, а его кратность $\frac{2\pi}{\omega}$. Белым цветом обозначена область, в которой определить период не удалось (при построении карты производился поиск периода, не превосходящего $4\frac{2\pi}{\omega}$). На рисунке 2.2 приведена кривая в фазовом пространстве с периодом $2\frac{2\pi}{\omega}$ для $\lambda = 1.76$, $\omega = 1.71$. Приведенная фазовая

кривая соответствует области с предельным циклом на рисунке 1.1 ($\Delta \approx 0.64$; $\varepsilon \approx 0.08$).

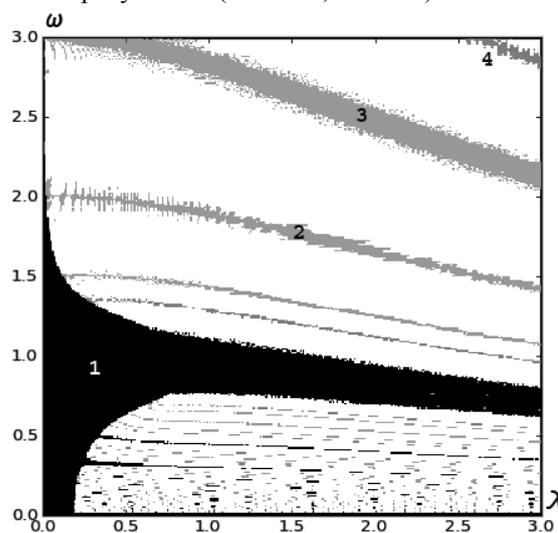


Рисунок 2.1 – Режимы функционирования системы (0.1) в плоскости параметров $\lambda - \omega$

3 Функционирование осциллятора Ван дер Поля при наличии запаздывания

При появлении запаздывания в системе (0.1), т. е. когда $\delta \neq 0$, карта режимов функционирования системы будет иной. Для демонстрации этого явления численными методами построена карта динамических режимов при $\delta \approx 0.5$. Результат построения приведен на рисунке 3.1. Как и в предыдущем случае, производился поиск циклов с периодом не более $4\frac{2\pi}{\omega}$.

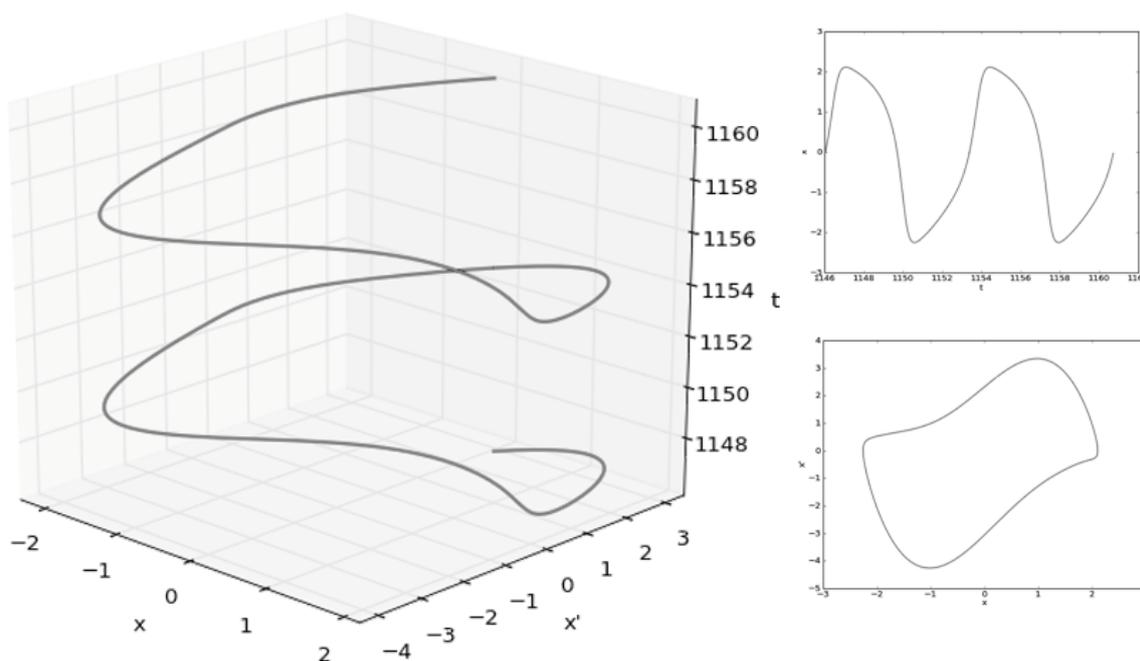


Рисунок 2.2 – Фазовая кривая для системы (0.1) при $\lambda = 1.76$; $\omega = 1.71$

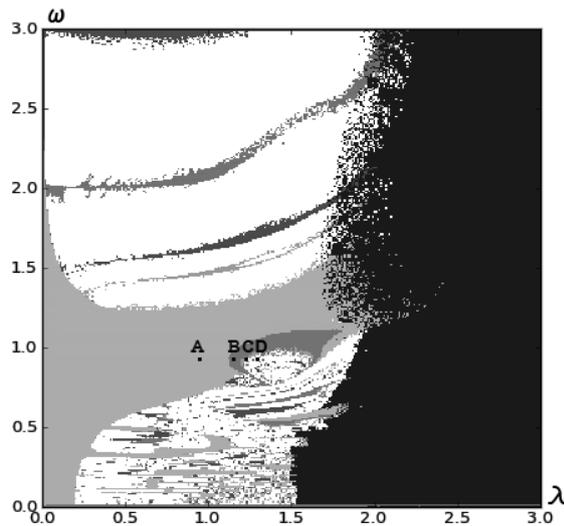


Рисунок 3.1 – Режимы функционирования системы (0.1) в плоскости параметров $\lambda - \omega$ при $\delta \approx 0.5$

Как видно из рисунка 3.1, поведение системы значительно изменилось. Появилась новая область, в которой фазовые кривые устремляются в бесконечность (на рисунке 3.1 эта область обозначена черным цветом). В области с периодом

$\frac{2\pi}{\omega}$ появился новый переходный процесс, который в системе без запаздывания не наблюдался (его площадь была незначительной). На рисунке 3.2 приведены фазовые кривые, демонстрирующие этот переходный процесс. В точке А в системе наблюдается цикл с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, в точке В период цикла уже составляет $2\frac{2\pi}{\omega}$, в точке С

период равен $4\frac{2\pi}{\omega}$. Из рисунка и самих значений периодов видно, что в данной области наблюдается сложная бифуркационная картина. Также следует отметить, что из-за наличия запаздывания фазовое пространство является фактически бесконечномерным, и приведенные фазовые кривые на рисунке 3.2 не являются единственно-возможными. Для построения этих кривых начальные значения брались случайными из интервала $(0,5;1,5)$. Экспериментально удалось найти еще и циклы другого вида. Пример такого цикла приведен на рисунке 3.3.

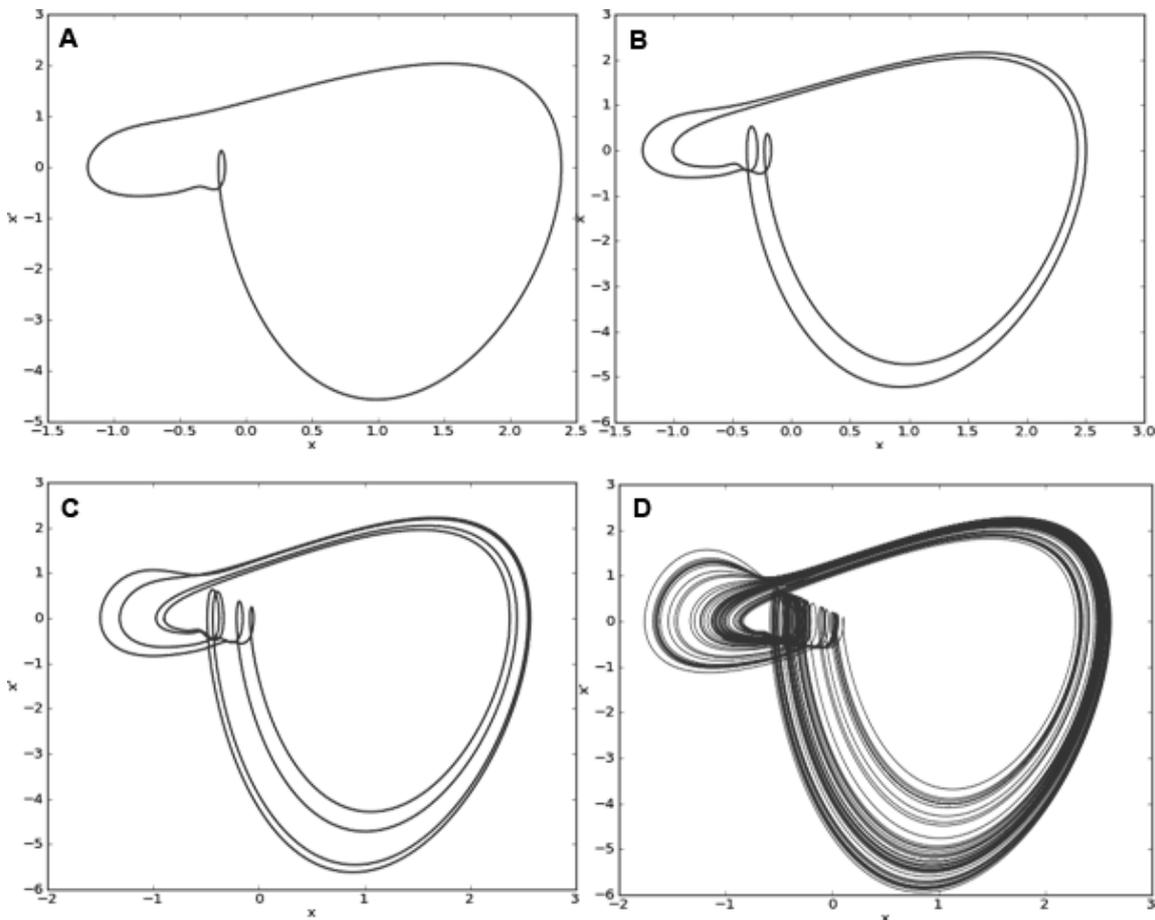


Рисунок 3.2 – Фазовые кривые для осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием

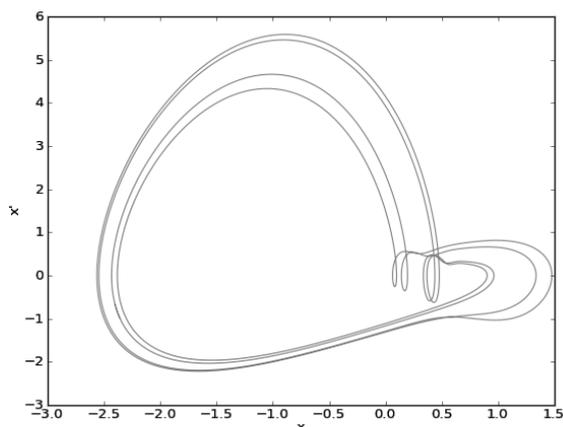


Рисунок 3.3 – Фазовая кривая для осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием

Полученные результаты соответствуют результатам исследования системы (0.2), которые приведены в работе [1]. Областям с одним устойчивым состоянием равновесия системы (0.2) соответствует область с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ системы (0.1). Области с иными периодами (рисунок 2.1, рисунок 3.1) соответствуют областям с предельным циклом (рисунок 1.1). Это объясняется тем, что при получении системы (0.2) производилось усреднение за период $\frac{2\pi}{\omega}$. Если взять любой набор параметров, соответствующий белой области на рисунке 3.1 (область, в которой период больше $4\frac{2\pi}{\omega}$), и отобразить на плоскости только

точки, соответствующие значениям $t = \frac{2\pi}{\omega}k$, где k – целое число, то получится цикл (рисунок 3.4).

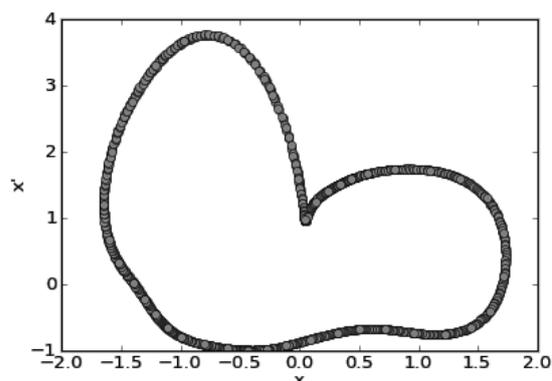


Рисунок 3.4 – Цикл в фазовой плоскости для осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием

Заключение

Таким образом, на основе проведенных исследований можно сделать вывод, что наличие запаздывания в системе (0.1) приводит к существенному изменению ее динамики в области параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коржик, Р.И. Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 206–210.

Поступила в редакцию 20.06.12.

УДК 512.54

О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ, ЗАДАНЫХ НА n -АРНОЙ ГРУППЕ**Ю.В. Кравченко***Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель***ON PARALLEL STRAIGHT LINES DESIGNATED ON AN n -ARY GROUP****Yu.V. Kravchenko***F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Предлагается другой подход к понятию параллелограмма, заданного на n -арной группе. Традиционно параллелограмм, заданный на n -арной группе, – это четыре точки, удовлетворяющие определённому тождеству. Здесь же параллелограмм – это две пары параллельных прямых. Доказывается, что эти два подхода эквивалентны.

Ключевые слова: n -арная группа, обратная последовательность, нейтральная последовательность, параллельные прямые, параллелограмм.

In the paper the other approach to the notion of the parallelogram on the n -ary group is presented. Traditionally a parallelogram on an n -ary group is considered as four points satisfying the determined identity. Here the parallelogram is considered as two pairs of parallel straight lines. These two approaches are proved to be equivalent.

Keywords: n -ary group, inverse sequence, neutral sequence, parallel straight line, parallelogram.

Введение

Изучение алгебраических систем, основы которых заложены в работах А.И. Мальцева [1] и А.Г. Куроша [2], двигалось различными путями, связанными с особенностями изучаемых объектов. Например, исследование групп (бинарных) больше было связано с их подгрупповым строением и применением факторизационных методов (см. [3], [4]). Наиболее удачным и универсальным, как показало время, оказалось применение методов теории классов алгебраических систем.

Среди них следует выделить формационные методы изучения алгебраических систем, получившие наибольшее развитие в Гомельской алгебраической школе, у истоков которой стоит член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор Л.А. Шеметков. Применение этих методов при изучении групп (см. [5]) показало их универсальный характер, что позволило использовать их при исследовании более общих алгебраических систем, например таких, как мультикольца [6]. Более того, они дали толчок в развитии теории подгрупповых функторов [7].

Появление такой ветви теории алгебраических систем, как теория n -арных групп, берёт своё начало с работы Дернте [8]. Дальнейшее изучение n -арных групп связано с работами Поста [9] и С.А. Чунихина [10]. С выходом в свет монографии С.А. Русакова [11] происходит формирование теории n -арных групп в отдельную область алгебры. Следует отметить ряд интересных работ (см. [12, 13]), связанных с изучением подгруппового строения и получения классических факторизаций для n -арных групп. Применение же

формационных методов в теории n -арных групп несколько ограничено следующими двумя аспектами. В n -арной группе могут существовать различные инвариантные подгруппы, пересечение которых пусто, а факторгруппы по которым совпадают. Кроме того, убывающий инвариантный ряд подгрупп не всегда может заканчиваться одноэлементной подгруппой. Поэтому, несмотря на отдельные работы в этом направлении [14], [15], такого же развития, как и для бинарных групп, формационные методы не получили.

Применению геометрических методов при изучении алгебраических систем, в частности, n -арных групп, и наоборот посвящена основная часть монографии С.А. Русакова [16]. Исследования, относящиеся к этому направлению, ведутся по формуле А.Ю. Ольшанского [17] «алгебра – геометрия – алгебра». Ряд интересных результатов в этом направлении получен в работах [18], [19].

Развитию этого направления в изучении n -арных групп посвящена данная работа.

1 Используемые понятия и результаты

Используются обозначения, принятые в [6], [11]. Основные определения и понятия можно найти в [11], [16].

Напомним некоторые наиболее часто встречающиеся.

Операцию, заданную на n -арной группе G , будем обозначать ω_n . Последовательность элементов a_1, a_2, \dots, a_i (или a_i^j) n -арной группы G называется обратной к последовательности элементов b_i^j n -арной группы G , если последовательность a_i^j ,

b_1^j является нейтральной последовательностью в G , то есть для любого элемента $x \in G$ выполняется равенство $(x, a_1^j, b_1^j)\omega_n = x$. Для краткости записи, если нас не интересует структура обратной последовательности, будем писать $a_1^j = (b_1^j)^{-1}$. Четырёхугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ n -арной группы G называется параллелограммом, если $(a, b^{-1}, c)\omega_n = d$.

Лемма 1.1 [16, предложение 2, С. 58]. Если четырёхугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ n -арной группы G является параллелограммом, параллелограммами являются и $\langle b, a, d, c \rangle$, $\langle c, d, a, b \rangle$, $\langle d, c, b, a \rangle$.

2 Параллельность прямых

Пусть G – произвольная n -арная группа. Элементы группы G будем называть также точками. Пусть a и b – произвольные точки n -арной группы G .

Определение 2.1. Под прямой $l(a, b)$ на n -арной группе G , образованной двумя точками a и b , будем понимать такое подмножество множества G , для каждой точки которого выполняется одно из следующих условий:

1. Существуют точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in l(a, b)$, что для любой точки $y \in l(a, b)$ $(y, x_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$ либо $(x_1^{n-1}, y)\omega_n \in l(a, b)$.

2. Существуют точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in l(a, b)$, что для любой точки $y \in l(a, b)$ $(x_1^{i-1}, y, x_i^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$ для любых $i \in [1, n-1]$.

Замечание 2.1. В силу эквивалентности (см. теорема 1.9 [12]) определений n -арной группы, введённых Постом в [9], эквивалентны и условия 1) и 2) в определении 2.1.

Замечание 2.2. Очевидно, что прямые $l(a, b)$ и $l(b, a)$ совпадают.

Замечание 2.3. Не трудно заметить, что каждая прямая на n -арной группе однозначно определяется любыми двумя своими точками.

Определение 2.2. Две прямые $l(a, b)$ и $l(c, d)$, заданные на n -арной группе G , называются параллельными:

1) если $l(a, b)$ и $l(c, d)$ совпадают;

2) если $l(a, b) \neq l(c, d)$, то

а) существует последовательность x_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что для любой точки $g \in l(a, b)$ $(x_1^{i-1}, g, x_i^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$, $i \in [1, n-1]$;

б) существует последовательность y_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что для любой точки $h \in l(c, d)$ $(y_1^{i-1}, h, y_i^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$, $i \in [1, n-1]$.

Замечание 2.4. Условие $l(a, b) = l(c, d)$ равносильно тому, что точки a, b, c, d лежат на одной прямой.

Замечание 2.5. В силу эквивалентности (см. теорема 1.9 [12]) определений n -арной группы, введённых Постом в [9], условия а) и б)

в определении 2.2 можно перефразировать следующим образом:

а') существует последовательность x_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что для любой точки $g \in l(a, b)$ $(g, x_1^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$;

б') существует последовательность y_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что для любой точки $h \in l(c, d)$ $(h, y_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$.

Замечание 2.6. Так как каждая прямая на n -арной группе однозначно определяется своими двумя любыми точками, то условия а) и б) в определении 2.2 можно перефразировать следующим образом:

а'') на прямой $l(a, b)$ найдутся две таких точки f и g , для которых существует последовательность x_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что $(f, x_1^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$ и $(g, x_1^{n-1})\omega_n \in l(c, d)$;

б'') на прямой $l(c, d)$ найдутся две таких точки p и q , для которых существует последовательность y_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что $(p, y_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$ и $(q, y_1^{n-1})\omega_n \in l(a, b)$.

Замечание 2.7. В силу произвольности выбора точек, определяющих каждую прямую, не ограничивая общности рассуждений, условия а) и б) в определении 2.2 можно перефразировать следующим образом:

а''') существует последовательность x_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$ и $(b, x_1^{n-1})\omega_n = d$;

б''') существует последовательность y_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что $(c, y_1^{n-1})\omega_n = a$ и $(d, y_1^{n-1})\omega_n = b$.

Несложная проверка показывает, что справедлива следующая

Лемма 2.1. Бинарное отношение «быть параллельной» является отношением эквивалентности на G .

Согласно замечанию 2.7, если $l(a, b) \parallel l(c, d)$, то существует последовательность x_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$. Но $l(c, d) \parallel l(a, b)$, следовательно, существует последовательность y_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что $(c, y_1^{n-1})\omega_n = a$. Тогда

$$a = (c, y_1^{n-1})\omega_n = (a, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n.$$

Это означает, что x_1^{n-1}, y_1^{n-1} – нейтральная в G последовательность, то есть $x_1^{n-1} = (y_1^{n-1})^{-1}$.

С учётом этих рассуждений и замечаний 2.1–2.7 можно дать определение параллельности прямых на G в следующем виде.

Определение 2.3. Две прямые $l(a, b)$ и $l(c, d)$, заданные на n -арной группе G , называются параллельными:

- 1) если $l(a, b)$ и $l(c, d)$ совпадают;
- 2) если $l(a, b) \neq l(c, d)$, то существует последовательность x_1^{n-1} точек n -арной группы G такая, что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$.

Замечания 2.8. Очевидно, что для любой прямой, заданной на n -арной группе G , всегда найдется параллельная ей прямая, однозначно определяемая некоторой последовательностью элементов n -арной группы G , переводящей произвольный элемент первой прямой в элемент второй прямой.

Определение 2.4. Две прямые, заданные на n -арной группе, называются пересекающимися, если они имеют только одну общую точку.

Лемма 2.2. Если две прямые, заданные на n -арной группе, параллельны и имеют одну общую точку, то они совпадают.

Доказательство тривиально, если взять в качестве искомой последовательности в определении 2.3 нейтральную последовательность.

Теорема 2.1. Пусть a и b – произвольные точки n -арной группы G . Тогда $l(a, b)$ – подгруппа группы G .

Доказательство. Так как операция ассоциативна на G , то очевидно, она будет ассоциативна и на $l(a, b)$, то есть $l(a, b)$ – полугруппа n -арной группы G .

Пусть x – произвольный элемент n -арной группы G . Рассмотрим уравнение

$$(x, a_1^{n-1})\omega_n = a, \quad (2.1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a \in l(a, b)$.

Рассмотрим прямую $l(x, a)$. Покажем, что $l(x, a) \parallel l(a, b)$. Рассмотрим последовательность a_1^{n-1} точек прямой $l(x, a)$. Согласно определению 2.1 $(x, a_1^{n-1})\omega_n = y \in l(x, a)$. Тогда на $l(a, x)$ существует последовательность x_1^{n-1} , $(y, x_1^{n-1})\omega_n = a$. Так как последовательность a_1^{n-1}, x_1^{n-1} состоит из точек прямой $l(x, a)$, то

$$(x, a_1^{n-1}, x_1^{n-1})\omega_n = (y, x_1^{n-1})\omega_n = a.$$

Так как a и $b \in l(a, b)$, то существует последовательность точек $b_1^{n-1} \in l(a, b)$ такая, что $(a, b_1^{n-1})\omega_n = b$. Значит,

$$\begin{aligned} (x, a_1^{n-1}, x_1^{n-1}, b_1^{n-1})\omega_n &= (y, x_1^{n-1}, b_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, b_1^{n-1})\omega_n = b. \end{aligned}$$

Итак, существует последовательность точек $a_1^{n-1}, x_1^{n-1}, b_1^{n-1}$, переводящая точку $x \in l(x, a)$ в точку $b \in l(a, b)$.

Согласно определению 2.3, $l(x, a) \parallel l(a, b)$. А так как $l(x, a) \cap l(a, b) = \{a\}$, то, согласно лемме 2.1, $l(x, a) = l(a, b)$. А это и означает, что $x \in l(a, b)$. То есть уравнение (2.1) разрешимо в $l(a, b)$. Теорема доказана.

Лемма 2.3. Пусть a, b, c – точки n -арной группы G , $c \notin l(a, b)$. На n -арной группе G существует

одна и только одна прямая, параллельная $l(a, b)$ и проходящая через точку c .

Доказательство. Рассмотрим прямую $l(a, b)$. Согласно определению 2.1, существует последовательность a_1^{n-1} точек прямой $l(a, b)$ такая, что $(a, a_1^{n-1})\omega_n = b$. Пусть $x = (c, a_1^{n-1})\omega_n$. Так как c и $x \in l(c, x)$, то существует последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in l(c, x)$, что выполняется $c = (x, x_1^{n-1})\omega_n$. Заметим, что

$$c = (x, x_1^{n-1})\omega_n = (c, a_1^{n-1}, x_1^{n-1})\omega_n,$$

то есть последовательность a_1^{n-1}, x_1^{n-1} является нейтральной. Значит, $x_1^{n-1} = (a_1^{n-1})^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} (b, x_1^{n-1})\omega_n &= (b, (a_1^{n-1})^{-1})\omega_n = \\ &= (a, a_1^{n-1}, (a_1^{n-1})^{-1})\omega_n = a. \end{aligned}$$

Учитывая, что $l(a, b) = l(b, a)$, получаем $l(a, b) \parallel l(c, x)$.

Докажем, что $l(c, x)$ – единственная прямая, параллельная $l(a, b)$ и проходящая через точку c . От противного. Пусть существует две прямых $l(c, x)$ и $l(c, y)$ таких, что $l(c, x) \parallel l(a, b)$ и $l(c, y) \parallel l(a, b)$, $l(c, x) \neq l(c, y)$. Последнее означает, что $y \notin l(c, x)$, то есть прямые $l(c, x)$ и $l(c, y)$ не имеют общих точек, кроме c .

Так как $l(c, y) \parallel l(a, b)$, то для точки $y \in l(c, y)$ существует последовательность точек x_1^{n-1} таких, что

$$(y, x_1^{n-1})\omega_n = b. \quad (2.2)$$

Так как $l(c, x) \parallel l(a, b)$, то $l(a, b) \parallel l(c, x)$. Значит, для точки $b \in l(a, b)$ существует последовательность точек y_1^{n-1} таких, что

$$(b, y_1^{n-1})\omega_n = x. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что $(y, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = x$, где x_1^{n-1}, y_1^{n-1} – некоторая последовательность точек из G . Согласно определению 2.3, $l(c, y) \parallel l(c, x)$. А с учётом леммы 2.2 $l(c, y) = l(c, x)$. Противоречие с предположением. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Любые две несовпадающие прямые на n -арной группе G либо параллельны, либо пересекаются.

Доказательство. Пусть $l(a, b)$ и $l(c, d)$ – две прямые, заданные на n -арной группе G . Если они параллельны, то теорема тривиальна.

Пусть $l(a, b)$ и $l(c, d)$ не параллельны. Очевидно, если они имеют две или более общих точек, то они совпадают, что невозможно по условию. Остаются две возможности:

$$l(a, b) \cap l(c, d) = \{g\} \text{ или } l(a, b) \cap l(c, d) = \emptyset.$$

От противного. Пусть $l(a, b) \cap l(c, d) = \emptyset$.

Итак, $l(a, b)$ и $l(c, d)$ не параллельны,

$$l(a, b) \neq l(c, d),$$

$$l(a, b) \cap l(c, d) = \emptyset.$$

Так как $l(a, b)$ и $l(c, d)$ не параллельны, то в G не найдётся такой последовательности элементов

x_1^{n-1} , что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = c$. Другими словами, для любой последовательности $y_1^{n-1} \in G$

$$(a, y_1^{n-1})\omega_n \neq c. \quad (2.4)$$

Рассмотрим последовательность a^{-1}, c , где a^{-1} – последовательность, обратная к элементу a . Подставим её в (2.4). Получим $(a, a^{-1}, c)\omega_n \neq c$ или $c \neq c$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2.2. Четыре точки a, b, c, d n -арной группы G образуют параллелограмм тогда и только тогда, когда $l(a, b) \parallel l(c, d)$ и $l(a, c) \parallel l(b, d)$.

Доказательство. Пусть

$$l(a, b) \parallel l(c, d) \quad (2.5)$$

и

$$l(b, c) \parallel l(d, a). \quad (2.6)$$

Из (2.5) следует, что существует последовательность точек x_1^{n-1} , что $(a, x_1^{n-1})\omega_n = d$ и $(b, x_1^{n-1})\omega_n = c$.

Из (2.6) следует, что существует последовательность точек y_1^{n-1} , что $(b, y_1^{n-1})\omega_n = a$ и $(c, y_1^{n-1})\omega_n = d$.

Очевидно, что в n -арной группе G существует последовательность элементов, обратная для последовательности y_1^{n-1} . Обозначим её через $(y_1^{n-1})^{-1}$. Тогда

$$b = (a, (y_1^{n-1})^{-1})\omega_n.$$

Рассмотрим прямую $l(b', c')$ такую, что

$$(b, (y_1^{n-1})^{-1})\omega_n = b', \quad (c, (y_1^{n-1})^{-1})\omega_n = c',$$

$$(b', x_1^{n-1})\omega_n = c'.$$

Очевидно, что $l(b', c') \parallel l(b, c)$. Заметим также, что $(c', y_1^{n-1})\omega_n = c$.

Тогда

$$\begin{aligned} d &= (c, y_1^{n-1})\omega_n = (b, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, (y_1^{n-1})^{-1}, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, b^{-1}, b, (y_1^{n-1})^{-1}, x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, b^{-1}, b', x_1^{n-1}, y_1^{n-1})\omega_n = \\ &= (a, b^{-1}, c', y_1^{n-1})\omega_n = (a, b^{-1}, c)\omega_n. \end{aligned}$$

Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть четырёхугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ является параллелограммом, то есть

$$(a, b^{-1}, c)\omega_n = d, \quad (2.7)$$

где $a \in l(a, b)$, $d \in l(c, d)$. Значит, существует последовательность b^{-1}, c точек n -арной группы G , что выполняется (2.7). Согласно определению 2.3, $l(a, b) \parallel l(c, d)$.

Если учесть лемму 1.1 и провести рассуждения для параллелограмма $\langle d, c, b, a \rangle$ аналогично, то получим $l(a, c) \parallel l(b, d)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.
2. Курош, А.Г. Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1973. – 399 с.
3. Холл, М. Теория групп / М. Холл. – М. : ИЛ, 1962. – 468 с.
4. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
6. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 256 с.
7. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп / С.Ф. Каморников [и др.]. – Гомель, 2001. – 237 с. – (Препринт / Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины).
8. Dornte, W. Untersuchungen über einen verall / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 119.
9. Post, E.L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc / E.L. Post. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–305.
10. Чунихин, С.А. К теории неассоциативных n -групп с постулатом К // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 48, № 1. – С. 7–10.
11. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск. : Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
12. Гальмак, А.М. Теоремы Поста и Глускина-Хоссу / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 1997. – 82 с.
13. Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск. : Беларуская навука, 1999. – 182 с.
14. Каморников, С.Ф. Функторы Гашюца / С.Ф. Каморников, Ю.В. Кравченко // Вопросы алгебры. – Гомель, 1999. – Вып. 15. – С. 37–40.
15. Кравченко, Ю.В. Регулярные фильтрующие подгрупповые функторы / Ю.В. Кравченко. – Гомель, 2002. – 10 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 12).
16. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 182 с.
17. Ольшанский, А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах / А.Ю. Ольшанский. – М. : Наука, 1989. – 448 с.
18. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики : Сб. науч. тр. / Ред. С.А. Русаков. – Гомель, 1995. – С. 47–64.
19. Кулаженко, Ю.И. Симметрия, шестиугольники и полуабелевость n -арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 99–106.

Поступила в редакцию 19.06.12.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE FINITE GROUPS FACTORIZABLE BY GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

V.N. Semenchuk, V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена изучению конечных групп, факторизуемых обобщенно субнормальными подгруппами.

Ключевые слова: группа, формация, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, индекс, группа Шмидта.

This work is devoted to the study of finite groups factorizable by generalized subnormal subgroups.

Keywords: group, formation, coradical, generalized subnormal subgroup, index, Schmidt group.

Введение

Классический результат Фиттинга состоит в том, что класс нильпотентных групп \mathcal{N} замкнут относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп. Формации Фиттинга, т. е. формации \mathfrak{F} , замкнутые относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп, стали рассматривать с развитием теории формаций. В 1970 году Хоукс поставил проблему об описании разрешимых наследственных формаций Фиттинга. В работе [1] Хоукс дал описание метанильпотентных наследственных формаций Фиттинга. Брайс и Косси в 1972 году [2] доказали, что любая разрешимая наследственная формация Фиттинга является насыщенной. В.Н. Семенчуком [3], [4] было получено полное описание разрешимых наследственных формаций Фиттинга. Оказалось, что любую разрешимую наследственную формацию Фиттинга \mathfrak{F} можно получить из формаций всех разрешимых π -групп (для различных множеств π простых чисел) с помощью операций произведения и пересечения формаций.

Развивая подход Хоукса, Л.А. Шеметков в Коуровской тетради [5] поставил следующую проблему.

Проблема 1. Классифицировать наследственные насыщенные формации \mathfrak{F} с тем свойством, что любая группа $G = AB$, где A и B \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы, принадлежит \mathfrak{F} .

В настоящее время такие формации называют сверхрадикальными формациями.

Полное решение данной проблемы, в классе конечных разрешимых групп, было получено В.Н. Семенчуком в работе [6]. В частности, оказалось, что любая разрешимая наследственная

сверхрадикальная формация совпадает с формацией вида $\bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$, где I – некоторое подмножество из $N \times N$ (N – множество всех натуральных чисел, $\pi_i \pi_j$ – некоторые множества простых чисел).

В настоящей работе получено описание непустых сверхрадикальных формаций \mathfrak{F} с условием, что любая минимальная не \mathfrak{F} -группа является разрешимой. В частности, оказалось, что все такие формации являются композиционными.

Известно, что формация всех сверхразрешимых групп не является формацией Фиттинга, но группы, факторизуемые нормальными сверхразрешимыми подгруппами, индексы которых взаимно просты, являются сверхразрешимыми. В связи с этим проблему Л.А. Шеметкова можно сформулировать следующим образом.

Проблема 2. Описать наследственные насыщенные формации \mathfrak{F} , замкнутые относительно произведения обобщенно субнормальных \mathfrak{F} -подгрупп, индексы которых взаимно просты.

В настоящей работе в классе конечных разрешимых групп получено полное решение проблемы 2 для произвольных непустых наследственных формаций.

1 Предварительные сведения

Все группы в работе конечны. В дальнейшем нам потребуются следующие определения и обозначения.

Обозначим через π – некоторое множество простых чисел, G_π – класс всех π -групп.

Если \mathfrak{F} – класс групп и G – группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация называется насыщенной, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p , для которых в \mathfrak{F} имеется неединичная p -группа.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -субнормальности.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппу H группы G называют \mathfrak{F} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{n-1} \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Несколько другое понятие \mathfrak{F} -субнормальности введено Кегелем. Фактически оно объединяет понятие субнормальности и \mathfrak{F} -субнормальности.

Подгруппу H называют \mathfrak{F} -субнормальной в смысле Кегеля или \mathfrak{F} -достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_{n-1} \supseteq H_n = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Формация \mathfrak{X} называется \mathfrak{X} -сверхрадикальной, если любая группа $G \in \mathfrak{X}$ такая, что $G = AB$, где $A, B \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} -субнормальны в G , принадлежит \mathfrak{X} .

Если \mathfrak{X} – класс всех групп, то \mathfrak{X} -сверхрадикальная формация является сверхрадикальной.

$G_{\mathfrak{E}}$ – произведение всех нормальных \mathfrak{E} -подгрупп (разрешимых подгрупп) группы G .

Формация \mathfrak{F} называется композиционной, если из $G/\Phi(G_{\mathfrak{E}}) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

В следующих леммах приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G ;

2) если H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G , то $H \cap K$ – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;

3) если H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы K и K – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G , то H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G ;

4) если H_1 и H_2 – \mathfrak{F} -субнормальные (\mathfrak{F} -достижимые) подгруппы группы G , то $H_1 \cap H_2$ – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G ;

5) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации \mathfrak{F} , то каждая субнормальная подгруппа группы G \mathfrak{F} -субнормальна в G ;

6) если H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G , то H^x \mathfrak{F} -субнормальна (\mathfrak{F} -достижима) в G для любых $x \in G$.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация, H и N – подгруппы группы G , причем N нормальна в G . Тогда:

1) если H \mathfrak{F} -субнормальна (\mathfrak{F} -достижима) в G , то HN \mathfrak{F} -субнормальна (\mathfrak{F} -достижима) в G и HN/N \mathfrak{F} -субнормальна (\mathfrak{F} -достижима) в G/N ;

2) если $N \subseteq H$, то H \mathfrak{F} -субнормальна (\mathfrak{F} -достижима) в G тогда и только тогда, когда H/N \mathfrak{F} -субнормальна (\mathfrak{F} -достижима) в G/N .

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – формация всех сверхразрешимых групп и H – подгруппа разрешимой группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) H – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G ;

2) H обладает максимальной цепью $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такой, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простые числа, для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть \mathfrak{F} – некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется минимальной не \mathfrak{F} -группой, если G не принадлежит \mathfrak{F} , а любая её собственная подгруппа принадлежит \mathfrak{F} . Множество всех таких групп мы будем обозначать $M(\mathfrak{F})$.

Минимальная не \mathfrak{F} -группа также называется критической группой.

Важную роль при доказательстве основных результатов работы (теорема 2.3, теорема 2.4) играет следующая лемма.

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация, G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа, тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – p -группа.

Пусть \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп. Минимальную ненильпотентную группу называют группой Шмидта.

В следующей лемме приведем основные свойства группы Шмидта.

Лемма 1.5. Пусть G – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) G – разрешимая бипримарная группа;

2) $G = [G_p]G_q$, где $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ и G_q – циклическая группа.

Приведем в виде леммы основные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

Лемма 1.6. Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;
- 2) G имеет единственную неединичную нормальную силовскую подгруппу P ;
- 3) $G = [P]S$, где $S / S \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая, либо группа Миллера–Морено.

В леммах 1.7 и 1.8 получены важные свойства \mathfrak{E} -сверхрадикальных формаций.

Лемма 1.7. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная \mathfrak{E} -сверхрадикальная формация. Тогда $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.

Лемма 1.8. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная \mathfrak{E} -сверхрадикальная формация. Если группа Шмидта $H = [H_p]H_q$, где $|H_q| = q$, принадлежит \mathfrak{F} , то формация \mathfrak{F} содержит любую группу $G = [G_p]G_q$, где G_q – циклическая группа.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная \mathfrak{E} -сверхрадикальная формация. Тогда любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа – либо группа простого порядка, либо группа Шмидта.

Теорема 2.2. Любая непустая наследственная сверхрадикальная формация \mathfrak{F} , у которой $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{E}$, является композиционной.

Напомним, что формация \mathfrak{F} называется формацией Шеметкова, если любая минимальная не \mathfrak{F} -группа – либо группа простого порядка, либо группа Шмидта.

В следующей теореме было получено полное описание непустых наследственных \mathfrak{E} -сверхрадикальных формаций, критические группы которых разрешимы.

Теорема 2.3. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) \mathfrak{F} – \mathfrak{E} -сверхрадикальная формация и $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{E}$;
- 2) \mathfrak{F} – формация Шеметкова.

В случае, когда \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация, получаем основной результат работы [6].

В следующей теореме получено решение проблемы 2 для произвольных непустых наследственных формаций.

Теорема 2.4. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация, тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) формация \mathfrak{F} содержит любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ взаимно просты;

2) любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа одного из следующих типов: а) G – группа простого порядка q , где $q \notin \pi(\mathfrak{F})$; б) G – бипримарная p -замкнутая группа ($p \in \pi(G)$), $G_p = G^{\mathfrak{F}}$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$; в) G – p -группа, где $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

Следствие 2.1. Бипримарная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая её силовская подгруппа H обладает максимальной цепью $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такой, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простые числа для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Очевидно, что любая сверхрадикальная формация \mathfrak{F} содержит любую группу $G = AB$, где A, B \mathfrak{F} -субнормальны в G и имеют взаимно простые индексы в G . Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример. Пусть \mathfrak{F} – формация всех сверхразрешимых групп, а \mathfrak{E}_π – формация всех π -групп, где $\pi = \{p, q\}$, p и q – различные простые числа. Рассмотрим формацию $\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_\pi$. Очевидно, что любая минимальная не \mathfrak{X} -группа является либо группой простого порядка, либо бипримарной минимальной несверхразрешимой группой. Согласно лемме 1.6 она является p -замкнутой группой. Тогда из теоремы 2.4 следует, что формация \mathfrak{X} содержит любую группу $G = AB$, где A и B – \mathfrak{X} -субнормальные \mathfrak{X} -подгруппы, индексы которых взаимно просты.

С другой стороны формация \mathfrak{X} не является сверхрадикальной. Это следует из того факта, что для любой сверхрадикальной формации \mathfrak{F} любая минимальная не \mathfrak{F} -группа – либо группа Шмидта, либо группа простого порядка.

Заметим, что теоремы 2.3 и 2.4 справедливы, если в их условиях понятие \mathfrak{F} -субнормальности заменить на понятие \mathfrak{F} -достижимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hawkes, T. On Fitting formations / T. Hawkes // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 177–182.
2. Bryce, R.A. Fitting formations of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1972. – Bd. 127, № 3. – S. 217–233.
3. Семенчук, В.Н. Разрешимые totally локальные формации / В.Н. Семенчук // Сибир. мат. журн. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 861–872.
4. Семенчук, В.Н. О разрешимых totally локальных формациях / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1997. – № 11. – С. 109–115.
5. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) // Институт математики СО АН СССР. – Новосибирск, С. 1992. – 172
6. Семенчук, В.Н. Разрешимые \mathfrak{F} -радикальные формации / В.Н. Семенчук // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 261–266.

Поступила в редакцию 16.03.12.

УДК 519.2

О ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ШЛЮЗОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И АДАПТИВНЫМИ ОТДЫХАМИ

Ю.В. Синюгина

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE WAITING TIME IN THE SYSTEM WITH LIMITED GATED SERVICE AND ADAPTIVE VACATIONS

J.V. Sinyugina

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассматривается система массового обслуживания с ограниченной шлюзовой дисциплиной обслуживания и адаптивными отдыхами прибора: в одном цикле обслуживания может быть обслужено только ограниченное число запросов, которые находились в очереди в момент окончания предыдущего отдыха; длительность отдыха прибора зависит от того, находились ли в очереди запросы в момент окончания предыдущего отдыха, или очередь была пуста. Получено распределение времени ожидания запроса в системе.

Ключевые слова: система массового обслуживания, ограниченное шлюзовое обслуживание, адаптивные отдыхи, время ожидания.

We consider the queueing system with limited gated service and adaptive vacations of the server: in one cycle of service only a limited number of customers that were presenting in the system at the moment of the vacation completion may be served; the length of the vacation period depends on whether or not the queue was empty at the previous vacation completion epoch. Distribution of the waiting time is computed.

Keywords: queueing system, limited gated service, adaptive vacations, waiting time.

Введение

В последние годы наблюдается интенсивное развитие беспроводных сетевых технологий, в том числе и широкополосных беспроводных сетей передачи информации. При моделировании последних широко используются системы массового обслуживания с несколькими очередями и одним обслуживающим прибором – системы поллинга. Классификация систем поллинга, методы и результаты их исследований рассматриваются в [4], [5].

С практической точки зрения значительный интерес представляют системы поллинга с так называемым адаптивным поллинговым механизмом, в которых при опросе очередей учитывается состояние очереди, то есть если очередь была пуста в данном цикле опроса, то при следующем опросе эта очередь будет пропущена. Ранее такой механизм рассматривался в работах [6], [7] и [10].

Поллинговые системы массового обслуживания представляют собой достаточно сложный объект для исследования. Наиболее распространенный метод исследования систем поллинга предполагает разбиение поллинговой системы на совокупность систем массового обслуживания с отдыхами прибора, анализ систем с отдыхами, а затем соединение их характеристик в характеристики оригинальной модели. Под отдыхом прибора понимается время, в течение которого прибор обслуживает другие очереди системы. Более

подробно с системами массового обслуживания с отдыхами можно познакомиться, например, в [8].

Для вычисления характеристик системы поллинга с адаптивным поллинговым механизмом сперва необходимо провести анализ системы со шлюзовой дисциплиной обслуживания и отдыхами, где распределение длины отдыхов зависит от того, была ли система пуста в момент окончания предыдущего отдыха (см., например, [9]). Шлюзовая дисциплина обслуживания предполагает, что во время работы прибора могут быть обслужены только те запросы, которые находились в системе в момент окончания предыдущего отдыха.

Иногда в некоторых сетях связи передаваемая информация является жизненно важной, в связи с чем возникает необходимость в уменьшении среднего времени непрерывного обслуживания запросов из одной очереди для уменьшения цикла опроса всех остальных очередей. С этой целью механизм обслуживания системы дополняется ограничением на число запросов, которые могут быть обслужены в одном цикле.

Данная работа посвящена исследованию $M/G/1$ системы с ограниченным шлюзовым обслуживанием и адаптивными отдыхами прибора. Ранее, в [14], для данной системы нами было получено стационарное распределение вероятностей состояний системы в произвольный момент времени. В данной работе мы находим стационарное распределение времени ожидания запроса в системе.

1 Описание системы

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с двумя бесконечными буферами, соединенными шлюзом. На вход системы поступает стационарный пуассоновский поток запросов с параметром λ . Поступая в систему, запросы размещаются в первом буфере (буфер-1). Обслуживание запросов из буфера-1 возможно только после открытия шлюза, когда все запросы, находящиеся в буфере-1, мгновенно переместятся в буфер-2 и шлюз закроется. Дисциплина обслуживания запросов – ограниченная. Обозначим через i_n число запросов в системе в момент окончания n -го отдыха. Тогда число запросов, которые будут обслужены после возвращения прибора с отдыха

$$\Phi = \min\{i_n, M\}, 2 \leq M < \infty.$$

Время обслуживания запроса характеризуется функцией распределения $B(t)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t), \operatorname{Re} s > 0,$$

и конечными начальными моментами

$$b_k = \int_0^\infty t^k dB(t), k \geq 1.$$

После завершения обслуживания Φ запросов прибор уходит на отдых, который будем называть *обычным* отдыхом. Длительность обычного отдыха характеризуется функцией распределения $H(t)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса

$$h(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH(t), \operatorname{Re} s > 0,$$

и конечными начальными моментами

$$h_k = \int_0^\infty t^k dH(t), k \geq 1.$$

После окончания отдыха прибор возвращается в систему и шлюз между буферами снова открывается. Если система оказывается пустой, прибор уходит на *специальный* отдых. Длительность такого отдыха характеризуется функцией распределения $\tilde{H}(t)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса

$$\tilde{h}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\tilde{H}(t), \operatorname{Re} s > 0,$$

и конечными начальными моментами

$$\tilde{h}_k = \int_0^\infty t^k d\tilde{H}(t), k \geq 1.$$

2 Вложенная цепь Маркова

Мы рассматриваем состояния системы в моменты окончания отдыха. Нетрудно видеть, что процесс $i_n, n \geq 1$, является цепью Маркова с дискретным временем.

Лемма 2.1. Одношаговые вероятности переходов $p_{j,k} = P\{i_{n+1} = k, i_n = j\}, k, j \geq 0$, цепи Маркова $i_n, n \geq 1$, имеют вид:

$$p_{0,k} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} d\tilde{H}(t),$$

$$p_{j,k} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB^{*(j)} * H(t), 1 \leq j < M,$$

$$p_{j,k} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!} e^{-\lambda t} dB^{*(M)} * H(t), j \geq M,$$

где $B^{*(j)}(t)$ есть свертка j -го порядка распределения $B(t)$, и $A * H(t)$ – свертка распределений $A(t)$ и $H(t)$.

Можно показать, что при выполнении условия

$$\rho = \lambda \left(b_1 + \frac{h_1}{M} \right) < 1$$

существуют стационарные вероятности состояний цепи

$$q_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{i_n = k\}, k \geq 0.$$

Эти вероятности удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$q_k = \sum_{j=1}^{M-1} q_j \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB^{*(j)} * H(t) +$$

$$+ \sum_{j=M}^{k+M} q_j \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!} e^{-\lambda t} dB^{*(M)} * H(t) +$$

$$+ q_0 \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} d\tilde{H}(t). \tag{2.1}$$

Для решения этой бесконечной системы воспользуемся аппаратом производящих функций. Введем в рассмотрение производящую функцию $Q(z) = \sum_{k=0}^\infty q_k z^k, |z| \leq 1$.

Лемма 2.2. Производящая функция $Q(z)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$Q(z) = \frac{z^M Q_M(\beta(\lambda(1-z)))h(\lambda(1-z))}{z^M - \beta(\lambda(1-z))^M h(\lambda(1-z))} -$$

$$- \frac{Q_M(z)\beta(\lambda(1-z))^M h(\lambda(1-z))}{z^M - \beta(\lambda(1-z))^M h(\lambda(1-z))} +$$

$$+ \frac{z^M q_0(\tilde{h}(\lambda(1-z)) - h(\lambda(1-z)))}{z^M - \beta(\lambda(1-z))^M h(\lambda(1-z))}, \tag{2.2}$$

где

$$Q_M(z) = \sum_{k=0}^{M-1} q_k z^k. \tag{2.3}$$

Доказательство. Умножая уравнения системы (2.1) на соответствующие степени z и суммируя их, получаем следующее уравнение:

$$Q(z) = (Q_M(\beta(\lambda(1-z)))) +$$

$$+ (Q(z) - Q_M(z)) \left(\frac{\beta(\lambda(1-z))}{z} \right)^M h(\lambda(1-z)) +$$

$$+q_0(\tilde{h}(\lambda(1-z)) - h(\lambda(1-z))). \quad (2.4)$$

Выражая из (2.4) $Q(z)$, получим уравнение (2.2). Лемма доказана.

Таким образом, производящая функция $Q(z)$ найдена с точностью до M неизвестных вероятностей $q_k, k = \overline{0, M-1}$. Для нахождения этих вероятностей используем факт аналитичности производящей функции $Q(z)$ в области $|z| < 1$ комплексной плоскости.

С использованием теоремы Клименок-Руше (см. [13]) можно доказать, что при выполнении условия $\rho < 1$ уравнение

$$z^M - (\beta(\lambda(1-z)))^M h(\lambda(1-z)) = 0 \quad (2.5)$$

имеет простой корень $z=1$ и $M-1$ корней $z_m, m = \overline{1, M-1}$, в области $|z| < 1$.

Для нахождения корней $z_m, m = \overline{1, M-1}$, можно воспользоваться теоремой Лагранжа:

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi m i}{M}}}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((\beta(\lambda(1-z)))^M h(\lambda(1-z)) \right) \Big|_{z=0},$$

$$m = \overline{1, M-1}.$$

Поскольку функция $Q(z)$ аналитична в круге $|z| \leq 1$, то числитель правой части уравнения (2.2) также равен нулю в точках $z = z_m, m = \overline{1, M-1}$, зануляющих знаменатель. Таким образом, неизвестные вероятности $q_k, k = \overline{0, M-1}$, удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=0}^{M-1} q_k \left(z_m^M (\beta(\lambda(1-z_m)))^k - z_m^k (\beta(\lambda(1-z_m)))^M \right) h(\lambda(1-z_m)) + q_0 z_m^M (\tilde{h}(\lambda(1-z_m)) - h(\lambda(1-z_m))) = 0, \quad (2.6)$$

$$m = \overline{1, M-1}.$$

Еще одно уравнение получим из условия нормировки $Q(1) = 1$:

$$Q'_M(1) = MQ_M(1) + \frac{q_0 \lambda (\tilde{h}_1 - h_1) - M(1-\rho)}{1 - \lambda b_1}, \quad (2.7)$$

или

$$\sum_{k=0}^{M-1} q_k (M-k) + q_0 \frac{\lambda (\tilde{h}_1 - h_1)}{1 - \lambda b_1} = \frac{M(1-\rho)}{1 - \lambda b_1}. \quad (2.8)$$

Теперь мы можем найти коэффициенты $\{q_k; k = \overline{0, M-1}\}$ функции $Q_M(z)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.1. *Производящая функция $Q(z)$ задается формулами (2.2) и (2.3), где коэффициенты $\{q_k; k = \overline{0, M-1}\}$ функции $Q_M(z)$ определяются как единственное решение системы (2.6), (2.8).*

Пусть L^* есть случайная величина, стохастически эквивалентная числу запросов в

рассматриваемой системе в моменты окончания отдыхов. Из формулы (2.2) с помощью формулы (2.7) получаем формулу для вычисления среднего числа $E[L^*]$ запросов в системе в момент окончания отдыха.

Следствие 2.1. *Среднее число $E[L^*]$ запросов в системе в момент окончания отдыха вычисляется по формуле*

$$E[L^*] = Q'(1) = \frac{(1 - (\lambda b_1)^2)(M(M-1)(Q_M(1) - 1) - Q'_M(1))}{2M(1-\rho)} + \frac{(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))b_2 \lambda^3}{2M(1 - \lambda b_1)(1-\rho)} + \frac{2\lambda(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))(M - \lambda h_1) + (h_2 + q_0(\tilde{h}_2 - h_2))\lambda^2}{2M(1-\rho)}. \quad (2.9)$$

3 Стационарное распределение времени ожидания запроса

Обозначим через $W(x)$ функцию распределения времени ожидания произвольного запроса в системе, а через $w(s)$ ее преобразование Лапласа-Стилтьеса.

Теорема 3.1. *Преобразование Лапласа-Стилтьеса $w(s)$ задается формулой*

$$w(s) = \frac{(1 - \lambda b_1)[Q(1 - s/\lambda)(1 - h(s)) - q_0(\tilde{h}(s) - h(s))]}{(\lambda \beta(s) - \lambda + s)[h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1)]h(s)}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Для нахождения преобразования Лапласа-Стилтьеса функции распределения времени ожидания в системе произвольного запроса сначала найдем производящую функцию $\Pi(z)$ числа запросов в системе в произвольный момент ухода запроса из системы.

Для этого воспользуемся формулой (5.9) из монографии [8], связывающей стационарное распределение числа запросов в системе в произвольный момент ухода запроса из системы со стационарным распределением числа запросов в системе в произвольный момент ухода запроса в данном периоде обслуживания:

$$\Pi(z) = \frac{E \left[\sum_{n=1}^{\Phi} z^{L_n} \right]}{E[\Phi]}, \quad (3.2)$$

где L_n есть число запросов в системе сразу после ухода из системы n -го запроса в период обслуживания, а $E[\Phi]$ есть среднее число запросов, обслуженных в течение периода обслуживания.

Очевидно, что величина $E[\Phi]$ определяется формулой

$$E[\Phi] = \sum_{k=1}^{M-1} k q_k + M \sum_{k=M}^{\infty} q_k = Q'_M(1) + M(1 - Q_M(1)) =$$

$$= \frac{\lambda(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))}{1 - \lambda b_1}. \quad (3.3)$$

Получим выражение для числа L_n запросов в системе сразу после ухода n -го запроса в период обслуживания через величины A_n – число запросов, которые поступили за время обслуживания n -го запроса. Очевидна формула

$$L_n = L^* + A_1 + A_2 + \dots + A_n - n, \quad n = 1, 2, \dots, \Phi.$$

Поскольку случайные величины A_n взаимно независимы и одинаково распределены (производящая функция их распределения есть $\beta(\lambda(1-z))$) и не зависят от случайной величины L^* , получаем формулу

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{n=1}^{\Phi} z^{L_n} \right] &= E \left[\sum_{n=1}^{\Phi} z^{L^* - n} (\beta(\lambda(1-z)))^n \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} P\{L^* = k\} \sum_{n=1}^k z^{k-n} (\beta(\lambda(1-z)))^n + \\ &+ \sum_{k=M}^{\infty} P\{L^* = k\} \sum_{n=1}^M z^{k-n} (\beta(\lambda(1-z)))^n = \\ &= \frac{\beta(\lambda(1-z))}{\beta(\lambda(1-z)) - z} \left(\sum_{k=0}^{M-1} q_k ((\beta(\lambda(1-z)))^k - z^k) + \right. \\ &\quad \left. + ((\beta(\lambda(1-z)))^M - z^M) \sum_{k=M}^{\infty} q_k z^{k-M} \right) = \\ &= \frac{\beta(\lambda(1-z))}{\beta(\lambda(1-z)) - z} \left(Q_M(\beta(\lambda(1-z))) - Q(z) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\beta(\lambda(1-z))}{z} \right)^M (Q(z) - Q_M(z)) \right). \quad (3.4) \end{aligned}$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в формулу (3.2), получаем производящую функцию $\Pi(z)$ числа запросов в системе в произвольный момент ухода запроса в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \frac{(1 - \lambda b_1) \beta(\lambda(1-z))}{\lambda(\beta(\lambda(1-z)) - z)(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))} \times \\ &\quad \times \left(Q_M(\beta(\lambda(1-z))) - Q(z) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\beta(\lambda(1-z))}{z} \right)^M (Q(z) - Q_M(z)) \right). \quad (3.5) \end{aligned}$$

Используя выражение (2.4) в (3.5), получаем

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \frac{(1 - \lambda b_1) \beta(\lambda(1-z))}{\lambda(\beta(\lambda(1-z)) - z)(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))} \times \quad (3.6) \\ &\times \frac{(Q(z)(1 - h(\lambda(1-z))) - q_0(\tilde{h}(\lambda(1-z)) - h(\lambda(1-z))))}{h(\lambda(1-z))}. \end{aligned}$$

Из очевидной формулы

$$\Pi(z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} dW(x) \beta(\lambda(1-z))$$

(производящая функция числа запросов в системе в моменты окончания обслуживания при

дисциплине *FIFO* есть производящая функция числа запросов, поступивших в систему за время пребывания в ней уходящего запроса) следует формула

$$w(s) = \Pi(1 - s / \lambda) / \beta(s),$$

из которой и (3.6) и получается формула (3.1). Теорема доказана.

Следствие 3.1. Среднее время ожидания произвольного запроса задается формулой

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{Q'(1)h_1}{\lambda(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))} + \\ &+ \frac{h_2 + q_0(\tilde{h}_2 - h_2)}{2(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))} - \quad (3.7) \\ &- h_1 + \frac{\lambda b_2}{2(1 - \lambda b_1)}. \end{aligned}$$

Используя формулу (2.9) для $Q'(1)$ в (3.7), получаем

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{(1 - (\lambda b_1)^2)[M(M-1)(Q_M(1) - 1) - Q_M''(1)]h_1}{2M\lambda(1-\rho)(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))} + \\ &+ \frac{\lambda b_2}{2(1-\rho)} + \\ &+ \frac{M(1 - \lambda b_1)(h_2 + q_0(\tilde{h}_2 - h_2))}{2M(1-\rho)(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))} + \\ &+ \frac{2(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))M\lambda b_1}{2M(1-\rho)(h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))}. \end{aligned}$$

Следствие 3.2. Преобразование Лапласа-Стилтьеса $T(s)$ функции распределения продолжительности периода обслуживания имеет вид

$$\begin{aligned} T(s) &= \sum_{k=0}^{M-1} q_k (\beta(s))^k + \sum_{k=M}^{\infty} q_k (\beta(s))^M = \\ &= Q_M(\beta(s)) + (\beta(s))^M (1 - Q_M(1)). \end{aligned}$$

Следствие 3.3. Средняя продолжительность T_1 периода обслуживания задается формулой

$$\begin{aligned} T_1 &= b_1 Q_M'(1) + M b_1 (1 - Q_M(1)) = \\ &= \frac{\lambda b_1 (h_1 + q_0(\tilde{h}_1 - h_1))}{1 - \lambda b_1}. \end{aligned}$$

Заключение

В работе рассмотрена система массового обслуживания с ограниченной шлюзовой дисциплиной обслуживания и адаптивными отдыхами прибора. Получено стационарное распределение времени ожидания произвольного запроса в системе, а также некоторые другие характеристики производительности системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vishnevsky, V.M.* Adaptive features of IEEE 802.11 protocol: utilization, tuning and modifications / V.M. Vishnevsky, A.I. Lyakhov // Proc. of 8th HP-OVUA Conf., Berlin, 2001.
2. *Cinlar, E.* Introduction to stochastic process / E. Cinlar. – N.J. : Prentice-Hall, 1975.

3. Dudin A.N. Analysis of model of dynamic reorganization of databases in computer networks / Dudin A.N. // Automatic Control and Computer Science. – 1989. – Vol. 23, № 4. – P. 65–69.
4. Вишнеvский, В.М. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях / В.М. Вишнеvский, О.В. Семенова. – М. : Техносфера, 2007. – 312 с.
5. Vishnevskii, V.M. Mathematical methods to study the polling systems / V.M. Vishnevskii, O.V. Semenova // Automation and Remote Control. – 2006. – Vol. 67. – P. 173–220.
6. Polling model with an adaptive polling scheme / V.M. Vishnevsky [et al.] // Proc. Of Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2006). – Moscow, 2006. – P. 58–64.
7. Vishnevsky, V.M. Mean value analysis for the adaptive polling mechanism / V.M. Vishnevsky, O.V. Semenova, S.A. Shpilev // Queues: flows, systems, networks: Proc. of Int. Conf. “Mathematical Methods for Increasing Efficiency of Information Telecommunication Networks”. – Grodno, 2007. – P. 254–259.
8. Takagi, H. Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation / H. Takagi. – North-Holland, 1991.
9. Queueing Model with Gated Service and Adaptive Vacations / V. Vishnevsky [et al.] // ICC-2009-IEEE International Conference on Communications, 14–18, June, Dresden, Germany. – 2009. – 5 p.
10. Approximate Method to Study $M/G/1$ -Polling System with Adaptive Polling Mechanism / V.M. Vishnevsky [et al.] // Quality Technology and Quantitative Management. – 2012. – Vol. 9, № 2. – P. 211–228.
11. Kuczma, M. Functional equations in a single variable / M. Kuczma. – Warsaw : PWN - Polish Scientific Publishers, 1968. – 385 p.
12. Sumita, S. Performance analysis of inter-processor communications in an electronic switching system with distributed control / S. Sumita // Performance Evaluation. – 1988. – Vol. 9. – P. 83–91.
13. Klimenok, V.I. On the modification of Rouche’s theorem for the queueing theory problems / V.I. Klimenok // Queueing Systems. – 2001. – Vol. 38/4. – P.431–434.
14. Дудин, А. Система с ограниченным шлюзовым обслуживанием и адаптивными отдыхами / А. Дудин, Ю. Синюгина // Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2011), Moscow, October 26–28, 2011. – P. 59–64.

Поступила в редакцию 14.04.12.

**СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ
ПОСТУПЛЕНИЕМ, ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ,
ВЫХОДОМ ПРИБОРА ИЗ СТРОЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕМ**

А.Н. Старовойтов

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

**QUEUEING SYSTEM WITH BATCH ARRIVALS, BATCH SERVICE,
FAILING SERVER AND REGAINING**

A.N. Starovoitov

Belarusian State University of Transport, Gomel

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания, в которую заявки поступают группами случайного размера. На обслуживание также выбирается группа случайного размера. Прибор может выходить из строя, при этом все заявки, которые были в очереди на момент выхода прибора из строя, теряются. Время работы прибора и время восстановления имеют экспоненциальный закон распределения. Находится стационарное распределение процесса, описывающего поведение данной системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, групповое обслуживание.

The author considers a single-server queueing system with batch arrivals and batch service. A server can fail. The failure completely clears the queue of the system if it is not empty. The time of the service and time of regaining are exponentially distributed. Stationary distribution of the states of the process describing the queueing system behavior is found.

Keywords: queueing system, batch arrivals, batch service.

Введение

Системы массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием являются адекватными моделями многих реальных систем. Однако, исследованию таких систем посвящено не так много работ, так как граф переходов процесса, описывающего поведение системы с групповым поступлением и групповым обслуживанием, сильно связан. В работе [1] исследованы система и сеть с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок. В [2] исследована аналогичная система, в которую дополнительно поступает поток катастрофических сбояв. Достаточно полный обзор по системам и сетям с катастрофами дан в [3]. В данной работе исследуется система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием и выходом прибора из строя. Прибор может выходить из строя как при обслуживании требований, так и в свободном состоянии. При выходе прибора из строя все заявки в очереди теряются, а прибор немедленно начинают восстанавливать. Пока прибор не восстановили, он игнорирует все поступающие в систему требования. Время исправной работы прибора и время восстановления имеют экспоненциальный закон распределения.

Установлены необходимые и достаточные условия представления стационарного распределения системы массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием,

выходом прибора из строя и восстановлением в форме смещенного геометрического распределения.

1 Постановка задачи

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания, в которую поступают группы заявок стационарным пуассоновским потоком с интенсивностью λ . Заявки также обслуживаются группами. Обслуживание групп является экспоненциальным с интенсивностью μ . Время нахождения прибора в рабочем состоянии имеет экспоненциальный закон распределения с параметром λ^{-1} . Неисправный прибор немедленно начинают восстанавливать. Все заявки, которые были в очереди на момент выхода прибора из строя, теряются. Пока прибор не восстановил свои функциональные возможности, он игнорирует все поступающие в систему заявки. Время, необходимое для ремонта прибора, имеет экспоненциальный закон распределения с параметром ν . Процессы поступления и обслуживания заявок, выхода прибора из строя и восстановления являются независимыми.

Обозначим X_i – количество заявок в i -й поступающей группе, Y_i – количество заявок в i -й группе, выбранной на обслуживание. Предполагается, что X_i , Y_i – независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с

функциями распределения $A(x)$, $B(x)$, вероятностями значений

$$a(k) = P\{X_i = k\}, \quad b(k) = P\{Y_i = k\}$$

и производящими функциями $\tilde{A}(x)$, $\tilde{B}(x)$ соответственно. Также предположим, что X_i и Y_i имеют конечные математические ожидания.

Состояние системы будем описывать случайным процессом $n(t)$, который будет характеризовать число заявок в системе в момент времени t , когда обслуживающий прибор исправен, неисправное состояние прибора в момент времени t будем обозначать $\tilde{0}$. Тогда $n(t)$ является марковским процессом с пространством состояний $\mathbb{Z}_+ = \{\tilde{0}, 0, 1, \dots\}$.

Цель работы – найти стационарное распределение $p = \{p(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$ вероятностей состояний процесса $n(t)$.

2 Основной результат

Лемма 2.1. *Процесс $n(t)$ является эргодическим.*

Доказательство. Марковский процесс $n(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование системы схематично можно представить как чередование периодов, когда прибор находится в неисправном состоянии ($n(t) = \tilde{0}$), и периодов исправности прибора (в противном случае). Момент выхода обслуживающего прибора из строя является моментом регенерации.

Пусть ξ_i – длительность i -го периода регенерации, $i \geq 1$. Тогда $\xi_i = \zeta + \eta$, где ζ – время пребывания системы в неисправном состоянии (время до восстановления прибора), η – длительность периода исправной работы прибора (время до выхода прибора из строя). Случайная величина ζ имеет экспоненциальный закон распределения с параметром ν , а случайная величина η также имеет экспоненциальный закон распределения с параметром λ^- . Из сказанного следует, что ξ_i имеет абсолютно непрерывное распределение, а математическое ожидание

$$M\xi_i = M\zeta + M\eta = 1/\nu + 1/\lambda^- < +\infty.$$

Таким образом, случайная величина ξ_i имеет абсолютно непрерывное распределение с конечным математическим ожиданием. Тогда из теоремы Смита для регенерирующих процессов (теорема восстановления) [4] следует, что марковский процесс $n(t)$ является эргодическим. Лемма доказана.

Интенсивности переходов процесса $n(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} q(n, n+k) &= \lambda a(k), \quad \text{если } n \geq 0, \quad k \geq 1, \\ q(n, n-k) &= \mu b(k), \quad \text{если } n > k \geq 1, \\ q(n, 0) &= \mu \bar{B}(n), \quad \text{если } n \geq 1, \\ q(n, \tilde{0}) &= \lambda^-, \quad \text{если } n \geq 0, \\ q(\tilde{0}, 0) &= \nu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\bar{B}(n) = 1 - b(1) - b(2) - \dots - b(n-1)$.

Известно [5], что вероятностное распределение $p = \{p(n)\}$ на \mathbb{Z}_+ является стационарным распределением марковского процесса $n(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода

$$q^R : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \setminus \{(n, n) : n \in \mathbb{Z}_+\} \rightarrow [0, \infty),$$

удовлетворяющая соотношениям:

$$\begin{aligned} p(n)q(n, n') &= p(n')q^R(n', n), \\ n, n' &\in \mathbb{Z}_+, \quad n \neq n', \end{aligned} \quad (2.2)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(n, k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^R(n, k), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.3)$$

Тогда функция q^R является функцией интенсивностей перехода обращенного по времени процесса $n(-t)$, который имеет то же стационарное распределение p , что и процесс $n(t)$ (в (2.1) и далее доопределим функцию q равенством $q(n, n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$).

Стационарное распределение p процесса $n(t)$ будем искать в следующем виде

$$p(0) = p_0, \quad p(\tilde{0}) = p_1, \quad (2.4)$$

$$p(n) = (1 - p_0 - p_1)(1 - c)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где p_0, p_1 и c – некоторые числа из интервала $(0, 1)$, причем $p_0 + p_1 < 1$.

Подставляя q из (2.1) и p из (2.4) в (2.2), найдем интенсивности переходов обращенного по времени процесса $n(-t)$:

$$\begin{aligned} q^R(0, n) &= \frac{(1 - p_0 - p_1)\mu\bar{B}(n)(1 - c)^{n-1}}{p_0}, \quad \text{если } n \geq 1, \\ q^R(n, n+k) &= \mu b(k)c^k, \quad \text{если } n \geq 1, \quad k \geq 1, \\ q^R(n, n-k) &= \lambda a(k)c^{-k}, \quad \text{если } n > k \geq 1, \\ q^R(n, 0) &= \frac{\lambda a(n)p_0}{(1 - p_0 - p_1)(1 - c)^{n-1}}, \quad \text{если } n \geq 1, \\ q^R(\tilde{0}, n) &= \frac{(1 - p_0 - p_1)\lambda^-(1 - c)^{n-1}}{p_1}, \quad \text{если } n \geq 1, \\ q^R(\tilde{0}, 0) &= \frac{\lambda^- p_0}{p_1}, \\ q^R(0, \tilde{0}) &= \frac{\nu p_1}{p_0}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.1) и (2.5) в (2.3) при $n = 0$, получим

$$\lambda + \lambda^- = \frac{\nu p_1}{p_0} + \frac{(1-p_0-p_1)(1-c)}{p_0} \mu \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1} \bar{B}(k), \quad (2.6)$$

при $n = \tilde{0}$, получим

$$\nu = \frac{\lambda^- p_0}{p_1} + \frac{(1-p_0-p_1)(1-c)}{p_1} \lambda^- \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1}, \quad (2.7)$$

и при $n \geq 1$, получим

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \lambda^- &= \\ &= \lambda a(n) \frac{p_0}{(1-p_0-p_1)(1-c)c^{n-1}} + \\ &+ \lambda \sum_{k=1}^{n-1} a(n-k)c^{-(n-k)} + \mu \bar{B}(c). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выполняя преобразования в (2.6), получим

$$\lambda + \lambda^- = \frac{\nu p_1}{p_0} + \frac{(1-p_0-p_1)\mu(1-\bar{B}(c))}{p_0},$$

откуда

$$\bar{B}(c) = 1 - \frac{(\lambda + \lambda^-)p_0 - \nu p_1}{\mu(1-p_0-p_1)}. \quad (2.9)$$

Лемма 2.2 [1, с. 46]. Если $\alpha \in (0,1)$, то уравнение $\bar{B}(c) = \alpha$ имеет единственный корень, который находится в промежутке $[\alpha, 1)$.

Используя лемму 2.2 и рассуждая аналогично, как и в [1], получим, что если стационарное распределение в форме (2.4) существует, то необходимо выполняется неравенство

$$\frac{\nu p_1}{\lambda + \lambda^-} < p_0 < \frac{\mu + p_1(\nu - \mu)}{\lambda + \lambda^- + \mu}. \quad (2.10)$$

При этом неравенство $p_0 + p_1 < 1$ будет выполняться, когда

$$p_1 < \frac{\lambda^- + \lambda}{\lambda^- + \lambda + \nu}. \quad (2.11)$$

Также из леммы 2.2 с учетом (2.9) имеем

$$c \geq 1 - \frac{(\lambda + \lambda^-)p_0 - \nu p_1}{\mu(1-p_0-p_1)}. \quad (2.12)$$

Выполняя преобразования в (2.7), получим

$$\nu = \frac{(1-p_1)\lambda^-}{p_1},$$

откуда

$$p_1 = \frac{\lambda^-}{\lambda^- + \nu}. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в неравенство (2.11), видим, что оно выполняется всегда.

Преобразуя (2.10) с учетом (2.13), получим, что для p_0 должно выполняться неравенство

$$\frac{\nu p_1}{\lambda^- + \lambda} < p_0 < (1-p_1) \frac{\lambda^- + \mu}{\lambda^- + \lambda + \mu}. \quad (2.14)$$

Умножая (2.8) на $(cz)^n$ и складывая по всем натуральным n , имеем

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu + \lambda^-) \frac{cz}{1-cz} &= \\ &= \left[\frac{\lambda p_0 c}{(1-p_0-p_1)(1-c)} + \frac{\lambda cz}{1-cz} \right] \bar{A}(z) + \\ &+ \frac{\mu cz}{1-cz} \bar{B}(c), \end{aligned}$$

откуда с учетом (2.9) получим

$$\bar{A}(z) = \frac{(1-c-p_1+cp_1)z}{p_0+z(1-c-p_0-p_1+cp_1)} = \frac{(1-a)z}{1-az},$$

где $a = (p_0 + p_1 - 1 + c(1-p_1)) / p_0$. Для того, чтобы $\bar{A}(z)$ была производящей функцией вероятностного распределения, необходимо и достаточно, чтобы $0 \leq a < 1$. Тогда это распределение является геометрическим распределением с параметром a . Неравенство $a < 1$ выполняется, когда $c < 1$, а из неравенства $a \geq 0$ следует, что

$$(1-p_1)(1-c) \leq p_0.$$

Сопоставляя последнее неравенство с (2.14), получим, что для существования стационарного распределения в форме смещенного геометрического распределения (2.4) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} \max \left\{ (1-p_1)(1-c), \frac{\nu p_1}{\lambda^- + \lambda} \right\} &< \\ &< p_0 < (1-p_1) \frac{\lambda^- + \mu}{\lambda^- + \lambda + \mu}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

p_1 определялось (2.13), а размеры поступающих групп имели геометрическое распределение с параметром $a = (p_0 + p_1 - 1 + c(1-p_1)) / p_0$.

Отметим, что в случае, когда

$$\max \left\{ (1-p_1)(1-c), \frac{\nu p_1}{\lambda^- + \lambda} \right\} = (1-p_1)(1-c),$$

левая часть (2.15) является нестрогим неравенством.

Пусть теперь p_1 определяется (2.13), p_0 выбрано таким образом, что выполняется неравенство (2.15), а размеры поступающих групп имеют геометрическое распределение с параметром $a = (p_0 + p_1 - 1 + c(1-p_1)) / p_0$. Несложно понять, что распределение $p = \{p(n)\}$, определенное в (2.4), удовлетворяет (2.6)–(2.8), т.е. выполняется (2.3). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.1. Для того чтобы стационарное распределение марковского процесса $n(t)$ имело форму смещенного геометрического распределения (2.4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (2.15), а размеры поступающих групп имели геометрическое распределение с параметром $a = (p_0 + p_1 - 1 + c(1-p_1)) / p_0$, где c – корень уравнения (2.9), p_1 определяется (2.13).

3 Пример параметров системы

Покажем, что промежуток для p_0 , задаваемый (2.15), непуст. Пусть c – корень уравнения (2.9), а p_1 определяется (2.13).

Из (2.12) следует, что

$$1 - c \leq \frac{(\lambda + \lambda^-)p_0 - \nu p_1}{\mu(1 - p_0 - p_1)}$$

или

$$(1 - p_1)(1 - c) \leq (1 - p_1) \frac{(\lambda + \lambda^-)p_0 - \nu p_1}{\mu(1 - p_0 - p_1)}. \quad (2.16)$$

Неравенство (2.15) выполняется, например, если

$$\frac{\nu p_1}{\lambda^- + \lambda} < p_0 < \frac{\nu p_1(1 - p_1)(\lambda^- + \lambda + \mu)}{(\lambda^- + \lambda)^2(1 - p_1) + \nu \mu p_1}. \quad (2.17)$$

Действительно, если выполняется правая часть (2.17), то легко убедиться, что

$$p_0 < \frac{\nu p_1(1 - p_1)(\lambda^- + \lambda + \mu)}{(\lambda^- + \lambda)^2(1 - p_1) + \nu \mu p_1} < (1 - p_1) \frac{\lambda^- + \mu}{\lambda^- + \lambda + \mu},$$

т. е. выполняется и правая часть (2.15). При этом

$$\begin{aligned} & (\lambda^- + \lambda)^2(1 - p_1)p_0 + \nu \mu p_1 p_0 < \\ & < \nu p_1(1 - p_1)(\lambda^- + \lambda + \mu), \end{aligned}$$

откуда

$$(1 - p_1) \frac{(\lambda^- + \lambda)p_0 - \nu p_1}{\mu(1 - p_0 - p_1)} < \frac{\nu p_1}{\lambda^- + \lambda}.$$

И, следовательно, если выполняется левая часть (2.17), то, используя последнее неравенство и (2.16), имеем

$$\begin{aligned} & p_0 > \frac{\nu p_1}{\lambda^- + \lambda} > \\ & > (1 - p_1) \frac{(\lambda + \lambda^-)p_0 - \nu p_1}{\mu(1 - p_0 - p_1)} \geq (1 - p_1)(1 - c), \end{aligned}$$

т. е. выполняется левая часть (2.15).

Осталось показать, что промежуток (2.17) непуст, т. е.

$$\frac{\nu p_1}{\lambda^- + \lambda} < \frac{\nu p_1(1 - p_1)(\lambda^- + \lambda + \mu)}{(\lambda^- + \lambda)^2(1 - p_1) + \nu \mu p_1}.$$

Выполняя преобразования и учитывая (2.13), убеждаемся, что последнее неравенство выполняется для любых положительных параметров системы.

Рассмотрим пример. Пусть $\lambda = 5, \mu = 15, \lambda^- = 1, \nu = 10, \check{B}(x) = 0,5x + 0,5x^2$ – производящая функция размера групп, выбираемых на обслуживание, а параметр геометрического распределения размера поступающих групп $a = 0,8$.

Из (2.13) находим $p_1 = 0,091$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} a = \frac{p_0 + p_1 - 1 + c(1 - p_1)}{p_0}; \\ \check{B}(c) = 1 - \frac{(\lambda + \lambda^-)p_0 - \nu p_1}{\mu(1 - p_0 - p_1)}, \end{cases}$$

получим $p_0 = 0,299, c = 0,934$. Проверкой убеждаемся, что неравенство (2.15) выполняется.

Заключение

В данной работе рассмотрена система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием, выходом прибора из строя и восстановлением. Такую систему можно рассматривать как систему, в которую поступает поток катастрофических сбоя, при этом катастрофический сбой не только полностью очищает очередь системы, но и является причиной выхода прибора из строя. Установлены необходимые и достаточные условия представления стационарного распределения вероятностей состояний процесса, описывающего поведение данной системы, в форме смещенного геометрического распределения. Приведен пример параметров системы и пример расчета стационарного распределения вероятностей состояний системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский, Ю.В.* Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений / Ю.В. Малинковский, Е.В. Коробейникова // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 43–56.
2. *Старовойтов, А.Н.* Система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием и катастрофическими сбоями / А.Н. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3(8). – С. 78–80.
3. *Бочаров, П.П.* G-сети: развитие теории мультипликативных сетей / П.П. Бочаров, В.М. Вишневецкий // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 5. – С. 46–74.
4. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. / В. Феллер. – М.: Мир, 1984. – 752 с.
5. *Kelly, F.P.* Reversibility and stochastic networks / F.P. Kelly. – N.Y.: Wiley, 1979. – 230 p.

Поступила в редакцию 27.09.12.

УДК 512.542

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП 3'-ИНДЕКСОВ

В.Н. Тютянов

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

PRODUCT OF TWO SOLVABLE SUBGROUPS OF 3' INDEX

V.N. Tyutyaynov

Gomel Branch of International University, Gomel

При изучении конечных групп важную роль играют те или иные ограничения на индексы подгрупп. Данная тематика рассматривалась в работах Р. Гуральника, Л.С. Казарина, В.С. Монахова и ряда других авторов. Ограничения на индексы подгрупп рассматривались рядом авторов при рассмотрении факторизационных вопросов. Так, Л.С. Казарин установил разрешимость конечной группы, представимой в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп нечетных индексов. В.С. Монаховым исследовалось строение конечной группы, факторизуемой сомножителями примарных индексов, а также строение конечной группы, факторизуемой разрешимыми сомножителями нечетных индексов с рядом дополнительных ограничений, без использования теоремы о классификации простых неабелевых групп.

Ключевые слова: конечная группа, простая неабелева группа, группа Фробениуса, факторизуемая группа.

The restrictions on the indices of subgroups play an important role in the study of finite groups. This theme was considered by R. Guralnik, L.S. Kazarin, V.S. Monahov and other authors. Some authors investigated restrictions on the indices in the consideration of the factorization. L.S. Kazarin proved the solubility of a finite group which is the product of two soluble subgroups of odd index. V.S. Monahov studied the structure of a finite group which is factorized by the factors of prime index. He also studied the structure of a finite group which is factorized by soluble factors of odd index with a number of additional restrictions and without using the theorem on the classification of simple non-Abelian groups.

Keywords: finite group, simple nonabelian group, Frobenius group, factorized group.

Введение и терминология

В работе [1] Л.С. Казарин описал композиционные факторы конечной группы, представимой в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп. Позже [2] им была установлена разрешимость конечной группы, факторизуемой двумя разрешимыми подгруппами нечетных индексов. Естественной является задача описания строения конечной группы, представимой в виде произведения разрешимых подгрупп, индексы которых являются r' -числами для некоторого простого делителя r порядка группы G . Поскольку число 3 делит порядок любой простой неабелевой группы за исключением групп Судзуки, то естественно рассмотреть случай $r = 3$.

В работе рассматриваются только конечные группы. Для удобства читателя приведем основные обозначения и определения. Остальные обозначения можно найти в [3], [4].

$|G|$ – порядок конечной группы G ; $S(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G ; A^l – прямое произведение l групп, изоморфных группе A ; S_n – симметрическая группа степени n ; p -группа – это группа, порядок которой не делится на простое число p ; A_n – знакопеременная группа степени n ; (m, n) – наибольший общий делитель натуральных чисел m и n .

1 Используемые результаты

Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. [1]. Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G . Тогда неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат следующему списку: $PSL_2(q)$, $q > 3$; $PSL_3(q)$, $q < 9$; $PSL_4(2)$, M_{11} , $PSp_4(3)$, $PSU_3(8)$.

Лемма 1.2. [1, лемма 2.3, лемма 2.5]. Пусть $G = AB = AN = BN$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G , N – минимальная нормальная подгруппа группы G , являющаяся неабелевой и единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . Пусть $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где $N_1 \cong N_i$ – простая неабелева группа для всех $i \geq 1$. Тогда:

A и B транзитивно действуют сопряжениями на множестве $\Omega = \{N_1, \dots, N_k\}$. Кроме того,

$$N \cap A = \times_{i=1}^k (N_i \cap A) \text{ и } N \cap B = \times_{i=1}^k (N_i \cap B).$$

$$|N_1| \text{ делит } |Out(N_1)| \parallel |N_1 \cap A| \parallel |N_1 \cap B|.$$

Лемма 1.3. [5]. Пусть конечная группа $G = AB$, причем порядок группы G не делится на 3 и A и B – разрешимые группы. Тогда G является разрешимой группой.

2 Основной результат

Теорема 2.1. Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G . Если $(|G:A|, 3) = (|G:B|, 3) = 1$, тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Покажем, что $S(G)=1$. Пусть $S(G) \neq 1$ и $N \cong Z_p^l$ – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Если $p \neq 3$, то фактор-группа $\bar{G} = G/N = (AN/N)(BN/N)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому \bar{G} , а значит и G , имеет композиционные факторы, изоморфные $PSL_2(7)$. Следовательно, $p = 3$. Если N – силовская 3-подгруппа в группе G , то \bar{G} – произведение двух разрешимых 3'-групп. По лемме 1.3, \bar{G} – разрешима, а поэтому G – разрешимая группа. Значит, N не является силовской 3-подгруппой группы G . В этом случае \bar{G} удовлетворяет условиям теоремы и неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$. Таким образом, $S(G)=1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G , $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Покажем, что $G = AN = BN$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Пусть $L = AN \neq G$. Тогда $L = A(L \cap B)$ – произведение двух разрешимых групп. Так как $A \leq L$, то $L \cap B$ содержит силовскую 3-подгруппу группы G . Поэтому L удовлетворяет условию теоремы и $N_i \cong PSL_2(7)$.

Рассмотрим фактор-группу $\bar{G} = G/N = \bar{A}\bar{B}$. Тогда либо \bar{A} , \bar{B} – 3'-группы и \bar{G} разрешима по лемме 1.3, либо \bar{G} удовлетворяет условию теоремы и ее простые неабелевы композиционные факторы изоморфны $PSL_2(7)$. Следовательно, в обоих случаях неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$. Поэтому $G = AN$. Точно так же $G = BN$. Если M – минимальная нормальная подгруппа в G и $M \neq N$, то группа G изоморфно вкладывается в

$$G/M \times G/N = AM/M \times AN/N \cong A/A \cap M \times A/A \cap N$$

– разрешимая группа. Поэтому N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и выполняются условия леммы 1.2.

Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Так как $S(G)=1$, то $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где $k \geq 1$ и N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Из леммы 1.1 следует, что $|N|$ делится на 3. Поскольку $G = AN$ и подгруппа A содержит силовскую 3-подгруппу группы G , то $A \cap N$ содержит силовскую 3-подгруппу группы N . Из равенства $N = N_1 \times \dots \times N_k$ следует, что $A \cap N_1$ содержит силовскую 3-подгруппу группы N_1 и 3 делит $|A \cap N_1|$. Точно так же, $B \cap N_1$ содержит силовскую 3-подгруппу группы N_1 и 3 делит $|B \cap N_1|$. По лемме 3.2 $|N_1|$ делит $|Out(N_1)| \parallel |N_1 \cap A| \parallel |N_1 \cap B|$. Рассмотрим все случаи из леммы 1.1.

$$(1) N_1 \cong PSL_2(q), q = p^n > 3,$$

$$|Out(N_1)| = n(2, q-1).$$

Пусть сначала $p = 2$. По теореме Диксона [6, теорема 2.8.27] максимальными разрешимыми подгруппами в N_1 , порядок которых делится на 3, могут быть A_4 , диэдральные группы порядков $2(q \pm 1)$, группа Фробениуса порядка $q(q-1)$. Пусть $|N_1 \cap A|$ делит $|A_4| = 12$. Тогда силовская 3-подгруппа в N_1 имеет порядок 3. Если $|N_1 \cap B|$ делит $|A_4| = 12$, тогда

$$\frac{n \cdot 12 \cdot 12}{q(q-1)(q+1)} = \frac{144 \cdot n}{2^n(2^n-1)(2^n+1)}$$

будет являться целым числом. В частности, $2^n(2^n-1)(2^n+1) \leq 144n$. Последнее равенство возможно только при $n = 2$ и $n = 3$. В обоих случаях $\frac{144 \cdot n}{2^n(2^n-1)(2^n+1)}$ не является целым числом.

Отметим, что $(q+1, q-1) = 1$. Если $q+1$ делится на 3, то $|N_1 \cap B|$ делит $2(q+1)$. Поэтому $\frac{n \cdot 12 \cdot 2(q+1)}{q(q-1)(q+1)} = \frac{24 \cdot n}{2^n(2^n-1)}$ – целое число. При

этом $2^n(2^n-1) \leq 24 \cdot n$. Это возможно при $n = 2$ и $n = 3$. Если $n = 2$, то $q+1 = 5$ и не делится на 3. Если $n = 3$, то $q+1 = 9$. Противоречие с тем, что силовская 3-подгруппа в N_1 имеет порядок 3.

Следовательно, $q-1$ делится на 3. Случай, когда $|N_1 \cap B|$ делит $|A_4|$, был рассмотрен. Поэтому можно считать ($q = 2^n$), что $|N_1 \cap B|$ делит $q(q-1)$. Тогда $\frac{n \cdot 12 \cdot q(q-1)}{q(q-1)(q+1)} = \frac{12 \cdot n}{2^n+1}$ – целое чис-

ло. Если $n > 6$, то $\frac{2 \cdot n}{2^n+1} < 1$, что невозможно.

При $n \in \{2, 4, 5, 6\}$ дробь не целое число. При $n = 3$ получим, что $q-1 = 7$ и не делится на 3. Таким образом, подгруппу A_4 можно исключить из списка и считать, что $|N_1 \cap A|$ делит $q(q-1)$. В этом случае $(q+1, 3) = 1$ и $|N_1 \cap B|$ делит $2(q-1)$ или $q(q-1)$. Пусть сначала $|N_1 \cap B|$ делит $2(q-1)$.

Тогда $\frac{n \cdot q(q-1) \cdot 2 \cdot (q-1)}{q(q-1)(q+1)} = \frac{2 \cdot n \cdot (2^n-1)}{2^n+1}$ – целое

число. Так как $(2, 2^n+1) = (2^n-1, 2^n+1) = 1$, то $\frac{n}{2^n+1}$ – целое число, что невозможно. Второй

случай рассматривается совершенно аналогично.

Пусть $p > 2$. По теореме Диксона [6, теорема 2.8.27] максимальными разрешимыми подгруппами в N_1 , порядок которых делится на 3, могут быть A_4 , S_4 , диэдральные подгруппы порядков $q \pm 1$, подгруппа Фробениуса порядка $q(q-1)/2$.

Если $p = 3$, то $n \geq 2$ и силовская 3-подгруппа в N_1 имеет порядок больший 3. Так как 9

не делит $|A_4|$, $|S_4|$ и $(q \pm 1, 3) = 1$, то $|N_1 \cap A|$ и $|N_1 \cap B|$ делят $3^n(3^n - 1)/2$. Отсюда получаем, что

$$\frac{2n \cdot \frac{1}{2} 3^n (3^n - 1) \cdot \frac{1}{2} 3^n (3^n - 1)}{\frac{1}{2} 3^n (3^n - 1)(3^n + 1)} = \frac{n 3^n (3^n - 1)}{3^n + 1}$$

– целое число. Так как $(3^n, 3^n + 1) = 1$, то $\frac{n(3^n - 1)}{3^n + 1}$ – целое число. Из $(3^n - 1, 3^n + 1) = 2$ следует, что n делится на $(3^n + 1)/2$, а поэтому $2n \geq 3^n + 1$, что невозможно.

Таким образом, $p \geq 5$. Пусть $|N_1 \cap A|$ делит $|S_4| = 24$. Если $q+1$ делится на 3, то $|N_1 \cap B|$ делит либо $|A_4| = 12$, либо $q+1$. Пусть сначала $|N_1 \cap B|$ делит $|S_4|$. Тогда

$$\frac{2n \cdot 24 \cdot 24}{\frac{1}{2} q(q-1)(q+1)} = \frac{2^7 \cdot 3^2 \cdot n}{p^n (p^n - 1)(p^n + 1)}$$

– целое число и $p^n (p^n - 1)(p^n + 1) \leq 2^7 \cdot 3^2 \cdot n$. Так как $p \geq 5$, то данное неравенство выполняется при $n = 1, 2, 3$. При этом очевидно, что дробь не является целым числом, так как числитель имеет вид: $2^a 3^b$. Случай, когда $|N_1 \cap B|$ делит $|A_4|$, аналогичен. Пусть $|N_1 \cap B|$ делит $q+1$. Тогда $\frac{2n \cdot 24 \cdot (q+1)}{\frac{1}{2} q(q-1)(q+1)} = \frac{96n}{p^n (p^n - 1)}$ – целое число и $p^n (p^n - 1) \leq 96n$. Это выполняется при $n = 1$ для $p = 5$ и $p = 7$. В обоих случаях выражение $\frac{96n}{p^n (p^n - 1)}$ не является целым числом.

Пусть $q - 1$ делится на 3. Тогда можно считать, что $|N_1 \cap B|$ делит $q(q - 1)/2$ (случаи, когда $|N_1 \cap B|$ делит $|A_4|$ и $|S_4|$, были рассмотрены).

Тогда
$$\frac{2n \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} q(q-1)}{\frac{1}{2} q(q-1)(q+1)} = \frac{48n}{p^n + 1}$$
 – целое число.

В частности, $p^n + 1 \leq 48n$. Это возможно при $n = 1$ и $p \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. Из того, что $p-1$ делится на 3 и $\frac{48}{p+1}$ – целое число, заключаем, $p = 7$ и $N_1 \cong PSL_2(7)$. Данная группа указана в заключении теоремы. Если $n = 2$, то $p = 5$ или $p = 7$. В этом случае $\frac{96}{p^2 + 1}$ не является целым числом. При $n \geq 3$

$p^n + 1 > 48n$ и $\frac{48n}{p^n + 1}$ не целое число.

Пусть $q+1$ делится на 3. Тогда $|N_1 \cap B|$ делит $q+1$ и $\frac{2n \cdot 24 \cdot (q+1)}{\frac{1}{2} q(q-1)(q+1)} = \frac{96n}{p^n (p^n - 1)}$ – целое

число. В частности, $p^n (p^n - 1) \leq 96n$. Это возможно при $n = 1$ и $p = 5, p = 7$. В обоих случаях дробь $\frac{96n}{p^n (p^n - 1)}$ не целое число. Следовательно,

группу S_4 можно исключить из списка. Точно так же исключается группа A_4 .

Таким образом, можно считать, что $|N_1 \cap A|$ делит $q(q - 1)/2$. Так как $(q+1, 3) = 1$, то $|N_1 \cap B|$ делит $q - 1$ или $q(q - 1)$. В первом слу-

чае
$$\frac{2n \cdot \frac{1}{2} q(q-1)(q-1)}{\frac{1}{2} q(q-1)(q+1)} = \frac{2n(p^n - 1)}{p^n + 1}$$
 – целое чис-

ло. Так как $(p^n - 1, p^n + 1) = 2$, то $2n$ делится на $(p^n + 1)/2$ и $p^n + 1 \leq 4n$, что невозможно. Во вто-

ром случае
$$\frac{2n \cdot \frac{1}{2} q(q-1) \cdot \frac{1}{2} q(q-1)}{\frac{1}{2} q(q-1)(q+1)} = \frac{np^n (p^n - 1)}{p^n + 1}$$

– целое число. Так как $(p^n - 1, p^n + 1) = 1, (p^n - 1, p^n + 1) = 2$, то n делится на $(p^n + 1)/2$ и $p^n + 1 \leq 2n$, что невозможно.

(2) $N_1 \cong PSL_3(2)$. Поскольку $PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$, то N_1 содержится в заключении теоремы.

(3) $N_1 \cong PSL_3(3)$, $|Out(N_1)| = 2$. Из того, что $N_1 \cap A, N_1 \cap B$ содержат силовскую 3-подгруппу группы N_1 из списка максимальных подгрупп в $PSL_3(3)$ [3], следует, что $|N_1 \cap A|$ и $|N_1 \cap B|$ делят $|3^2 : 2S_4| = 2^4 \cdot 3^3$. Тогда по лемме 1.2, $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$ делит $2 \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^3$, что невозможно.

(4) $N_1 \cong PSL_3(4)$, $|Out(N_1)| = 12$. Порядок группы $PSL_3(4)$ равен $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Так как в $PSL_3(4)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2 \cdot 7$ [3], то по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(5) $N_1 \cong PSL_3(5)$, $|Out(N_1)| = 2$. Порядок группы $PSL_3(5)$ равен $2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$. Группа $PSL_3(5)$ содержит подгруппу $31:3$ [3], и можно считать, что $|N_1 \cap A|$ делит $31 \cdot 3$. Тогда по лемме 1.2, $|N_1 \cap B|$ должен делиться на $5^3 \cdot 3$. Максимальная разрешимая подгруппа в $PSL_3(5)$ с таким свойством содержится в $5^2 : GL_2(5)$ [3]. Поскольку в группе $GL_2(5)$ не существует разрешимых подгрупп, порядок которых делится на 15, то данный случай невозможен.

(6) $N_1 \cong PSL_3(7)$, $|Out(N_1)| = 6$. Порядок группы $PSL_3(7)$ равен $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19$. Так как в $PSL_3(7)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2 \cdot 19$ [3], то по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(7) $N_1 \cong PSL_3(8)$, $|Out(N_1)|=6$. Порядок группы $PSL_3(8)$ равен $2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73$. Так как в $PSL_3(8)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2 \cdot 73$ [3], то по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(8) $N_1 \cong PSL_4(2)$, $|Out(N_1)|=2$. Порядок группы $PSL_4(2)$ равен $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. В группе $PSL_4(2)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2 \cdot 7$ [3], и по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(9) $N_1 \cong M_{11}$, $|Out(N_1)|=1$. Порядок группы M_{11} равен $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Так как в M_{11} максимальная разрешимая подгруппа, порядок которой делится на 11, имеет порядок 55, то данный случай невозможен.

(10) $N_1 \cong PSp_4(3)$, $|Out(N_1)|=2$. Порядок группы $PSp_4(3)$ равен $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Максимальными разрешимыми подгруппами в $PSp_4(3)$, порядок которых делится на 3^4 , являются параболические подгруппы $3^3:S_4$ и $3_+^{1+2}:2A_4$ [3]. Поэтому $|N_1 \cap A|$ и $|N_1 \cap B|$ не делятся на 5. Противоречие с леммой 1.2.

(11) $N_1 \cong PSU_3(8)$, $|Out(N_1)|=18$. Порядок группы $PSU_3(8)$ равен $2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$. В группе $PSU_3(8)$ нет подгрупп, порядок которых делится

на $3^4 \cdot 19$ [3]. По лемме 3.2 данный случай невозможен.

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kazarin, L.S. Product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. – Vol. 14, № 6. – P. 1001–1066.
2. Казарин, Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами / Л.С. Казарин // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т. 34, № 7–8. – С. 947–950.
3. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London : Clarendon Press, 1985. – 252 p.
4. Gorenstein, D. Finite groups 2nd edn. / D. Gorenstein. – New York : Chelsea, 1980. – 527 p.
5. Сыскин, С.А. Об одном вопросе Р. Бэра / С.А. Сыскин // Сиб. матем. журнал. – 1979. – Т. 20, № 3. – С. 679–681.
6. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967. – 793 s.

Поступила в редакцию 27.03.12.

УДК 517.2

**МНОГОРЕЖИМНАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
СО СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ
РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК**

О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**MULTIREGIME QUEUEING NETWORK WITH RANDOM
STAYING TIME OF DIFFERENT TYPES OF NEGATIVE CUSTOMERS**

O.V. Yakubovich, Y.E. Dudovskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе исследуется модель открытой сети с различными типами положительных, отрицательных заявок и многорежимными стратегиями обслуживания. Время пребывания в каждом узле отрицательных заявок ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Каждый узел сети может работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени его работоспособности. Устанавливаются условия мультипликативности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний исследуемой сети.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, различные типы положительных, отрицательных заявок, многорежимное обслуживание, стационарное распределение.

This paper considers an open queueing network with different types of positive, negative customers and multiregime service strategies. Staying time of negative customers in each node is the random value having exponential distribution. Every node can operate in several regimes answering different degrees of their working capacity. The conditions of multiplicativity and an analytical view of stationary distribution of the network states probabilities are found.

Keywords: queueing network, different types of positive, negative customers, multiregime service, stationary distribution.

Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделями разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных, связи и многих других объектах, имеющих сетевую структуру. В аналитических исследованиях стационарного функционирования сетей массового обслуживания центральным всегда является вопрос нахождения стационарного распределения, которое является отправной точкой большинства исследований в теории массового обслуживания. В последнее время появляется все больше новых интересных моделей, позволяющих учитывать требования современности и возможность применения к сложным реальным объектам, имеющим сетевую структуру.

Впервые понятие отрицательной заявки было введено в работах [1], [2]. Отрицательная заявка не требует обслуживания, при поступлении в непустой узел отрицательная заявка уменьшает длину очереди на единицу. В работе [3] рассматривается модель с ограниченным временем пребывания отрицательных заявок нескольких типов.

Сети с многорежимными стратегиями обслуживания [4] позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени их работоспособности. Режимы, в которых могут

работать узлы сети, пронумерованы, каждый режим отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером производительность узла уменьшается, ухудшается процесс обслуживания. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания.

В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают пуассоновские потоки различных типов положительных и отрицательных заявок. Очереди в узлах сети формируются из положительных и отрицательных заявок. Обслуживания требуют только положительные заявки. Время пребывания в очереди узла для отрицательных заявок ограничено случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром, различным для каждого типа и обратно пропорциональным количеству требований данного типа в очереди узла. Отрицательная заявка, время пребывания в узле которой закончилось, уменьшает количество положительных заявок соответствующего типа на единицу, если такие есть в узле. Отрицательные заявки в рассматриваемой модели, например, могут описывать поведение компьютерных вирусов, воздействие которых на информацию (положительные заявки) происходит через случайное время.

1 Изолированный узел

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает $2M$ независимых пуассоновских потока требований с параметрами $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_M^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_M^-$, при этом λ_u^+ есть интенсивность поступления положительных заявок типа u , λ_u^- есть интенсивность поступления отрицательных заявок типа u . Положительная заявка, поступившая в систему, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в системе на единицу и требует обслуживания. В системе находится M экспоненциальных приборов, u -ый прибор обслуживает положительные заявки типа u . Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и для положительных заявок типа u имеют показательное распределение с параметром μ_u ($u = \overline{1, M}$). Заявки обслуживаются в порядке поступления. Отрицательная заявка типа u , поступившая в систему, увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в системе на единицу. Каждая отрицательная заявка типа u , находящаяся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_u(m_u) = \frac{\tau_u}{m_u}$ для $m_u \geq 1$, где

m_u – число отрицательных заявок типа u в системе, τ_u – некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в системе отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди на одну положительную заявку типа u , если в системе есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных заявок соответствующего типа. Процессы поступления, обслуживания и пребывания в системе независимы.

Предполагается, что система может находиться в одном из l режимов работы ($l = \overline{0, r}$). Состояние рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t характеризуется случайным вектором

$$x(t) = (\bar{n}(t), \bar{m}(t), l(t)) = (n_1(t), \dots, n_M(t), m_1(t), \dots, m_M(t), l(t)),$$

где $n_u(t)$ – количество положительных заявок типа u в системе в момент времени t , $m_u(t)$ – количество отрицательных заявок типа u в системе в момент времени t , $l(t)$ – режим, в котором работает система в момент времени t . Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством состояний

$$X = \{x = (\bar{n}, \bar{m}, l) = (n_1, \dots, n_M, m_1, \dots, m_M, l), n_u, m_u \geq 0, u = \overline{1, M}, l = \overline{0, r}\}.$$

Состояние системы $x = (\overline{0}, \overline{0}, 0)$ обозначим через 0 .

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы системы, находящейся в состоянии $x = (\bar{n}, \bar{m}, l)$, в режиме l ($l = \overline{0, r}$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu(\bar{n}, \bar{m}, l)$ ($\nu(\bar{n}, \bar{m}, l) > 0$) система переходит в $(l+1)$ -ый режим ($l = \overline{0, r-1}$), а с интенсивностью $\varphi(\bar{n}, \bar{m}, l)$ ($\varphi(\bar{n}, \bar{m}, l) > 0$) – в $(l-1)$ -ый режим ($l = \overline{1, r}$). Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в системе.

Предположим, что $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p(x) \sum_{u=1}^M \left[\lambda_u^+ + \lambda_u^- + \mu_u I_{\{n_u \neq 0\}} + \tau_u I_{\{m_u \neq 0\}} + \right. \\ \left. + \nu(x) I_{\{l \neq r\}} + \varphi(x) I_{\{l \neq 0\}} \right] = \\ = \sum_{u=1}^M \left(\lambda_u^+ p(\bar{n} - e_u, \bar{m}, l) I_{\{n_u \neq 0\}} + \right. \\ \left. + \lambda_u^- p(\bar{n}, \bar{m} - e_u, l) I_{\{m_u \neq 0\}} + \right. \\ \left. + \mu_u p(\bar{n} + e_u, \bar{m}, l) + \right. \\ \left. + \tau_u p(\bar{n} + e_u, \bar{m} + e_u, l) + \tau_u p(\bar{n}, \bar{m} + e_u, l) I_{\{n_u = 0\}} \right) + \\ + \nu(\bar{n}, \bar{m}, l - 1) p(\bar{n}, \bar{m}, l - 1) I_{\{l \neq 0\}} + \\ + \varphi(\bar{n}, \bar{m}, l + 1) p(\bar{n}, \bar{m}, l + 1) I_{\{l \neq r\}}, \\ x = (\bar{n}, \bar{m}, l) \in X. \end{aligned}$$

Здесь e_u – единичный вектор размерности M с единицей в u -ой позиции, $I_{\{x\}}$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, 0 – в противном случае.

Лемма 1.1. Для обратимости системы необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{aligned} \nu(n_1, \dots, n_M, l - 1) \varphi(n_1, \dots, n_u - 1, \dots, n_M, l) = \\ = \nu(n_1, \dots, n_u - 1, \dots, n_M, l - 1) \varphi(n_1, \dots, n_M, l), \quad (1.1) \\ n_u \neq 0, u = \overline{1, M}, l = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Теорема 1.1. Пусть для любого $u = \overline{1, M}$ выполняются условия обратимости (1.1) и неравенства

$$\frac{\lambda_u^+}{\mu_u + \lambda_u^-} < 1, \quad \frac{\lambda_u^-}{\tau_u} < 1, \quad \sup_{x \in X} [\nu(x) + \varphi(x)] = c < \infty,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(n_1, \dots, n_M, m_1, \dots, m_M, l) = \prod_{u=1}^M \left(\frac{\lambda_u^+}{\mu_u + \lambda_u^+} \right)^{n_u} \left(\frac{\lambda_u^-}{\tau_u} \right)^{m_u} \prod_{k=1}^l \frac{\nu(0, k-1)}{\varphi(0, k)} p(0),$$

где

$$p(0) = \left(1 - \frac{\lambda_u^+}{\mu_u + \lambda_u^+} \right) \left(1 - \frac{\lambda_u^-}{\tau_u} \right) \left(\sum_{l=0}^r \prod_{k=1}^l \frac{\nu(0, k-1)}{\varphi(0, k)} \right)^{-1}.$$

Здесь произведение, в котором верхний индекс меньше нижнего, полагаем равным единице.

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера.

2 Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов со структурой, описанной выше. В сеть поступают два независимых простейших потока: поток положительных заявок интенсивности λ^+ и поток отрицательных заявок интенсивности λ^- . Положительные и отрицательные заявки могут быть M типов. Каждая заявка потока положительных заявок независимо от других заявок направляется в i -ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(i,u)}^+$ ($i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}$). Оче-

видно, что $\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(i,u)}^+ = 1$. Положительная заяв-

ка, поступившая в узел, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в узле на единицу и требует обслуживания. Каждая заявка потока отрицательных заявок независимо от других заявок направляется в i -ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(i,u)}^-$ ($i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}$). Очевидно, что

$\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(i,u)}^- = 1$. Отрицательная заявка, посту-

пившая в узел, увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в узле на единицу и не требует обслуживания. Каждая отрицательная заявка типа u , находящаяся в i -ом узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с пара-

метром $\tau_{(i,u)}(m_{(i,u)}) = \frac{\tau_{(i,u)}}{m_{(i,u)}}$ для $m_{(i,u)} \geq 1$, где $m_{(i,u)}$

– количество отрицательных заявок типа u в i -ом узле, $\tau_{(i,u)}$ – некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в узле отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди положительных заявок типа u в i -ом узле на единицу, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа, и не производит никаких воздействий на узел, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа.

В каждом узле находится M экспоненциальных приборов, u -ый прибор обслуживает положительные заявки типа u . Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания различных заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок типа u в i -ом узле имеют показательное распределение с параметром $\mu_{(i,u)}$ ($i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}$).

Предполагается, что i -ый узел может находиться в одном из l_i режимов работы ($l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}$). Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)),$$

где

$$x_i(t) = (n_{(i,1)}(t), \dots, n_{(i,M)}(t), m_{(i,1)}(t), \dots, m_{(i,M)}(t), l_i(t))$$

описывает состояние i -го узла в момент времени t . Здесь $n_{(i,u)}(t)$ – число положительных заявок типа u , $m_{(i,u)}(t)$ – число отрицательных заявок типа u , $l_i(t)$ – режим, в котором работает i -ый узел в момент времени t . Процесс $x_i(t)$ имеет пространство состояний

$$X_i = \{x_i = (n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, m_{(i,1)}, \dots, m_{(i,M)}, l_i), n_{(i,u)}, m_{(i,u)} \geq 0, u = \overline{1, M}, l_i = \overline{0, r_i}\}.$$

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $x_i = (\overline{n_i}, \overline{m_i}, l_i)$, в режиме l_i ($l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu_i(\overline{n_i}, \overline{m_i}, l_i)$ ($\nu_i(\overline{n_i}, \overline{m_i}, l_i) > 0$) i -ый узел переходит в $(l_i + 1)$ -ый режим ($l_i = \overline{0, r_i - 1}$), а с интенсивностью $\varphi_i(\overline{n_i}, \overline{m_i}, l_i)$ ($\varphi_i(\overline{n_i}, \overline{m_i}, l_i) > 0$) – в $(l_i - 1)$ -ый режим ($l_i = \overline{1, r_i}$). Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Каждая положительная заявка типа u после завершения обслуживания в i -ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j -ый узел и становится положительной заявкой типа v с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}^+$ или отрицательной заявкой типа v с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}^-$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M (p_{(i,u)(j,v)}^+ + p_{(i,u)(j,v)}^-) + p_{(i,u)0} = 1$$

$$(i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}).$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации неприводима. Процессы поступления и обслуживания в сети независимы.

Нелинейные уравнения трафика для $i = \overline{1, N}$, $u = \overline{1, M}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(i,u)}^+ &= \lambda^+ p_{0(i,u)}^+ + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M \frac{\varepsilon_{(j,v)}^+ \mu_{(j,v)}}{\mu_{(j,v)} + \varepsilon_{(j,v)}^-} p_{(j,v)(i,u)}^+, \\ \varepsilon_{(i,u)}^- &= \lambda^- p_{0(i,u)}^- + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M \frac{\varepsilon_{(j,v)}^+ \mu_{(j,v)}}{\mu_{(j,v)} + \varepsilon_{(j,v)}^-} p_{(j,v)(i,u)}^-. \end{aligned}$$

Доказательство существования решения нелинейных уравнений трафика проводится с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке [5].

Процесс $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, где X_i – пространство состояний i -го узла.

Лемма 2.1. Для обратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнения условий $v_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i - 1) \varphi_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,u)} - 1, \dots, n_{(i,M)}, l_i) = v_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,u)} - 1, \dots, n_{(i,M)}, l_i - 1) \varphi_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i)$, $n_{(i,u)} \neq 0, u = \overline{1, M}, l_i = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, N}$. (2.1)

Пусть $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$\begin{aligned} p(x) \left[\lambda^+ + \lambda^- + \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M (\mu_{(i,u)} I_{\{n_{(i,u)} \neq 0\}} + \tau_{(i,u)} I_{\{m_{(i,u)} \neq 0\}}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N (v_i(x_i) I_{\{l_i \neq r_i\}} + \varphi_i(x_i) I_{\{l_i \neq 0\}}) \right] = \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M \left[p(x - e_{(i,u)}) \lambda^+ p_{0(i,u)}^+ I_{\{n_{(i,u)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(x - e_{(i, M+u)}) \lambda^- p_{0(i,u)}^- I_{\{m_{(i,u)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(x + e_{(i,u)}) \mu_{(i,u)} p_{(i,u)0} + p(x + e_{(i,u)} + e_{(i, M+u)}) \tau_{(i,u)} + \right. \\ \left. + p(n + e_{(i, M+u)}) \tau_{(i,u)} I_{\{n_{(i,u)} = 0\}} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M [p(x + e_{(i,u)} - e_{(j,v)}) \mu_{(i,u)} p_{(i,u)(j,v)}^+ I_{\{n_{(j,v)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(x + e_{(i,u)} - e_{(j, M+v)}) \mu_{(i,u)} p_{(i,u)(j,v)}^- I_{\{m_{(j,v)} \neq 0\}}] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N [p(x - e_{(i, 2M+1)}) v_i(x - e_{(i, 2M+1)}) I_{\{l_i \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(x + e_{(i, 2M+1)}) \varphi_i(x + e_{(i, 2M+1)}) I_{\{l_i \neq r_i\}}] \right], \quad x \in X. \end{aligned}$$

Здесь $e_{(i,k)}$ – единичный вектор размерности $([2M+1] \cdot N)$ с единицей в $((2M+1)(i-1) + k)$ -ой позиции.

Теорема 2.1. Пусть для любых $i = \overline{1, N}$, $u = \overline{1, M}$ выполняются условия обратимости (2.1) и неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{(i,u)}^+}{\mu_{(i,u)} + \varepsilon_{(i,u)}^-} < 1, \quad \frac{\varepsilon_{(i,u)}^-}{\tau_{(i,u)}} < 1, \\ \sup_{x_i \in X_i} [v_i(x_i) + \varphi_i(x_i)] = c_i < \infty, \end{aligned}$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= \prod_{u=1}^M \left(\frac{\varepsilon_{(i,u)}^+}{\mu_{(i,u)} + \varepsilon_{(i,u)}^-} \right)^{n_{(i,u)}} \times \\ &\times \left(\frac{\varepsilon_{(i,u)}^-}{\tau_{(i,u)}} \right)^{m_{(i,u)}} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{v_i(0, k-1)}{\varphi_i(0, k)} p_i(0), \\ p_i(0) &= \left(1 - \frac{\varepsilon_{(i,u)}^+}{\mu_{(i,u)} + \varepsilon_{(i,u)}^-} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{(i,u)}^-}{\tau_{(i,u)}} \right) \times \\ &\times \left(\sum_{l_i=0}^{r_i} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{v_i(0, k-1)}{\varphi_i(0, k)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$(\varepsilon_{(i,u)}^+, \varepsilon_{(i,u)}^-, i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$ – решение нелинейных уравнений трафика.

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

При отсутствии режимов обслуживания результаты работы совпадают с результатами [3]. В случае, когда в узле нет ограничения на время пребывания отрицательных заявок, результаты работы совпадают с [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe, E. Stability of product-form G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probab. Eng. and Inf. Sci. – 1992. – Vol. 6. – P. 271–276.
2. Gelenbe, E. Product-form networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.
3. Якубович, О.В. Стационарное распределение сети массового обслуживания с различными типами отрицательных и положительных заявок и ограничением на время ожидания / О.В. Якубович // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. – 2007. – № 6 (45). – С. 198–202.
4. Летунович, Ю.Е. Открытые неоднородные сети с многорезимными стратегиями обслуживания и ограничением на время пребывания / Ю.Е. Летунович // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы междунар. науч. конф. «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 26–29 января 2009 г. / БГУ; редкол.: А.Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск, 2009. – Вып. 20. – С. 132–137.
5. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 522 с.

Поступила в редакцию 26.06.12.

УДК 681.3.06:624.131

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ

В.Е. Быховцев¹, В.В. Бондарева², Д.В. Прокопенко¹, С.В. Торгонская¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель

ANALYTICAL ALGORITHM OF CONSTRUCTION AND RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODEL OF NONLINEAR DEFORMATIONS OF THE EARTH BASES OF THE BASES

V.E. Bykhautsau¹, V.V. Bondareva², D.V. Prokopenko¹, S.V. Torgonskaya¹

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives, Gomel

В работе грунты рассматриваются как нелинейно-деформируемые твёрдые тела. Закономерность деформационного процесса соответствует аппроксимирующей кривой параболического типа. Особенности аппроксимирующей функции в настоящей работе используются для определения параметров уравнения деформационного процесса. Алгоритм построения и исследования математической модели системы нелинейно-деформируемого грунтового основания разработан на основе принципа минимума полной энергии системы и метода энергетической линеаризации.

Ключевые слова: деформации грунтов, нелинейные математические модели, алгоритм построения и исследования моделей.

In the paper soil are considered as nonlinear-deformable firm bodies. Law of deformation process corresponds to an approximating curve of parabolic type. Features of approximating function in the present work are used for definition of parameters of the equation of deformation process. The algorithm of construction and research of mathematical model of system of the nonlinear-deformable earth basis are developed on the basis of the principle of a minimum of full energy of a system and a power linearization method.

Keywords: deformations soil, nonlinear mathematical models, algorithm of construction and research of models.

Введение

Характерной особенностью современной строительной индустрии является проектирование и возведение высоких и большепролётных зданий, при этом происходит значительное увеличение нагрузки на несущие элементы конструкции и грунтовое основание, вследствие этого их деформации будут происходить за пределом упругости. В целях обеспечения промышленной безопасности строительных сооружений, возникает необходимость разработки новых методик, методов, алгоритмов и программного обеспечения, учитывающих нелинейность деформирования материала конструктивных элементов здания и грунтового основания на стадии проектирования. Это проблемная многокритериальная задача. Определяющим её критерием является условие устойчивости здания на грунтовом основании как единой нелинейной физической системы. Достаточные условия устойчивости определяются признаком Лагранжа-Дирихле: в устойчивом состоянии равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум (энергетический критерий) [1]. Функционал полной энергии системы содержит уравнение деформирования материала

конструктивных элементов физической системы. В физическом плане деформационный процесс элемента системы представляется монотонно возрастающей функцией, имеющей экстремум (максимум) и нулевое начальное значение деформации, т. е. на интервале допустимых нагрузок это будет кривая параболического типа. Указанные особенности аппроксимирующей функции в настоящей работе используются для определения её параметров.

1 Структура и закономерности деформирования грунтов

Грунтами называют рыхлые горные породы, слагающие верхние слои земной коры, образованные в результате выветривания. Именно эта особенность, рыхлость, является определяющей характеристикой грунтов как природных тел при оценке их в качестве оснований фундаментов зданий и сооружений [2], [5]. Структурно грунтовые основания представляют собой весьма сложные напластования различных грунтовых слоев, линз, включений и вклиниваний, которые могут находиться на различной глубине от поверхности, что является осложняющим фактором при оценке грунтов как оснований фундаментов.

Геометрические и физико-механические характеристики и законы деформирования каждого из указанных элементов структуры могут быть самые разнообразные.

Основными свойствами грунтовых оснований являются их сжимаемость (закон уплотнения), водопроницаемость (закон ламинарной фильтрации), контактная сопротивляемость сдвигу (условие прочности) и структурно-фазовая деформируемость (принцип линейной деформируемости) [5]. Принцип линейной деформируемости для грунтов заключается в том, что при небольших изменениях давлений грунты можно рассматривать как линейно деформируемые тела.

При действии внешних сил на грунты как природные минерало-дисперсные дискретные образования возникают как общие деформации, присущие всем сплошным телам, так и деформации, обусловленные взаимными перемещениями отдельных зёрен грунтов и их твёрдых минеральных частиц [5]. Если при действии внешних сил прочность структурных связей между минеральными частицами грунтов не нарушается, то грунты будут деформироваться как сплошные тела; в противном случае деформации будут определяться, главным образом, перемещениями отдельных зёрен грунтов. Поэтому, кроме общих закономерностей, которым подчиняются деформации сплошных тел, для грунтов будет ещё ряд особенностей и закономерностей, обусловленных их природой. Эти закономерности, рассмотренные совместно с уравнениями теоретической механики и механики деформируемых сплошных тел, дают систему зависимостей, достаточную для решения задач механики грунтов, оснований и фундаментов. В теории упругости показано [1], [4], что для изотропного тела все коэффициенты упругости могут быть выражены через две упругие характеристики: модуль нормальной упругости E и коэффициент относительной поперечной деформации μ (коэффициент Пуассона). По многочисленным экспериментальным данным зависимость между напряжением и деформацией для многих тел, в том числе и для грунтов, является нелинейной [2], [5].

2 Механико-математические модели деформирования грунтов

Физико-механические свойства любого деформируемого твёрдого тела определяют его состояние под нагрузкой. Характер и особенности деформационного процесса описываются аналитически или дискретно. Для любого деформируемого твёрдого тела, в том числе элементов структуры грунтового основания, при упругой стадии работы имеет место соотношение (закон Гука)

$$\sigma_i = E \varepsilon_i, \quad (2.1)$$

где σ_i , ε_i – интенсивности напряжений и деформаций.

В этом случае достаточно двух физико-механических характеристик: линейного модуля деформации E и коэффициента Пуассона μ . Существует несколько хорошо отработанных методов их определения [5].

Как следует из многочисленных экспериментов, в физическом плане процесс деформирования твёрдых тел представляется монотонно возрастающей функцией, имеющей экстремум (максимум) и нулевое начальное значение деформации. Для всех твёрдых тел

$$\varepsilon_i \Big|_{\sigma_i=0} = 0. \quad (2.2)$$

Экстремум соответствует переходу в пластическое состояние деформируемого тела. Нагрузка, соответствующая этому экстремуму, называется предельной нагрузкой, до которой реальное нагружение не должно доходить. Реальные нагрузки на деформируемое тело задаются в интервале $[0, P_{пред.}]$. В теоретических исследованиях аппроксимация деформационного процесса в указанном интервале нагрузок может быть представлена некоторой кривой параболического типа. Касательная к кривой деформирования в точке $O(0,0)$ будет выражать закон линейного деформирования твёрдого тела (2.1).

Рассматривая в качестве деформируемых твёрдых тел грунты, следует отметить, что строительные нормы и правила содержат все основные физико-механические характеристики грунта, методика которых хорошо отработана. Поэтому актуальной является задача определения параметров принимаемой формы закона деформирования на основании нормативных характеристик грунтов, содержащихся в строительных нормах и правилах.

3 Определение параметров закона деформирования параболического типа

Результаты компьютерного моделирования ряда задач механики грунтов, для которых имелись результаты экспериментальных исследований, показали, что погрешность аппроксимации экспериментальных данных получается меньше при законе деформирования в форме

$$\sigma_i^n = A \varepsilon_i^n - B(\varepsilon_i^n)^m; \quad A > 0; \quad m > 1, \quad B > 0. \quad (3.1)$$

Эта функция в точке $(0,0)$ имеет касательную, которая будет являться графиком закона линейного деформирования. Максимум этой функции будет соответствовать предельному состоянию деформируемого твёрдого тела. Эти данные используем при определении параметров закона деформирования в форме (3.1).

Для функции $y = f(x)$ уравнение касательной в т. $P(x_0, y_0)$ будет иметь вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

следовательно, для уравнения (3.1) получим

$$\sigma_i^n - f(\varepsilon_{i,0}^n) = f'(\varepsilon_{i,0}^n)(\varepsilon_i^n - \varepsilon_{i,0}^n).$$

Учитывая закономерность деформационного процесса (2.2), из (3.1) получим $f'(e_{i,0}^n) = A$, следовательно, для уравнения (3.1) уравнение касательной в точке (0,0) будет

$$\sigma_i^n = A e_i^n.$$

Это уравнение описывает процесс линейного деформирования (2.1), поэтому $A = E$ и выражение (3.1) примет вид

$$\sigma_i^n = E \varepsilon_i^n - B (\varepsilon_i^n)^m; \quad m > 1, B > 0. \quad (3.2)$$

Для нелинейных деформаций всякий секущий модуль $E^* < E$. Это утверждение следует также из (3.2):

$$E^* = \sigma_i^n / \varepsilon_i^n = E - B (\varepsilon_i^n)^{m-1},$$

что полностью соответствует физическому процессу.

Условие максимума для (3.2) дает:

$$\sigma_i' = E - m B \varepsilon_{i,\max}^{m-1} = 0, \quad (3.3)$$

откуда:

$$\varepsilon_{i,\max} = \left(\frac{E}{mB} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в (3.2), будем иметь:

$$E \left(\frac{E}{mB} \right)^{\frac{1}{m-1}} - B \left(\frac{E}{mB} \right)^{\frac{m}{m-1}} = \sigma_{i,\max}. \quad (3.5)$$

После ряда несложных преобразований из (3.5) получим

$$B = \frac{\sigma_{i,\max}}{m-1} \left(\frac{(m-1)E}{m\sigma_{i,\max}} \right)^m, \quad (3.6)$$

где $\sigma_{i,\max}$ – предельное напряжение для рассматриваемого элемента грунта.

Учитывая полученное выражение, закон деформирования получим в следующем общем виде

$$\sigma_i^n = E \varepsilon_i^n - \frac{\sigma_{i,\max}}{m-1} \left(\frac{(m-1)E \varepsilon_i^n}{m\sigma_{i,\max}} \right)^m. \quad (3.7)$$

Принимая во внимание, что при нагрузке $P \leq P_{кр}$ процесс деформирования близок к линейному и будет характеризоваться модулем упругости $E^* = \alpha E$, можем записать

$$\sigma_{i,кр} = E^* \varepsilon_{i,кр} \equiv \alpha E \varepsilon_{i,кр}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

откуда следует

$$\varepsilon_{i,кр} = \frac{\sigma_{i,кр}}{\alpha E}, \quad (3.8)$$

где $\sigma_{i,кр}$ – напряжение, до которого грунт деформируется квазилинейно.

Для уравнения (3.2), согласно методу энергетической линеаризации [2] (см. п. 4), имеет место соотношение

$$\sigma_i^e = E \varepsilon_i^n - \frac{2}{1+m} B (\varepsilon_i^n)^m; \quad m > 1, B > 0.$$

Подставив (3.8) в это уравнение, после ряда преобразований, будем иметь

$$B = (1-\alpha) \frac{1+m}{2} \left(\frac{\alpha E}{\sigma_{i,кр}} \right)^{m-1} E. \quad (3.9)$$

Рассматривая совместно (3.6) и (3.9), после ряда преобразований, получим

$$\frac{m-1}{m\alpha} \left(\frac{2}{m(1+m)(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{m-1}} = \sigma_i^\wedge, \quad (3.10)$$

$$\text{где } \sigma_i^\wedge = \frac{\sigma_{i,\max}}{\sigma_{i,кр}}.$$

Критическое $\sigma_{i,кр}$ и предельное $\sigma_{i,\max}$ напряжения определяются на основании теории предельного равновесия и нормативных физико-механических характеристик грунта или принимаются по экспериментальным данным [2], [5]. Для каждой экспериментальной зависимости с допустимым приближением можно установить значение $\sigma_{i,кр}$. Методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования на основании проведенного анализа результатов экспериментальных исследований ряда реальных задач механики грунтов были разработаны следующие эмпирические формулы для определения $\sigma_{i,кр}$ и $\sigma_{i,\max}$:

$$\sigma_{i,\max} = \frac{1-2\mu}{4\pi} \cdot E, \quad \sigma_{i,кр} = \frac{(1-2\mu)^2}{8\pi} \cdot E. \quad (3.11)$$

Значение коэффициента Пуассона μ можно определить по формуле [1], [6]

$$\mu = \frac{1 - \sin \phi}{2 - \sin \phi}, \quad (3.12)$$

где ϕ – угол внутреннего трения.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что для определения α может быть использовано выражение $\alpha = 1 - \frac{\sigma_{i,кр}}{\sigma_{i,\max}} \mu$.

Из (3.10) параметр m определяется итерационно и далее из (3.6) или (3.9) находится параметр B . Этим самым параметры закона деформирования в форме двучлена степени m (3.2) определены полностью, что даёт возможность решать задачи по расчёту нелинейных деформаций грунта на основании его нормативных характеристик, содержащихся в строительных нормах и правилах.

4 Подходы к исследованию нелинейных деформаций грунтов

Системный подход. Совершенствование методов расчета грунтовых оснований и применение компьютерных технологий позволяет подойти к расчету оснований с общих позиций и учесть достаточно большое количество факторов, которые ранее не могли быть учтены в связи с возникающими математическими трудностями [1]–[4]. Стало возможным учесть многие особенности

структуры оснований, нелинейность деформирования каждого ее элемента и др. Все это в целом дает возможность рассматривать грунтовые основания как произвольную неоднородную нелинейно-деформируемую среду с произвольными законами деформирования каждого ее элемента. В настоящей работе предметом исследования является сложная нелинейная физическая система, элементами которой являются грунтовое основание, фундаменты в плане здания и конструкция здания в целом, соответствующая реальной физической системе. Указанная система исследуется в соответствии с принципами системного подхода, суть которого состоит во взаимосвязанном рассмотрении всех элементов (подсистем) системы. При системном подходе система рассматривается не изолированно, а как подсистема более общей системы (системы более высокого ранга). Основным при системном подходе является определение цели, например, условие предельного равновесия деформируемой среды. Для каждой цели должен быть выбран свой надёжный критерий устойчивости. Например, для деформируемых систем это может быть удовлетворение принципа стационарности полной энергии системы. Это позволяет подойти к исследованию систем на довольно содержательном уровне. Наполнение системы определяет ее предметную направленность, и этим предопределяют методологию и технологию ее исследования.

Метод энергетической линеаризации. Метод энергетической линеаризации ориентирован для расчёта напряжённо-деформированного состояния изотропных нелинейно-деформируемых твёрдых тел в стадии активного нагружения [2, С. 114]. Уравнение закона деформирования твёрдого тела в общем случае представим в виде:

$$\sigma_i = f(**)\varepsilon_i, \quad (4.1)$$

где $f(**)$ – функция модуля упругости при нелинейном деформировании, $**$ – совокупность параметров, определяющих значение модуля упругости; при линейном деформировании $f(**) = E$, E – модуль упругости.

Начальное значение модуля упругости $E = E_0$ и коэффициента Пуассона $\mu = \mu_0$.

Твёрдому телу объёма V с границей Γ и законом деформирования (4.1) поставим в соответствие геометрически тождественное гипотетическое линейно-упругое тело с законом деформирования

$$\sigma_i^r = E^r \varepsilon_i. \quad (4.2)$$

Модуль упругости E^r подлежит определению и должен быть таким, чтобы при тождественных граничных условиях для обоих тел их смещения совпадали. В соответствии с принципом возможных перемещений для всякой сплошной среды

$$\delta \left(\int_V \Pi dV - W \right) = 0, \quad (4.3)$$

где Π – потенциал деформации, W – работа внешних сил.

Для единичного элемента

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i, \quad k = \frac{1-2\mu}{E},$$

где ε – средняя деформация, k – коэффициент объёмного сжатия.

В силу поставленного условия для модуля упругости E^r гипотетического линейно-упругого тела и тождественности граничных условий для рассматриваемых твёрдых тел можно утверждать, что работы внешних сил на смещениях для исследуемого нелинейно-деформируемого твёрдого тела и гипотетического линейно-упругого тела будут равны, т. е. будем иметь $W^n = W^r$, тогда

$$\begin{aligned} & \delta \int_V (\Pi^n - \Pi^r) dV = \\ & = \delta \int_V \left(\int \sigma_i^n d\varepsilon_i - \int \sigma_i^r d\varepsilon_i \right) = \\ & = \delta \int_V \left(\int f(**) \varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i \right) dV = 0, \end{aligned}$$

где Π^n – энергия деформации нелинейно-упругого тела, Π^r – энергия деформации гипотетического линейно-упругого тела, индексы “ n ” и “ r ” – признаки нелинейно-упругого и гипотетического линейно-упругого тела.

Полученное выражение представим в следующей форме

$$\begin{aligned} & \delta \int_V \left(f(**) \varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i \right) dV = \\ & = \int_V \left(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i^{-1} \int f(**) \varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i \right) dV = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Введём обозначение

$$F(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1} \int f(**) \varepsilon_i d\varepsilon_i,$$

тогда из (4.4), после ряда несложных преобразований, учитывая (4.2), получим:

$$\begin{aligned} & \delta \int_V \varepsilon_i \left(F(\varepsilon_i) - \frac{\sigma_i^r}{2} \right) dV = \\ & = \int_V \delta \varepsilon_i \left(F(\varepsilon_i) - \frac{\sigma_i^r}{2} \right) dV = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления из (4.5) следует:

$$F(\varepsilon_i) - \frac{\sigma_i^r}{2} = 0. \quad (4.6)$$

Если уравнение закона деформирования твёрдого тела (4.1) имеет вид (3.7)

$$\sigma_i^n = E \varepsilon_i^n - \frac{\sigma_{i,\max}}{m-1} \left(\frac{(m-1) E \varepsilon_i^n}{m \sigma_{i,\max}} \right)^m, \quad (4.7)$$

то ε_i^n и гипотетический модуль деформации E^r определяются из уравнений:

$$\varepsilon_i^H - \frac{2\sigma_{i,\max}}{(m^2 - 1)E} \left(\frac{(m-1)E\varepsilon_i^H}{m\sigma_{i,\max}} \right)^m = \varepsilon_i^e,$$

$$E^r = \frac{\sigma_i^e}{\varepsilon_i^H}.$$

Параметры m и B определяются согласно (3.9)–(3.12).

Коэффициент Пуассона μ также является величиной переменной. Его значение определим исходя из закона изменения объема, согласно которому модуль объемной деформации остается постоянной величиной как в пределах так и за пределами упругости:

$$\frac{E_0}{1-2\mu_0} = \frac{E^r}{1-2\mu^*},$$

где μ, μ^* – постоянный и переменный коэффициенты Пуассона.

Из полученного выражения следует:

$$\mu^* = 0,5 - \frac{E^r}{E_0}(0,5 - \mu),$$

Для полученных значений E^r и μ^* решается еще раз линейная задача, решение которой, согласно принятым условиям, будет являться и решением исходной нелинейной задачи.

Таким образом, предложенный метод позволяет решить нелинейную краевую задачу за два прохода.

Значительной особенностью метода энергетической линеаризации является возможность использования принципа независимости действия сил при решении нелинейных задач. Это возможно вследствие того, что этот метод устанавливает функциональную связь решений, полученных при условии линейного и нелинейного деформирования элементов исследуемой системы.

Методика исследования деформаций грунтовых оснований методом энергетической линеаризации. Учитывая произвольность постановки задачи, решать ее следует методом конечных элементов в сочетании с методом энергетической линеаризации.

Решение линейных задач теории упругости методом конечных элементов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{P\},$$

где $[K]$ – матрица жесткости системы, $\{P\}$ – вектор узловых сил, $\{U\}$ – вектор узловых перемещений.

Метод энергетической линеаризации является двухпроходным. Краевой задаче нелинейной теории упругости ставится в соответствие краевая задача линейной теории упругости.

Алгоритм решения поставленной задачи методом конечных элементов в сочетании с методом энергетической линеаризации может быть представлен следующим образом:

1. Для структурных элементов реального нелинейно-деформируемого грунтового основания должны быть заданы параметры уравнения состояния, модуль упругости E_0 и коэффициент Пуассона μ_0 , соответствующие начальному деформированию (считается линейным), а также значение критического и предельного напряжений или данные для их расчета.

2. Для параметров E_0 и μ_0 решается линейная задача.

На основе полученного решения вычисляются напряжения, деформации, модуль упругости E^r и коэффициент Пуассона μ^r для гипотетического (эквивалентного) основания. Формируется новая матрица жесткости.

3. Для характеристик E^r и μ^r опять решается линейная задача. Полученное решение будет искомым.

Таким образом, метод энергетической линеаризации позволяет решить нелинейную задачу за два прохода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон, В.З.* Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
2. *Быховцев, В.Е.* Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.
3. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 540 с.
4. *Журавков, М.А.* Математическое моделирование деформационных процессов в твёрдых деформируемых средах / М.А. Журавков. – Мн. : БГУ, 2002. – 456 с.
5. *Цытович, Н.А.* Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М. : Стройиздат, 1963. – 542 с.
6. *Никитенко, М.И.* Буроинъекционные анкеры и сваи при возведении и реконструкции зданий и сооружений / М.И. Никитенко. – Мн. : БНТУ, 2007. – 580 с.

Поступила в редакцию 10.02.12.

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПЛОСКОГО ЭКРАНА ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НИЗКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

В.Т. Ерофеев¹, Г.Ч. Шушкевич², А.И. Куц²¹Белорусский государственный университет, Минск²Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

INVESTIGATION OF THE COMPOSITE PLANE SCREEN PROPERTIES WITH IMPACT OF A LOW-FREQUENCY MAGNETIC FIELD

V.T. Erofeenko¹, G.Ch. Shushkevich², A.I. Kuts²¹Belarusian State University, Minsk²Y. Kupala Grodno State University, Grodno

Построено аналитическое решение краевой задачи с нелокальными граничными условиями, описывающее процесс проникновения низкочастотного магнитного поля через тонкий плоский слой из композитного материала. Проведен вычислительный эксперимент и построены графики напряжённости вторичного поля, ослабленного композитным экраном.

Ключевые слова: низкочастотное магнитное поле, композитный экран, напряжённости вторичного поля.

Solution of the boundary problem with nonclassical conditions about low-frequency magnetic field through planar thin-walled composite screen is given. A computing experiment was carried out and graphs of the secondary magnetic field intensity which is shielded by a composite screen were drawn.

Keywords: low-frequency magnetic field, composite screen, secondary magnetic field intensity.

Введение

В современном мире актуальной является проблема формирования электромагнитной обстановки, обеспечивающей нормальное функционирование электронных устройств и экологическую безопасность. Электромагнитная обстановка представляет собой совокупность электромагнитных полей в заданной области пространства, которая может влиять на функционирование конкретных технических устройств и биологических объектов [1]–[5]. Эффективным средством защиты от воздействия электромагнитных излучений является экранирование источников излучения и рабочего места с помощью экранов, поглощающих или отражающих электромагнитную энергию [6]–[10]. В данной работе решена краевая задача с неклассическими граничными условиями, описывающими процесс просачивания низкочастотного магнитного поля через тонкий плоский слой из композитного материала. Проведен вычислительный эксперимент.

1 Постановка задачи

В пространстве R^3 с электрической и магнитной постоянными ε_0, μ_0 соответственно расположен плоский слой D толщины Δ . Этот слой заполнен композитным материалом с электромагнитными комплекснозначными параметрами

ε, μ, Z, G и разделяет все пространство на два полупространства: $D_1(z < 0)$ и $D_2(z > \Delta)$ (рисунок 1.1). Введем цилиндрические координаты $\{\rho, \varphi, z\}$ с началом координат в точке O . Плоский слой D ограничен плоскостями:

$$\Gamma_1 = \{z = 0, 0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\Gamma_2 = \{z = \Delta, 0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

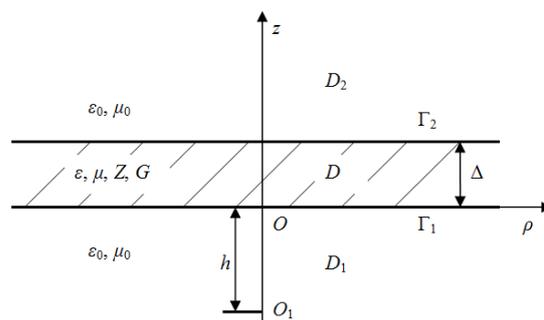


Рисунок 1.1 – Осевое сечение экрана

В полупространстве $D_1(z < 0)$ распространяется первичное электромагнитное поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 . Пусть \vec{E}'_1, \vec{H}'_1 – отраженное поле в D_1 ; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1, \vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$ – суммарное поле в

D_1 ; \vec{E}_2, \vec{H}_2 – поле, прошедшее в область $D_2(z > \Delta)$; \vec{E}, \vec{H} – поле в слое D .

Эти поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}_j &= i\omega\mu_0 \vec{H}_j, \\ \operatorname{rot} \vec{H}_j &= -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_j \text{ в } D_j, j=1,2, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega(\mu \vec{H} + Z\vec{E}), \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega(\varepsilon \vec{E} + G\vec{H}) \text{ в } D, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ω – круговая частота поля, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $Z = Z_r / c$, $G = G_r / c$, c – скорость света.

В случае низкой частоты поля ($0 < \omega < 10^4$) можно использовать потенциальное приближение комплексной амплитуды магнитного поля

$$\vec{H}_j \approx -\operatorname{grad} u_j, \quad j=1,2,$$

где u_j – магнитный потенциал поля, $\Delta u_j = 0$.

Реальные магнитные потенциалы поля и магнитные поля определяются формулами

$$U_j = \operatorname{Re}(u_j e^{-i\omega t}), \quad \vec{H}_j = -\operatorname{grad} U_j.$$

В случае низкой частоты выполняются нелокальные граничные условия сопряжения [11], [12], связывающие потенциалы магнитного поля на сторонах композитного слоя D , распространение поля в котором описывается уравнениями (1.1)

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_1} &= \\ &= \left(\vec{n}, \operatorname{rot} \left(\vec{B}_{11} \operatorname{grad}_\tau u_1 \Big|_{\Gamma_1} + \vec{B}_{12} \operatorname{grad}_\tau u_2 \Big|_{\Gamma_2} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_2} &= \\ &= \left(\vec{n}, \operatorname{rot} \left(\vec{B}_{21} \operatorname{grad}_\tau u_1 \Big|_{\Gamma_1} + \vec{B}_{22} \operatorname{grad}_\tau u_2 \Big|_{\Gamma_2} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \vec{n} – нормальный вектор к поверхности плоского слоя D , и условиям на бесконечности

$$u_1(M) \rightarrow 0, \quad u_2(M) \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

где M – произвольная точка пространства.

Квадратные матрицы размерности два, входящие в граничные условия (1.2), (1.3), характеризуют материал среды плоского слоя D :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{11} &= \frac{i}{\omega} \vec{P}_{21}^{-1} \vec{P}_{22}, \quad \vec{B}_{12} = \frac{1}{i\omega} \vec{P}_{21}^{-1}, \\ \vec{B}_{21} &= \frac{1}{i\omega} (\vec{P}_{12} - \vec{P}_{11} \vec{P}_{21}^{-1} \vec{P}_{22}), \quad \vec{B}_{22} = \frac{1}{i\omega} \vec{P}_{11} \vec{P}_{21}^{-1}, \\ \vec{P}_{11} &= p \begin{pmatrix} p_1 C_2 - p_2 C_1 & p_1 \theta_2 S_2 - p_2 \theta_1 S_1 \\ p_1 \theta_2^{-1} S_2 - p_2 \theta_1^{-1} S_1 & p_1 C_2 - p_2 C_1 \end{pmatrix}, \\ \vec{P}_{12} &= p \begin{pmatrix} C_1 - C_2 & \theta_1 S_1 - \theta_2 S_2 \\ \theta_1^{-1} S_1 - \theta_2^{-1} S_2 & C_1 - C_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\vec{P}_{22} = p \begin{pmatrix} p_1 C_1 - p_2 C_2 & p_1 \theta_1 S_1 - p_2 \theta_2 S_2 \\ p_1 \theta_1^{-1} S_1 - p_2 \theta_2^{-1} S_2 & p_1 C_1 - p_2 C_2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{P}_{21} = -p_1 p_2 \vec{P}_{12},$$

$$C_j = ch(v_j \Delta), \quad S_j = sh(v_j \Delta),$$

$$p_j = \frac{1}{\mu} \left(\frac{i g}{\omega g_j} - Z \right), \quad p = (p_1 - p_2)^{-1}, \quad \theta_j = \frac{g_j v_j}{g},$$

$$k_j = \sqrt{g + 0,5 a^2 + a f_j}, \quad 0 \leq \arg k_j < \pi,$$

$$g = \omega^2 (\varepsilon \mu - ZG), \quad f_j = (-1)^j f_0,$$

$$f_0 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - b^2}, \quad 0 \leq \arg f_0 < \pi,$$

$$b = 0,5 \omega (G + Z), \quad g_j = f_j - 0,5 a, \quad a = i\omega(G - Z),$$

$$v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}.$$

В качестве первичного магнитного поля возьмем поле магнитного диполя, расположенного в точке $O_1(0, 0, -h)$:

$$u_0 = m_0 \frac{z + h}{\left(\sqrt{(z + h)^2 + \rho^2} \right)^3} = \quad (1.5)$$

$$= \int_0^\infty q_0(\lambda) J_0(\lambda \rho) \exp(-\lambda z) d\lambda,$$

где $q_0(\lambda) = m_0 \lambda e^{-\lambda h}$, m_0 – const, $J_n(x)$ – функции Бесселя первого рода порядка n [13].

2 Выполнение граничных условий

Решение задачи представим в виде суперпозиции цилиндрических гармонических функций так, чтобы выполнялись условия на бесконечности (1.4):

$$u_1' = \int_0^\infty q_1(\lambda) J_0(\lambda \rho) \exp(\lambda z) d\lambda, \quad z < 0, \quad (2.1)$$

$$u_2 = \int_0^\infty q_2(\lambda) J_0(\lambda \rho) \exp(-\lambda z) d\lambda, \quad z > \Delta. \quad (2.2)$$

Учитывая представления (1.5), (2.1), (2.2) и выполняя граничные условия (1.2), (1.3) с учетом преобразования Ханкеля, получим следующую систему

$$\begin{cases} (\mu_0 + \lambda B_{11}^{21}) q_1(\lambda) + \lambda B_{12}^{21} q_2(\lambda) \exp(-\lambda \Delta) = \\ = (\mu_0 - \lambda B_{11}^{21}) q_0(\lambda), \\ \lambda B_{21}^{21} q_1(\lambda) + (-\mu_0 + \lambda B_{22}^{21}) q_2(\lambda) \exp(-\lambda \Delta) = \\ = -\lambda B_{21}^{21} q_0(\lambda). \end{cases} \quad (2.3)$$

При выполнении граничных условий принималось во внимание, что

$$\begin{aligned} \vec{B}_{11} \vec{A}_\tau &= \begin{pmatrix} B_{11}^{11} & B_{11}^{12} \\ B_{11}^{21} & B_{11}^{22} \end{pmatrix} (A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi) = \\ &= (B_{11}^{11} A_\rho + B_{11}^{12} A_\varphi) \vec{e}_\rho + (B_{11}^{21} A_\rho + B_{11}^{22} A_\varphi) \vec{e}_\varphi, \\ (\vec{e}_z, \operatorname{rot} \vec{A}) &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Решая систему (2.3), получим, что

$$q_1(\lambda) = \frac{q_0(\lambda)}{\det(\lambda)} \times [(\mu_0 - \lambda B_{11}^{21})(-\mu_0 + \lambda B_{22}^{21}) + \lambda^2 B_{21}^{21} B_{12}^{21}],$$

$$q_2(\lambda) = \frac{q_0(\lambda)}{\det(\lambda)} \times [-(\mu_0 + \lambda B_{11}^{21})\lambda B_{21}^{21} - (\mu_0 - \lambda B_{11}^{21})\lambda B_{21}^{21}] \exp(\lambda \Delta),$$

$$\det(\lambda) = (\mu_0 + \lambda B_{11}^{21})(-\mu_0 + \lambda B_{22}^{21}) - \lambda^2 B_{21}^{21} B_{12}^{21}.$$

3 Вычислительный эксперимент

Изменение комплексной напряженности магнитного поля в произвольной точке $M_0(\rho, z)$ области $D_2(z > \Delta)$ в течение периода $T = 2\pi / \omega$ определяется по формуле

$$\vec{H}_2(\rho, z, \bar{t}) = H_{2,\rho}(\rho, z, \bar{t})\vec{e}_\rho + H_{2,z}(\rho, z, \bar{t})\vec{e}_z,$$

где

$$H_{2,\rho}(\rho, z, \bar{t}) = \int_0^\infty \operatorname{Re}(q_2(\lambda) e^{-i2\pi\bar{t}}) J_1(\lambda\rho) e^{-\lambda z} \lambda d\lambda,$$

$$H_{2,z}(\rho, z, \bar{t}) = \int_0^\infty \operatorname{Re}(q_2(\lambda) e^{-i2\pi\bar{t}}) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} \lambda d\lambda,$$

$$0 \leq \bar{t} \leq 1, \quad \bar{t} = t/T.$$

Модуль вектора напряженности $\vec{H}_2(\rho, z, \bar{t})$ вычисляется по формуле

$$|\vec{H}_2(\rho, z, \bar{t})| = \sqrt{H_{2,\rho}^2(\rho, z, \bar{t}) + H_{2,z}^2(\rho, z, \bar{t})}.$$

Используя систему компьютерной математики Mathcad [14] проведены расчёты напряженности магнитного поля \vec{H}_2 для некоторых геометрических параметров задачи и электромагнитных комплекснозначных параметров материала экрана, когда точка $M_0(\rho, z)$ находится на оси Oz ($\rho = 0, z > \Delta$) и на прямой $z = z_0$ ($z_0 > \Delta, 0 \leq \rho \leq \rho_0$).

На рисунке 3.1 представлены графики $|\vec{H}_2(0, z, 0)|$ для случая, когда полупространства D_1 и D_2 заполнены воздухом ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м), электромагнитные параметры материала композитного экрана D равны $\epsilon_r = 1, \mu_r = 10, Z_r = -i\chi, G_r = i\chi$ и параметров $h = 0,1$ м, $\omega = 200\pi$ с⁻¹, $\Delta = 0,2$ м с учётом различных значений χ : $\chi = 0,1$ (1), $\chi = 2$ (2), $\chi = 2,5$ (3), $\chi = 3$ (4).

На рисунке 3.2 представлены графики $|\vec{H}_2(0, z, 0)|$ для случая, когда полупространства D_1 и D_2 заполнены воздухом, электромагнитные параметры материала композитного экрана D равны $\epsilon_r = 1, Z_r = -i, G_r = i$ и параметров $h = 0,1$ м, $\omega = 200\pi$ с⁻¹, $\Delta = 0,2$ м с учётом различных

значений μ_r : $\mu_r = 5$ (1), $\mu_r = 10$ (2), $\mu_r = 20$ (3), $\mu_r = 50$ (4).

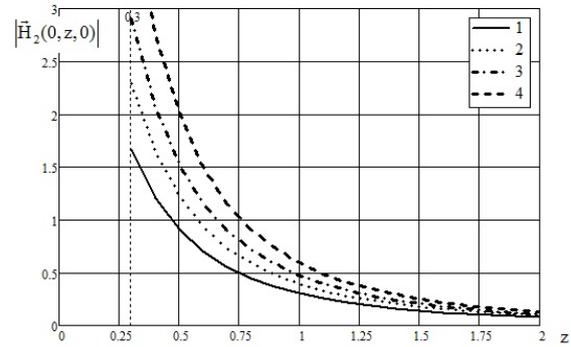


Рисунок 3.1 – Графики напряженностей магнитного поля $|\vec{H}_2(0, z, 0)|$ для различных значений χ

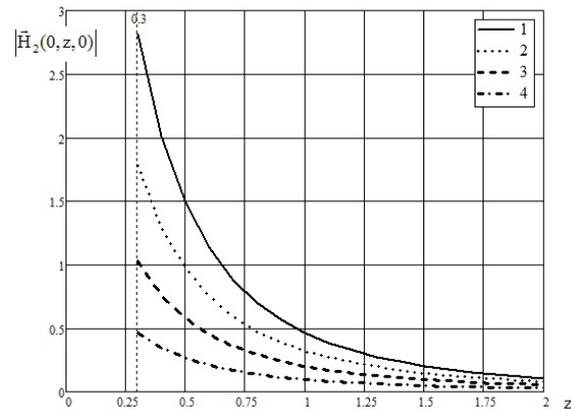


Рисунок 3.2 – Графики напряженностей магнитного поля $|\vec{H}_2(0, z, 0)|$ для различных значений μ_r

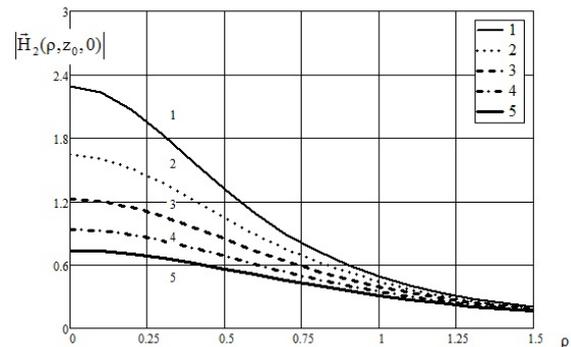


Рисунок 3.3 – Графики напряженностей магнитного поля $|\vec{H}_2(\rho, z_0, 0)|$ для различных значений z_0

На рисунке 3.3 представлены графики $|\vec{H}_2(\rho, z_0, 0)|$ для случая, когда полупространства D_1 и D_2 заполнены воздухом, электромагнитные

параметры материала композитного экрана D равны $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 10$, $\chi = 2$ и параметров $h = 0,1$ м, $\omega = 200\pi$ с⁻¹, $\Delta = 0,2$ м с учётом различных значений z_0 : $z_0 = 0,3$ (1), $z_0 = 0,4$ (2), $z_0 = 0,5$ (3), $z_0 = 0,6$ (4), $z_5 = 0,7$ (5).

Заключение

Разработана математическая модель двухсторонних нелокальных граничных условий на поверхности тонкого плоского слоя из композитного материала, которая моделирует проникновение низкочастотного магнитного поля через экран. На основании граничных условий сформулирована краевая задача проникновения низкочастотного магнитного поля через тонкий плоский слой из композитного материала. Проведен вычислительный эксперимент – вычислена напряжённость вторичного магнитного поля, ослабленного композитным экраном.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аполлонский, С.М. Внешние электромагнитные поля электрооборудования и средства их снижения / С.М. Аполлонский. – СПб. : Безопасность, 2001. – 620 с.
2. Воронин, Г.П. Электромагнитная совместимость: безопасность электронных систем и аппаратуры, защита окружающей среды и здоровья человека / Г.П. Воронин // Электроника: Наука, технология, бизнес. – 2000. – № 2. – С. 5–7.
3. Павлов, А.Н. Воздействие электромагнитных излучений на жизнедеятельность / А.Н. Павлов. – М. : Гелиос АРВ, 2002. – 224 с.
4. Довгуша, В.В. Влияние естественных и техногенных электромагнитных полей на безопасность жизнедеятельности / В.В. Довгуша, М.Н. Тихонов, Л.В. Довгуша // Экология человека. – 2009. – № 12. – С. 3–9.
5. Бородай, П.Н. Опасные электромагнитные излучения от персональных компьютеров и защита от них / П.Н. Бородай, Л.О. Мырова // Информ.-измерит. и управл. системы. – 2006. – Т. 4, № 1–3. – С. 110–123.
6. Аполлонский, С.М. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках / С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеевко. – Минск : Университетское, 1988. – 246 с.
7. Елягин, С.В. Результаты анализа эффективности электромагнитных экранов / С.В. Елягин // Вестник УлГТУ. – 2008. – № 3. – С. 47–50.
8. Резинкина, М.М. Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля / М.М. Резинкина // ЖТФ. – 2007. – Т. 77, вып. 11. – С. 17–24.
9. Ерофеевко, В.Т. Экранирование низкочастотных электрических полей системой экранов: тонкая незамкнутая сферическая оболочка – тонкостенная сферическая проницаемая оболочка / В.Т. Ерофеевко, Г.Ч. Шушкевич // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 3. – С. 10–15.
10. Шапиро, Д.Н. Электромагнитное экранирование / Д.Н. Шапиро. – Долгопрудный : Изд. Дом «Интеллект», 2010. – 120 с.
11. Ерофеевко, В.Т. Граничные условия для низкочастотных электрических и магнитных полей на экранах из композитных материалов / В.Т. Ерофеевко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2011. – № 2. – С. 146–148.
12. Ерофеевко В.Т. Модели граничных условий на композитных экранах для электромагнитных полей с осевой симметрией / В.Т. Ерофеевко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. н. – 2010. – № 2 – С. 41–45.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовича, И.Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
14. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad Ч. 1. / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 287 с.

Поступила в редакцию 28.05.12.

УДК 519.876.5:62-192

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ НАДЁЖНОСТИ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР

Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, С.Ф. Маслович, Т.Я. Каморникова

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

AN APPROACH TO THE ASSESSMENT OF RELIABILITY OF NETWORKS

E.I. Sukach, D.V. Ratobylskaya, S.F. Maslovich, T.Y. Kamornikova

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассматривается один из подходов к оценке вероятностных характеристик надёжности сетевых структур, имеющих два входа и два выхода. Подход основан на выделении вероятностных состояний надёжности сетевых структур, разработанный в рамках аппарата вероятностно-алгебраического моделирования и реализует предварительные расчёты при оценке надёжности сетевых структур большой размерности.

Ключевые слова: структурно-сложная система, сетевая надёжность, вероятностные оценки надёжности.

One of the approaches to the estimation of the probability characteristics of the reliability of networks with two inputs and two outputs is considered. The approach is based on the allocation of probability state security networks, developed as part of the apparatus of probability-algebraic simulation and implementing preliminary calculations when assessing the reliability of large-scale networks.

Keywords: structurally-difficult system, network reliability, probabilistic reliability assessment.

Введение

Надёжность сетевых структур, являющихся образом сложных многокомпонентных систем, определяется надёжностью компонентов, которым при графической интерпретации соответствуют вершины графа или его рёбра.

Если надёжность сетевой структуры, включающей множество компонентов, определить как работоспособность всех её компонентов, то во многих случаях она может оказаться равной нулю. Если же определить надёжность сети как возможность соединения между выбранным множеством её компонентов, то её надёжность окажется практически равной единице. При этом для некоторых компонентов, которые не попали в это множество, сетевую структуру нельзя будет считать абсолютно надёжной. Примером такого рода объекта исследования является сеть Интернет, надёжность которой можно считать равной нулю по первому определению, поскольку всегда найдется неисправный или отключенный узел. А по второму определению, её можно считать абсолютно надёжной, поскольку она обеспечивает возможность коммуникации большого числа удалённых узлов. Выходом из возникшей ситуации является переход к вероятностной оценке надёжности сетевой структуры по вероятностным составляющим надёжности её компонентов.

Следует отметить, что отдельные её компоненты могут по-разному влиять на работу сети в целом. Это видно на примере сети Интернет. Выход из строя терминального узла создает проблемы ее пользователю, а отказ сервера сказывается на работе всех его клиентов, в том числе и

удалённых. Кроме этого, отказ в доступе к определённому сетевому ресурсу часто связан не с отказом оборудования или программы, а просто с перегрузкой линий связи сети. Поэтому сетевую структуру следует рассматривать как неоднородно-ненадёжную структурно-сложную графовую систему, неоднородность которой может относиться как к узлам, так и к рёбрам.

В качестве исходных данных при оценке надёжности сетевых структур используются вероятностные значения надёжности отдельных узлов и линий связи (время наработки на отказ или вероятность отказа за оговоренный период времени), вычисленные или измеренные с учетом случайных факторов. При этом учитывается режим работы исследуемой сети: работа в среднем или функционирование в экстремальных условиях.

Общим свойством известных математических методов [1]–[3], ориентированных на расчёт надёжности сложных систем, является их формализация в виде графовых структур, имеющих один вход (начальная вершина) и один выход (конечная вершина), что ограничивает применение методов при рассмотрении систем со множеством входов и выходов. Часто для упрощения задачи делается предположение об идентичности распределений и даже равенстве вероятностей отказа для всех узлов. Понятно, что такие предположения делают полученный результат весьма приблизительным [3]. По этой причине даже оценки границ надёжности довольно часто корректны лишь по порядку величины.

Во многих случаях, когда требуется получить оценку надёжности конкретной сети, неплохие результаты могут дать расчеты с использованием метода Монте-Карло [4], [5]. Однако они требуют больших вычислительных ресурсов для решения поставленной задачи. Кроме этого, методы реализуют алгоритмы, которые из-за сложности вычислений либо позволяют оценить надёжность сетей с ограниченным числом узлов, либо ориентированы на оценку возможных границ надёжности.

В статье излагается один из подходов для оценки неоднородно-ненадёжных сетевых структур, являющихся образом сложных систем-четырёхполюсников, то есть систем, имеющих два входа и два выхода. Подход реализован в виде методики расчёта надёжности, которая разработана в рамках вероятностно-алгебраического аппарата [6], позволяющего оценить вероятностные характеристики надёжности системы по вероятностным характеристикам надёжности её компонентов. Она обеспечивает определение точных вероятностных оценок надёжности сетевых структур в виде векторов вероятностей результирующих состояний систем. Сформированные вектора позволяют получить вероятностные оценки исследуемого показателя надёжности для различных сочетаний заданных полюсов, а также являются исходными данными при вероятностно-алгебраическом умножении структур-четырёхполюсников.

Универсальность методики заключается в возможности её распространения на случаи оценки надёжности n -полюсников ($n > 4$), структурные компоненты которых (линии связи, узлы) имеют как два состояния (работа, отказ), так и конечное множество состояний, характеризующее различные уровни исследуемого показателя надёжности. В случае рассмотрения множества состояний компонентов, составляющих четырёхполюсник, применяется методика оценки надёжности структурно-сложных систем, основанная на сведении модели системы со многими состояниями к совокупности бинарных моделей с двумя состояниями [7], разработанная для оценки надёжности сетевых структур с одним входом и одним выходом.

1 Математическая постановка задачи

Объектом исследования является сетевая структура $G(N, K)$, где $N = \{N_v\}, v = \overline{1, l}$ – множество вершин графа, которые соответствуют абсолютно надёжным узлам сети, а $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ – рёбра графа, описывающие линии связи между узлами и имеющие вероятностные значения надёжности.

В графе выделяются четыре вершины-полюса $N_1, N_2, N_3, N_4 \in N$, две из которых задают

начальные вершины структуры $N_1, N_2 \in N$, а две оставшиеся $N_3, N_4 \in N$ определяют конечные вершины.

Простейшая схема структуры-четырёхполюсника представляется полным графом, изображённым на рисунке 1.1. В общем случае схема структуры-четырёхполюсника представляется произвольным графом, имеющим конечное число рёбер и конечное число вершин, четыре из которых выбраны в качестве полюсов.

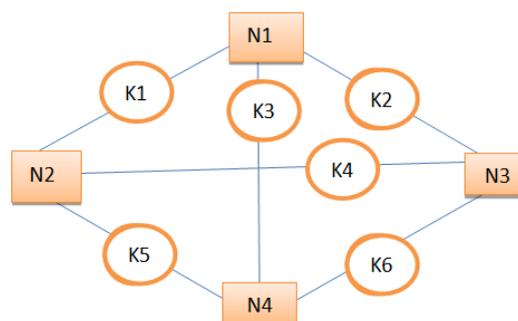


Рисунок 1.1 – Графовая схема структуры-четырёхполюсника

Как видно из рисунка, граф имеет четыре вершины и описывает структуру, включающую шесть компонентов, то есть $N = \{N_v\}, v = \overline{1, 4}$, $K = \{K_i\}, i = \overline{1, 6}$. Для выбранной сетевой структуры все вершины являются полюсами. Множество входов задаётся вершинами $N_1, N_2 \in N$, а множество выходов – $N_3, N_4 \in N$. Аналитическим представлением указанного четырёхполюсника является матрица смежности:

$$MS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На множестве вершин графа $G(N, K)$ определим отношение связности R как отображение $R: A \times B \rightarrow \{1, 0\}$, где значение 1 соответствует «истине», а значение 0 – «лжи». Отношение связности является отношением эквивалентности и разбивает множество вершин N на классы эквивалентности, то есть на непересекающиеся подмножества попарно эквивалентных элементов.

Для множества N , мощность которого $|N|$ известна, число классов эквивалентности рассчитывается по известному алгоритму и описывается числами Белла [8]. Числа Белла указывают на количество непересекающихся подмножеств эквивалентных вершин, покрывающее все множество вершин N .

Для сетевых структур-четырёхполюсников $|N|=4$, а число классов эквивалентности $B_n = 15$.

Они определяют 15 результирующих состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1,15}$, характеризующих уровни надёжности сети. В графе им соответствует множество компонент связности. В таблице 1.1 представлены состояния надёжности сети и их графическая интерпретация.

Например, состояние S_2 , характеризует состояние сети, в которой существует связь между вершинами N_1 и N_2 . Состояние S_6 определяет состояние сети, в которой имеются связи между узлами $N_1, N_2, N_3 \in N$. Аналогично описываются все состояния, соответствующие различным вариантам работы сети.

Возвращаясь к графической интерпретации сетевой структуры, можно констатировать, что граф $G(N, K)$ является взвешенным, поскольку его рёбра имеют веса x_i , соответствующие возможным состояниям надёжности линий связи $S = \{S_j\}, j = \overline{1,2}$. Веса ребер графа $G(N, K)$ принимают значения $x_i = 1 \vee 0$ с заданными вероятностями:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } q_i; \\ 0, & \text{с вероятностью } (1 - q_i). \end{cases} \quad (1.1)$$

Вероятность q_i определяет надёжность линии связи и наличие ребра графе $x_i = 1$. С вероятностью $(q_i - 1)$ линия связи отказала, и в графе нет связи между соответствующими вершинами графа.

Таким образом, $G(N, K)$ является случайным графом, имеющим множество реализаций в виде детерминированных графов. Матрица смежности, описывающая случайный граф (рисунок 1.1), имеет вид:

$$MSX = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_3 & x_5 & x_6 & 0 \end{pmatrix},$$

где $x_i, i = \overline{1,6}$ – переменные, принимающие одно из возможных значений (0 или 1) при реализациях случайного графа.

Поскольку граф является образом структуры-четырёхполюсника, то каждой его реализации соответствует одно из возможных 15 состояний структуры, имеющее свою вероятность, которая зависит от вероятностей весов его рёбер. Число реализаций случайного графа зависит от количества его рёбер и числа возможных значений их весов. В графе, представленном на рисунке 1.1, имеется шесть рёбер, и их веса могут принимать два возможных значения $x_i = 1 \vee 0$, соответственно число всех реализаций случайного графа будет $2^6=64$.

Каждой k -ой реализации $G_k(N, K)$ случайного графа $G(N, K)$ поставим в соответствие

значение связности j_k , характеризующее вариант связи вершин-полюсов детерминированного графа $G_k(N, K)$ и позволяющее интерпретировать граф как состояние $S = \{S_j\}, j = \overline{1,15}$ исследуемой структуры.

Таблица 1.1 – Описание состояний надёжности структуры-четырёхполюсника

Состояние	Графическая интерпретация	Представление в виде множества связанных вершин
S_1		$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$
S_2		$\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}$
S_3		$\{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}\}$
S_4		$\{\{1,4\}, \{2\}, \{3\}\}$
S_5		$\{\{2,3\}, \{1\}, \{4\}\}$
S_6		$\{\{1,2,3\}, \{4\}\}$
S_7		$\{\{1,4\}, \{2,3\}\}$
S_8		$\{\{2,4\}, \{1\}, \{3\}\}$
S_9		$\{\{1,3\}, \{2,4\}\}$
S_{10}		$\{\{1,2,4\}, \{3\}\}$
S_{11}		$\{\{3,4\}, \{1\}, \{2\}\}$
S_{12}		$\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$
S_{13}		$\{\{1,3,4\}, \{2\}\}$
S_{14}		$\{\{2,3,4\}, \{1\}\}$
S_{15}		$\{1,2,3,4\}$

Для двух граничных состояний исследуемой структуры S_1 (отказ) и S_{15} (полная работоспособность) значение связности $j_k = 0 \vee 1$. При этом для k -ых реализаций $G_k(N, K)$ графа, описывающих эти состояния, выполняется свойство j_k -связности, которое означает наличие пути, соединяющего четыре вершины $N_1, N_2, N_3, N_4 \in N$ в графе, в котором веса ребер удовлетворяют следующему условию: $\min_i(x_i) \geq j_k$.

Таким образом, будем считать, что сетевая структура находится в состоянии надёжности S_1 (отказ), если её графическим образом является 0-связный граф. Реализации случайного графа, для которых выполняется свойство 0-связности, принадлежат множеству $G_0 = \{G_0(N, K)\}$ и описывают варианты отказа исследуемой структуры.

Если для k -ой реализации случайного графа выполняется свойство 1-связности, то будем считать, что структура находится в S_{15} состоянии (полная работоспособность). При этом все реализации случайного графа образуют множество $G_1 = \{G_1(N, K)\}$, описывающее варианты реализации надёжной работы исследуемой структуры. Для таких графов всегда существует путь, соединяющий четыре вершины, являющиеся полюсами, все ребра которого имеют веса $x_i = 1$.

Очевидно, что для исследуемой структуры четырёхполюсника имеется множество промежуточных результирующих состояний, описывающих варианты частичного функционирования структуры, которым при формализации сопоставим k -ые реализации случайного графа $G_k(N, K)$, дающие значение связности $j_k = \overline{2, 14}$. При этом k -ые реализации случайного графа будут отнесены к одному из множеств $G_{pr} = \{G_{pr}(N, K)\}$, $pr = \overline{2, 14}$.

Ставится задача определения вектора вероятностей состояний надёжности исследуемой структуры, имеющей два входа и два выхода:

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_{15}^s), \sum_{j=1}^{15} p_j^s = 1. \quad (1.2)$$

Состояния структуры идентифицируются в результате определения значений связности j_k возможных реализаций графа $G(N, K)$. Вероятности каждого из состояний определяются интегральной вероятностью реализаций графа, дающих j_k -ое значение связности и образующих в совокупности одно из следующих множеств:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{G_1(N, K)\}, \\ G_0 &= \{G_0(N, K)\}, \\ G_{pr} &= \{G_{pr}(N, K)\}, pr = \overline{2, 14}. \end{aligned}$$

2 Методика определения вероятностных состояний надёжности четырёхполюсников по вероятностным состояниям надёжности их компонентов

Оценка вероятностей состояний надёжности структур-четырёхполюсников реализуется с использованием системы вероятностно-алгебраического моделирования (Probability-Algebraic Simulation, PALS) [9] следующей последовательностью шагов:

Шаг 1. Формулируется постановка задачи расчёта показателя надёжности сетевой структуры

путем вербально-графического описания условий ее функционирования и отказа. С этой целью определяется множество элементарных компонентов: $N = \{N_v\}, v = \overline{1, l}$ и $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$, устанавливаются связи между компонентами, задается число состояний надёжности линий связи $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 2}$.

Линиям связи сопоставляются рёбра графа, а узлам сетевой структуры ставятся в соответствие вершины. Определяются две вершины, являющиеся входом в систему, и две вершины, определяющие выходы из сетевой структуры. Графическая схема исследуемой структуры $G(N, K)$ формируется в диалоговом режиме с использованием стандартных графических примитивов: вершин и ребер.

Шаг 2. Определяются пути получения исходных данных вероятностных параметров компонентов разрабатываемой графовой модели. Как правило, исходные данные формируются на основе натуральных экспериментов с прототипом исследуемой структуры или путем анализа экспертных оценок. В результате для каждой линии связи соответственно выделенным состояниям $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 2}$, задаются значения вероятностей надёжной работы (1.1).

Шаг 3. Определяется состав выходных данных, представляющих собой вероятностные значения состояний надёжности исследуемой структуры (1.2) с учетом выбранного состава вершин-полюсов, и обосновываются способы их получения. Формулируется смысловое содержание выходных данных для всей структуры и её фрагментов.

Шаг 4. С использованием специализированных программных средств системы PALS осуществляется ввод подготовленных данных (структурных схем, параметров), необходимых для начала моделирования. При этом автоматизируется ввод исходных данных, контролируется корректность полученной информации, а результаты контроля выдаются пользователю для устранения ошибок в режиме «вопрос – ответ». Стандартизирована возможность получения данных из заранее подготовленных файлов с возможностью их редактирования и сохранения.

Шаг 5. Строится k -ая реализация случайного графа, аналитическим выражением которой является матрица MSX_k , в которой переменным x_i присвоено одно из возможных значений (1 или 0).

Шаг 6. Организуется итерационный процесс транзитивного замыкания графа [10], который заключается в формировании графа достижимости, то есть определении для каждой вершины графа множества достижимых из нее вершин по путям длины 0, 1, 2 и т. д. Поскольку исходный граф G задается своей матрицей смежности MSX_k , то формирование матрицы смежности графа достижимости реализуется по формуле:

$$MSX_G^h = (MSX_k + E_n)^h,$$

где MSX_G^h – матрица смежности транзитивного замыкания графа G , E_n – единичная матрица размерности $n \times n$, h – степень, возведение в которую обеспечивает транзитивное замыкание графа G . При этом на каждой очередной l -ой ($l = \overline{1, h}$) итерации транзитивного замыкания реализуются преобразования элементов полученной матрицы MSX_G^l по формуле:

$$msx_G^l[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } msx_G^l[i, j] \geq 1; \\ 0, & \text{если } msx_G^l[i, j] < 1. \end{cases}$$

Очевидно, что элементы преобразованной матрицы смежности MSX_G^l либо остаются без изменения, либо увеличиваются на 1, аналитически указывая на вершины графа (полюсы или внутренние вершины), в которые можно попасть за l шагов по рёбрам графа, имеющим веса $x_i = 1$. Так, после первой итерации процесса замыкания в матрице смежности MSX_G^1 элементы увеличиваются на 1 в столбцах, соответствующих вершинам графа, в которые можно попасть за два шага. Аналогично, в матрице смежности MSX_G^2 элементы увеличиваются на 1 в столбцах, соответствующих вершинам графа, в которые можно попасть за три шага и т. д.

Критерием остановки итерационного процесса транзитивного замыкания матрицы смежности является формирование матрицы MSX_G^h , сумма элементов которой выше главной диагонали остаётся неизменной, то есть выполняется условие:

$$\forall i, j, \text{ где } i < j \quad \sum_{i,j} msx_G^{h-1}[i, j] = \sum_{i,j} msx_G^h[i, j].$$

В том случае, если система представляется ориентированным графом, для транзитивного замыкания достаточно возвести матрицу смежности в $(n-1)$ -ую степень [10], то есть $h = (n-1)$.

Матрица смежности на конечном h -ом шаге однозначно определяет состояние связности j графа $G(N, K)$ для заданных вершин-полюсов и позволяет отнести k -ую реализацию случайного графа к одному из возможных состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 15}$. В частности, если выполняется условие

$$\forall i, j, \text{ где } i < j \quad msx_G^h[i, j] = 1,$$

то k -ой реализации случайного графа соответствует состояние S_{15} исследуемой структуры, при котором она полностью надёжна.

Шаг 7. Организуется вычисление вероятности p_k состояния $S_j, j = \overline{1, 15}$, соответствующего k -ой реализации случайного графа по формуле:

$$p_k = \prod_{i, x_i=1} q_i * \prod_{i, x_i=0} (1 - q_i).$$

Шаг 8. Формируются интегральные вероятностные оценки состояний надёжности четырёхполюсника. Для получения вероятностной оценки состояния $S_j, j = \overline{1, 15}$ используется формула:

$$P(S_j) = \sum p_k,$$

где $k, G_k(N, K) \in G_w,$

$$w = \begin{cases} 0, & j = 1; \\ 1, & j = 15; \\ pr, & j = pr = \overline{2, 14}. \end{cases}$$

Очевидно, что сумма вероятностей всех состояний надёжности четырёхполюсника будет равна 1, то есть:

$$\sum_{j=1}^{15} P(S_j) = 1.$$

Шаг 9. Результаты расчёта графически отображаются в виде графиков, представляющих вероятностные значения состояний надёжности четырёхполюсника. Одновременно данные сохраняются в файле одного из стандартных форматов для последующей статистической обработки и анализа.

Шаг 10. В случае исследования реальной функционирующей сетевой структуры осуществляется проверка адекватности построенной модели реальному объекту. В PALS она автоматически проводится путем проверки близости средних значений откликов модели соответствующим характеристикам реальной системы. В случае отрицательных результатов осуществляется переход на шаг 1.

Шаг 11. Определяется влияние вероятностных значений состояний надёжности компонентов на значение компонентов вектора откликов всей сетевой структуры при ее фиксированной организации. С этой целью организуются модельные эксперименты, в которых варьируются значения вероятностей (1.1).

Шаг 12. Исследуется влияние структурной организации сети на результирующий вектор вероятностей состояний при неизменных вероятностных значениях параметров компонентов. При этом могут быть рассмотрены случаи альтернативной структурной организации сети, полученные в результате различных вариантов резервирования отдельных участков сети, а также варианты, соответствующие возможным аварийным ситуациям, возникающим в процессе эксплуатации сети. Сравнение результирующих векторов вероятностей состояний надёжности сети для различных вариантов ее структурной организации позволяет обосновать выбор лучшего из них, оценить эффективность резервирования отдельных участков и изменения состояний надёжности сетевой структуры в результате аварийного состояния отдельных участков.

3 Пример расчёта надёжности сетевой структуры

Рассмотрим структуру-четырёхполюсник, графовая схема которой представлена на рисунке 3.1. Как видно из рисунка, структура включает 12 линий связи, $K = \{K_i\}, i = \overline{1, 12}$, которым соответствуют рёбра графа, имеющего множество вершин $N = \{N_v\}, v = \overline{1, 7}$, четыре из которых выбраны в качестве полюсов $N_1, N_2, N_3, N_4 \in N$.

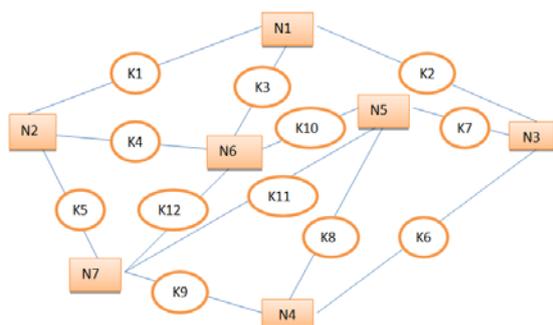


Рисунок 3.1 – Граф структуры-четырёхполюсника

Будем считать, что значения вероятностей надёжности линий связи, составляющих структуру, различны. В таблице 3.1 представлены варианты исходных значений вероятностей надёжной работы линий связи структуры, позволяющие провести сравнительный анализ их влияния на результирующие вероятностные значения надёжности исследуемой сети.

С использованием предложенного подхода к оценке надёжности сетевой структуры были

получены значения вектора вероятностей (1.2) для альтернативных вариантов надёжности линий связи, которые представлены в таблице 3.2.

На рисунке 3.2 приводится графическая интерпретация полученных результатов расчёта.

На рисунке выделяется два графика, соответствующие 1 и 2 прогону. Для прогона 1 использовались одинаковые значения вероятностей надёжности линий связи ($q=0.9$). При этом велика вероятность состояния S_{15} (полная надёжность). В прогоне 2 также использовались одинаковые значения вероятностей надёжности линий связи ($q=0.1$). При этом наблюдается преобладание результирующего состояния S_1 (отказ), вероятность которого 0.7. Вероятности всех остальных состояний для обоих прогонов изменяются на отрезке $[0, 0.1]$.

Таблица 3.1 – Исходные данные для расчёта надёжности структуры-четырёхполюсника, граф которой представлен на рисунке 4.1

Номер прогона	1	2	3	4	5
K_1	0,9	0,1	0,1	0,1	0,1
K_2	0,9	0,1	0,9	0,1	0,1
K_3	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9
K_4	0,9	0,1	0,1	0,1	0,1
K_5	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9
K_6	0,9	0,1	0,1	0,1	0,1
K_7	0,9	0,1	0,1	0,9	0,9
K_8	0,9	0,1	0,1	0,9	0,1
K_9	0,9	0,1	0,1	0,1	0,1
K_{10}	0,9	0,1	0,1	0,9	0,9
K_{11}	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9
K_{12}	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9

Таблица 4.2 – Результаты расчёта надёжности структуры-четырёхполюсника, граф которой представлен на рисунке 3.1

Номер прогона	1	2	3	4	5
S_1	2,64E-07	0,7011545576	0,0779060620	0,1119985926	0,0185459597
S_2	1,39E-05	0,0862715338	0,0095857260	0,0126856089	0,0593968548
S_3	3,31E-06	0,0785809920	0,7018294877	0,0180935059	0,0529036227
S_4	8,94E-07	0,0012297545	0,0001366394	0,0051959577	0,0011872392
S_5	8,94E-07	0,0012297545	0,0001366394	0,0060509872	0,0509726321
S_6	0,001019331	0,0100588207	0,0878377436	0,0042800487	0,5475212693
S_7	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
S_8	9,96E-06	0,0088427058	0,0009825229	0,0072747843	0,0015285030
S_9	9,02E-05	0,0009878373	0,0088480203	0,0008561391	0,0006003009
S_{10}	0,000984275	0,0014556176	0,0001617353	0,0022109251	0,0131309317
S_{11}	1,39E-05	0,0862715338	0,0095857260	0,5422218777	0,0036073596
S_{12}	0,00037035	0,0106051085	0,0011783454	0,0610301720	0,0073279515
S_{13}	0,001019331	0,0100588207	0,0878377436	0,1197671855	0,0189886294
S_{14}	0,000984275	0,0014556176	0,0001617353	0,0691792044	0,0191350340
S_{15}	0,995489174	0,0017973455	0,0138118733	0,0391550107	0,2051537120

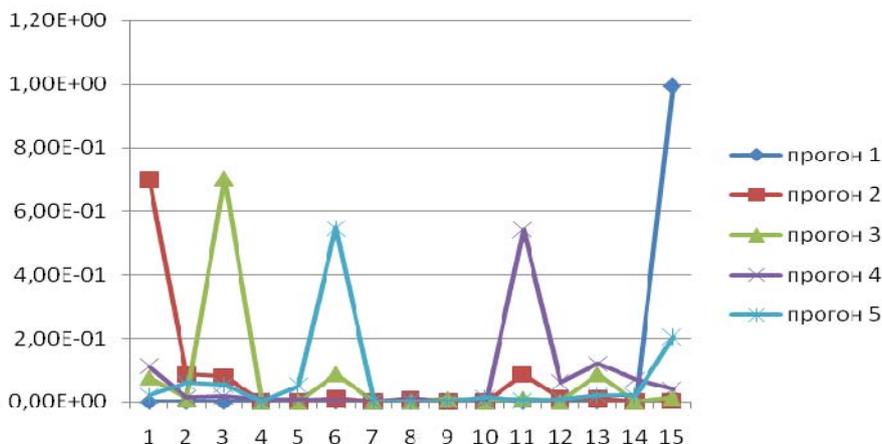


Рисунок 4.2 – Графическая интерпретация полученных результатов расчёта

Прогоны, в которых исследуется влияние отдельных линий связи $K_3, K_4, K_8, K_7, K_{10}, K_{11}, K_{12}$ на состояния структуры, дают практически сопоставимые результаты, при которых все состояния равновероятны и их вероятности изменяются в пределах $[1,0,1]$. При этом заметна большая вероятность состояния S_1 (отказ). Это свидетельствует о слабом влиянии каждой из перечисленных линий связи на результирующие состояния сети.

Для прогона 3, в котором увеличена вероятность надёжности линии связи K_2 до 0.9, а остальные компоненты имеют вероятность работоспособности 0.1, наблюдается увеличение вероятности результирующего состояния S_3 на 70% по сравнению с прогоном, в котором все вероятности надёжности линий связи 0,1.

Прогон 4 показывает влияние линий связи K_7, K_8, K_{10} на результирующие вероятности состояний исследуемой структуры. При малых значениях вероятностей всех состояний заметно выделяется большая составляющая вероятности состояния S_{11} , значение которой увеличивается на 40% по сравнению с прогоном, в котором все исходные вероятности надёжности линий связи равны 0.1 (прогон 2). Аналогичная ситуация наблюдается и при исследовании влияния повышения надёжности компонентов K_6, K_7, K_8 до 0.9. При этом вероятность результирующего состояния S_{11} увеличивается на 60%.

Прогон 5, в котором линии связи $K_3, K_5, K_7, K_{10}, K_{11}, K_{12}$ имеют исходные вероятности работоспособности 0.9, а все остальные – 0.1 приводит к заметному возрастанию вероятности состояния S_6 до 0.5. Остальные вероятности результирующих состояний находятся в интервале $[0,0,1]$.

Заключение

Предложенный подход к оценке надёжности сетевых структур предполагает рассмотрение

сети в виде четырёхполюсника и позволяет рассчитать результирующие вероятности надёжности структуры по вероятностям надёжности составляющих её компонентов (линий связи, узлов).

Практическая значимость подхода заключается в возможности решения типовых задач проектного моделирования и анализа вероятностных характеристик надёжности большого класса неоднородно-ненадёжных сетевых структур, которые представляются в виде графов, имеющих два входа и два выхода, таких, как:

- оценка вероятностных характеристик надёжности сетевых структур-четырёхполюсников на основе вероятностных состояний их компонентов;
- выявление множества отдельных компонентов и их комбинаций, оказывающих существенное влияние на вероятностные значения выбранного показателя надёжности исследуемых структур;
- получение, обоснование и оптимизации различных проектных, эксплуатационных и управленческих решений на основе результатов расчёта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябинин, И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.
2. *Можаев, А.С.* Универсальный графоаналитический метод, алгоритм и программный модуль построения монотонных и немонотонных логических функций работоспособности систем / А.С. Можаев // Труды третьей Международной научной школы «Моделирование и Анализ Безопасности и Риска (МА БР – 2003)», август 20–23, 2003 – СПб. – 517 с.
3. *Sahinoglu, M.* Network reliability evaluation / M. Sahinoglu, R. Benjamin // Wiley Interdisciplinary

Reviews: Computational Statistics, Volume 2 March / April 2010. – P. 189–211.

4. Максимей, И.В. Определение интегрального максимального потока в региональной сети с помощью имитационного моделирования / И.В. Максимей, Е.И. Сукач, П.В. Гируц // Математические системы и машины. – 2008. – № 2. – С. 128–136.

5. Сукач, Е.И. Метод перераспределения автомобильных транспортных потоков региона на основе имитационного моделирования / Е.И. Сукач // Реєстрація, зберігання і обробка даних (Data Recording, Storage & Processing). – 2008. – Т. 10, № 3. – С. 37–45.

6. Сукач, Е.И. Метод вероятностно-алгебраического моделирования надёжности функционально-сложных систем / Е.И. Сукач // Информатика. – 2010. – № 3. – С.18–30.

7. Сукач, Е.И. Подходы к снижению размерности многокомпонентных структурно-сложных систем со многими состояниями при оценке их надёжности / Е.И. Сукач // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 75–79.

8. Липский, В. Комбинаторика для программистов / В. Липский – М. : Мир, 1988.

9. Сукач, Е.И. Возможности программной системы вероятностно-алгебраического моделирования сложных систем / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 111–117.

10. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир, 1984.

Поступила в редакцию 09.03.12.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на диске 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted

ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).