



ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№ 3 (12) 2012**

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»**

*Главный редактор:*  
**А.В. Рогачев** (Беларусь)

*Заместители главного редактора:*  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)  
**Л.А. Шеметков** (Беларусь)

*Редакционная коллегия:*  
**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**П.Д. Кухарчик** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

*Ответственный секретарь:*  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

*Адрес редакции:*  
Гомельский государственный  
университет им. Ф.Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»**

*Editor-in-Chief:*  
**A.V. Rogachev** (Belarus)

*Deputy Editor-in-Chief:*  
**O.M. Demidenko** (Belarus)  
**L.A. Shemetkov** (Belarus)

*Editorial board:*  
**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Webin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**P.D. Kuharchik** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

*Executive Secretary:*  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

*Edition address:*  
F. Scorina Gomel State University  
Sovetskaya Str., 104,  
246019, Gomel, Republic of Belarus  
Ph. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
website: <http://pfmt.gsu.by>

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (12) 2012

### СОДЕРЖАНИЕ

#### ФИЗИКА

- Белый В.Н., Краморева Л.И., Петрова Е.С., Хило Н.А., Савицкий А.И.** Особенности распределения потоков энергии при распространении квазибездифракционных световых пучков в поглощающих средах ..... 7
- Валько Н.Г., Гуртовой В.Г.** Электрические свойства сплавов Co-Ni, электроосажденных при воздействии рентгеновского излучения ..... 15
- Гиргель С.С.** Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков ..... 19
- Есман А.К., Кулешов В.К., Зыков Г.Л., Залесский В.Б.** Поглощающее покрытие в терагерцовой части спектра ..... 25
- Забогин А.П., Умрейко Д.С., Забогин А.А., Комяк А.И., Умрейко С.Д.** Спектрально-структурные и фотокаталитические свойства водно-ацетоновых растворов нитрата и перхлората уранила ..... 28
- Пилипцов Д.Г., Рогачев А.В., Федосенко Н.Н., Руденков А.С.** Морфология и механические свойства углеродных покрытий, полученных из плазмы импульсного катодно-дугового разряда сложной формы ..... 33
- Сердюков А.Н., Шалупаев С.В., Никитюк Ю.В., Середа А.А.** Исследование процесса лазерного раскалывания кремниевых пластин, вырезанных в плоскости (110) ..... 37

#### МАТЕМАТИКА

- Адарченко Н.М.** О максимальных подгруппах конечных групп ..... 41
- Ахматова А.А.** Спектральные свойства операторов взвешенного сдвига, порожденных линейными отображениями с условием Перрона ..... 43
- Витко Е.А.** О строении наименьшего элемента секции Локетта  $\pi$ -разрешимого фиттингова функтора ..... 48
- Дашкова О.Ю.** Локально разрешимые AFN-группы ..... 58
- Заренок М.А.** Сходимость рядов Фурье дифференцируемых функций многомерного  $p$ -адического аргумента ..... 65
- Ковалева В.А., Чжао Сяюй.** Конечные группы с заданными системами квазиперестановочных подгрупп ..... 74
- Косенок Н.С.** Конечные группы с заданными обобщенно примитивными подгруппами ..... 78
- Кузьменков Д.С.** Распараллеливание вычислений при решении задачи оптимального управления тепловым процессом в стержне ..... 82
- Полевиков В.К., Волотовская Ю.Н.** Численное моделирование равновесных капиллярных поверхностей с нерегулярными граничными условиями ..... 88
- Тютянов В.Н., Тютянова В.А.** Критерий непростоты конечных факторизуемых групп ..... 94

#### ИНФОРМАТИКА

- Сморodin В.С.** Анализ функционирования технологических процессов при наличии элементов потенциальной опасности ..... 96

#### ТЕХНИКА

- Врублевский И.А., Дик С.К., Терех А.С., Смирнов А.В., Чернякова К.В.** Структура пленок пористого оксида алюминия, формируемых в электролитах на основе органических кислот .. 101

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

**Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):**  
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**  
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферировается в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 17.09.12. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 12,55. Уч.-изд. л. 10,93. Тираж 100 экз. Заказ № 544.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»  
246019, Гомель, ул. Советская, 104  
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГТУ им. Ф. Скорины»

---

# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

*Published since December, 2009*

There are 4 times a year

№ 3 (12) 2012

## CONTENTS

### PHYSICS

<b>Belyi V.N., Kramoreva L.I., Petrova E.S., Khilo N.A., Savitski A.I.</b> Features of energy flux distribution under the condition of quasi-nondiffraction light beams propagation in absorbing media ....	7
<b>Valko N.G., Hurtavy V.G.</b> The electrical properties of the alloys Co-Ni, electroplated under the influence of the X-ray irradiation .....	15
<b>Girgel S.S.</b> Polarizable and energy properties of the vector paraxial gaussian light beams .....	19
<b>Esman A.K., Kuleshov V.K., Zykov G.L., Zalesski V.B.</b> Absorbing coating in the terahertz part of spectrum .....	25
<b>Zazhogin A.P., Umreiko D.S., Zazhogin A.A., Komyak A.I., Umreiko S.D.</b> Spectral-structural and photocatalytic properties of water-acetone solutions of uranyl nitrate and perchlorate .....	28
<b>Pilipstov D.G., Rogachev A.V., Fedosenko N.N., Rudenkov A.S.</b> Morphology and mechanical properties of carbon coatings obtained from plazma of combined pulse cathode-arc discharge .....	33
<b>Serdykov A.N., Shalupaev S.V., Nikitjuk Y.V., Sereda A.A.</b> Process research of laser splitting silicon wafers cutout in the plane (110) .....	37

### MATHEMATICS

<b>Adarchenko N.M.</b> On maximal subgroups of finite groups .....	41
<b>Akhmatova A.A.</b> On spectral properties of weighted shift operators generated by linear mappings with Perron's conditions .....	43
<b>Vitko E.A.</b> On the structure of the smallest element of the Lockett section of a $\pi$ -soluble fitting functor .....	48
<b>Dashkova O.Yu.</b> Locally soluble AFN-groups .....	58
<b>Zarenok M.A.</b> Convergence of the Fourier series for differentiable functions of a multidimensional $p$ -adic argument .....	65
<b>Kovalyova V.A., Zhao Xiaoyu.</b> Finite groups with given systems of quasipermutable subgroups ..	74
<b>Kosenok N.S.</b> Finite groups with given generalized primitive subgroups .....	78
<b>Kuzmenkov D.S.</b> Parallelization of the calculations at the solution of the optimal control problem of a thermal process in the rod .....	82
<b>Polevikov V.K., Volotovskaya Y.N.</b> Numerical modeling of equilibrium capillary surfaces with irregular boundary conditions .....	88
<b>Tyutyanov V.N., Tyutyanova V.A.</b> A nonsimple criterion for finite factorized groups .....	94

### INFORMATION SCIENCE

<b>Smorodin V.S.</b> Analysis of the technological processes functioning with the elements of potential danger .....	96
--	----

### TECHNICS

<b>Vrublevsky I.A., Dick S.K., Tereh A.S., Smirnov A.V., Chernyakova K.V.</b> Structure of the porous aluminium oxide films formed in the solutions of organic acids .....	101
--	-----

***Founder – Francisk Scorina Gomel State University***

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

***The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):***

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

УДК 535.3 + 535.51

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ КВАЗИБЕЗДИФРАКЦИОННЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕДАХ

В.Н. Белый<sup>1</sup>, Л.И. Краморева<sup>2</sup>, Е.С. Петрова<sup>3</sup>, Н.А. Хило<sup>1</sup>, А.И. Савицкий<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

<sup>2</sup>Гомельский государственный медицинский университет, Гомель

<sup>3</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

## FEATURES OF ENERGY FLUX DISTRIBUTION UNDER THE CONDITION OF QUASI-NONDIFFRACTION LIGHT BEAMS PROPAGATION IN ABSORBING MEDIA

V.N. Bely<sup>1</sup>, L.I. Kramoreva<sup>2</sup>, E.S. Petrova<sup>3</sup>, N.A. Khilo<sup>1</sup>, A.I. Savitski<sup>2</sup>

<sup>1</sup>B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk

<sup>2</sup>Gomel State Medical University, Gomel

<sup>3</sup>P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Рассмотрено взаимодействие квазибездифракционных световых пучков с полубесконечной поглощающей средой. Показано, что при наличии поглощения проявляются новые закономерности поведения потоков энергии поля и пространственного профиля тепловыделения, не характерные для плоских волн или гауссовых пучков. Обнаруженные особенности в сочетании со свойством подавленной дифракционной расходимости центральной зоны пучка и реконструкции его поперечного профиля представляют практический интерес для лазерных технологий и решения задач неразрушающего контроля и диагностики.

**Ключевые слова:** квазибездифракционный пучок, полубесконечная поглощающая среда, поток энергии, зона тепловыделения.

Interaction of the quasi-nondiffraction beam with semi-infinite medium has been investigated. It has been shown that in case when we deal with absorbing medium, new features of energy flux behavior and the spatial profile of heat generation occur. Such behavior of energy flux isn't typical for plane wave or Gaussian beam. The combination of the detected features, suppressed diffraction divergence of beam, self-reconstruction phenomenon is of interest of laser technologies and diagnostics.

**Keywords:** quasi-nondiffraction beam, semi-infinite medium, energy flux, heat generation region.

### Введение

Благодаря уникальным свойствам (малая дифракционная расходимость приосевой области пучка, высокое поперечное разрешение в сочетании с большой фокальной длиной, эффект реконструкции профиля пучка при экранировании его центральной части) квазибездифракционные пучки (КП) перспективны, в частности, для применений в качестве зондирующего излучения в системах неразрушающего контроля [1]–[6]. На современном этапе проблема повышения поперечно-аксиального разрешения и качества изображения диагностических систем является актуальной, особенно для применений в области биомедицинской диагностики. Для оптимизации условий зондирования необходимо иметь в виду, что биологическая ткань представляет собой сложную многослойную структуру, при взаимодействии электромагнитного излучения с которой основными физическими эффектами являются поглощение и рассеяние. Кроме того, содержание в большинстве тканей коллагеновых или других эластиновых волокон

(мышцы, нервы, хрящи и др.) приводит к проявлению оптической активности и дисперсии. Проблемы, связанные с рассеянием, решаются, в основном, численными методами на стадии обработки изображения. Влияние дисперсии уменьшается путем внесения в оптическую схему различных компенсирующих устройств. Оптимизация условий зондирования с учетом поглощения и оптической активности тканей является актуальной областью исследований в настоящее время. Здесь в большей степени исследован вопрос влияния оптической активности на пространственные характеристики квазибездифракционных пучков. Так, в [7] установлено, что распространение КП через двулучепреломляющую гиротропную среду может вызывать изменение порядка функции Бесселя, что влечет за собой появление сингулярности (так называемых «вихрей») в центре пучка; тем не менее, в таких средах имеются «аномальные» зоны, при распространении через которые КП не изменяет свои параметры. В [8] детально исследовано влияние сред с естественной и

магнитной гиротропией на поляризационные и пространственные характеристики КП. Обнаружено, что в гиротропных средах возможно взаимное преобразование ТН- и ТЕ- мод линейно поляризованного бesselова пучка.

К настоящему времени менее изученными являются особенности взаимодействия КП с поглощающими средами. В [9] предложен метод, позволяющий моделировать поведение интенсивности пучка в зависимости от продольной координаты в поглощающих средах. Обнаружено, что в отличие от гауссова пучка для идеального КП сохраняется размер и интенсивность центральной части пучка вдоль направления его распространения. В [10] численным методом показано, что результаты исследований [9] применимы к квазибездифракционным пучкам конечной апертуры. Особенности отражения и преломления конических пучков ТЕ- и ТН- мод на объектах цилиндрической формы рассматриваются в [11]. В этой работе рассчитаны энергетические коэффициенты отражения, обнаружены зоны теплораспределения в поперечном сечении пучка и проведена оценка потерь энергии зондирующего пучка.

Однако до настоящего времени не исследованы особенности поведения потоков энергии при взаимодействии квазибездифракционных пучков с поглощающими средами. Следует отметить, что знание распределения потоков энергии (и тепловыделения) важно для понимания тонких эффектов энергообмена между электромагнитным излучением и средой. Поэтому целью настоящей работы является теоретический анализ энергетических характеристик ТН и ТЕ-поляризованных мод бesselовых пучков при их взаимодействии с поглощающими средами.

### 1 Потоки энергии для ТН-поляризованного квазибездифракционного пучка

Для исследования потоков энергии, распространяющихся в поглощающей среде, использовались следующие выражения компонент полей для ТН- и ТЕ- мод бesselова пучка:

$$\begin{aligned}
 E_{\rho}^{TH} &= i(k_{z1} + ik_{z2})J'_m(q\rho), \\
 E_{\rho}^{TE} &= ik_0(n_1 + in_2)\frac{m}{q\rho}J_m(q\rho), \\
 E_{\phi}^{TH} &= -(k_{z1} + ik_{z2})\frac{m}{q\rho}J_m(q\rho), \\
 E_{\phi}^{TE} &= -k_0(n_1 + in_2)J'_m(q\rho), \\
 E_z^{TH} &= qJ_m(q\rho), \quad E_z^{TE} = 0, \\
 B_{\rho}^{TH} &= k_0(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{m}{q\rho}J_m(q\rho), \\
 B_{\rho}^{TE} &= (n_1 + in_2)(k_{z1} + ik_{z2})J'_m(q\rho), \\
 B_{\phi}^{TH} &= ik_0(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{m}{q\rho}J'_m(q\rho),
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$B_{\phi}^{TE} = (n_1 + in_2)(k_{z1} + ik_{z2})\frac{m}{q\rho}J_m(q\rho),$$

$$B_z = 0,$$

$$B_{\phi}^{TE} = -i(n_1 + in_2)qJ_m(q\rho),$$

с точностью до фазового множителя  $\exp\left[i(\tilde{k}_z z + m\varphi)\right]$ , где  $J_m(q\rho)$  – функция Бесселя  $m$ -порядка,  $q = k_0 n \sin(\gamma)$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\gamma$  – угол конуса пучка, показатель преломления  $n = n_1 + in_2$  и продольная компонента волнового вектора  $\tilde{k}_z = k_{z1} + ik_{z2}$  являются комплексными величинами, причем  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости среды.

С использованием (1.1) из формулы

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{E}, \vec{B} \right]$$

находим следующее выражение  $S_z^{TH}$  для продольной составляющей плотности потока энергии бesselова пучка ТН-поляризации:

$$\begin{aligned}
 S_z^{TH} &= \frac{c}{4\pi} k_0(k_{z1}\varepsilon_1 + k_{z2}\varepsilon_2) \times \\
 &\times \left\{ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(q\rho) + (J'_m(q\rho))^2 \right\} \exp[-2k_{z2}z].
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Характерной особенностью энергетических соотношений для ТН-моды пучка, распространяющегося в поглощающей среде, является наличие радиального потока энергии  $S_{\rho}^{TH}$ , а именно:

$$S_{\rho}^{TH} = \frac{c}{4\pi} k_0 q \varepsilon_2 J_m(q\rho) J'_m(q\rho) \exp[-2k_{z2}z]. \tag{1.3}$$

Как видно из формулы (1.3), данная компонента плотности потока энергии отлична от нуля для КП любого порядка  $m$ .

Отметим, что азимутальный поток  $S_{\phi}^{TH}$  отличен от нуля только для пучков высших порядков:

$$S_{\phi}^{TH} = \frac{c}{4\pi} k_0 \varepsilon_1 \frac{m}{\rho} J_m^2(q\rho) \exp[-2k_{z2}z]. \tag{1.4}$$

Количество теплоты  $Q^{TH}$ , поглощенное средой, дается выражением

$$Q^{TH}(q\rho) = \frac{c}{4\pi} k_0 \varepsilon_2 E(q\rho) E^*(q\rho), \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
 E(q\rho) E^*(q\rho) &= \\
 &= \left\{ [k_{z1}^2 + k_{z2}^2] \left\{ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(q\rho) + (J'_m(q\rho))^2 \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + q^2 J_m^2(q\rho) \right\} \exp[-2k_{z2}z].
 \end{aligned}$$

Энергетические и тепловые потоки в зависимости от радиальной координаты для поля КП нулевого порядка ( $m=0$ ) в среде с длиной



поглощения  $L=5$  мм ( $L$  – расстояние, на котором интенсивность пучка уменьшается в  $e$  раз) изображены на рисунке 1.1, (а). Несмотря на то, что радиальные потоки в КП относительно невелики, их необходимо учитывать в полном балансе энергии распространяющегося пучка.

При удалении от центра пучка к периферии поведение радиального потока  $S_\rho^{TH}$  обладает интересными особенностями. Как видно из рисунка 1.1, (а), в приосевой области поток  $S_\rho^{TH}$  отрицательный, т. е. направлен к оси пучка. В этой же области минимально поглощение  $Q^{TH}$ . Данная особенность повторяется далее в окрестности каждого четного нуля радиального потока, то есть поток энергии направлен внутрь кольцевой зоны, содержащей нулевую линию (рисунк 1.2, (а)). В нечетных нулях реализуется вариант (рисунк 1.2, (б)), а именно, радиальный поток направлен из каждой кольцевой зоны наружу. При этом количество поглощаемого тепла в нечетных нулевых точках достигает максимальных значений.

Из рисунка 1.1, (а) видно, что для КП продольный поток энергии  $S_z$  и количество поглощаемой теплоты  $Q$  осциллируют в фазе. Следовательно, минимальное количество теплоты поглощается в нечетных нулях радиального потока  $S_\rho^{TH}$ . На рисунке 1.1, (б) показано векторное поле радиальных потоков.

Существует ряд особенностей, характерных для потоков энергии ТН-поляризованного КП первого порядка ( $m=1$ ), распространяющегося в среде, характеризуемой длиной поглощения  $L=5$  мм. Как следует из соотношения (1.5) и рисунка 1.3, (а), для КП первого и высших порядков пространственная структура потоков энергии и количества теплоты усложняется в связи с появлением азимутального потока  $S_\phi^{TH}$ . Свои максимальные значения азимутальный поток  $S_\phi^{TH}$  принимает в четных нулях функции  $S_\rho^{TH}$  (рисунк 1.3, (а)).

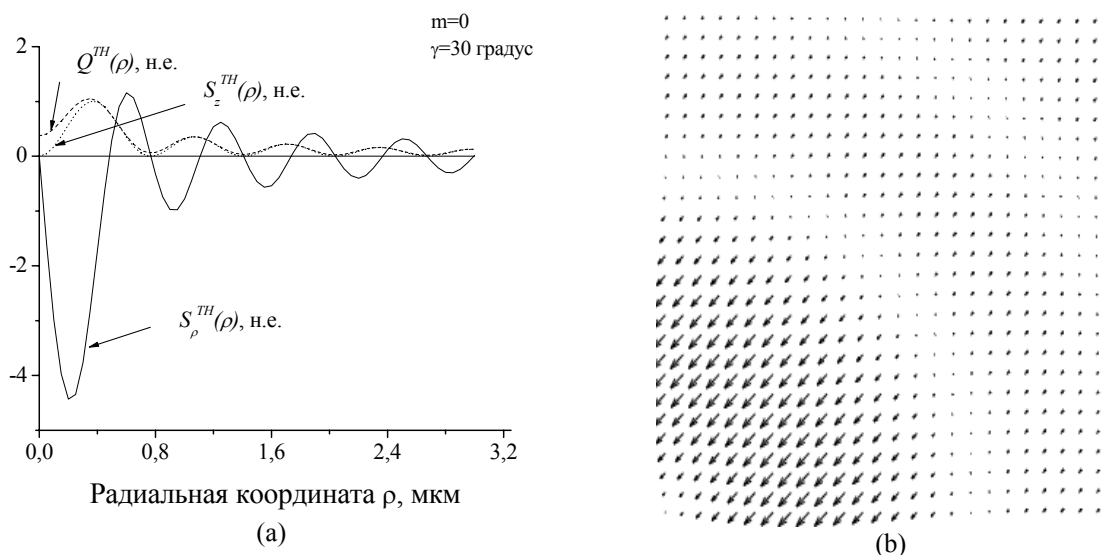


Рисунок 1.1 – Зависимость потоков энергии  $S_\rho^{TH}(\rho)$ ,  $S_z^{TH}(\rho)$  и количества теплоты  $Q^{TH}(\rho)$  КП от поперечной координаты  $\rho$  (а) и векторное поле радиального потока  $S_\rho^{TH}(\rho)$  для КП  $m=0$  (б)

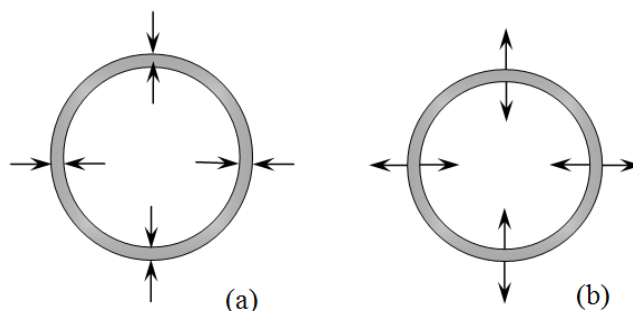
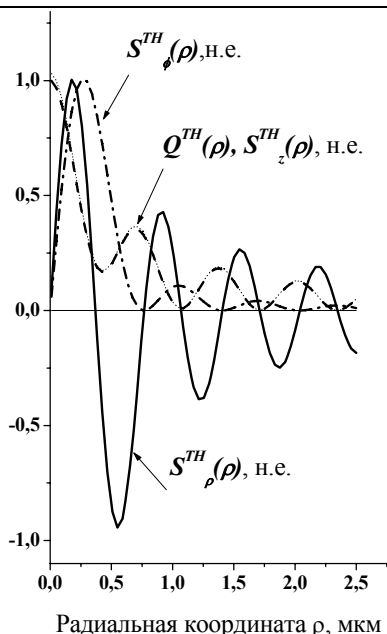
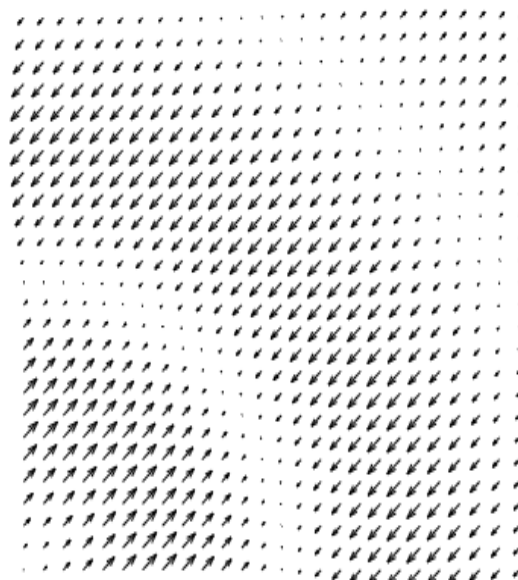


Рисунок 1.2 – Кольцевые зоны пучка в окрестности четных нулей  $S_z$  (а) и нечетных нулей (б). В случае (а) радиальный поток направлен внутрь кольцевой зоны, а в случае (б) – из кольцевой зоны наружу



(a)



(b)

Рисунок 1.3 – Распределение потоков энергии  $S_\rho^{TH}(\rho)$ ,  $S_z^{TH}(\rho)$ ,  $S_\phi^{TH}(\rho)$  и теплоты  $Q^{TH}(\rho)$  в зависимости от радиальной координаты  $\rho$  для КП, распространяющегося в поглощающей среде с  $L=5$  мм (а), и векторное поле радиального потока энергии  $S_\rho^{TH}(\rho)$  для КП (b),  $m=1$

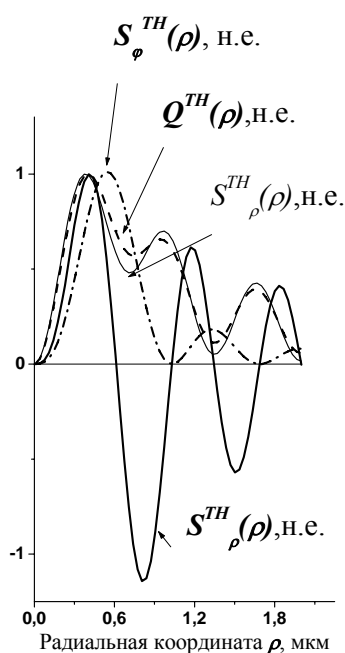


Рисунок 1.4 – Распределение потоков энергии  $S_\rho^{TH}(\rho)$ ,  $S_z^{TH}(\rho)$ ,  $S_\phi^{TH}(\rho)$  и теплоты  $Q^{TH}(\rho)$  в зависимости от радиальной координаты  $\rho$  для КП, распространяющегося в поглощающей среде с  $L=5$ -мм,  $m=2$

В четных нулях  $S_\rho^{TH}$  поглощение  $Q$  минимально. Количество поглощаемого тепла  $Q^{TH}$  максимально в нечетных нулях функции  $S_\rho^{TH}$ ,

при этом потоки  $S_z^{TH}$  и  $Q^{TH}$  осциллируют в фазе с увеличением радиальной координаты. Важной особенностью для вихревого пучка ( $m=1$ ) является то, что теплота  $Q^{TH}$  во втором нуле функции  $S_\rho^{TH}$  поглощается не полностью (рисунок 1.3, (a)).

Это связано с вкладом азимутального потока  $S_\phi^{TH}$ , поскольку в данном случае отличны от нуля все три составляющие потока энергии. Рисунок 1.3, (b) иллюстрирует векторное поле радиального потока энергии  $S_\rho^{TH}$ .

На рисунке 1.4 представлено распределение потоков для КП второго порядка ( $m=2$ ). Из графиков видно, что для основной и высших мод нули нормированного радиального потока совпадают с минимумами или максимумами теплового потока.

## 2 Потоки энергии для ТЕ-поляризованного квазибездифракционного пучка

Расчеты показывают, что радиальная компонента потока энергии для пучка ТЕ-поляризации любого порядка равна нулю. В свою очередь, продольная  $S_z$  и азимутальная  $S_\phi$  компоненты плотности потока энергии ТЕ-моды Бесселева пучка, а также количество поглощаемого тепла  $Q^{TE}$  имеют вид:

$$S_z^{TE} = \frac{c}{4\pi} k_0 k_{z1} (n_1^2 + n_2^2) \times$$

$$\times \left\{ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(q\rho) + (J'_m(q\rho))^2 \right\} \exp[-2k_{z2}z], \quad (2.1)$$

$$S_\varphi^{TE} = \frac{c}{4\pi} k_0 (n_1^2 + n_2^2) \frac{m}{\rho} J_m^2(q\rho) \exp[-2k_{z2}z], \quad (2.2)$$

$$Q^{TE} = \frac{c}{4\pi} k_0 \varepsilon_2 [n_1^2 + n_2^2] \times \left\{ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(q\rho) + (J'_m(q\rho))^2 \right\} \exp[-2k_{z2}z]. \quad (2.3)$$

Распределения продольного  $S_z^{TE}$  и теплового  $Q^{TE}$  потоков для КП  $m=0, 1, 2$ , распространяющихся в поглощающей среде (при значении  $L=5$  мм), представлены на рисунке 2.1, (а)–(с). Из анализа приведенных графиков следует, что для ТЕ-моды указанных потоков имеет место совпадение характера поведения функций  $S_z^{TE}(\rho)$  и  $Q(\rho)$ .

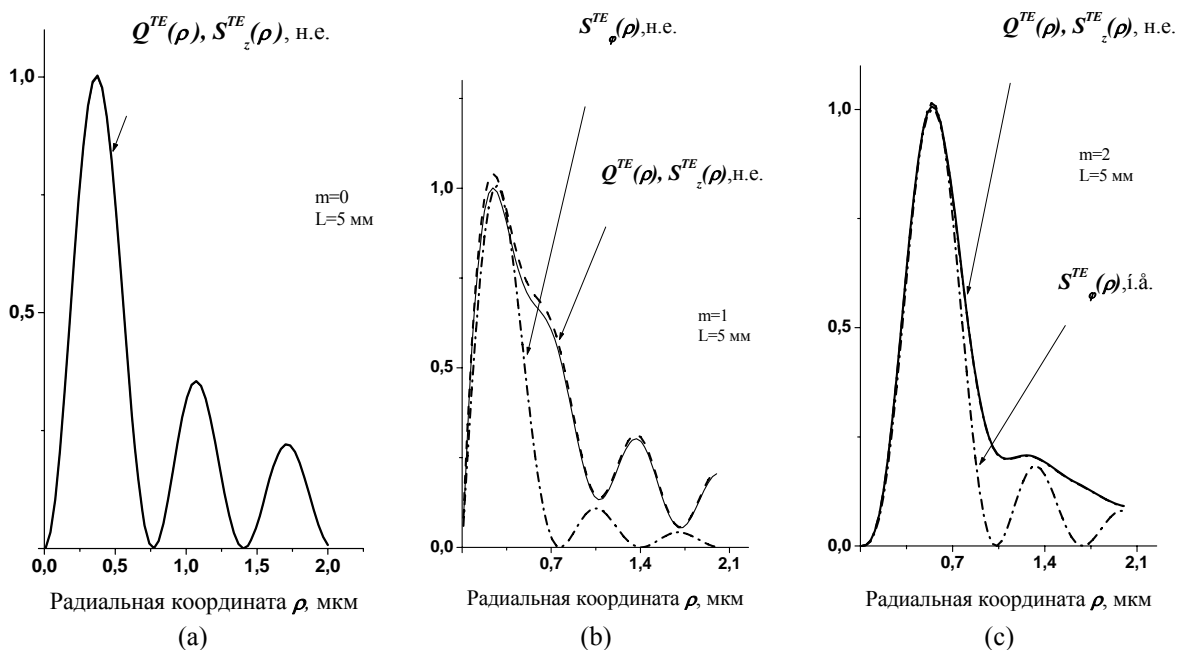


Рисунок 2.1 – Пространственная структура потоков энергии  $S_z^{TE}(\rho)$ ,  $S_\varphi^{TE}(\rho)$  и количества теплоты  $Q^{TE}(\rho)$  для бesselова пучка ТЕ-поляризации

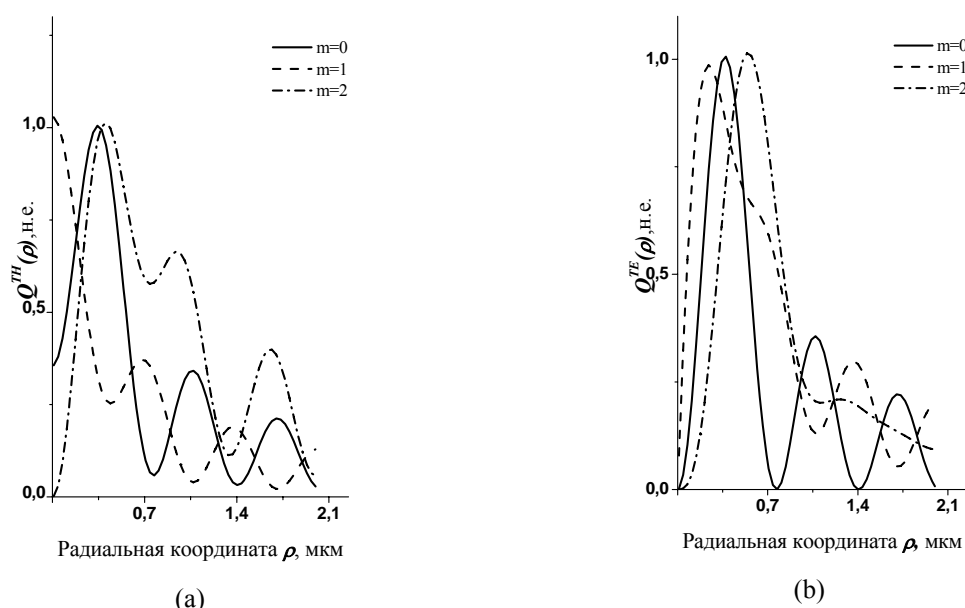


Рисунок 2.2 – Пространственное распределение количества поглощаемого тепла  $Q^{TH,TE}(\rho)$  для КП,  $L=5$ ·мм

Распределение потоков количества теплоты для ТЕ-мод КП ( $m=0, 1, 2, 3$ ) в поглощающих средах проиллюстрировано на рисунке 2.2 (b). Видно, что для ТЕ-моды особенностью поведения функций  $Q(\rho)$  для КП нулевого и КП первого порядков является их антифазно осциллирующий характер, причем первый минимум  $Q(\rho)$  КП первого порядка является ненулевым. Эта особенность имеет место благодаря появлению антифазной составляющей  $S_\rho^{TE}$ . В случае распространения тепловых потоков  $Q$  для пучка ТЕ-поляризации происходит расширение приосевой зоны поглощаемой теплоты  $Q(\rho)$  для  $m=1$  и  $m=2$ , что связано с появлением азимутального потока энергии  $S_\rho^{TE}$  и с отсутствием радиального потока  $S_\rho^{TE}$ .

### 3 Энергетические характеристики квазициркулярно-поляризованного квазибездифракционного пучка

При исследовании энергетических характеристик для случая падения на поглощающую среду квазициркулярно поляризованного КП принималось во внимание, что КП может быть представлен в виде суперпозиций ТН- и ТЕ- пучков. С учетом граничной задачи радиальная компонента  $S_\rho$  плотности потока энергии в поглощающей среде дается выражением:

$$S_\rho = T^{TH} S_\rho^{TH} + \frac{c}{4\pi} k_{z2} \frac{m}{\rho} J_m^2(q\rho) \times \left\{ t^{TH} (t^{TE})^* (n_1 - in_2(L)) + k.c \right\}. \quad (3.1)$$

Из формулы (3.1) видно, что второе слагаемое является интерференционной компонентой потока:

$$S_\rho^{int} = \frac{c}{4\pi} k_{z2} \frac{m}{\rho} J_m^2(q\rho) \times \left\{ t^{TH} (t^{TE})^* (n_1 - in_2(L)) + k.c \right\}, \quad (3.2)$$

где  $t^{TH} = \frac{2k_0 n_0^2 \cos \gamma}{n_0(k_{z1} + ik_{z2}) + k_0(\epsilon_1 + i\epsilon_2) \cos \gamma}$ ,

$$t^{TE} = \frac{2k_0 n_0^2 \cos \gamma}{[(k_{z1} + ik_{z2}) + k_0 n_0 \cos \gamma](n_1 + in_2)}$$

– амплитудные коэффициенты прохождения КП из непоглощающей среды с показателем преломления  $n_0$  в поглощающую ( $n=n_1+in_2$ ).

Аналогично для продольной компоненты  $S_z$  плотности потока энергии получаем:

$$S_z = T^{TH} S_z^{TH} + T^{TE} S_z^{TE} + F(q\rho), \quad (3.3)$$

где

$$F(q\rho) = \frac{c}{4\pi} \frac{k_{z2}}{k_{z1}^2 + k_{z2}^2} \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho) J'_m(q\rho) \times \left\{ t^{TH} (t^{TE})^* (n_1 - in_2(L)) [k_0^2 n_2^2(L) + 1] + k.c \right\}.$$

В свою очередь, выражение для количества поглощаемой теплоты может быть представлено в виде:

$$Q(q\rho) = \frac{c}{2\pi} k_0 n_1 n_2 E(q\rho) E^*(q\rho), \quad (3.4)$$

где

$$E(q\rho) E^*(q\rho) = \frac{c}{2\pi} k_0 n_1 n_2 \times \left\{ t^{TH} t^{TH*} \left[ (k_{z1} + ik_{z2}) \left( \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2 + J_m'^2 \right) + q^2 J_m^2 \right] + t^{TE} t^{TE*} k_0^2 (n_1^2 + n_2^2) \left( \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2 + J_m'^2 \right) + t^{TH} t^{TE*} k_0 (k_{z1} + ik_{z2}) (n_1 - in_2) \frac{m}{q\rho} J_m J_m' + t^{TH*} t^{TE} k_0 (n_1 + in_2) (k_{z1} - ik_{z2}) \frac{m}{q\rho} J_m J_m' \right\}.$$

Из (3.1), (3.2), (3.3) следует, что при падении квазициркулярно поляризованного КП плотность потока энергии в поглощающей среде определяется не только вкладом ТН- и ТЕ-компонент полей, но также и их интерференцией. На рисунке 3.1, (a) показаны составляющие поперечного потока  $S_\rho^{TH}$ ,  $S_\rho^{int}$  как функции радиальной координаты для пучка с  $m=1$ . Как видно, интерференционная компонента  $S_\rho^{int}$  вносит значительный вклад в суммарный поток, в особенности в приосевой области. Важно подчеркнуть, что данная компонента  $S_\rho^{int}$  положительна для любых  $\rho$ , т.е. интерференционный поток направлен от оси пучка. На рисунке 3.1, (b) показаны распределения суммарного радиального  $S_\rho$  и теплового  $Q$  потоков. Видно, что существуют два значения радиальной координаты, для которых величина теплового потока минимальна или максимальна, при этом в первом случае радиальный поток формирует картину, соответствующую варианту, изображенному на рисунке 1.2, (a), во втором случае варианту, показанному на рисунке 1.2, (b).

### Заключение

Численными методами исследованы энергетические характеристики квазибездифракционных световых пучков в поглощающих средах. Установлено, что коэффициент поглощения среды существенно влияет на распределение энергетических потоков квазибездифракционных световых пучков. Показано, что в поперечном сечении квазибездифракционных световых пучков как для основной моды, так и для высших мод нули радиального потока совпадают с зонами минимального или максимального тепловыделения.

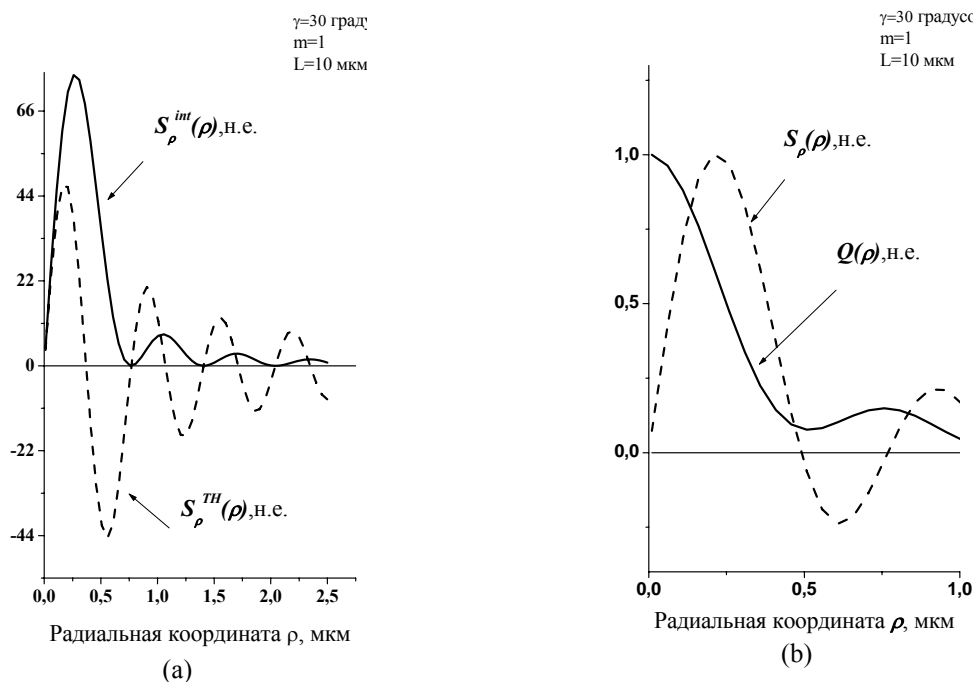


Рисунок 3.1 – Пространственное распределение составляющих поперечного потока  $S_{\rho}^{TH}(\rho)$ ,  $S_{\rho}^{int}(\rho)$  (а), а также суммарного радиального потока  $S_{\rho}(\rho)$  и количества поглощаемого тепла  $Q(\rho)$  (б) для случая квазициркулярно-поляризованного бesselова пучка ( $m=1$ )

Для ТН-моды пучка характерно наличие радиального, продольного и азимутального потоков энергии, причем азимутальный поток энергии существует только для квазибездифракционных световых пучков высших порядков. Установлено, что радиальные зависимости нормированного продольного потока энергии и количества теплоты совпадают и принимают свои максимальные и минимальные значения соответственно в четных и нечетных нулях функции радиального потока энергии.

Показано, что радиальный поток энергии отсутствует для ТЕ-моды КП. В этом случае имеет место пространственное совпадение продольной составляющей потока энергии и теплового потока. Расширение приосевой зоны тепловыделения для квазибездифракционных световых пучков высших порядков обусловлено появлением азимутального потока энергии.

В случае падения на поглощающую среду квазициркулярного квазибездифракционного светового пучка возникает интерференционная составляющая потока энергии, которая вносит значительный вклад в суммарный поток, в особенности в приосевой области пучка. Таким образом, в рассмотренных случаях (ТН-, ТЕ-, квазициркулярной мод) взаимодействия квазибездифракционных световых пучков с поглощающими средами имеет место преимущественное нагревание или отсутствие нагревания среды в приосевой зоне пучка, что в сочетании со свойством квазибездифракционности перспективно

для практических применений, например для локального термического воздействия на объект в задачах неразрушающего контроля и диагностики технических и биологических объектов.

Дальнейшее развитие данного подхода для слоистой среды позволит оптимизировать диагностические системы на основе оптической когерентной томографии с применением квазибездифракционных световых пучков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Grazing-incidence interferometry applied to the measurement of cylindrical surfaces* / T. Dresel [et al.] // Opt. Eng. – 1995. – Vol. 34. – P. 3531–3535.
2. *Bessel beam based optical profilometry* / V. Belyi [et al.] // Proc. SPIE. – 2005. – Vol. 5964. – P. 59640L1–59640L12.
3. *Extended focus depth for Fourier domain optical coherence microscopy* / R.A. Leitgeh [et al.] // Opt. Lett. – 2006. – Vol. 31, № 16. – P. 2450–2452.
4. *Optical micromanipulation using a Bessel light beam* / J. Arlt [et al.] // Opt. Comm. – 2001. – Vol. 197. – P. 239–245.
5. *Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam* / V. Garcés-Chavez [et al.] // Nature. – 2002. – Vol. 419. – P. 145–147.
6. *McGloin, D. Bessel beams: diffraction in a new light* / D. McGloin, K. Dholakia // Contemp. Phys. – 2005. – Vol. 46. – P. 15–28.

---

7. *Fadeyeva, T.A.* Nondiffracting vortex-beams in a birefringent chiral crystal / T. A. Fadeyeva, A.V. Volyar // *JOSA A*. – 2010. – Vol. 27, Issue 1. – P. 13–20.

8. *Petrova, E.S.* Bessel light beams in gyrotropic medium / E.S. Petrova // *Proc. SPIE*. – 2000. – Vol. 4358. – P. 265–271.

9. *Zamboni-Rached, M.* Diffraction-Attenuation resistant beams in absorbing media / M. Zamboni-Rached // *Opt. Express*. – 2006. – Vol. 14. – P. 1804–1809.

10. *Zamboni-Rached, M.* Diffraction-Attenuation Resistant Beams: their Higher Order Versions

and Finite-Aperture Generations / M. Zamboni-Rached, L.A. Ambrosio, H.E. Hern´andez-Figueroa // *Arxiv.org*. [Electronic resource]. – 2010.– Mode of access: <http://arxiv.org/abs/1007.1046v1> [physics. optics]. – Date of access : 07.06. 2011

11. *Khilo, N.A.* Reflection and absorption of conical and Bessel light beams by cylindrical objects // N.A. Khilo, L.I. Kramoreva, E.S. Petrova // *JAS*. – 2005. – Vol. 72 (5). – P. 663–669.

*Поступила в редакцию 21.05.12.*

УДК 541.15

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ Co-Ni, ЭЛЕКТРООСАЖДЕННЫХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Н.Г. Валько<sup>1</sup>, В.Г. Гуртовой<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

<sup>2</sup>НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, Минск

## THE ELECTRICAL PROPERTIES OF THE ALLOYS Co-Ni, ELECTROPLATED UNDER THE INFLUENCE OF THE X-RAY IRRADIATION

N.G. Valko<sup>1</sup>, V.G. Hurtavy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Y. Kupala Grodno State University, Grodno

<sup>2</sup>Scientific and Practical Materials Research Center of NAS of Belarus, Minsk

Изложены основные закономерности формирования электролитических пленок Co-Ni при воздействии рентгеновского излучения. Обнаружены зависимости электрических свойств от режимов осаждения и облучения. Рассмотрены причины изменения удельного электросопротивления у облучаемых в процессе электроосаждения пленок, обусловленные изменением морфологии поверхности, элементного состава, уменьшением пористости и увеличением скорости электроосаждения под действием рентгеновского излучения.

**Ключевые слова:** рентгеновское излучение, гальванические пленки Co-Ni, удельное электрическое сопротивление.

Basic laws governing of the forming of the electroplated films Co-Ni under the influence of X-ray irradiation are presented. The dependences of the electrical properties from electrolysis conditions are discovered. The reasons for the change of the resistivity in the films Co-Ni obtained under irradiation, caused by the change in the morphology of surface, element composition, by the decrease of porous in the coating and by the increase in the speed of electrodeposition under the effect of X ray-irradiation are considered.

**Keywords:** X-ray irradiation, electroplated films, Co- Ni alloys, resistivity.

### Введение

Электролитически осажденные пленки Co-Ni, несмотря на сложности в технологии их получения, широко применяются в машиностроительной отрасли, в авиационной и космической промышленности как износостойкие магнитные материалы. В силу специфики процесса электроосаждения структура и свойства получаемых осадков зависят, в первую очередь, от режимов электролиза и состава электролита. Известно, что применение в процессе электроосаждения внешних воздействий, таких как магнитное поле, ультразвук и т. д., приводит к изменению механизма электрокристаллизации, тем самым обуславливая модификацию структуры и свойств осажденных покрытий [1]–[2].

В настоящее время одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений в физике конденсированного состояния являются исследования в области модификации структуры и свойств магнитных гальванических сплавов с помощью высокоинтенсивного излучения. Особый интерес представляют методы облучения электролита рентгеновским излучением непосредственно в процессе получения пленок. Действие рентгеновского излучения на электролит в ходе электрокристаллизации позволяет интенсифицировать диффузию в нем посредством возникновения продуктов радиолитиза. Обладая высокой

подвижностью, последние активизируют перемешивание электролита в объеме, способствуя не только уменьшению толщины диффузионного слоя, но и своевременной доставке разряжающихся ионов к поверхности катода, тем самым увеличивая массовый прирост вещества в единицу времени [3]–[4]. Следует также учитывать, что радиационно-химические превращения, протекающие в электролитах под облучением, приводят к изменению микроструктуры получаемых осадков, что может служить причиной модификации их электрических характеристик. Поэтому представляет интерес выявление зависимостей электрических свойств пленок Co-Ni, полученных при воздействии рентгеновского излучения, от режимов электролиза и облучения.

### 1 Методика эксперимента

Пленки осаждались на индифферентных алюминиевых подложках при плотностях катодного тока 2, 2,5, 3 А/дм<sup>2</sup> из сульфатного электролита (Co<sup>2+</sup>:Ni<sup>2+</sup> = 1:1) в течение 1 ч в поле рентгеновского излучения (P<sub>эксп</sub> ≈ 100 кР/ч). Элементный состав и морфология поверхности сплавов исследовались с помощью растрового электронного микроскопа LEO 1455 VP с энергодисперсионным рентгеновским анализатором RÖNTEC. Исследования электропроводности проводились стандартным четырехзондовым методом на

постоянном токе в температурном интервале от 7 до 300 К в отсутствие внешнего магнитного поля и в поле разной напряженности. Во всем температурном интервале измерений точность определения температуры составляла не менее 1 К. Относительная погрешность определения электросопротивления не превышала 0,5%. Измерение толщин проводилось при помощи толщиномера Константа К-5.

## 2 Результаты эксперимента и их обсуждение

При осаждении пленок в поле рентгеновского излучения были получены осадки, морфология поверхности которых менее развита в сравнении с контрольными образцами.

На рисунке 2.1 видно, что микроструктура пленок кобальт-никель, полученных на стационарном режиме, разнотельная; зерна вытянуты вдоль фронта кристаллизации и хорошо ограничены. Средний размер зерна у контрольных пленок 2,5 мкм. У пленок, осажденных под действием рентгеновского излучения, форма кристаллического зерна не изменяется, однако их размер несколько меньше, нежели у контрольных образцов, и составляет 1,5 мкм. Увеличение дисперсности кристаллических зерен у пленок, полученных в поле рентгеновского излучения, можно объяснить интенсификацией диффузионных процессов и увеличением скорости осаждения покрытий под облучением электролита [3]. Известно, что скорость наращивания покрытий зависит от условий, в которых проводятся процессы выделения металла (плотность тока, концентрация, температура, интенсивность перемешивания). Поскольку электроосаждение проводили при постоянном токе из неперемешиваемого электролита, то ускорение процесса под облучением, возможно, обусловлено постоянством концентрации ионов восстанавливаемых металлов. Согласно [5]–[6], возникающие в электролитах под действием рентгеновского излучения пер-

вичные продукты радиолиза обладают повышенной подвижностью, что приводит к увеличению коэффициента диффузии ионов в электролитах, а значит – к увеличению скорости перемешивания раствора, приводящей к уменьшению диффузионного слоя и увеличению градиента концентрации ионов осаждаемого металла на его границе. Увеличение градиента концентрации, в свою очередь, должно приводить к увеличению потока ионов восстанавливаемого металла к катоду и, соответственно, к увеличению скорости электрокристаллизации. Поэтому использование рентгеновского излучения в процессе электроосаждения пленок Co-Ni позволяет увеличивать скорость осаждения вещества на катоде. В частности, для пленок, полученных при плотности катодного тока  $2 \text{ А/дм}^2$ , массовый прирост под облучением увеличивается на 25%. Возрастание скорости электроосаждения может быть причиной повышенной дисперсности кристаллического зерна у облучаемых в процессе осаждения пленок.

Радиолиз электролита, протекающий под действием рентгеновского излучения, обуславливает изменение механизма электрокристаллизации, которое оказывает влияние на структуру и элементный состав получаемых осадков. Результаты исследования элементного состава поверхностного слоя пленок Co-Ni приведены в таблице 2.1. Анализ данных позволяет заключить, что на катоде кристаллизуются осадки, в которых концентрация кобальта значительно выше, чем никеля. Это может быть связано с тем, что при близких стандартных потенциалах катодная поляризация кобальта выражена несколько слабее, чем у никеля. При этом, чем ниже плотность тока, тем содержание кобальта в сплавах выше. Например, у контрольных пленок, осажденных при  $j=3 \text{ А/дм}^2$ , концентрация на 15% выше, а никеля, соответственно, в 2 раза ниже, чем в пленках, полученных при  $j=2 \text{ А/дм}^2$ .

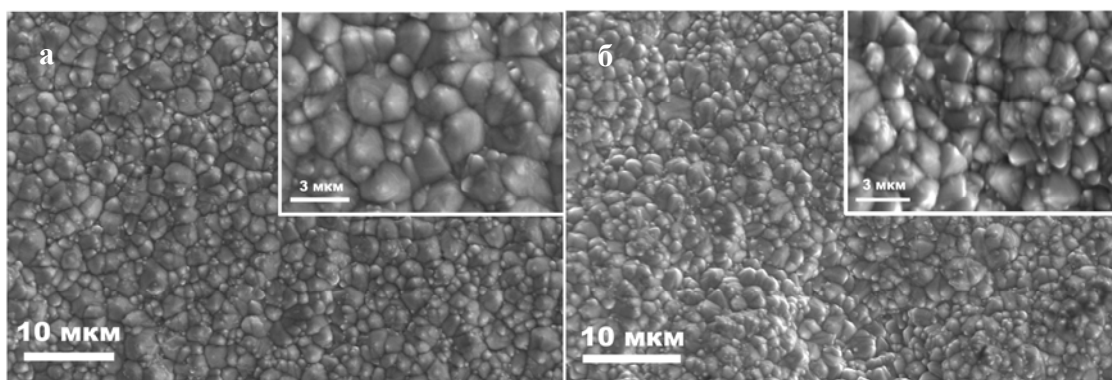


Рисунок 2.1 – Морфология поверхности пленок Co-Ni, электроосажденных при плотности катодного тока  $2 \text{ А/дм}^2$

а – контрольные покрытия;

б – покрытия, осажденные при воздействии рентгеновского излучения



Таблица 2.1 – Элементный состав пленок Co-Ni, ат. %

	2 А/дм <sup>2</sup>		2,5А/дм <sup>2</sup>		3 А/дм <sup>2</sup>	
	к.о.	Обл.	к.о.	Обл.	к.о.	Обл.
Co	84,6	87,37	81,2	84,88	72,23	78,9
Ni	15,3	12,6	18,8	15,12	27,77	21,09

Увеличение плотности катодного тока при электролизе приводит к смещению потенциала восстановления в более электроотрицательную сторону, тем самым увеличивая долю тока, идущего на выделение никеля. Вследствие этого элементный состав пленок Co-Ni, полученных при больших плотностях катодного тока, отличается пониженным содержанием кобальта и повышенной концентрацией никеля.

Обнаружено, что в поле рентгеновского излучения осаждаются покрытия с содержанием электроположительного компонента выше, чем у контрольных необлученных образцов. Снижение концентрации никеля в сплаве и увеличение кобальта под облучением обусловлено тем, что аномально подвижные продукты радиолиза, появление которых вызвано действием рентгеновского излучения, вследствие интенсивного перемешивания снимают диффузионные ограничения, оказывающие влияние в первую очередь на электроположительные компоненты электролита [7].

Изменения концентрации элементов в сплавах Co-Ni и морфологии поверхности микроструктуры сплавов Co-Ni, происходящие при воздействии рентгеновского излучения на электрохимическую систему в процессе их осаждения, должны приводить к соответствующему изменению электрических характеристик.

На рисунке 2.2 приведены температурные зависимости удельного электросопротивления сплавов Co-Ni в интервале температур 7 – 300 К. Видно, что увеличение плотности катодного тока электролиза приводит к уменьшению сопротивления пленок Co-Ni. Так, при температуре 50 К удельное электрическое сопротивление образцов, осажденных при плотности тока 3 А/дм<sup>2</sup>, в три раза ниже, чем у образцов, полученных при плотности тока 2 А/дм<sup>2</sup>.

Такое уменьшение сопротивления у пленок может быть связано с уменьшением концентрации кобальта и возрастанием никеля в сплавах Co-Ni вследствие смещения потенциала восстановления металлов в отрицательную область при увеличении плотности тока электролиза, а также менее развитой геометрией поверхности пленок, осаждаемых при малых плотностях катодного тока. При действии рентгеновского излучения на электролит происходит увеличение его pH, что в свою очередь препятствует образованию в прикатодном слое коагулятов гидроокисных соединений, отсутствие адсорбции которых на поверхности катода снижает количество дефектов упаковки

и способствует формированию сплошных покрытий, что также оказывает влияние на электросопротивление.

Следует отметить, что электросопротивление пленок растет с увеличением температуры, что связано с возрастанием амплитуды тепловых колебаний атомов в кристаллической решетке, а также уменьшением рассеивания электронов на различного рода дефектах кристаллической решетки.

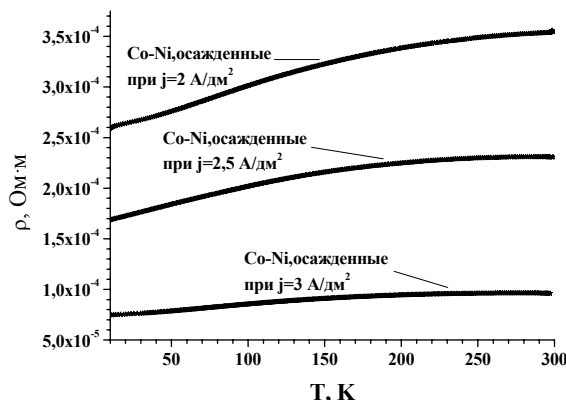


Рисунок 2.2 – Температурные зависимости удельного электросопротивления сплавов Co-Ni, полученных при различных режимах электролиза

Обнаружено, что у пленок, осажденных в условиях облучения, удельное сопротивление больше чем у контрольных образцов. На рисунке 2.3 показаны температурные зависимости удельного сопротивления сплавов, полученных при токе 3 А/дм<sup>2</sup> без облучения и под действием рентгеновского излучения. Как показывает анализ полученных зависимостей, электросопротивление у пленок, сформированных в поле рентгеновского излучения, возрастает более чем на порядок во всем исследуемом интервале температур.

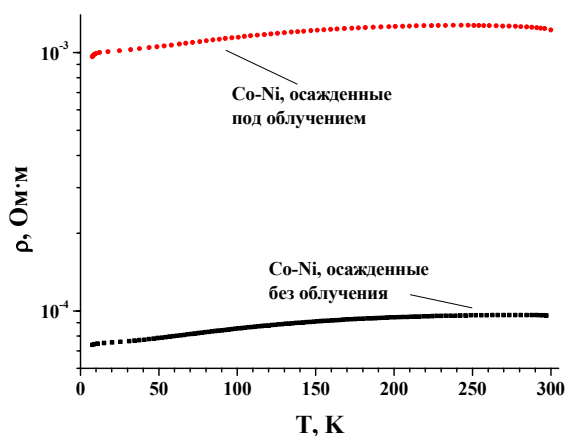
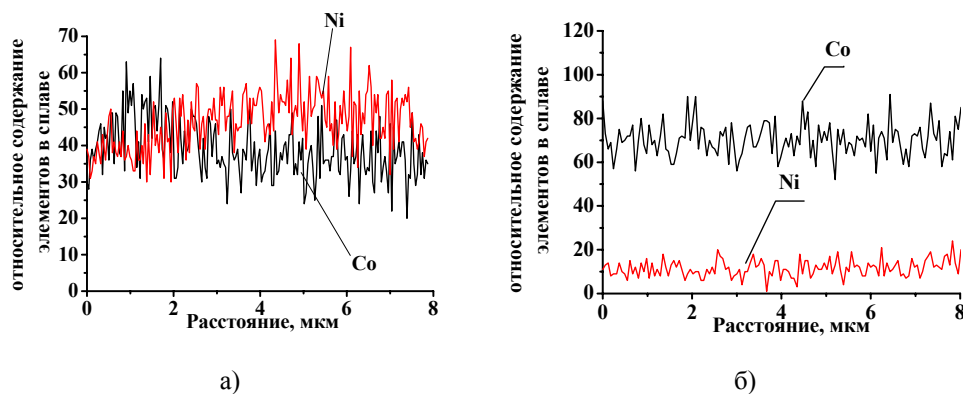


Рисунок 2.3 – Температурные зависимости удельного электросопротивления сплавов Co-Ni, полученных при токе 3 А/дм<sup>2</sup>



а)  
Рисунок 2.4 – Распределение элементов по толщине пленок Co-Ni,  
полученных при плотности катодного тока  $j = 1.5 \text{ A} / \text{dm}^2$

а – необлученные образцы; б – осажденные в поле рентгеновского излучения

Это может быть обусловлено отличием в соотношении концентрации кобальта и никеля в контрольных и облученных образцах, а также распределением элементов по толщине осадка. Так, исследования элементного состава показали, что у образцов, осажденных в поле рентгеновского излучения, наблюдается равномерное распределение элементов по всей толщине пленок. У контрольных образцов по толщине пленки наблюдается непостоянство состава: с увеличением толщины в направлении роста пленки происходит рост концентрации никеля и уменьшение кобальта (рисунок 2.4).

Таким образом, установлено, что облучение электролита рентгеновским излучением с мощностью экспозиционной дозы  $100 \text{ кР/ч}$  в процессе электроосаждения пленок Co-Ni приводит к формированию сплавов с повышенным содержанием электроположительного компонента. Обнаружено, что пленки, полученные под излучением, имеют равномерное распределение концентрации кобальта и никеля по всей толщине пленки и менее развитую морфологию поверхности по сравнению с контрольными необлученными образцами. Показано, что увеличение тока осаждения при электролизе приводит к увеличению концентрации никеля в сплавах Co-Ni.

При изучении электрических свойств пленок Co-Ni были получены зависимости удельного сопротивления от температуры, режимов электролиза. Установлено, что увеличение тока электроосаждения приводит к уменьшению удельного электросопротивления в сплавах Co-Ni, а действие рентгеновского излучения в процессе формирования покрытий – к существенному его возрастанию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Mendi Ebadi*. Influence of magnetic field on the electrodeposition of Ni-Co alloy / Mendi Ebadi, W.J. Basirun, Yatimah Alias // *J. Chem. Sci.* – 2010. – Vol. 122, № 2. – P. 279–285.
2. *Electrodeposition of quaternary alloys in the presence of magnetic field* / Mendi Ebadi [et al.] // *Chemistry Central Journal*. – 2011. – Vol. 4, № 14. – P. 186–194.
3. *Формирование никелевых покрытий методом электрохимического осаждения при воздействии рентгеновского излучения* / В.М. Анищик [и др.] // *Поверхность*. – 2010. – № 4–С. 1–4.
4. *Структура и свойства гальванических покрытий Zn-Ni, сформированных при воздействии рентгеновского излучения* / В.М. Анищик [и др.] // *Физика и химия обработки материалов*. – 2010. – № 6. – С. 1–6.
5. *Ершов, Б.Г.* Атомы и ионы в необычных состояниях / Б.Г. Ершов // *Журнал неорганической химии*. – 2002. – Т. 47, №4. – С. 644.
6. *Пикаев, А.К.* Современная радиационная химия. Радиолит газы и жидкости / А.К. Пикаев. – М. : Наука, 1986. – 439 с.
7. *Валько, Н.Г.* Структура пленок Co-Ni, электролитически осажденных в поле рентгеновского излучения / Н.Г. Валько, В.В. Война // *Актуальные проблемы физики твердого тела: сборник докладов Международной научной конференции (Минск, 18-21 октября 2011)* / редкол. Н.М. Олехнович (пред.) [и др.]. – Минск : А.Н. Варакин, 2011 г., в 3-х томах, Т. 2. – С. 259–262.

Поступила в редакцию 04.06.12.

УДК 535.42+537.86.22

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

### POLARIZABLE AND ENERGY PROPERTIES OF THE VECTOR PARAXIAL GAUSSIAN LIGHT BEAMS

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Найдены и исследованы поляризация и плотность потока энергии электромагнитного поля для векторных параксиальных гауссовых световых пучков с однородной и неоднородной поляризацией различных видов. Описаны несколько новых типов векторных параксиальных гауссовых световых пучков, например, пучки со спиральной эллиптической поляризацией.

**Ключевые слова:** параксиальные пучки, векторные пучки, световые пучки, гауссовы пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, неоднородная поляризация.

Polarization and energy flux density of an electromagnetic field for the vector paraxial Gaussian light beams with the homogeneous and nonhomogeneous polarization of various types are discovered and explored. Some new types of the vector paraxial Gaussian light beams, for example, beams with spiral elliptic polarization are featured.

**Keywords:** paraxial beams, vector beams, light beams, Gaussian beams, polarizable properties, energy properties, nonhomogeneous polarization.

#### Введение

Узконаправленные электромагнитные пучки находят широкое применение в науке и технике [1]–[10]. Векторным световым пучкам с гауссовой огибающей посвящены многочисленные публикации. Несмотря на это, здесь еще осталось много нерешенных проблем. В предыдущих работах автора был предложен общий формализм для аналитического описания векторных параксиальных пучков с однородной [8] и неоднородной [9] поляризацией. В настоящей работе этот формализм применяется для изучения поляризационных и энергетических свойств векторных параксиальных гауссовых световых пучков нескольких видов.

#### 1 Общий формализм для описания векторных параксиальных пучков

Общее электрическое поле векторных параксиальных монохроматических пучков можно описывать функцией вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.1)$$

где, однако, векторная амплитуда  $\mathbf{E}$  не является постоянной, а зависит от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Параксиальные пучки однозначно определяются поперечной частью  $\mathbf{E}_\perp$  вектора электрического поля. Целесообразно рассматривать одновременно пучки двух типов:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \frac{i}{k} \nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)} e_z; \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(2)}; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp^{(1)}] + \frac{i}{k} \nabla_\perp [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp^{(1)}] \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H}^{(2)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(1)}. \quad (1.3)$$

Верхние индексы <sup>(1)</sup> и <sup>(2)</sup> здесь и далее означают пучки первого и второго типов.  $\nabla_\perp = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y$  – векторный поперечный оператор набла;  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $z$  пучка,  $n$  – показатель преломления среды. Используются обозначения:  $k_0 = \omega / c$ ,  $n^2 = \varepsilon \mu$ ,  $k = k_0 n$ .

В (1.2)–(1.3) векторы электрических полей  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$  взаимосвязаны:  $(\mathbf{E}_\perp^{(2)} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp^{(1)}])$ . Поэтому такие пучки называем сопряженными друг другу.

Перейдем к поляризационным характеристикам пучков  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ . Предварительно отметим, что  $\mathbf{E}_\perp^{(1)} \mathbf{E}_\perp^{(2)} = 0$ . Это означает, что векторы  $\mathbf{E}_\perp^{(1)}$  и  $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$  имеют одинаковую эллиптичность, а направления главных осей эллипсов поляризации отличаются на  $90^\circ$ . Поляризационные и энергетические характеристики сопряженных пучков аналогичны. Поэтому в дальнейшем будем ограничиваться, как правило, анализом только одного из двух сопряженных пучков.

Запишем выражения для вычисления поляризации параксиальных сопряженных векторных пучков типа  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$ . Для этого разложим поперечные векторы  $\mathbf{E}_\perp$  по ортогональному декартову базису  $(\mathbf{E}_\perp = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y)$ :

$$\mathbf{E}^{(1)} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + \frac{i}{k} (\partial_x E_x + \partial_y E_y) \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(2)}; \quad (1.4)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = E_x \mathbf{e}_y - E_y \mathbf{e}_x + \frac{i}{k} (\partial_y E_x - \partial_x E_y) \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(1)} \quad (1.5)$$

и введем комплексный параметр поляризации соотношением  $\eta = \eta' + i\eta'' = E_y / E_x$ . Если теперь ввести комплексный угол  $(\psi' + i\psi'')$  соотношением  $\eta = \text{tg}(\psi' + i\psi'')$ , тогда азимут эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс равен  $\psi'$ , а ее эллиптичность  $\gamma$  выражается как  $\gamma = \text{th} \psi''$ . При численных расчетах можно также пользоваться формулами [11]–[12]:

$$\text{tg } 2\psi' = \frac{2\eta'}{1 - |\eta|^2}; \quad \text{th } 2\psi'' = \frac{2\eta''}{1 + |\eta|^2}.$$

Если параметр  $\eta$  является константой, то имеем однородно поляризованные пучки. Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и изучались нами в [8].

Усредненные по времени плотность энергии  $w$  и плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) [5], [7]

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}|^2; \quad \mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\mathbf{E}^* \mathbf{H}]$$

для сопряженных параксиальных пучков являются одинаковыми:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}_\perp|^2; \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_z \mathbf{e}_z; \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad (1.6)$$

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \text{Im} \left( \mathbf{E}_\perp^{(1)*} \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \mathbf{E}_\perp^{(2)*} \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(2)} \right). \quad (1.7)$$

Часто целесообразно, следуя Бекшаеву [14], [15] и Бэрри [16], поперечный поток энергии  $\mathbf{S}_\perp$  разделить явно на орбитальный  $\mathbf{S}_0$  и спиновый  $\mathbf{S}_s$  потоки соответственно соотношениями

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_s = \quad (1.8)$$

$$= \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \text{Im} \left( \mathbf{E}_\perp^{(1)*} (\nabla_\perp) \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \frac{[\nabla_\perp \times [\mathbf{E}_\perp^{(1)*} \times \mathbf{E}_\perp^{(1)}]]}{2} \right).$$

## 2 Энергетические характеристики векторных параксиальных гауссовых пучков с однородной поляризацией

Пусть некоторая волновая функция  $F$  удовлетворяет скалярному параболическому уравнению

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)F = 0. \quad (2.1)$$

Простейшим пучковым решением (2.1) является гауссиан

$$G = \frac{1}{q} \exp \left( \frac{ik(x^2 + y^2)}{2q} \right), \quad (2.2)$$

где  $q = z - q_0$  – комплексный параметр пучка;  $q_0 = q'_0 + iq''_0$  – комплексная константа, причем  $q''_0 = kw_0 / 2$  – конфокальный параметр пучка;  $w_0$  – радиус пучка в перетяжке. Здесь и далее используются обозначения:  $k = \omega n / c$ . Отметим, что любой гауссов пучок в своей амплитуде содержит множитель (гауссиан)  $G$ .

Обсудим теперь свойства параксиальных векторных гауссовых световых пучков первого типа  $(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)})$ . Для анализа их поляризационных характеристик поперечную часть векторной амплитуды простейшего гауссова пучка с однородной поляризацией представим в виде

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp G, \quad (2.3)$$

где комплексный постоянный вектор поляризации  $\mathbf{e}_\perp$  не зависит от координат  $(x, y)$ . Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и чаще всего используются. Разложим нормированный  $(|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1)$  вектор поляризации  $\mathbf{e}_\perp$  по декартовому базису  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ :

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}, \quad (2.4)$$

где  $\eta_x$  и  $\eta_y$  – некоторые постоянные комплексные параметры. Видим, что поляризация пучков (2.1) определяется комплексным параметром  $\eta = \eta_y / \eta_x = \text{tg}(\psi' + i\psi'')$  и одинакова по всему поперечному сечению пучка. Иначе говоря, поляризационные характеристики пучка обладают трансляционной инвариантностью в поперечной плоскости  $(x, y)$ . В общем случае пучки поляризованы эллиптически.

Плотности энергии и потока энергии электромагнитного поля соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon |G|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad (2.5)$$

$$\mathbf{S} = \left( \frac{\rho}{|q|^2} ((z - q'_0) \mathbf{e}_\rho + \text{th } 2\psi'' q''_0 \mathbf{e}_\phi) + \mathbf{e}_z \right) S_z. \quad (2.6)$$

Продольному потоку энергии  $S_z$  соответствует линейный момент, азимутальному  $S_\phi$  – спиновый момент, а радиальному  $S_\rho$  – орбитальный момент электромагнитного поля [15].

Исследуем пространственную форму линий потока энергии  $\mathbf{S}$  пучков, которая определяется дифференциальным уравнением [13]

$$\frac{d\rho}{S_\rho} = \frac{\rho d\phi}{S_\phi} = \frac{dz}{S_z}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим сначала зависимость  $S_\rho$  от  $z$  при фиксированном азимутальном угле  $\phi$ . Интегрируя, получаем  $S_\rho = S_{\rho 0} \sqrt{1 + (z - q'_0)^2 / q_0'^2}$ .

Это – уравнение гиперboloида вращения вокруг оси  $z$ . В дальней зоне пучок становится гомоцентрическим. Поток энергии в каждой точке движется вдоль поверхности однополостного гиперboloида.

Как известно [1], пространственная форма кругового гауссова пучка определяется уравнением  $\rho = w_0 \sqrt{1 + (z - q'_0)^2 / q_0''^2}$ . Поэтому при  $\rho_0 = w_0$  боковая поверхность гауссова пучка совпадает с поверхностью, по которой движется энергия электромагнитного поля.

Поскольку для параксиальных пучков  $\left| \frac{\rho}{q_0''} \right| \ll 1$ , то  $\left| \frac{S_\rho}{S_z} \right| \ll 1$ ,  $\left| \frac{S_\phi}{S_z} \right| \ll 1$ . В то же время отношение  $S_\rho / S_\phi$  может быть любым.

Рассмотрим теперь зависимость азимутального потока энергии  $S_\phi$  от  $z$  при фиксированном радиусе  $\rho$ . Интегрируя, получаем

$$\phi = \text{th } 2\psi'' \arctg \frac{z - q'_0}{q_0''}. \quad (2.8)$$

При изменении расстояния  $z$  в пределах  $(-\infty, \infty)$  направление потока энергии  $S_\phi$  поворачивается вокруг оси  $z$  на угол  $\phi = \pi \text{ th } 2\psi''$ . Поворот максимален и равен  $\pi$  для циркулярно поляризованных мод и отсутствует при линейной поляризации света.

Исследуем далее зависимость  $S_\rho$  от  $S_\phi$  при фиксированном  $z$ , т. е. в поперечной плоскости  $(x, y)$ . Получаем

$$\rho = \rho_0 \exp \left( \frac{z - q'_0}{\text{th } 2\psi'' q_0''} \phi \right). \quad (2.9)$$

Это – логарифмическая спираль. Итак, в поперечном сечении гауссова пучка линии поперечного потока энергии представляют собой логарифмические спиральные кривые. При удалении от перетяжки пучка спирали постепенно раскручиваются. Отметим, что в работе [10] выражения для линий потока энергии получены только для циркулярно поляризованных гауссовых световых пучков.

Итак, линии потока энергии  $\mathbf{S}$  векторных обычных гауссовых световых пучков представляют собой кривые, расположенные на поверхностях круговых однополостных гиперboloидов вращения вокруг оси пучка  $z$ . Они почти совпадают с образующими гиперboloидов, но закручены в пространстве на угол  $\phi = \pi \text{ th } 2\psi''$ .

### 3 Энергетические характеристики векторных параксиальных гауссовых световых пучков с неоднородной поляризацией

Обсудим теперь свойства некоторых параксиальных векторных гауссовых световых пучков первого типа ( $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$ ) с неоднородной поляризацией.

Для анализа их поляризационных характеристик поперечную часть векторной амплитуды пучка вида (1.2) с неоднородной поляризацией возьмем в простой форме

$$\mathbf{E}_\perp^{(1)} = \partial_x G \mathbf{e}_x + a \partial_y G \mathbf{e}_y, \quad (3.1)$$

где  $G$  – гауссиан,  $a = a' + ia''$  – некоторая комплексная константа. Тогда получаем следующие гауссоподобные моды

$$\mathbf{E}^{(1)} = \left[ x \mathbf{e}_x + a y \mathbf{e}_y + \left( \frac{(1+a)i}{k} - \frac{x^2 + ay^2}{q} \right) \mathbf{e}_z \right] \frac{G}{q};$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(2)}; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \left[ x \mathbf{e}_y - a y \mathbf{e}_x + \frac{(a-1)xy}{q} \mathbf{e}_z \right] \frac{G}{q};$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(1)}. \quad (3.3)$$

Эти пучки представляют собой векторные суперпозиции двух скалярных полей гауссовых пучков  $xG/q$  и  $yG/q$ .

А) Пусть  $a = 1$ , тогда выражения (3.2) и (3.3) описывают соответственно известные [4], [5] гауссовы  $TH$  и  $TE$ -моды. Действительно, электрические поля сопряженных пучков  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$  при  $a = 1$  соответственно равны

$$\mathbf{E}^{(1)} = \left[ \rho \mathbf{e}_\rho + \left( \frac{2i}{k} - \frac{\rho^2}{q} \right) \mathbf{e}_z \right] \frac{G}{q};$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = (-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y) \frac{G}{q} \equiv \rho \mathbf{e}_\phi \frac{G}{q}. \quad (3.4)$$

Мода  $\mathbf{E}^{(2)}$  называется гауссовой  $TE$ -модой, поскольку  $E_z = 0$ . Видим, что для  $TE$ -моды электрическое поле поляризовано радиально, а магнитное – азимутально. Кроме того, имеется слабая продольная компонента магнитного поля ( $|H_z| \ll |H_\rho|$ ). Аналогичные выводы следуют и для  $TH$ -мод.

В отличие от однородно поляризованных мод,  $TH$ - и  $TE$ -моды (по поляризации) – это пучки с нарушенной трансляционной симметрией, т. е. пучки с неоднородной поляризацией по поперечному сечению пучка. Однако  $TH$ - и  $TE$ -моды обладают азимутальной симметрией.

Усредненные по времени плотности энергии  $w$  и потока энергии  $\mathbf{S}$  электромагнитного поля обоих сопряженных  $TE$  и  $TH$  гауссовых пучков при этом соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} \rho^2 \left| \frac{G}{q} \right|^2, \quad \mathbf{S} = \left( \frac{\rho(z - q'_0)}{|q|^2} \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z \right) w, \quad (3.5)$$

$$\text{где } |G|^2 = \frac{1}{|q|^2} \exp \left( \frac{k \rho^2 q_0''}{|q|^2} \right).$$

$TE$  и  $TH$  моды являются полыми, на оси пучка  $w = 0$  и  $\mathbf{S} = 0$ . Существенно, что для  $TE$  и  $TH$

мод отсутствует спиновый (азимутальный) поток энергии, хотя есть небольшой радиальный поток, обусловленный расходимостью пучка [4]. Отношение  $|S_\rho / S_z|$  максимальное при  $|z - q'_0| = q''_0$ .

Для *TE* и *TH* мод линии потока энергии  $|S_\rho|$  являются образующими гиперболами для гипербоида вращения вокруг оси  $z$ , как для однородных гауссовых мод.

Б) Пусть  $a$  – произвольное комплексное число в (3.2), тогда получаем более сложные неоднородно поляризованные пучки. Для моды (3.2) азимут  $\psi'$  эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс и ее эллиптичность  $\gamma$  выражаются соответственно как

$$\psi' = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2xya'}{x^2 - |a|^2 y^2};$$

$$\gamma = \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2xya''}{x^2 + |a|^2 y^2} \right).$$

Аналитические расчеты и выполненное графическое моделирование приводят к следующим выводам.

1. Поляризационные свойства зависят только от азимутального угла  $\phi = \operatorname{arctg}(y/x)$  и не зависят от  $\rho$ . В частности, при  $x=0$  и  $y=0$  имеем линейную поляризацию.

2. При заменах  $a' \rightarrow -a'$  азимуты эллипсов поляризации изменяются на противоположные.

3. При заменах  $a'' \rightarrow -a''$  направления вращения эллипсов поляризации изменяются на противоположные.

4. При увеличении (уменьшении) отношения  $a''/a'$  возрастает (убывает) эллиптичность поля в данной точке, а направления главных осей эллипсов поляризации не изменяются.

5. Главные оси эллипсов поляризации в зависимости от комплексного параметра  $a$  могут быть расположены вдоль гипербол, парабол или замкнутых кривых.

6. Картина эллипсов поляризации обладает группой симметрии  $mmm$ , которая включает оси симметрии  $2_x, 2_y, 2_z$  и плоскости симметрии  $m_x, m_y, m_z$ .

Продольная  $S_z$ , орбитальная  $S_o$  и спиновая  $S_s$  плотности потока энергии неоднородных мод (3.2), (3.3) равны

$$S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \left| \frac{G}{q} \right|^2 (x^2 + |a|^2 y^2);$$

$$S_o = \frac{\rho}{|q|^2} (z - q'_0) \mathbf{e}_\rho S_z;$$

$$S_s = \frac{c\varepsilon a'' \rho}{8\pi nk} \left| \frac{G}{q} \right|^2 \times$$

$$\times \left( \cos 2\phi \mathbf{e}_\rho \frac{x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y}{k} + \sin 2\phi \mathbf{e}_\phi \left( \frac{kq''_0 \rho^2}{|q|^2} - 1 \right) \right).$$

Спиновый поток энергии  $S_s$  включает азимутальную и радиальную части. Он имеет азимутальный период, равный  $\pi$ . При вещественном параметре  $a$  поток  $S_s = 0$ .

#### 4 Суперпозиция *TE* и *TH* гауссовых мод

Возьмем когерентную суперпозицию *TE* и *TH* гауссовых мод в форме

$$\mathbf{E}^{(3)} = \left[ \rho(\eta_1 \mathbf{e}_\rho + \eta_2 \mathbf{e}_\phi) + \eta_1 \left( \frac{2i}{k} - \frac{\rho^2}{q} \right) \mathbf{e}_z \right] \frac{G}{q}; \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}^{(4)} = \left[ \rho(-\eta_2 \mathbf{e}_\rho + \eta_1 \mathbf{e}_\phi) - \eta_2 \left( \frac{2i}{k} - \frac{\rho^2}{q} \right) \mathbf{e}_z \right] \frac{G}{q}.$$

Здесь  $\mathbf{E}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}^{(4)}$  – сопряженные пучки,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – некоторые постоянные коэффициенты. Введем комплексный параметр  $\eta_k$  когерентного смешивания *TE* и *TH* мод соотношением  $\eta_k = \eta_2 / \eta_1 = \operatorname{tg}(\psi'_k + i\psi''_k)$ , тогда азимут поляризации  $\psi_{\text{общ}}$  и эллиптичность  $\gamma_{\text{общ}}$  моды  $\mathbf{E}^{(3)}$  соответственно равны  $\psi_{\text{общ}} = \phi + \psi'_k$  и  $\gamma_{\text{общ}} = \operatorname{th} \psi''_k$ . Здесь  $\phi = \operatorname{arctg}(y/x)$  – обычный азимут направления, угол спиральности  $\psi''_k$  можно вычислить из соотношения  $\operatorname{tg} 2\psi'_k = 2\eta'_k / (1 - |\eta_k|^2)$ . Интересно, что эллиптичности мод  $\mathbf{E}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}^{(4)}$  определяются только коэффициентом смешивания  $\eta''_k$  когерентных *TE* и *TH* гауссовых мод.

Если параметр смешивания мод  $\eta_k$  вещественный, то имеем линейно поляризованные пучки, впервые описанные Гори [6], у которых неоднородные линии поляризации образуют логарифмические спирали. Если же  $\eta_k$  – комплексный параметр, то получаем спиральные пучки с эллиптической поляризацией. В поперечном сечении пучка поляризационная картина представляет совокупность спиралей из одинаковых эллипсов, главные оси которых ориентированы вдоль логарифмических спиралей. Эти спирали для пучков  $\mathbf{E}^{(3)}$  описываются уравнениями вида

$$\rho = \rho_0 \exp \left( \frac{\phi}{\operatorname{tg} \psi'_k} \right).$$

Для пучков  $\mathbf{E}^{(4)}$  логарифмические спиральные кривые закручены в противоположном направлении. Эллиптические спиральные пучки  $\mathbf{E}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}^{(4)}$  обобщают линейные спиральные пучки Гори [6] и, по-видимому, еще не исследовались.

Энергетические характеристики мод  $\mathbf{E}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}^{(4)}$  следующие:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2) \rho^2 \left| \frac{G}{q} \right|^2;$$

$$\mathbf{S} = \left( \frac{\rho(z - q'_0) \mathbf{e}_\rho}{|q|^2} + \text{th } 2\psi_k'' \left( \frac{\rho q_0''}{|q|^2} - \frac{2}{k\rho} \right) \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_z \right) S_z.$$

По сравнению с гауссовыми однородными модами в  $\mathbf{S}$  появилось дополнительное слагаемое  $-\text{th } 2\psi_k'' \left( \frac{2}{k\rho} \right) \mathbf{e}_\phi$ , которое мы относим к вкладу в спиновый поток.

Отсюда следует, что если изменять поляризацию пучков  $\mathbf{E}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}^{(4)}$  при неизменной общей интенсивности, то линейный  $S_z$  и орбитальный  $S_o$  потоки энергии не меняются, а у спинового потока  $S_s$  изменяется только параметр эллиптичности  $\text{th } 2\psi_k''$ .

Исследуем пространственную форму линий потока энергии  $\mathbf{S}$  пучков  $\mathbf{E}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}^{(4)}$ .

Зависимость  $S_\rho$  от  $z$  при фиксированном азимутальном угле  $\phi$  такая же, как для однородных мод.

Азимут потока энергии от  $z$  при фиксированном  $\rho$  равен

$$\phi = \left( \arctg \frac{z - q'_0}{q_0''} - \frac{2(z - q'_0)}{\rho^2} \right) \text{th } 2\psi_k'' + \phi_0.$$

Найдем теперь зависимость  $S_\phi$  от  $S_\rho$  при постоянном  $z$  (в поперечной плоскости пучка). Интегрируя, получаем следующую зависимость азимута потока энергии от  $\rho$  при фиксированном  $z$ :

$$\phi = \left( q_0'' \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{|q|^2}{k\rho^2} \right) \text{th } 2\psi_k'' + \phi_0.$$

Итак, линии потока энергии  $\mathbf{S}$  представляют собой спирали вокруг оси  $z$ . Спирали закручиваются с увеличением расстояния  $z$  от перетяжки пучка, с увеличением расстояния  $\rho$  от оси пучка и с возрастанием эллиптичности пучка.

### Заключение

В настоящей работе используется предложенный в [8]–[9] векторный формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков с различными типами поляризации.

Осуществлён теоретический анализ поляризационных и энергетических свойств векторных параксиальных гауссовых пучков различных типов с однородной и неоднородной поляризацией по поперечному сечению.

Была исследована поляризация для неоднородно поляризованных световых пучков. Установлено, что для полей, представляющих суперпозицию двух скалярных полых гауссовых пучков, в зависимости от параметра смешивания  $a$ , направления главных осей эллипсов поляризации

могут быть расположены вдоль различных кривых, например, гипербол, парабол и др.

Картина эллипсов поляризации обладает симметрией  $mmm$ .

Исследован новый тип пучков, образующийся в результате когерентной суперпозиции ТЕ и ТН гауссовых мод. Такие пучки обладают спиральной эллиптической поляризацией.

В результате исследования потока энергии гауссова кругового пучка было показано, что линии потока энергии последнего не являются прямыми, а представляют собой сложные пространственные кривые.

Поперечные потоки энергии  $\mathbf{S}_\perp$  различных пучков были явно разделены на орбитальные  $\mathbf{S}_o$  и спиновые  $\mathbf{S}_s$  части.

Показано, что потоки энергии гауссова пучка с однородной поляризацией и гауссовых ТЕ и ТН мод движутся вдоль поверхностей однополостных гиперболоидов вращения вокруг оси пучка. Для однородных гауссовых пучков эти линии немного закручены. Кручение определяется поляризацией, точнее, эллиптичностью волны. Кручение – максимальное при круговой поляризации и отсутствует при линейной. Поперечные же потоки энергии пучков со спиральной эллиптической поляризацией движутся по более сложным нелогарифмическим спиральным кривым.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 144 с.
2. Когельник, Х. Резонаторы и световые пучки лазеров / Х. Когельник, Т. Ли // ТИИЭР. – 1966. – Т. 54, № 10. – С. 95–112.
3. Koichi, Shimoda. Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Shimoda Koichi // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – Vol. 60, № 1. – P. 141–144.
4. Davis, L. W. TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis and G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № 1. – P. 22–23.
5. Хаус, Х. Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус ; пер. с англ. – М. : Мир, 1988. – 432 с.
6. Gori, F. Polarization basis for vortex beams / F.Gori // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18, № 7. – P. 1612–1617.
7. Бельский, А.М. Пространственная структура лазерного излучения / А.М. Бельский, Т.М. Корнейчик, А.П. Хапалюк // – М. : Изд-во БГУ, 1982. – 198 с.
8. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 1–5.
9. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (10). – С. 1–5.

- 
10. Ардашев, А.Ю. Некоторые свойства узкого монохроматического светового пучка / А.Ю. Ардашев, В.А. Кашин, Г.В. Скродский // Известия вузов. Радиофизика. – 1968.– Т. 11, № 12. – С. 1848–1851.
11. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф // – М. : Наука, 1970. – 587 с.
12. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров // Мн. : Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.
13. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин // – М. : Изд-во АН СССР, 1951.– 426 с.
14. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Opt. Commun. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.
15. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams // A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin / Journ. of Optics. – 2011. – Vol. 13, № 5. – 053001 (32 pp.).
16. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journ. of Optics. – A : Pure Appl. Opt. – 2009. – Vol. 11, № 9. – 094001 (12 pp.).

*Поступила в редакцию 15.06.12.*



УДК 535.341.08: 621.317.3.32

## ПОГЛОЩАЮЩЕЕ ПОКРЫТИЕ В ТЕРАГЕРЦОВОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА

А.К. Есман, В.К. Кулешов, Г.Л. Зыков, В.Б. Залесский

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

## ABSORBING COATING IN THE TERAHERTZ PART OF SPECTRUM

A.K. Esman, V.K. Kuleshov, G.L. Zykov, V.B. Zalesski

B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk

Исследовано поглощение электромагнитного излучения в частотном диапазоне 35-55 ТГц многослойным покрытием, верхний слой которого содержит массив пирамид субмикронных размеров, расположенных в строго геометрическом порядке по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Показано, что предложенная структура обеспечивает потери на отражение -39,5 дБ на резонансной частоте 42,3 ТГц и позволяет получить изменение температуры чувствительного слоя 3 мК при плотности мощности входного излучения, равной 0,1 Вт/м<sup>2</sup>.

**Ключевые слова:** поглощающая структура, многослойное покрытие, массив пирамид, термочувствительность.

Absorption of electromagnetic radiation in the frequency range of 35 to 55 THz by the multilayer coating, in which the top layer contains an array of pyramids arranged in a strictly geometric pattern in two mutually perpendicular directions is investigated. It is shown that the proposed structure provides a return loss better than 39.5 dB at the resonance frequency of 42.3 THz and a change of temperature of the sensitive layer of 3 mK at the input power density of radiation of 0.1 W/m<sup>2</sup>.

**Keywords:** absorbing structure, multi-layer coating, the array of pyramids, thermal sensitivity.

**Введение**

Практическая востребованность терагерцовых (ТГц) приборов как гражданского, так и в военного назначения стимулирует дальнейшее развитие работ в данном направлении. Одной из актуальных проблем при разработке приемников изображений и преобразователей излучения в ТГц спектральном диапазоне является создание современных высокоэффективных поглощающих покрытий. Решение этой задачи идет как по пути создания новых материалов, так и совершенствования уже известных, которые одновременно обладали бы коэффициентами: поглощения близким к единице, а отражения – стремящимся к нулю. Особенность исследований в этом направлении главным образом связана с тем, что получение таких материалов происходит обычно в рамках закономерностей, достаточно полно неизученных ранее. Одним из возможных путей достижения желаемого результата является использование многослойных покрытий или градиентных слоев [1]–[5].

Цель настоящего исследования - изучение использования дисперсионных элементов, выполненных в виде массива пирамид, расположенных соответствующим образом на поверхности поглощающего многослойного покрытия, позволяющих снизить коэффициент отражения падающего электромагнитного излучения в приборах нового поколения ТГц-ой техники.

**1 Описание поглощающей структуры**

Нами предложена оригинальная поглощающая структура [6], фрагмент которой содержит

три слоя хрома 3, расположенных на подложке кремния 4, размером 2,4×2,4×1,95 мкм, между которыми находятся диэлектрические слои 2 из двуокиси кремния (рисунок 1.1). Верхний диэлектрический слой 1 поглощающей структуры выполнен в виде пирамиды, высота которой составляла 0,75 мкм. Расстояние между её основанием и первым ближайшим металлическим слоем варьировалось от 300 до 900 нм, а расстояния между последовательно расположенными первым, вторым и третьим металлическими слоями составляли соответственно 625 и 100 нм. Толщина диэлектрического слоя между третьим металлическим слоем и подложкой составляла 50 нм.

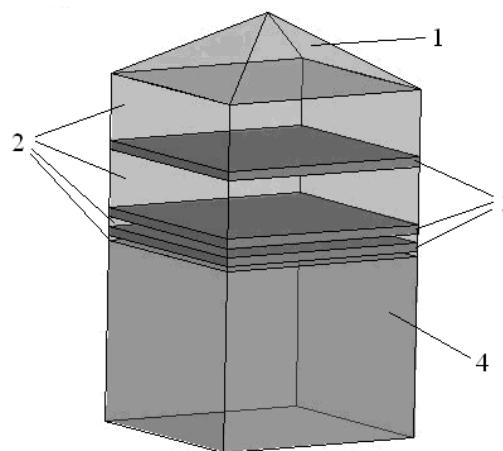


Рисунок 1.1 – Фрагмент поглощающей структуры: 1 – верхний диэлектрический слой, 2 – диэлектрические слои, 3 – металлические слои, 4 – подложка

## 2 Результаты расчета параметров и характеристик поглощающей структуры

Для расчета ожидаемых практически значимых параметров и характеристик приведенной структуры в частотном диапазоне от 35 ТГц до 55 ТГц использовались пакеты программ HFSS и Comsol Multiphysics. При компьютерном расчете электродинамических параметров и характеристик поглощающей структуры была задействована программа HFSS [7], а исследование её теплофизических свойств проводилось с помощью модуля Heat Transfer программного пакета COMSOL Multiphysics [8].

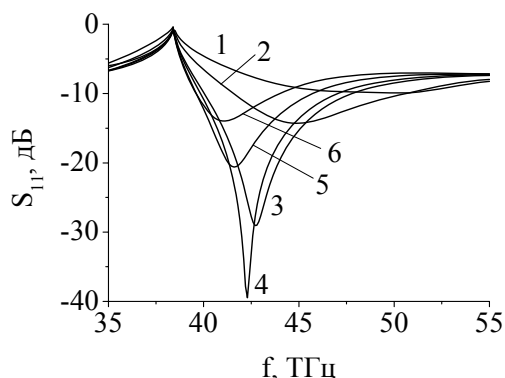


Рисунок 2.1 – Частотная зависимость потерь на отражение поглощающей структуры для толщины диэлектрического слоя между основанием пирамиды и первым металлическим слоем: 300 (1), 500 (2), 675 (3), 725 (4), 800 (5) и 900 (6) нм

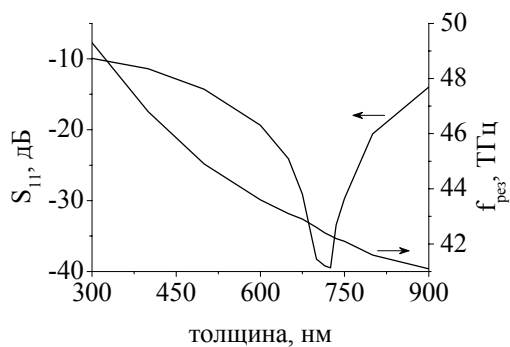


Рисунок 2.2 – Зависимость потерь на отражение и резонансной частоты поглощающей структуры от толщины диэлектрического слоя между основанием пирамиды и первым металлическим слоем

При поступлении входного электромагнитного излучения на поверхность верхнего диэлектрического слоя происходит интерференционное поглощение, состоящее в наложении прямой и отраженной волн и обеспечивающее его минимальное отражение. Рассчитанные частотные зависимости потерь электромагнитного излучения на отражение ( $S_{11}$ ) рассматриваемой поглощающей структуры для различных по толщине диэлектрических слоев между основанием пирамиды и первым металлическим слоем приведены на рисунке 2.1. При толщине этого

слоя, равной 725 нм, потери на отражение электромагнитного излучения достигают минимального значения и составляют  $-39,5$  дБ на резонансной частоте  $f_{рез} = 42,3$  ТГц (рисунок 2.2). Варьируя толщиной указанного слоя поглощающей структуры можно изменять её резонансную частоту (рисунки 2.1, 2.2).

Компьютерные исследования теплофизических свойств поглощающей структуры показывают, что изменение температуры во всех её металлических слоях практически одинаково при воздействии входного излучения. На рисунке 2.3 приведена зависимость изменений температуры в поглощающей структуре с оптимальной толщиной диэлектрического слоя, равной 725 нм между основанием пирамиды и первым металлическим слоем, от плотности мощности падающего излучения. Временные зависимости изменений температуры рассматриваемой поглощающей структуры показаны на рисунке 2.4. Установившиеся значения температуры (по уровню 0,9) в оптимизированной поглощающей структуре при разных значениях плотности мощности падающего входного излучения достигаются за время, равное  $\sim 0,6$  секунды (рисунок 2.4).

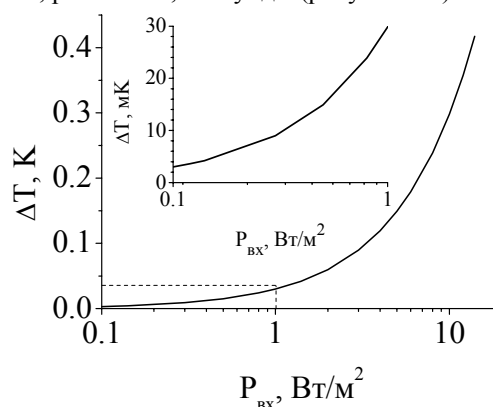


Рисунок 2.3 – Зависимость изменений температуры поглощающей структуры от плотности мощности входного излучения. На вставке – ее увеличенный фрагмент

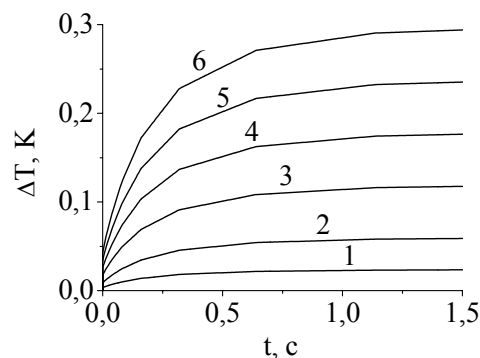


Рисунок 2.4 – Временная зависимость изменений температуры поглощающей структуры для плотности мощности входного излучения: 0,8 (1), 1 (2), 2 (3), 4 (4), 6 (5) и 8 (6) Вт/м<sup>2</sup>

**Заключение**

Проведенный компьютерный эксперимент показал, что разработанная интегральная поглощающая структура позволяет уменьшить коэффициент отражения электромагнитного излучения в спектральном диапазоне 35–55 ТГц до –39,5 дБ за счет использования дисперсионных элементов, выполненных в виде массива пирамид, и оптимизации толщин диэлектрических слоев. Показано, что изменение температуры чувствительного слоя в 3 мК можно достичь при плотности мощности входного излучения, равной 0,1 Вт/м<sup>2</sup>.

Применение такого поглощающего многослойного покрытия, например в преобразователях солнечной энергии в электричество и приборах тепловизионной техники, позволит увеличить их коэффициент полезного действия, а в датчиках температуры и устройствах измерения энергии – точность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Reflectivities of light-absorptive coatings within visible-wavelength range* / К.А. Moldosanov [et al.] // *Proceeding of SPIE*. – 2000. – Vol. 4093. – P. 181–192.
2. *Особенности поглощения ИК-излучения в тонких полиимидных структурах и микроболометрический приемник на их основе* / А.А. Жуков [и др.] // *Прикладная физика*. – 2002. – № 4. – С. 157–161.
3. *Калашников, Е.В.* Исследование совместного воздействия высокопористых потоков

мелкодисперсных частиц, плазмы и коротковолнового излучения на оптические материалы при термоциклировании в вакуумных условиях / Е.В. Калашников, С.И. Рачулик // *Оптический журнал*. – 2008. – Т. 75, № 12. – С. 73–79.

4. *Жилин, А.А.* Метаматериалы – новое направление в материаловедении / А.А. Жилин, М.П. Шепилов // *Физика и химия стекла*. – 2010. – Т. 36, № 5. – С. 657–702.

5. *Структурные превращения и образование нанокристаллитов кремния в плёнках SiOx* / В.Я. Братусь [и др.] // *Физика и техника полупроводников*. – 2001. – Т. 35, Вып. 7. – С. 854–860.

6. *Светопоглощающее многослойное покрытие* : пат. 15113 Респ. Беларусь, МПК G 02B 5/22, В 82В 1/00, G 03С 1/00 / А.К. Есман, В.К. Кулешов; заявитель ГНУ «Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси». – № а 20100183; заявл. 09.02.10; опубл. 30.12.11 // *Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці*. – 2011. – № 6. – С. 162.

7. *Банков, С.Е.* Расчет антенн и СВЧ структур с помощью HFSS Ansoft / С.Е. Банков, А.А. Куршин. – М.: ЗАО «НПП “Родник”», 2009. – 256 с.

8. *Curing simulation of composites coupled with infrared heating* / S. Nakouzi [et al.] // *International Journal of Material Forming*. – 2010. – Vol. 3, Suppl. 1. – P. 587–590.

*Поступила в редакцию 11.06.12.*

УДК 546.791:542.942

## СПЕКТРАЛЬНО-СТРУКТУРНЫЕ И ФОТОКАТАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОДНО-АЦЕТОНОВЫХ РАСТВОРОВ НИТРАТА И ПЕРХЛОРАТА УРАНИЛА

А.П. Зажогин<sup>1</sup>, Д.С. Умрейко<sup>2</sup>, А.А. Зажогин<sup>1</sup>, А.И. Комяк<sup>1</sup>, С.Д. Умрейко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск

<sup>2</sup>Институт прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко, Минск

## SPECTRAL-STRUCTURAL AND PHOTOCATALYTIC PROPERTIES OF WATER-ACETONE SOLUTIONS OF URANYL NITRATE AND PERCHLORATE

A.P. Zazhogin<sup>1</sup>, D.S. Umreiko<sup>2</sup>, A.A. Zazhogin<sup>1</sup>, A.I. Komyak<sup>1</sup>, S.D. Umreiko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University, Belarus, Minsk

<sup>2</sup>A.N. Sevchenko Institute of Applied Physics Problems, Belarus, Minsk

Изучены спектры люминесценции и поглощения растворов уранилнитрата и перхлората в воде, ацетоне и ацетонитриле. По положению коротковолновой полосы, соответствующей чисто электронному переходу, установлено различие образующихся структур. Дано возможное объяснение происходящим при этом процессам. Дополнительно обнаружена полимеризация ацетона, катализатором которой являются возбуждённые ионы уранила  $UO_2^{2+}$ .

**Ключевые слова:** спектры люминесценции и поглощения, структура, уранилнитрат, уранилперхлорат, ацетон, фотохимия.

Luminescence and absorbance spectra of uranyl nitrate and perchlorate solutions in water and some organic solvents such as acetone and acetonitrile have been studied. Distinction of the emerging structures is defined depending on the position of the short-wave band which is assigned to purely electronic transition. The possible explanation of the adherent processes is given. In addition, acetone polymerization resulted from uranyl  $UO_2^{2+}$  excited ions, serving as a catalyst, is found.

**Keywords:** luminescence and absorption spectra, structure, uranyl nitrate, uranyl perchlorate, acetone, photochemistry.

### Введение

Уран – основополагающий элемент целого ряда трансурановых элементов. Вследствие наличия внутренних незаполненных электронных оболочек он характеризуется переменной валентностью (от трёх до шести), образуя при этом большое количество самых разнообразных соединений. Так, при взаимодействии с кислородом образуются оксиды урана (порядка десяти), которые, в свою очередь, могут являться центрами комплексообразования, присоединяя к себе как анионы (ацидолиганды), так и нейтральные молекулы (например, воду, органические вещества). В этом ряду особенно примечательным является двукратно заряженный диоксид урана (уранил  $UO_2^{2+}$ ), образующий отдельную совокупность комплексных соединений, имеющих большое практическое значение.

Ураниловые комплексы в твёрдом состоянии характеризуются интенсивной люминесценцией (особенно при низкой температуре); основным носителем люминесценции является ион уранила. Эти комплексы растворимы в воде и в большинстве полярных растворителей. Свечение их растворов значительно слабее, чем в кристаллическом состоянии, и интенсивность люминесценции зависит от природы растворителя и

структуры исследуемой соли. В большинстве случаев последние, кроме анионов, содержат в своём составе (во внутренней координационной сфере) молекулы воды, то есть являются гидратами.

Типичным примером такого комплекса является дигидрат уранилнитрата  $UO_2(NO_3)_2 \cdot 2H_2O$ . В неводных растворах ион  $UO_2^{2+}$  окружен двумя молекулами воды и двумя анионами  $NO_3^-$  в транс-положении. К этим молекулам воды посредством водородных связей могут присоединяться молекулы растворителя (например, ацетона), в результате чего такой сольват как бы «плавает» в растворе [1].

В целом структура ураниловых растворов весьма сложна [2]. Она зависит, в частности, от природы аниона и донорной способности (DN) молекулы растворителя. Если за основу последней взять воду и воспользоваться шкалой Гутмана [3], то гидратные соединения уранила в различных растворителях можно разделить на три группы: с малой донорной способностью ( $DN < 18$ ), средней ( $DN \sim 18$ ) и большой ( $DN > 18$ ). Исходя из этого постулата воду ( $DN = 18$ ) и ацетон ( $DN = 17$ ) следует отнести к растворителям со средней донорной способностью, а, например, ацетонитрил ( $DN = 14,1$ ) – к малой.

Информацию о структуре комплексов в растворе можно получить из их спектров люминесценции. На рисунке 0.1 приведены спектры люминесценции уранилнитрата и уранилперхлората в упомянутых растворителях. В коротковолновой области спектра водного раствора перхлората уранила наблюдается одна интенсивная полоса (рисунок 0.1 а), а в спектре нитрата уранила – две (рисунок 0.1 б), причём наиболее коротковолновые (по определению соответствующие чисто электронным переходам) практически совпадают, что позволяет предположительно отнести их к центрам свечения одной и той же природы. Избыток воды приводит к тому, что ацидолиганды ( $\text{NO}_3^-$  и  $\text{ClO}_4^-$ ) могут вытесняться из первой (внутренней) координационной сферы, в результате чего образуется комплекс  $\text{UO}_2^{2+} \cdot n\text{H}_2\text{O}$ .

Спектры люминесценции уранилнитрата в ацетоне и воде, так же как и спектры поглощения, существенно различаются (рисунок 0.1 е и 0.1 б). Как в чистом ацетоне, так и при добавлении ацетона в водный раствор уранилнитрата полосы в спектре сдвигаются в коротковолновую сторону по сравнению с чисто водным раствором ( $\nu_{00} = 20530 \text{ см}^{-1}$  – в воде и  $\nu_{00} = 20770 \text{ см}^{-1}$  – в ацетоне). Положения полос в данном спектре и в спектре дигидрата уранилнитрата  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  в кристаллическом состоянии (см. [4]) практически совпадают: частота чисто электронного перехода в кристалле составляет  $20776 \text{ см}^{-1}$ , а в растворе –  $20770 \text{ см}^{-1}$ . Из этого факта можно сделать вывод, что уранилнитрат в ацетоне находится в виде дигидрата уранилнитрата, а ацетон размещается во внешней сфере и экранирует воздействие воды на комплекс. Таким образом, часть молекул воды является внешнесферной по отношению ко второй сфере.

Из сравнения спектров раствора уранилперхлората в ацетоне и его водного раствора (рисунок 0.1 а и 0.1 с) видно, что частоты коротковолновых полос люминесценции отличаются незначительно ( $20543 \text{ см}^{-1}$  и  $20540 \text{ см}^{-1}$  соответственно). Можно считать, что и в этом случае молекулы ацетона (как и в случае с уранилнитратом) заполняют вторую координационную сферу иона уранила. Подтверждением тому может служить положение коротковолновых полос в спектрах люминесценции растворов гексагидрата уранилнитрата и перхлората уранила в ацетоне при низкой температуре (рисунок 0.2).

Подводя итог сказанному, структуру координационного окружения иона  $\text{UO}_2^{2+}$  в водно-ацетоновых растворах уранилнитратов и уранилперхлоратов можно представить в виде модели, представленной на рисунке 0.3. Для других ураниловых солей и органических растворителей требуется отдельное самостоятельное рассмотрение.

Наиболее важной областью практического применения ураниловых соединений является их использование в качестве ядерного топлива, а также в качестве катализаторов химических реакций. Особый интерес представляет создание новых катализаторов на основе оксидов урана. Этому направлению в последнее время посвящено много работ, обзор которых можно найти, например, в [5]. Не являются исключением, по-видимому, и диоксиды шестивалентного урана – уранилы, в которых атом урана под воздействием света переходит в пяти- и четырёхвалентное состояние. Для проверки предположения о возможности использования оптического излучения для стимулирования химических реакций и управления ими нами проведены исследования системы уранилперхлорат-ацетон на предмет наличия процессов фотоконденсации ацетона.

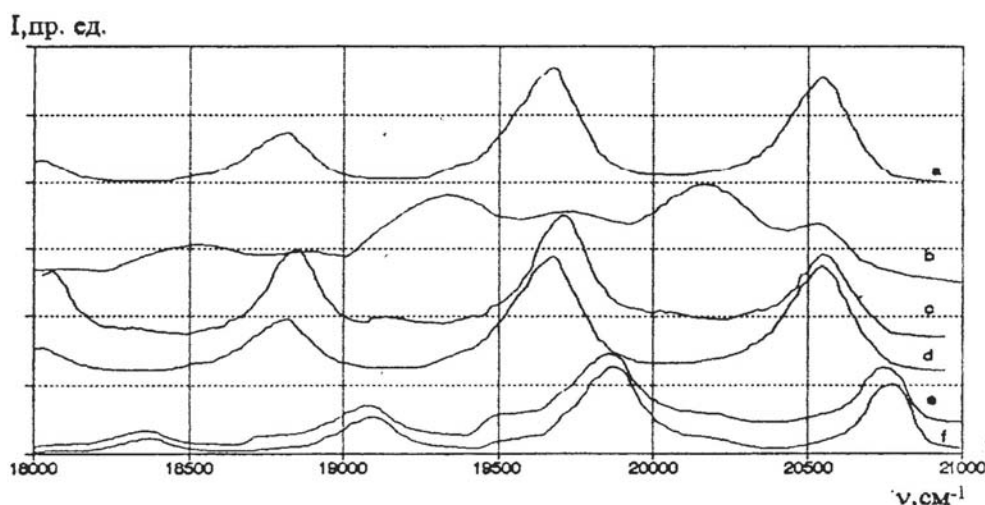


Рисунок 0.1 – Спектры люминесценции растворов уранилнитрата и уранилперхлората: в воде (соответственно б, а), ацетоне (е, с) и ацетонитриле (ф, д)

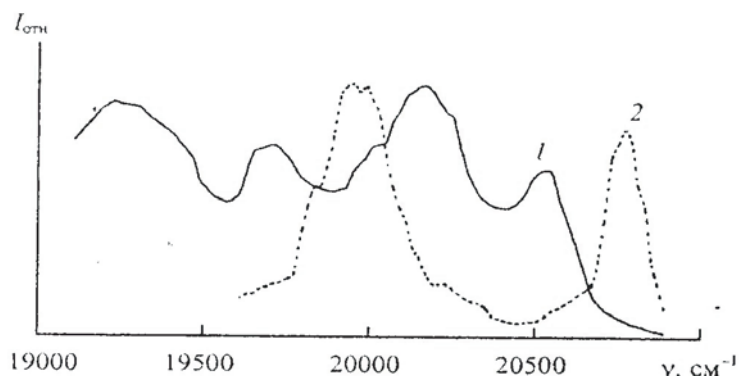


Рисунок 0.2 – Спектры люминесценции растворов  $UO_2(ClO_4)_2 \cdot 6H_2O$  (1) и  $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$  (2) в ацетоне при  $T = 77$  К



Рисунок 0.3 – Предполагаемая структура координационного окружения иона  $UO_2^{2+}$  в растворах дигидрата уранилнитрата (а) и перхлората уранил (б) в ацетоне

### 1 Методика эксперимента

С целью экспериментального исследования фотофизических и фотохимических процессов, протекающих в жидкой фазе в сложных гетерогенных условиях, нами разработан макет установки, содержащий систему оптического облучения в области 430 нм на основе мощных светодиодов (20–30 мВт). Для уменьшения влияния кислорода воздуха на фотохимические процессы облучение проводилось непосредственно в запечатанных кварцевых кюветах.

Регистрация спектров электронного поглощения в области 335–1000 нм проводилась на автоматическом спектрофотометре ПВА (производитель СП «Солар ТИИ»), а спектров ИК поглощения – на приборе «VERTEX 70» фирмы Брукер.

### 2 Основные результаты и их обсуждение

Для оценки каталитической способности чистых комплексов урана в процессах фотополимеризации ацетона нами проведены

сравнительные исследования систем уранилперхлорат-ацетон с различной концентрацией уранила. Установлено, что в системе уранилперхлорат-ацетон при облучении излучением мощного светодиода (максимум интенсивности полосы соответствует 430 нм, полуширина полосы составляет 25–30 нм) происходит полимеризация продуктов поликонденсации ацетона, а катализатором процесса являются возбужденные комплексы уранила. В полимере, который представляет собой очень вязкую жидкость, уран находится в виде нанокластеров из соединений пяти- и четырехвалентного урана, образующихся в результате фотохимических превращений. В качестве примера на рисунке 2.1 приведены спектры поглощения облученной системы уранилперхлорат-ацетон с концентрацией урана 0,45 М.

На рисунке 2.2 приведены зависимости интенсивностей полос с длиной волны 628 и 650 нм, соответствующих комплексам четырехвалентного урана, от времени облучения.

Из приведенных данных видно, что по мере увеличения времени облучения интенсивность полос поглощения четырехвалентного урана пропорционально увеличивается, одновременно увеличивается и общий фон в коротковолновой области. В этой области лежат полосы поглощения практически всех производных полимеризации ацетона.

Для более детального изучения процессов образования продуктов, образующихся при облучении систем уранилперхлорат-ацетон при различной концентрации урана, нами зарегистрированы спектры ИК поглощения. На рисунке 2.3 приведены спектры ИК поглощения систем уранилперхлорат-ацетон с разной концентрацией урана при времени облучения образцов 5 часов.

В области  $(400\div 450)$   $\text{см}^{-1}$  в спектрах исследуемых растворов с более высокой концентрацией урана появляются полосы, соответствующие оксидам четырехвалентного урана  $\text{UO}_2$ . В спектре раствора с концентрацией уранила 1 М они хорошо разрешены, и положение их максимумов характеризуются значениями частот 403, 411 и 419  $\text{см}^{-1}$ . Одновременно с ростом концентрации

урана в области  $(500\div 700)$   $\text{см}^{-1}$ , где лежат полосы поглощения пятивалентного урана, также появляются довольно интенсивные и зависящие от концентрации полосы с частотами 545 и 625  $\text{см}^{-1}$ . Одновременно вблизи 1700  $\text{см}^{-1}$  (в области колебаний карбонильной группы  $\text{C}=\text{O}$  в кетонах) при увеличении концентрации уранила появляется интенсивная полоса, принадлежащая этой группе в составе окиси мезитила. При увеличении концентрации уранила до 1 М в спектре происходит возрастание интенсивности полосы в области 1710  $\text{см}^{-1}$ , что свидетельствует о появлении новых соединений. При этом анализируемый раствор становится желеобразным.

В данном случае предположительно реализуется следующий механизм: на промежуточной стадии фотохимического окисления ацетона уранил-ионами происходит образование оксида мезитила ( $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}$ ), после чего образуются более сложные продукты полимеризации, в состав которых входят ионы четырех- и пятивалентного урана. Подтверждением данного суждения является тот факт, что ацетон склонен к полимеризации, которая катализируется как кислотами, так

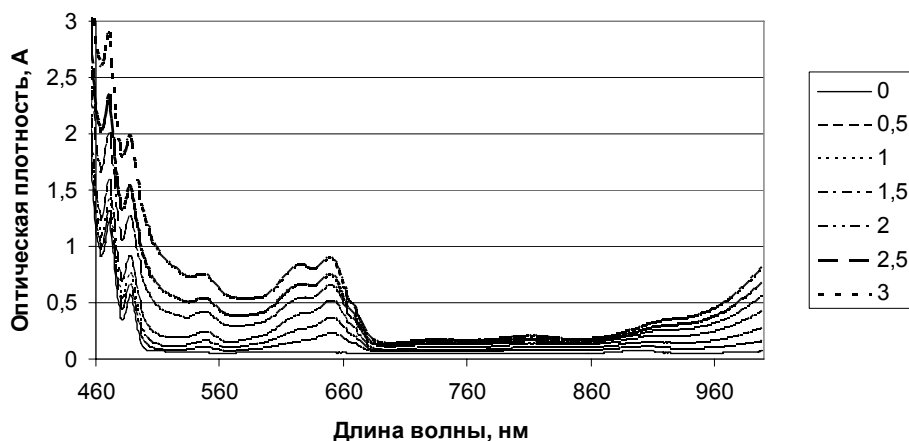


Рисунок 2.1 – Спектры электронного поглощения облученной системы уранилперхлорат-ацетон (в рамке указано время облучения в часах)

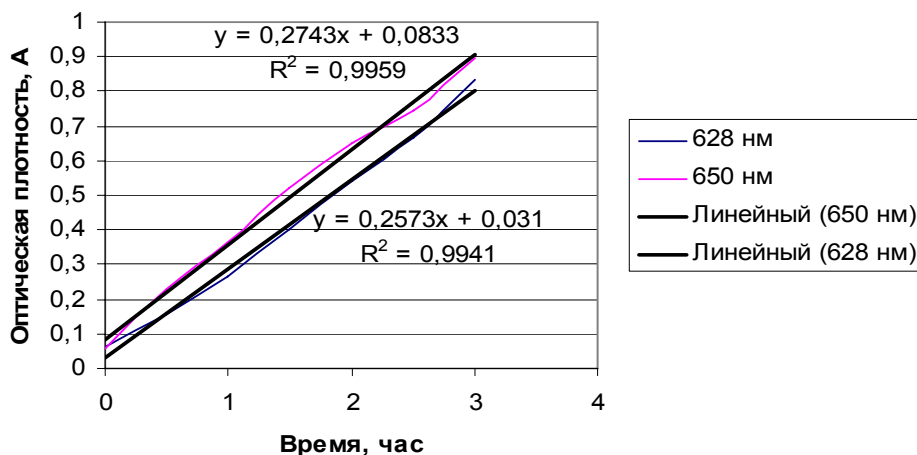


Рисунок 2.2 – Зависимость оптической плотности полос 628 и 650 нм от времени облучения

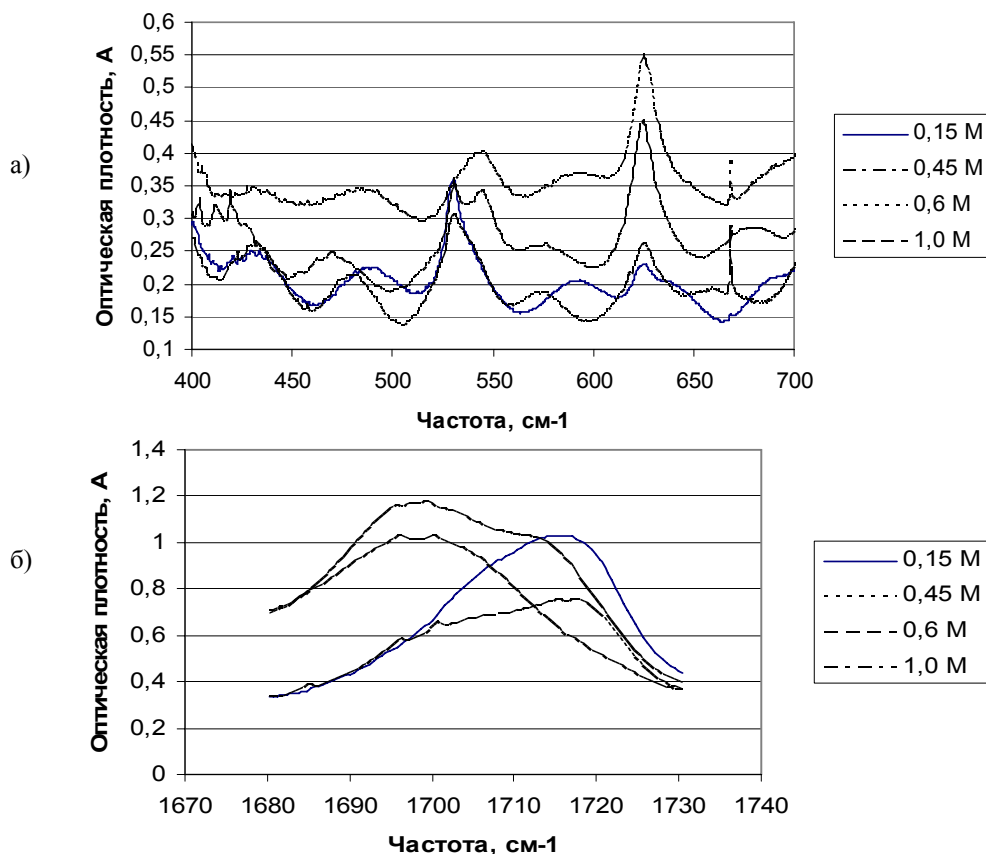


Рисунок 2.3 – Спектры ИК поглощения облученных растворов уранилперхлорат–ацетон в области 400–700  $\text{см}^{-1}$  (а) и 1680–1730  $\text{см}^{-1}$  (б) при различной концентрации уранила (в рамке указаны концентрации урана в растворе)

и основаниями [6]. В присутствии сильных кислот (хлорная кислота относится к одной из самых сильных [7]) образовавшийся оксид мезитила в дальнейшем может превращаться в мезитилен и другие более сложные соединения. Все эти продукты образуются и находятся в координационной сфере возбужденного иона уранила в ацетоновом растворе уранилперхлората.

#### Заключение

На основании проведенных экспериментов можно сделать вывод, что в системе уранилперхлорат-ацетон при оптическом облучении происходит фотоконденсация ацетона, а катализатором процесса являются возбужденные комплексы уранила. В продуктах конденсации нанокластеры соединений пяти- и четырехвалентного урана формируются вследствие фотохимических преобразований. Установлено, что скорость реакции зависит от концентрации урана в ацетоне, а также от мощности возбуждающего излучения. Показано, что в качестве источников целесообразно использовать светодиоды, максимум спектра излучения которых соответствует длине волны в интервале (420÷430) нм, соответствующей полосе поглощения уранила в кислотных растворах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Evans, H.N.* Uranyl ion coordination / H.N. Evans // Science. – 1963. – № 3576. – P. 154–158.
2. *Спектры и структура комплексов уранила* / Д.С. Умрейко [и др.]. – Минск, Изд. БГУ. – 2004. – 192 с.
3. *Гутман, В.* Химия координационных соединений в растворах / В. Гутман. – М.: Мир, 1971. – 220 с.
4. *Володько, Л.В.* Ураниловые соединения. Т. 1. / Л.В. Володько, А.И. Комяк, Д.С. Умрейко. – Минск: БГУ, 1981. – 432 с.
5. *Исследование новых катализаторов на основе оксидов урана* / З.Р. Исмагилов [и др.] // Кинетика и катализ. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 544–553.
6. *Райхард, К.* Растворители и эффекты среды в органической химии / К. Райхард. – М.: Мир, 1991. – 760 с.
7. *Лупп, А.* Солевые эффекты в органической и металлоорганической химии / А. Лупп, Б. Чубар. – М.: Химия, 1991. – 248 с.

Поступила в редакцию 16.01.12.



УДК 621.793:678:544.777

## МОРФОЛОГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПЛАЗМЫ ИМПУЛЬСНОГО КАТОДНО-ДУГОВОГО РАЗРЯДА СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Д.Г. Пилипцов, А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, А.С. Руденков

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## MORPHOLOGY AND MECHANICAL PROPERTIES OF CARBON COATINGS OBTAINED FROM PLAZMA OF COMBINED PULSE CATHODE-ARC DISCHARGE

D.G. Pilipstov, A.V. Rogachev, N.N. Fedosenko, A.S. Rudenkov

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Предложен вакуумно-плазменный метод формирования углеродных покрытий, основанный на использовании при генерации углеродной плазмы катодно-дугового разряда с заданной формой импульса. Определен характер влияния параметров разряда на скорость роста покрытий, их морфологию.

**Ключевые слова:** углеродные покрытия, импульсный катодно-дуговой разряд, морфология, скорость роста.

The PVD method of formation of carbon coatings from plasma of pulse cathode-arc discharge was proposed. The character of the influence of the parameters of discharge on the growth rate and morphology of carbon coatings was states.

**Keywords:** carbon coating, pulse cathode-arc discharge, morphology, growth rate.

### **Введение**

Углеродные покрытия обладают рядом уникальных свойств: высокими значениями твердости, теплопроводности; оптической прозрачностью в видимом и ИК-диапазонах электромагнитного излучения; низким коэффициентом трения; высокой стойкостью к агрессивным химическим средам [1], [2]. Их нанесение на рабочую поверхность деталей узлов трения, матриц и пуансонов штампов, деталей пресс-форм, плунжерных пар и других изделий, подвергающихся высоким контактным напряжениям, трению, является одним из эффективных технологических приемов, позволяющих повысить износостойкость поверхностных слоев, долговечность и надежность устройств различного назначения. Поэтому совершенствование технологии осаждения углеродных покрытий с целью повышения производительности, скорости роста покрытия, их физико-механических свойств является важной актуальной задачей.

Основными преимуществами процесса осаждения углеродных покрытий из катодной импульсной плазмы являются: достаточно высокие скорости роста слоев [2]; высокие механические свойства и возможность их регулирования на стадии осаждения [3]; наличие выпускаемого промышленностью оборудования.

Известно, что фазовый состав углеродный алмазоподобных покрытий (АПП) в значительной степени определяется энергией взаимодействующих с поверхностью подложки ионов углерода,

которая, в свою очередь, зависит от мощности разряда, его кинетических характеристик [2], [4]. Изменяя режим генерации импульсной углеродной плазмы, предоставляется возможность управления процессами структурообразования и, соответственно, свойствами образующихся покрытий [5].

Целью данной работы является изучение влияния структуры импульса катодно-дугового разряда, характера распределения в нем мощности на скорость осаждения углеродных покрытий, их механические свойства и морфологию.

### **1 Методика эксперимента**

Для получения углеродных покрытий использовалась модернизированная установка вакуумного напыления УВНИПА-1-001 (УРМЗ.279.070). Для изменения формы импульса, распределения в нем напряжения использовался специальный блок питания генератора углеродной плазмы. Разрядный импульс представляет собой совокупность трех составляющих, амплитуда которых может автономно регулироваться в широком диапазоне (рисунок 1.1).

Выбор формы импульса осуществлялся при условии соблюдения одинакового значения интегральной мощности разряда. Изучались морфология и особенности осаждения при следующих значениях амплитуд отдельных составляющих: первый режим – амплитуды в импульсе управляемой формы – 100 В (I составляющая); 350 В (II составляющая); 350 В (III составляющая);

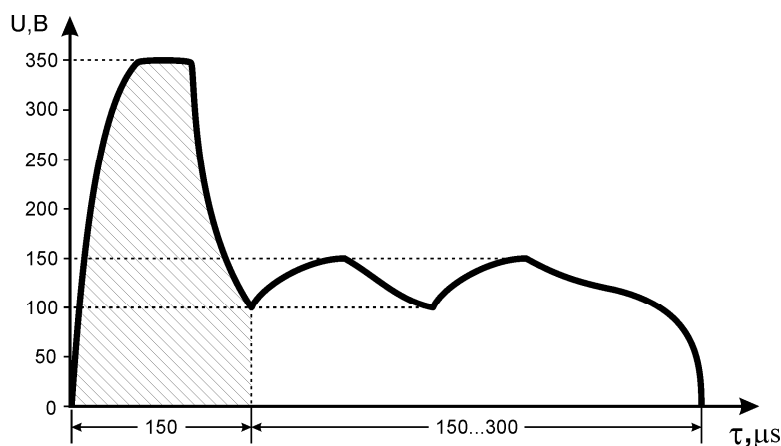


Рисунок 1.1 – Структура импульса напряжения генератора углеродной плазмы

второй режим – 350 В, 100 В, 350 В соответственно; третий режим – 350 В, 350 В, 100 В соответственно. Общая длительность импульса – 450 мс. Частота следования импульсов составляла 5 герц.

Осаждение углеродных покрытий осуществлялось на пластины кремния.

В качестве основных характеристик, определяющих механические свойства покрытий, были выбраны значения микротвердости и внутренних механических напряжений.

Испытания покрытий на микротвердость проводились при постоянной нагрузке на индентор для всех образцов 10 г при длительности нагружения 7 секунд на микротвердомере Leica VMHT MOT (Кноор).

Для оценки напряжений в пленке на кремниевой подложке использовался рентгеновский дифракционный анализ [6]. Изучение морфологии легированных АПП проводилось методом растровой электронной микроскопии (ESEM Quanta 200F) и атомно-силовой микроскопии в режимах измерения топографии и фазового контраста с помощью прибора Solver Pro производства NT-MDT (Москва, Россия). Применение полуконтактного метода позволяет с достаточной точностью определять морфологические и механические характеристики поверхностных слоев различной физической природы.

## 2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены АСМ-изображения поверхности АПП, осажденных при различных вариантах генерации углеродной плазмы. Установлено, что микрорельеф поверхности углеродного слоя существенно отличается. Более однородное покрытие формируется при высоком значении напряжения на переднем фронте импульса разряда. Результаты математической обработки АСМ-изображений, приведенные в таблице 2.1, показывают, что третий режим разряда в сравнении с другими обеспечивает осаждение покрытий с шероховатостью в 3..1,5 раза более низкой.

Таблица 2.1 – Морфологические параметры углеродных покрытий

Напряжение составляющих импульса, В			Шероховатость покрытия Ra, нм	Среднее значение высоты образований, нм
I	II	III		
350	350	350	6,9	118,3
100	350	350	6,4	211,6
350	100	350	17,9	131,1
350	350	100	4,6	70,0

Нанесение АПП при указанном режиме генерации углеродной плазмы позволяет достичь более высокую твердость, скорость осаждения при этом имеет также достаточно высокое значение (таблица 2.2). Отметим также, что уровень внутренних напряжений в алмазоподобных покрытиях, полученных при режиме импульсного разряда (350 В, 350 В, 100 В), является наиболее высоким, что определяет необходимость проведения дополнительной обработки с целью их снижения.

При генерации плазмы в режиме постоянного импульса 350В мощность разряда наибольшая, и, как следствие этого, наблюдается наиболее высокая скорость роста покрытия. При этом, однако, формируется поток ионов углерода с достаточно высокой энергией. При конденсации такого потока частиц на поверхности повышается ее температура и снижается содержание алмазной фазы.

Установленный эффект влияния формы импульса на скорость роста и свойства покрытий может быть объяснен исходя из особенностей испарения углерода при дуговом разряде. На начальной стадии подачи напряжения и возникшего при этом разряда происходит разогрев поверхности графита, его испарение. При этом степень ионизации испаренных частиц составляет до 95%.

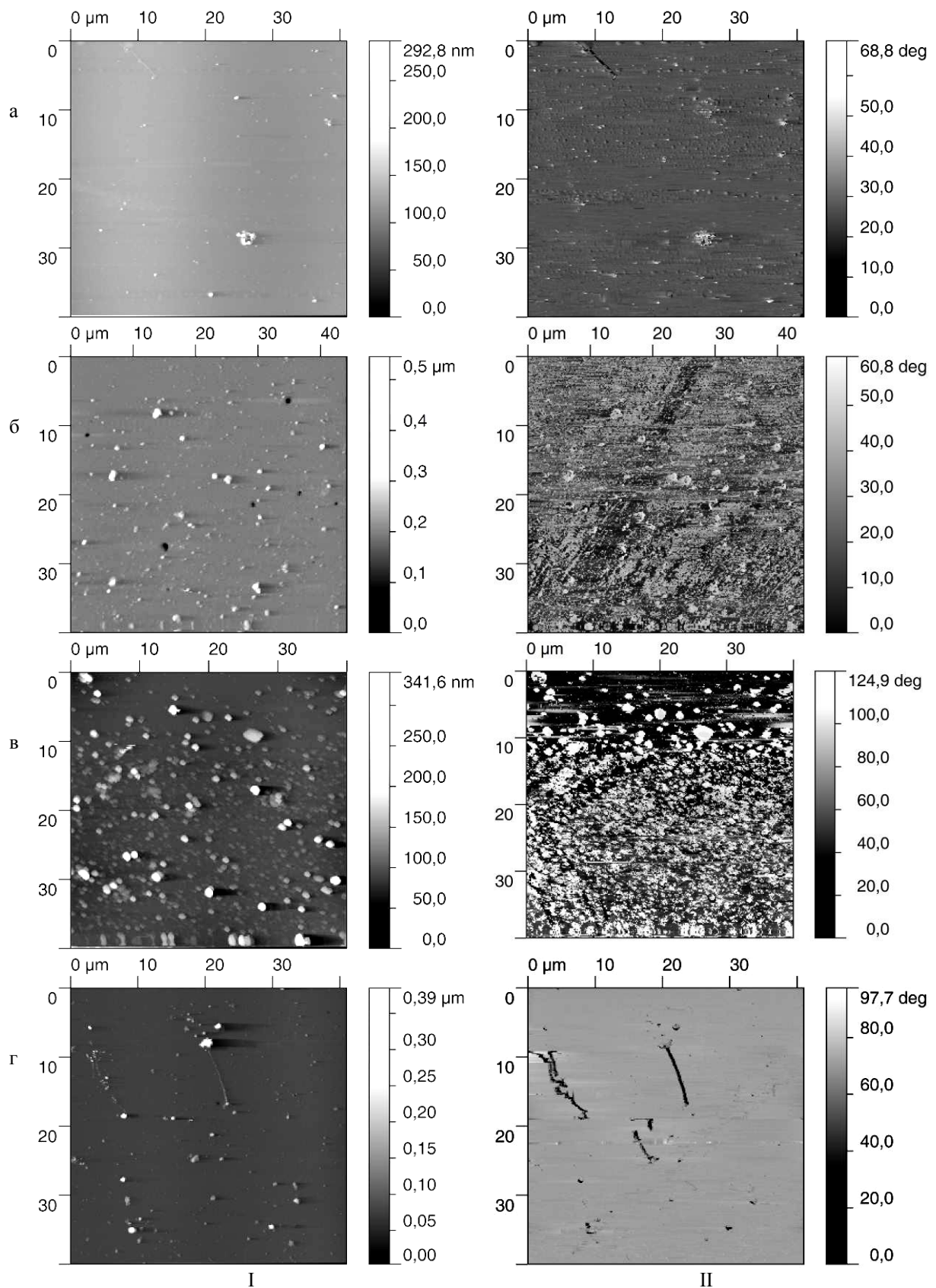


Рисунок 2.1 – АСМ-изображение поверхности углеродных покрытий при следующих сочетаниях амплитуд в разряде:  
 а – 350 В; б – 100 В, 350 В, 350 В; в – 350 В, 100 В, 350 В; г – 350 В, 350 В, 100 В;  
 I – топология; II – фазовый контраст

Таблица 2.2 – Влияние параметров разряда на скорость роста и механические свойства углеродных покрытий

Напряжение составляющих импульса, В			Скорость роста, мкм/имп	Микротвердость, Hv, ГПа	Внутренние напряжения сжатия, $\sigma$ , МПа
I	II	III			
350	350	350	$8,6 \cdot 10^{-5}$	11,9	164
350	250	150	$7 \cdot 10^{-5}$	11,6	267
400	150	100	$3,2 \cdot 10^{-5}$	11,2	215
100	350	350	$3,2 \cdot 10^{-5}$	12,2	843
350	100	350	$5,7 \cdot 10^{-5}$	12,6	860
350	350	100	$6,4 \cdot 10^{-5}$	14,9	964

При последующей подаче на катод напряжения 100–150 В, что соответствует третьей зоне импульса, в промежутке катод-подложка возникает тормозящее ионы углерода электрическое поле, которое снижает их энергию до оптимального значения порядка. В результате мы имеем высокие скорости испарения, и на поверхности создаются условия, оптимальные для формирования алмазной фазы. При ином сочетании значений напряжений в зонах импульса энергия ионов отличается от оптимальной, что приводит к снижению микротвердости покрытия, уменьшению скорости его роста.

#### Заключение

Установлено, что форма импульса разряда при генерации углеродной катодной плазмы оказывает влияние на скорость роста алмазоподобных покрытий, их морфологию и свойства. Наиболее оптимальным по критерию достижения более высоких параметров осаждения и свойств покрытия является режим генерации, при котором на переднем фронте напряжение составляет 300–350 В, а на заднем фронте оно устанавливается в диапазоне 100–150 В.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Donnet, C.* Diamond-like carbon based functionally gradient coatings for space tribology / *C. Donnet, J. Fontaine, T. Le Mogne* // *Surface and*

*Coatings Technology.* – Elsevier Science, 1999. – Vol. 120. – P. 548–554.

2. *Станишевский, А.В.* Структура пленок углерода, осажденных из плазмы импульсного катодно-дугового разряда в вакууме: дис. ... канд. физ.-мат. наук / *А.В. Станишевский*; НАН Б. – Минск, 1985. – 151 с.

3. *Рогачев, А.В.* Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / *А.В. Рогачев* // *Трение и износ.* – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.

4. *Рогачев, А.В.* Восстановление и повышение износостойкости деталей машин / *А.В. Рогачев, С.С. Сидорский.* – Гомель : БелГУТ, 2005. – 343 с.

5. *Рогачев, А.В.* Способ формирования углеродного покрытия в вакууме / *А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, Д.Г. Пилипцов* : решение на выдачу патента на изобретение по заявке № а 20100403 от 03.04.2012.

6. *Рогачев, А.В.* Механические свойства многокомпонентно легированных углеродных покрытий / *А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, Д.Г. Пилипцов* // *Материалы, технологии и оборудование в производстве, эксплуатации, ремонте и модернизации машин : материалы VII Междунар. науч. конф., Новополоцк, 2009 / Полоцкий государственный университет; редкол. : М.Л. Хейфец [и др.].* – Новополоцк, 2009. – Т. 1. – С. 49–53.

*Поступила в редакцию 11.06.12.*

УДК 621.373.826

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЛАЗЕРНОГО РАСКАЛЫВАНИЯ КРЕМНИЕВЫХ ПЛАСТИН, ВЫРЕЗАННЫХ В ПЛОСКОСТИ (110)

А.Н. Сердюков, С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середя

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## PROCESS RESEARCH OF LASER SPLITTING SILICON WAFERS CUTOUT IN THE PLANE (110)

A.N. Serdykov, S.V. Shalupaev, Y.V. Nikitjuk, A.A. Sereda

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Представлены результаты моделирования процесса лазерного термораскалывания монокристаллического кремния. Расчет термоупругих полей, формируемых в кремниевой пластине в результате последовательного лазерного нагрева и воздействия хладагента, осуществлялся для среза (110) в трех различных вариантах перемещений лазерного пучка, а именно в направлениях [1–10], [001], [1–11].

**Ключевые слова:** трещина, лазерное раскалывание, кремниевая пластина.

Results of laser thermosplitting process modelling of single-crystalline silicon are presented. Calculation of the thermoelastic fields formed in a silicon plate as a result of consecutive laser heating and coolant influence was carried out for a section (110) in three different variants of laser beam movement, namely in directions [1–10], [001], [1–11].

**Keywords:** crack, laser splitting, silicon wafer.

### Введение

Лазерное термораскалывание является одним из высокоэффективных способов размерной обработки многих хрупких неметаллических материалов, в частности, таких, как стекло, керамика и кремний. Используемая в настоящее время технология разделения кремниевых пластин алмазным инструментом обладает существенным недостатком – наличие дефектной зоны вдоль линии обработки [1]. При этом технология лазерного термораскалывания имеет ряд преимуществ, к которым в первую очередь относится высокое качество обработки.

Исследованию особенностей применения лазерного термораскалывания для обработки стекол и керамики посвящены работы [2]–[6]. В работах [1], [7] проведено исследование лазерного термораскалывания кристаллического кремния, однако численное моделирование термоупругих полей в этих работах было выполнено в двумерной постановке задачи и без учета анизотропии упругих свойств кристаллов. В работе [8] авторами данной статьи было выполнено численное моделирование процесса управляемого лазерного термораскалывания кристаллического кремния в трехмерной постановке и с учетом анизотропии упругих свойств материала. На основании выполненных расчетов было показано, что использование изотропной модели процесса лазерного термораскалывания монокристаллов кремния приводит к существенным погрешностям. Таким образом, при выборе технологических параметров процесса формирования

лазерно-индуцированных трещин принципиально важно учитывать анизотропию упругих свойств обрабатываемого материала.

Расчет термоупругих полей в работе [8] был осуществлен для пластин, вырезанных в плоскостях (100) и (111), при этом на практике также используются монокристаллы кремния, вырезанные в плоскости (110) [9]. В связи с этим в данной работе выполнено моделирование процесса управляемого лазерного термораскалывания пластин монокристаллического кремния, вырезанного в плоскости (110).

### 1 Моделирование процесса лазерного термораскалывания

Моделирование процесса лазерного термораскалывания пластин кремния было осуществлено в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке с использованием метода конечных элементов [10]. В качестве критерия, определяющего направление развития лазерно-индуцированной трещины, был использован критерий максимальных растягивающих напряжений [11].

Плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности и коэффициент линейного термического расширения кремния полагались равными  $\rho=2330$  кг/м<sup>3</sup>,  $c=758$  Дж/кг·К,  $\lambda=10^9$  Вт/м·К,  $\alpha=2,33 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup> [9], [12].

Расчет термоупругих полей, формируемых в монокристаллической кремниевой пластине в результате последовательного лазерного нагрева

и воздействия хладагента, осуществлялся для трех различных вариантов: I – анализ среза (110), при перемещении лазерного пучка в направлении [1–10]; II – анализ среза (110), при перемещении лазерного пучка в направлении [001]; III – анализ среза (110), при перемещении лазерного пучка в направлении [1–11].

Закон Гука для анизотропных материалов может быть записан в матричной форме [13], [14]

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^6 C_{ik} (\varepsilon_k - \varepsilon_k^t),$$

где напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_2 = \sigma_{yy}, \quad \sigma_3 = \sigma_{zz},$$

$$\sigma_4 = \sigma_{yz}, \quad \sigma_5 = \sigma_{zx}, \quad \sigma_6 = \sigma_{xy};$$

упругие деформации

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz},$$

$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{zx}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{xy};$$

температурные деформации

$$\varepsilon_1^t = \alpha_x \Delta T, \quad \varepsilon_2^t = \alpha_y \Delta T, \quad \varepsilon_3^t = \alpha_z \Delta T,$$

$$\varepsilon_4^t = 0, \quad \varepsilon_5^t = 0, \quad \varepsilon_6^t = 0.$$

Для кубических кристаллов матрица  $\{C_{ik}\}$  в случае, когда пластина вырезана в плоскости (100), может быть записана в следующем виде [15]

$$\{C_{ik}\} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\{C_{ik}\}$  для среза (110) может быть записана в следующем виде

$$\{C_{ik}\} = \begin{pmatrix} \frac{C_{11} + C_{12}}{2} + C_{44} & \frac{C_{11} + C_{12}}{2} - C_{44} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{11} + C_{12}}{2} - C_{44} & \frac{C_{11} + C_{12}}{2} + C_{44} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{pmatrix}.$$

## 2 Результаты расчетов

Для расчетов использовались следующие константы упругой жесткости:  $C_{11}=1,656 \cdot 10^5$  МПа,  $C_{12}=0,6386 \cdot 10^5$  МПа,  $C_{44}=0,7953 \cdot 10^5$  МПа [15].

На рисунке 2.1 приведена схема расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента в плоскости обработки. Позицией 1 отмечен лазерный пучок, позицией 2 – хладагент, позицией 3 – лазерно-индуцированная микротрещина, позицией 4 – кремниевая пластина. Горизонтальной стрелкой на рисунке указано направление перемещения обрабатываемого изделия относительно лазерного пучка и хладагента.

Расчеты были выполнены для дисков радиусом 15,5 мм и толщиной  $h=0,2$  мм и  $h=0,4$  мм. Радиус пятна лазерного излучения  $R=0,5$  мм, мощность излучения  $P=60$  Вт. Скорость перемещения пластины относительно лазерного пучка и хладагента выбиралась равной  $v=10$  мм/с и  $v=100$  мм/с. Моделирование проводилось для случаев воздействия лазерного излучения с длинами волн равными 1,06 мкм и 0,808 мкм.

Результаты проведенных расчетов приведены в таблице 2.1 и на рисунках 2.2–2.4. В таблице 2.1 содержатся расчетные значения максимальных по величине термоупругих напряжений растяжения и сжатия, формируемых в

кремниевой пластине для трех исследуемых вариантов обработки. На рисунках 2.2–2.4 представлены распределения полей температурных напряжений для пластин толщиной  $h=0,2$  мм, обрабатываемых со скоростью  $v=10$  мм/с, при воздействии лазерного излучения с длиной волны равной 0,808 мкм.

Отметим, что вследствие отсутствия у кристаллов кремния анизотропии теплопроводности расчетные значения температур в зоне обработки и закономерности их формирования для срезов (110), (100) и (111) совпадают при выборе одинаковых параметров обработки и размеров обрабатываемых пластин [8].

Анализ данных, приведенных в таблице 2.1, показывает, что наибольших значений напряжения растяжения достигают при термораскалывании среза (110) при перемещении лазерного пучка в направлении [001] (II вариант обработки), а наименьших при перемещении лазерного пучка в направлении [1–10] (I вариант обработки). При этом разница в величинах максимальных растягивающих напряжений, формируемых при обработке в направлениях [001] и [1–10], составляет от 11% до 28%. Данная разница в величинах растягивающих напряжений должна быть учтена при выборе параметров процесса лазерного термораскалывания.

Таблица 2.1 – Расчетные значения максимальных по величине напряжений растяжения и сжатия в зоне обработки

Вариант	Максимальные напряжения в зоне обработки, МПа	лазерное излучение с длиной волны 1,06 мкм				лазерное излучение с длиной волны 0,808 мкм			
		$h=0,2$ мм		$h=0,4$ мм		$H=0,2$ мм		$h=0,4$ мм	
		$v=10$ мм/с	$v=100$ мм/с	$v=10$ мм/с	$v=100$ мм/с	$v=10$ мм/с	$v=100$ мм/с	$v=10$ мм/с	$v=100$ мм/с
I	растяжения	7,9	1,6	6,9	0,8	48,1	9,8	23,2	2,6
	сжатия	-43,4	-25,4	-40,3	-21,0	-273	-164	-153	-89,3
II	растяжения	9,3	2,0	7,8	1,1	57,3	12,1	26,1	3,6
	сжатия	-49,1	-28,5	-42,6	-22,1	-309	-185	-163	-94,6
III	растяжения	8,5	1,7	7,3	0,9	52,2	10,3	24,5	2,9
	сжатия	-46,8	-27,0	-41,7	-21,5	-294	-175	-158	-92,0

Отдельно отметим особенности пространственной локализации термоупругих полей, формируемых при лазерном термораскалывании среза (110) в направлении [1-11] (рисунок 2.4).

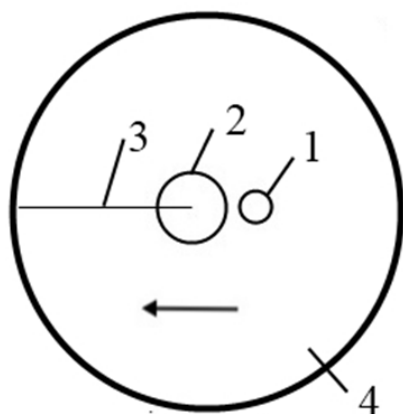


Рисунок 2.1 – Схема расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента в плоскости обработки монокристаллической кремниевой пластины

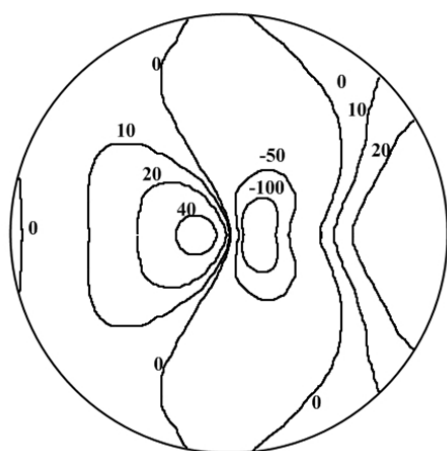


Рисунок 2.2 – Распределение полей температурных напряжений на поверхности кремниевой пластины, при перемещении лазерного пучка в направлении [1-10], МПа

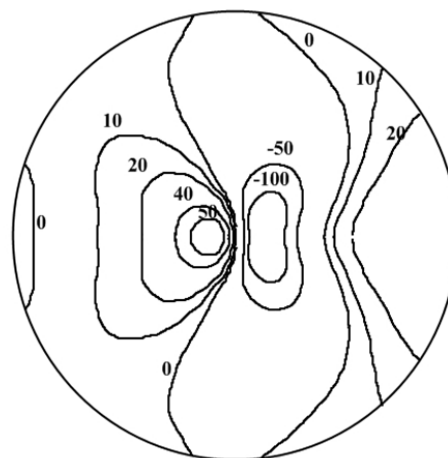


Рисунок 2.3 – Распределение полей температурных напряжений на поверхности кремниевой пластины, при перемещении лазерного пучка в направлении [001], МПа

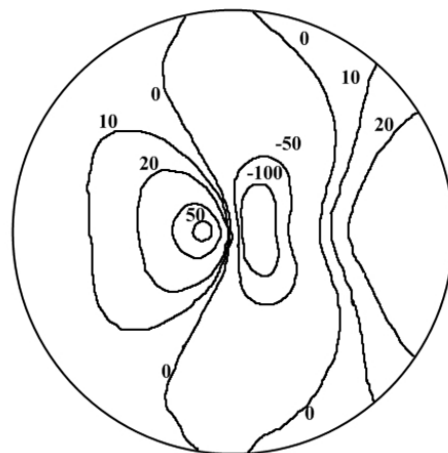


Рисунок 2.4 – Распределение полей температурных напряжений на поверхности кремниевой пластины, при перемещении лазерного пучка в направлении [1-11], МПа

Распределение термоупругих полей, формируемых при этом режиме обработки, характеризуется небольшой асимметричностью относительно линии воздействия лазерного излучения.

Указанная асимметричность полей термоупругих напряжений обусловлена асимметричностью сечения поверхности модулей Юнга относительно направления [1–11] (см. [13]) и должна быть принята во внимание при выборе параметров термораскалывания.

### Заключение

Полученные результаты показывают необходимость учета анизотропии упругих свойств кремния при выборе параметров лазерного термораскалывания в различных направлениях монокристаллических пластин, вырезанных в плоскости (110).

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Наумов, А.С.* Разработка технологии разделения приборных пластин на кристаллы: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.11.14 / А.С. Наумов ; МГУПИ. – М., 2009. – 19 с.
2. *Мачулка, Г.А.* Лазерная обработка стекла / Г. А. Мачулка. – М. : Сов. радио, 1979. – 136 с.
3. *Способ резки неметаллических материалов:* пат. 2024441 РФ, МКИ 5 С03В33/02 / В.С. Кондратенко; заявитель В.С. Кондратенко; заявл. 04.02.92; опубл. 12.15.94
4. *Увеличение эффективности управляемого лазерного термораскалывания диэлектрических материалов / В.К. Сысоев [и др.] // Оптический журнал.* – 2004. – Т. 71, № 2. – С. 65–69.
5. *Junke, J.* Cutting glass substrates with dual-laser beams / J. Junke, W. Xinbing // *Optics and Lasers in Engineering.* – 2009. – Vol. 47. – P. 860–864.
6. *Двудуговое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов / С.В. Шалупаев [и др.] // Оптический журнал.* – 2005. – Т. 73, № 5. – С. 62–66.

7. *Гиндин, П. Д.* Разработка новых технологий и оборудования на основе метода лазерного управляемого термораскалывания для обработки деталей приборостроения, микро - и оптоэлектроники: автореф. дис. докт. техн. наук : 05.11.14 / П. Д. Гиндин ; МГУПИ. – М., 2009. – 43 с.

8. *Сердюков, А.Н.* Особенности управляемого лазерного термораскалывания кристаллического кремния / А.Н. Сердюков, С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк // *Кристаллография.* – 2010. – Т. 55, № 6. – С. 1180–1184.

9. *Технология полупроводникового кремния / Э.С. Фалкевич [и др.].* – М. : Металлургия, 1992. – 408 с.

10. *Шабров, Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л. : Машиностроение, 1983. – 212 с.

11. *Карзов, Г.П.* Физико – механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Шевцова. – СПб. : Политехника, 1993. – 391 с.

12. *Справочник по электротехническим материалам / Ю.В. Корицкий [и др.].* – Л. : Энергоатомиздат, 1988. – 728 с.

13. *Концевой, Ю.А.* Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур / Ю.А. Концевой, Ю.М. Литвинов, Э.А. Фатахов. – М. : Радио и связь, 1982. – 240 с.

14. *Lackner, T.* Determination of axisymmetric elastic constants in anisotropic silicon for a thyristor tablet / T. Lackner // *Journal of electronic materials.* – 1989. – Vol. 18. – P. 19–24.

15. *Акустические кристаллы / А.А. Блистанов [и др.] ; под общ. ред. М.П. Шаскольской.* – М. : Наука, 1982. – 632 с.

Поступила в редакцию 05.06.12.



УДК 512.542

## О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.М. Адарченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## ON MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

N.M. Adarchenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В 1986 году В.А. Ведерников доказал, что если  $M$  – не нормальная максимальная подгруппа конечной разрешимой группы  $G$ , то  $M$  содержит нормализатор некоторой силовской подгруппы группы  $G$ . В статье доказано следующее обобщение теоремы В.А. Ведерникова.

**Теорема.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая конечная группа. Пусть  $M$  – такая не нормальная максимальная подгруппа группы  $G$ , что  $|G : M|$  – степень простого числа  $p$  из  $\pi$ . Пусть  $H$  – некоторая холлова подгруппа из  $M$  такая, что  $p$  не делит  $|H|$ , причем либо  $|\pi(H) \cap \pi'| \leq 1$ , либо  $|M : H|$  –  $\pi$ -число. Если ядро подгруппы  $N_{M_G} / M_G$  в  $M / M_G$  не равно 1, то  $N_G(H)$  содержится в  $M$ .

Здесь  $M_G$  – ядро  $M$  в  $G$ , т. е. наибольшая нормальная подгруппа из  $G$ , содержащаяся в  $M$ ;  $\pi(H)$  – множество всех простых делителей  $|H|$ .

**Ключевые слова:**  $\pi$ -разрешимая группа, максимальная подгруппа.

In 1986 V.A. Vedernikov proved that if  $M$  is a non-normal maximal subgroup of a finite soluble group  $G$ , then  $M$  contains a normalizer of some Sylow subgroup of  $G$ . In the paper the following generalization of Vedernikov's result is proved.

**Theorem.** Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble finite group. Let  $M$  be a non-normal maximal subgroup of  $G$  such that  $|G : M|$  is a power of a prime  $p$  in  $\pi$ . Let  $H$  be a Hall subgroup in  $M$  such that  $p$  does not divide  $|H|$ , and either  $|\pi(H) \cap \pi'| \leq 1$  or  $|M : H|$  is a  $\pi$ -number. If the core of  $N_{M_G} / M_G$  in  $M / M_G$  is not equal to 1, then  $N_G(H)$  is contained in  $M$ .

Here  $M_G$  is the core of  $M$  in  $G$ , i. e., the largest normal subgroup in  $G$  contained in  $M$ ;  $\pi(H)$  is the set of prime divisors of  $|H|$ .

**Keywords:**  $\pi$ -soluble group, maximal subgroup.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 20D20, 20E28

По теореме Ф. Холла, конечная группа разрешима, если индексы ее максимальных подгрупп – простые числа или квадраты простых чисел [1, теорема 10.5.7]. В 1986 году в работе [2] В.А. Ведерников доказал, что если  $M$  – не нормальная максимальная подгруппа конечной разрешимой группы  $G$ , то  $M$  содержит нормализатор некоторой силовской подгруппы группы  $G$ . В настоящей статье предлагается усиление этого результата.

**Обозначения:**  $\pi$  – некоторое множество простых чисел;  $\pi'$  – множество всех простых чисел, не входящих в  $\pi$ ;  $M_G$  – ядро подгруппы  $M$  в группе  $G$ , т. е. наибольшая нормальная подгруппа из  $G$ , содержащаяся в  $M$ . Натуральное число  $t$  называется  $\pi$ -числом, если все его простые делители принадлежат  $\pi$ . Через  $F(G)$  обозначается подгруппа Фиттинга группы  $G$ . Подгруппа  $H$  конечной группы  $G$  называется  $\pi$ -холловой подгруппой, если  $H$  –  $\pi$ -подгруппа и  $|G : H|$  является  $\pi'$ -числом. Через  $\pi(G)$  обозначается множество всех простых делителей порядка конечной группы  $G$ .

В работе [3] доказано следующее обобщение упомянутой выше теоремы В.А. Ведерникова.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая конечная группа, содержащая нильпотентную  $\pi$ -холловую подгруппу. Пусть  $M$  – не нормальная максимальная подгруппа группы  $G$ . И пусть

$|G : M|$  –  $\pi$ -число. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $F(M / M_G) \neq 1$  и  $q \in \pi(F(M / M_G))$ , то в  $G$  найдется силовская  $q$ -подгруппа  $Q$  такая, что  $N_G(Q)$  содержится в  $M$ ;

2) если  $F(M / M_G) = 1$ , то  $N_G(K)$  содержится в  $M$  для некоторой  $\pi'$ -холловой подгруппы  $K$  группы  $G$ .

Наша задача состоит в усилении теоремы 1. Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Следующая лемма является частным случаем леммы 17.5 монографии [4].

**Лемма 1.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа  $\pi$ -разрешимой конечной группы  $G$ . Пусть  $H$  – такая холлова подгруппа группы  $G$ , что либо  $|\pi(H) \cap \pi'| \leq 1$ , либо  $|G : H|$  –  $\pi$ -число. Тогда  $N_G(KH) = N_G(H)K$  и справедливо равенство  $N_G(H)K / K = N_{G/K}(HK / K)$ .

Напомним, что конечная группа называется примитивной, если она имеет максимальную подгруппу с единичным ядром.

**Лемма 2** [5, теорема А.15.2]. Если конечная примитивная группа  $G$  имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу  $L$ , то  $L$  является единственной минимальной нормальной подгруппой в  $G$ , причем  $L = C_G(L)$  дополняема в  $G$ . Кроме того,  $L$  совпадает с подгруппой Фиттинга  $F(G)$  группы  $G$ .

**Лемма 3** [4, лемма 3.9]. Пусть  $L$  – минимальная нормальная подгруппа конечной группы  $G$ . Если порядок  $L$  делится на простое число  $r$ , то  $G/C_G(L)$  не содержит неединичных нормальных  $r$ -подгрупп.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая конечная группа. Пусть  $M$  – такая не нормальная максимальная подгруппа группы  $G$ , что  $|G : M|$  – степень простого числа  $p$  из  $\pi$ . Пусть  $H$  – некоторая холлова подгруппа из  $M$  такая, что  $p$  не делит  $|H|$ , причем либо  $|\pi(H) \cap \pi^p| \leq 1$ , либо  $|M : H|$  –  $\pi$ -число. Если ядро подгруппы  $N_G(H)M_G/M_G$  в  $M/M_G$  не равно 1, то  $N_G(H)$  содержится в  $M$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда  $M_G \neq 1$ . Рассмотрим группу  $G/M_G$  и её максимальную подгруппу  $M/M_G$ . Подгруппа  $N_G(H)M_G/M_G$  является в  $M/M_G$  холловой подгруппой, удовлетворяющей условию теоремы. Применяя индукцию, получаем, что нормализатор подгруппы  $N_G(H)M_G/M_G$  в  $G/M_G$  содержится в  $M/M_G$ . Но по лемме 1 нормализатор подгруппы  $N_G(H)M_G/M_G$  в  $G/M_G$  совпадает с  $N_G(H)M_G/M_G$ . Отсюда следует, что  $N_G(H)$  содержится в  $M$ .

Теперь рассмотрим случай  $M_G = 1$ . В этом случае группа  $G$  примитивна, и по лемме 2 минимальная нормальная подгруппа  $L = C_G(L)$  совпадает с подгруппой Фиттинга  $F(G)$  группы  $G$ . Кроме того, согласно лемме 3 факторгруппа  $G/L$  не содержит неединичных нормальных  $p$ -подгрупп. Так как  $G/L = ML/L$  изоморфна  $M$ , то получается, что  $M$  не содержит неединичных нормальных  $p$ -подгрупп. По условию,  $H_M \neq 1$ . Нетрудно заметить, что подгруппа  $H_M L$  нормальна в  $G$ . Применяя тождество Дедекинда, получаем следующее равенство:

$$H_M = H_M(H \cap L) = H \cap H_M L.$$

Учитывая это, приходим к следующему равенству:

$$N_G(H) \leq N_G(H \cap H_M L) = N_G(H_M) = M.$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая конечная группа. Пусть  $M$  – не нормальная максимальная подгруппа группы  $G$ . И пусть  $|G : M|$  –  $\pi$ -число. Если  $F(M/M_G) \neq 1$  и  $q \in \pi(F(M/M_G))$ , то в  $G$  найдется силовская  $q$ -подгруппа  $Q$  такая, что  $N_G(Q)$  содержится в  $M$ .

**Следствие 2.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая конечная группа. Пусть  $M$  – не нормальная максимальная подгруппа группы  $G$ . И пусть  $|G : M|$  –  $\pi$ -число. Если  $F(M/M_G) = 1$ , то  $N_G(K)$  содержится в  $M$  для некоторой  $\pi'$ -холловой подгруппы  $K$  группы  $G$ .

Следствия 1 и 2 показывают, что условие нильпотентности  $\pi$ -холловой подгруппы в теореме 1 является излишним.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Холл, М. Теория групп / М. Холл. – М. : Изд. иностр. литературы. – 1962. – 468 с.
2. Ведерников, В.А. О  $\pi$ -свойствах конечных групп / В.А. Ведерников // В сб. : Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск : Наука и техника. – 1986. – С. 13–19.
3. Gritsuk, D.V. On maximal subgroups of a finite solvable group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // arXiv: 1105.1054v1[math. GR] 5 May 2011. – P. 1–5.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. – 1978. – 272 с.
5. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter. – 1992. – 891 pp.

Поступила в редакцию 07.06.12.

УДК 517.984

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ С УСЛОВИЕМ ПЕРРОНА

А.А. Ахматова

*Белорусский государственный университет, Минск*

## ON SPECTRAL PROPERTIES OF WEIGHTED SHIFT OPERATORS GENERATED BY LINEAR MAPPINGS WITH PERRON'S CONDITIONS

A.A. Akhmatova

*Belarusian State University, Minsk*

В работе рассматривается оператор взвешенного сдвига  $B$  в пространстве  $L_2(\mathbb{C}^m)$ , порожденный линейным отображением  $A: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ . Описаны свойства оператора  $B - \lambda I$  для  $\lambda$  из спектра  $\Sigma(B)$ . В частности, получено необходимое и достаточное условие, при котором оператор  $B - \lambda I$  односторонне обратим.

**Ключевые слова:** операторы взвешенного сдвига, спектр, односторонняя обратимость, инвариантные меры, разбиение ориентированного графа.

Weighted shift operators  $B$  in the space  $L_2(\mathbb{C}^m)$  generated by a linear mapping  $A: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  are considered. A description of properties of  $B - \lambda I$  for  $\lambda$  belonging to spectrum  $\Sigma(B)$  is given. In particular, the necessary and sufficient condition for  $B - \lambda I$  to be one-sided invertible is obtained.

**Keywords:** weighted shift operators, spectrum, one-sided invertibility, invariant measure, decomposition of oriented graph.

### Введение

В работе изучаются спектральные свойства операторов взвешенного сдвига, действующих в пространстве  $L_2(\mathbb{C}^m)$  по формуле

$$Bu(x) = a_0(x)u(Ax), \quad x \in \mathbb{C}^m, \quad (0.1)$$

где  $a_0$  – заданная ограниченная непрерывная функция,  $A: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  – невырожденное линейное отображение.

При исследовании конкретных классов операторов представляют интерес свойства операторов  $B - \lambda I$  для спектральных значений  $\lambda$ . В частности, при исследовании разрешимости соответствующих уравнений в первую очередь нужно выяснить, является ли соответствующий оператор односторонне обратимым, фредгольмовым или имеет замкнутый образ. В работе описаны свойства операторов  $B - \lambda I$  для  $B$  вида (0.1).

В более общей ситуации линейный ограниченный оператор  $B$ , действующий в банаховом пространстве  $F(X)$  функций на произвольном множестве  $X$ , называется *оператором взвешенного сдвига*, если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = a_0(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X, \quad (0.2)$$

где  $\alpha: X \rightarrow X$  есть некоторое отображение,  $a_0(x)$  – заданная функция на  $X$ .

Задача описания спектра таких операторов в случае обратимого отображения  $\alpha$  в классических пространствах принципиально решена в достаточной общности, приведем здесь один из результатов, на который опирается исследование [1], [2].

Пусть  $X$  есть компактное топологическое пространство,  $\mu$  – борелевская мера на  $X$ ,  $\alpha: X \rightarrow X$  – непрерывное обратимое отображение и выполнено условие согласования  $\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = 0 \Leftrightarrow \mu(\omega) = 0$ , где  $\omega$  – измеримое подмножество в  $X$ .

При этих условиях существует *нормирующая функция*  $\varrho$ , такая, что оператор

$$T_\alpha u(x) = \varrho(x)u(\alpha(x))$$

в пространстве  $L_2(X, \mu)$  является унитарным. Например, если  $X$  есть область в  $\mathbb{C}^m$ , отображение  $\alpha$  является диффеоморфизмом, то  $\varrho(x) = |J_\alpha(x)|^{1/2}$ , где  $J_\alpha$  – якобиан диффеоморфизма  $\alpha$ . Оператор  $B$  удобно записывать в виде  $B = aT_\alpha$ , так как свойства оператора  $B$  более просто выражаются через функцию  $a(x) = \varrho(x)^{-1}a_0(x)$ , которая называется *приведенным коэффициентом*.

**Предложение 0.1.** Пусть  $X$  – компактное пространство,  $\mu$  – мера на  $X$ , носитель которой

совпадает со всем пространством,  $\alpha : X \rightarrow X$  – обратимое непрерывное отображение, сохраняющее класс меры  $\mu$ ,  $a \in C(X)$ .

В пространстве  $L_2(X, \mu)$  для спектрально-го радиуса  $R(B)$  оператора  $B = aT_\alpha$  имеет место равенство

$$R(B) = \max_{v \in \text{Mes}(X, \alpha)} S_v(a),$$

где  $\text{Mes}(X, \alpha)$  есть множество вероятностных мер на  $X$ , инвариантных и эргодических относительно отображения  $\alpha$ , а  $S_v(a)$  есть среднее геометрическое функции  $a$  по отношению к этой мере:

$$S_v(A) = \exp \left[ \int_X \ln |a(x)| dv \right].$$

Если множество непериодических точек отображения  $\alpha$  всюду плотно в  $X$ , пространство  $X$  нельзя разложить на непересекающиеся замкнутые  $\alpha$  – инвариантные множества и при этом  $a(x) \neq 0$ , то спектр  $\Sigma(B)$  оператора  $B$

$$\Sigma(B) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : r(B) \leq |\lambda| \leq R(B) \}, \quad (0.3)$$

где

$$r(B) = \min_{v \in \text{Mes}(X, \alpha)} S_v(a).$$

Вопрос о свойствах  $B - \lambda I$  при спектральных значениях  $\lambda$  для операторов взвешенного сдвига исследован только для отдельных конкретных примеров отображений  $\alpha$  и (или) специальных видов коэффициентов  $a$  [3]–[6]. В данной работе найден класс коэффициентов  $a$ , для которых удается описать свойства операторов  $B - \lambda I$  для  $B$  вида (0.1).

### 1. Компактификация пространства $\mathbb{C}^m$ с помощью бесконечно удаленной сферы

В предложении 0.1 существенно условие компактности пространства  $X$ , а пространство  $\mathbb{C}^m$  не является компактным. Исследование можно свести к случаю компактного пространства с помощью компактификации пространства  $\mathbb{C}^m$ . Напомним, что компактификацией пространства  $X_0$  называется такое компактное пространство  $X$ , что  $X_0$  является всюду плотным подпространством в  $X$ . Для любого локально компактного пространства  $X_0$  компактификация существует, причем может существовать много различных компактификаций.

В работе рассмотрена компактификация пространства  $\mathbb{C}^m$  бесконечно удаленной сферой. Эта компактификация наиболее наглядно описывается с помощью следующей конструкции. Отображение  $x \rightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x$  является гомеоморфизмом между пространством  $\mathbb{C}^m$  и открытым единичным шаром. Замкнутый единичный шар есть компактное множество, в котором открытый

единичный шар (гомеоморфный пространству  $\mathbb{C}^m$ ) является плотным подмножеством.

Обычно такая компактификация  $X$  пространства  $\mathbb{C}^m$  строится с помощью присоединения бесконечно удаленной сферы  $S_\infty^{2m-1}$ . Как множество  $X = \tilde{\mathbb{C}}^m = \mathbb{C}^m \amalg S_\infty^{2m-1}$ , для задания топологии определяются окрестности точек. База окрестностей точки  $x \in \mathbb{C}^m$  состоит из шаров с центром в этой точке, база окрестностей точки  $\xi_0 \in S_\infty^{2m-1}$  состоит из множеств

$$W(\xi_0; R, \delta) = \left\{ x \in \mathbb{C}^m : \|x\| > R, \left\| \frac{1}{\|x\|}x - \xi_0 \right\| < \delta \right\} \cup \left\{ \xi \in S_\infty^{2m-1} : \|\xi - \xi_0\| < \delta \right\},$$

где  $R > 0, \delta > 0$ . Как легко убедиться, это топологическое пространство гомеоморфно замкнутому единичному шару и является компактификацией пространства  $\mathbb{C}^m$ , полученным присоединением бесконечно удаленной сферы  $S_\infty^{2m-1}$ .

**Лемма 1.1.** Для любого невырожденного линейного отображения  $A : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  существует пролонгация – гомеоморфизм  $\alpha : X \rightarrow X$ , действие которого на  $\mathbb{C}^m$  совпадает с действием  $A$ . Пролонгация действует по формуле

$$\alpha(x) = \begin{cases} Ax, & x \in \mathbb{C}^m, \\ \frac{1}{\|Ax\|}Ax, & x \in S_\infty^{2m-1}. \end{cases} \quad (1.1)$$

На пространстве  $X$  зададим меру  $\mu$ , которая совпадает с мерой Лебега на  $\mathbb{C}^m$  и  $\mu(S_\infty^{2m-1}) = 0$ . Тогда  $L_2(\mathbb{C}^m) = L_2(X, \mu)$  и оператор (0.1) имеет вид (0.2). Кроме того, для отображения (1.1) выполнены условия предложения 0.1 (за исключением случая, когда  $A^N = I$ ).

Условие  $a \in C(X)$ , входящее в предложение 0.1, в рассматриваемом случае означает, что мы берем в качестве коэффициентов  $a$  не произвольные ограниченные непрерывные функции на  $\mathbb{C}^m$ , а только те, которые допускают непрерывное продолжение  $\hat{a}$  на  $X$ . Это функции на  $\mathbb{C}^m$ , у которых для любого  $\xi \in S_\infty^{2m-1}$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t\xi) := \hat{a}(\xi),$$

и при этом  $\hat{a}(\xi)$  непрерывно зависит от  $\xi$ .

Отметим также, что в случае линейного отображения нормирующий множитель  $\varrho = |\det A|^{1/2}$  не зависит от  $x$ , а приведенный коэффициент есть

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} a_0(x).$$

### 2 Описание множества $\text{Mes}(X, \alpha)$

Описание множества  $\text{Mes}(X, \alpha)$ , состоящего из мер на  $X$ , эргодических относительно

отображения  $\alpha$ , получено в [7], поэтому из предложения 0.1 может быть получено явное описание спектра рассматриваемого оператора. Множество  $Mes(X, \alpha)$  может иметь разную структуру в зависимости от свойств оператора  $A$ , и возникает много качественно различных случаев. Ниже будут описаны тонкие спектральные свойства оператора (0.1) при некоторых дополнительных предположениях.

Будем считать, что для  $A$  выполнено *условие Перрона*, если все  $m$  собственных значений  $\lambda_k = r_k e^{i2\pi h_k}$  оператора  $A$  различны по модулю. Будем считать  $r_k \neq 1$  и занумеруем их в порядке возрастания:  $r_1 < r_2 < r_{k_0} < 1 < \dots < r_m$ . Пусть  $e_k$  есть соответствующий собственный вектор и

$$S_k = \{\xi \in S_\infty^{2m-1} : \xi = z e_k, |z| = 1\}$$

есть окружности, лежащие на бесконечно удаленной сфере, состоящие из собственных векторов. Обозначим также  $S_0 = \{0\} \subset \mathbb{C}^m$ . Из результатов [7] вытекает следующее

**Предложение 2.1.** При сделанных выше предположениях

$$Mes(X, \alpha) = \prod_{k=0}^m Mes(S_k, \alpha).$$

При этом:

1) множество  $Mes(S_0, \alpha)$  состоит из одной меры  $\delta_0$ , сосредоточенной в точке 0, и

$$S_{\delta_0}(a) = |a(0)|;$$

2) если  $k > 0$  и число  $h_k$  иррационально, то множество  $Mes(S_k, \alpha)$  состоит из одной меры  $\nu_k$ , являющейся нормированной мерой Лебега на окружности  $S_k$ ,

$$S_{\nu_k}(a) = \exp \left[ \int_0^1 \ln |\hat{a}(e^{i2\pi t} e_k)| dt \right];$$

3) если  $k > 0$  и  $h_k = \frac{m_k}{n_k}$ , то множество  $Mes(S_k, \alpha) = \{\nu_{k,s} : 0 \leq s < \frac{1}{n_k}\}$ , где среднее геометрическое по мере  $\nu_{k,s}$  задается выражением

$$S_{\nu_{k,s}}(a) = \left\{ \prod_{j=0}^{n_k-1} |\hat{a}(e^{i2\pi(s+\frac{j}{n_k})} e_k)| \right\}^{1/n_k};$$

4) если  $k > 0$  и  $h_k = 0$ , т. е.  $\lambda_k > 0$ , то  $Mes(S_k, \alpha) = \{\delta_{k,s} : 0 \leq s < 1\}$  и

$$S_{\delta_{k,s}}(a) = |\hat{a}(e^{i2\pi s} e_k)|.$$

### 3 Спектральные свойства оператора

Введем величины

$$R_k^+(a) = \max \{S_\nu(a) : \nu \in Mes(S_k, \alpha)\},$$

$$R_k^-(a) = \min \{S_\nu(a) : \nu \in Mes(S_k, \alpha)\}.$$

В спектре  $\Sigma(B)$ , являющемся кольцом (0.3), выделим подмножества

$$\Sigma_k = \{\lambda : \exists \nu \in Mes(S_k, \alpha), |\lambda| = S_\nu(a)\}.$$

В случаях 1) и 2) из предложения 2.1 подмножество  $\Sigma_k$  есть окружность, а в случаях 3) и 4) – замкнутое кольцо:

$$\Sigma_k = \{\lambda : R_k^-(a) \leq |\lambda| \leq R_k^+(a)\}.$$

При этом множество

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma(B) \setminus \bigcup_k \Sigma_k$$

является объединением конечного числа открытых колец.

Таким образом, получаем разбиение спектра на непересекающиеся подмножества, в общем случае их количество есть  $2m+1$ , свойства оператора  $B - \lambda I$  могут быть разными для  $\lambda$ , лежащих в указанных частях спектра, и требуется проанализировать много различных случаев в зависимости от соотношений между  $S_\nu(a)$ ,  $\lambda$  и динамическими свойствами отображения  $\alpha$ .

Единообразное описание всех возможных случаев удается получить с помощью *ассоциированного графа*  $G(X, \alpha)$ , описывающего динамику отображения  $\alpha$ . Вершинами графа  $G(X, \alpha)$  являются множества  $S_k$ . Ориентированное ребро  $S_k \rightarrow S_j$  включаем в граф тогда и только тогда, когда существует точка  $x \in X$  такая, что ее траектория  $\alpha_n(x)$  стремится к множеству  $S_k$  при  $n \rightarrow -\infty$  и стремится к множеству  $S_j$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

**Лемма 3.1.** Если для  $A$  выполнено условие Перрона, то при выбранном способе нумерации собственных значений граф  $G(X, \alpha)$  имеет следующий вид:

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_{k_0} \rightarrow S_0 \rightarrow S_{k_0+1} \rightarrow \dots \rightarrow S_m.$$

По коэффициенту  $a$  и числу  $\lambda$  строятся два подмножества вершин графа

$$G^+(a, \lambda) = \{S_k : R_k^-(a) > |\lambda|\},$$

$$G^-(a, \lambda) = \{S_k : R_k^+(a) < |\lambda|\}.$$

Очевидно, что  $G^+(a, \lambda) \cap G^-(a, \lambda) = \emptyset$ .

Подмножества  $G^+(a, \lambda)$  и  $G^-(a, \lambda)$  задают разбиение графа, если выполнено условие

$$G(X, \alpha) = G^+(a, \lambda) \cup G^-(a, \lambda).$$

Разбиение графа будем называть *ориентированным вправо*, если любое ребро, соединяющее точку  $S_k \in G^-(a, \lambda)$  с точкой  $S_j \in G^+(a, \lambda)$ , ориентировано от  $S_k$  к  $S_j$ .

Разбиение будем называть *ориентированным влево*, если любое ребро, соединяющее точку  $S_k \in G^-(a, \lambda)$  с точкой  $S_j \in G^+(a, \lambda)$ , ориентировано от  $S_j$  к  $S_k$ .

Теперь можно сформулировать основной результат.

**Теорема 3.1.** Пусть  $B$  есть оператор взвешенного сдвига вида (0.1) в пространстве  $L_2(\mathbb{C}^m)$ , для  $A$  выполнено условие Перрона,  $a \in C(X)$  и  $\hat{a}(x) \neq 0$ . Оператор  $B - \lambda I$  обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда подмножества  $G^+(a, \lambda)$  и  $G^-(a, \lambda)$  образуют разбиение графа  $G_a$ , ориентированное вправо (влево).

При всех остальных значениях  $\lambda$  образ оператора  $B - \lambda I$  незамкнут.

Поясним утверждения теоремы. Условие, что подмножества  $G^+(a, \lambda)$  и  $G^-(a, \lambda)$  образуют разбиение графа, означает, что  $\lambda \in \tilde{\Sigma}(B)$ , и это условие необходимо для замкнутости образа и, в частности, необходимо для односторонней обратимости оператора  $B - \lambda I$ .

У множества вершин графа существует  $2^{2m+1}$  разбиений. Среди разбиений имеются тривиальные, когда  $G^-(a, \lambda) = \emptyset$  и когда  $G^-(a, \lambda) = G$ . Эти разбиения являются одновременно правосторонне и левосторонне ориентированными, и соответствующие значения  $\lambda$  являются регулярными.

Существует также  $2m - 1$  нетривиальное правосторонне ориентированное разбиение и существует  $2m - 1$  нетривиальное левосторонне ориентированное разбиение, при которых оператор  $B - \lambda I$  односторонне обратим. А для остальных  $2^{2m+1} - 4m - 2$  разбиений образ оператора  $B - \lambda I$  незамкнут.

Отметим также, что все разбиения графа реализуются в рассматриваемой ситуации: для любого подмножества  $D$  множества вершин графа существует такая функция  $a \in C(X)$ , что  $G^-(a, \lambda) = D$  при некотором  $\lambda$ .

Но при заданной функции  $a$  имеются связи между множествами  $G^-(a, \lambda)$  с разными  $\lambda$ . Здесь особую роль играют начальная вершина графа  $S_1$  и конечная вершина  $S_m$ .

Пусть, например, при некотором  $\lambda_0$  подмножества  $G^+(a, \lambda_0)$  и  $G^-(a, \lambda_0)$  образуют правосторонне ориентированное разбиение графа. Тогда  $S_1 \in G^-(a, \lambda_0)$ ,  $S_m \in G^+(a, \lambda_0)$  и выполнено  $S_\nu(a) < S_\eta(a)$  для любых  $\nu \in Mes(S_1, \alpha)$  и  $\eta \in Mes(S_m, \alpha)$ . Поэтому при других спектральных значениях  $\lambda$  разбиение графа не может быть левосторонне ориентированным. Таким образом, для рассматриваемой функции  $a$  и любых  $\lambda \in \tilde{\Sigma}(B)$  возможны только два варианта: либо оператор  $B - \lambda I$  правосторонне обратим, либо его образ незамкнут.

В [6] аналогичные вопросы были исследованы для операторов вида (0.2), порожденных

отображениями типа Морса – Смейла. Это отображения  $\alpha : X \rightarrow X$ , удовлетворяющие следующим условиям:

1) Множество неподвижных точек  $Fix(\alpha)$  конечно;

2) Для любой точки траектория  $\alpha_n(x)$  стремится к одной из неподвижных точек при  $n \rightarrow +\infty$  и стремится к (может быть, другой) неподвижной точке при  $n \rightarrow -\infty$ .

Отображения типа Морса – Смейла имеют, согласно определению, простые динамические свойства, и это существенно использовалось при анализе соответствующих операторов. Отображение (1.1) не является отображением типа Морса – Смейла и имеет более сложные динамические свойства, но подход, использованный в [6], может быть модифицирован для исследования операторов (0.1).

Полное доказательство теоремы довольно объемно, поэтому опишем здесь только основные шаги и поясним их отличие от доказательств из [6].

Первый шаг заключается в сведении вопроса к рассмотрению семейства дискретных операторов взвешенного сдвига. Этот шаг в рассматриваемом случае осуществляется точно так, как в [6].

Пусть  $\Theta = \{x \in \mathbb{C}^m : r_i < |x_i| \leq 1, x_j \neq 0\}$ . Существенное для дальнейшего свойство этого множества заключается в том, что это т. н. фундаментальное множество: образы  $\Theta_n = \alpha_n(\Theta)$  не пересекаются и их объединение отличается от всего пространства  $\mathbb{C}^m$  на множество меры нуль.

По коэффициенту  $a$  для каждого  $\tau \in \Theta$  строится двусторонняя числовая последовательность  $a_\tau(k) = a(\alpha_k(\tau))$ , и в пространстве  $l_2(\mathbb{Z})$  задается дискретный оператор взвешенного сдвига  $B_\tau$ , действующий по формуле

$$(B_\tau)(k) = a_\tau(k)u(k+1).$$

**Лемма 3.2** Оператор  $B - \lambda I$  обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда все операторы  $B_\tau - \lambda I$ ,  $\tau \in \Theta$  обратимы справа (слева) и при этом правые (левые) обратные  $R(\tau)$  могут быть выбраны так, что множество их норм ограничено.

В случае отображения типа Морса – Смейла для каждой последовательности  $a_\tau(k)$  существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} a_\tau(k), \tag{3.1}$$

что значительно облегчает исследование операторов  $B_\tau - \lambda I$ . В рассматриваемом случае такие пределы для последовательностей  $a_\tau(k)$  не существуют, и требуется более сложный анализ.

Множество  $\Theta$  построено таким образом, что для любого  $\tau \in \Theta$  траектория  $\alpha_n(\tau)$  стремится к множеству  $S_m$  при  $n \rightarrow +\infty$  и стремится

к множеству  $S_1$  при  $n \rightarrow -\infty$ . Поэтому ряд свойств операторов  $B_\tau - \lambda I$  зависит только от значений  $\hat{a}$  на этих двух множествах. В частности, имеет место

**Лемма 3.3.** При заданном  $\lambda$  все операторы  $B_\tau - \lambda I$ ,  $\tau \in \Theta$ , обратимы справа и необратимы слева тогда и только тогда, когда

$$R_1^+(a) < |\lambda| < R_m^-(a). \quad (3.2)$$

Однако при выполнении (3.2) может оказаться, что правые обратные  $R(\tau)$  могут быть выбраны так, что множество их норм будет ограничено в совокупности, и может оказаться, что такой выбор правых обратных невозможен. То, какой из этих двух случаев имеет место, зависит от соотношений между динамикой и значениями коэффициента.

Если подмножества  $G^+(a, \lambda)$  и  $G^-(a, \lambda)$  образуют правосторонне ориентированное разбиение графа, то в явном виде строятся такие правые обратные  $R(\tau)$ , что совокупность их норм ограничена.

Более сложно доказывается, что если разбиение на подмножества  $G^+(a, \lambda)$  и  $G^-(a, \lambda)$  не является правосторонне ориентированным, то при любом выборе обратных их множество неограничено по норме. Для такого доказательства используется оценка снизу норм правых обратных, приведенная ниже в лемме 3.4. Такая оценка была получена в [7] для случая, когда существуют пределы (3.1), но доказательство сохраняет силу и при условии (3.2).

Для каждого  $\tau \in \Theta$  и  $q \in \mathbb{Z}$  рассмотрим последовательности  $w_{q,\tau}^\pm$ , заданные выражениями

$$w_{q,\tau}^-(j) = \begin{cases} \lambda^{q-j} \prod_{i=j}^{q-1} a_\tau(i), & \text{при } j \leq q, \\ 0, & \text{при } j > q; \end{cases}$$

$$w_{q,\tau}^+(j) = \begin{cases} \lambda^{j-q} [\prod_{i=q}^{j-1} a_\tau(i)]^{-1}, & \text{при } j > q, \\ 0, & \text{при } j \leq q. \end{cases}$$

При выполнении условий (3.2) эти последовательности принадлежат пространству  $l_2(\mathbb{Z})$ , положим  $N^\pm(q, \tau) = \|w_{q,\tau}^\pm\|^2$ .

**Лемма 3.4.** Для любого правого обратного оператора  $R(\tau)$  к  $B_\tau - \lambda I$  при любом  $q \in \mathbb{Z}$  выполнена оценка нормы снизу:

$$\|R_\tau\|^2 \geq \frac{1}{|\lambda|} \frac{N^-(q, \tau) N^+(q, \tau)}{N^-(q, \tau) + N^+(q, \tau)}.$$

Поэтому, чтобы показать, что при любом выборе правых обратных множество их норм неограничено, достаточно для произвольного  $C$  найти  $\tau \in \Theta$  и  $q \in \mathbb{Z}$  такие, что

$$\frac{1}{|\lambda|} \frac{N^-(q, \tau) N^+(q, \tau)}{N^-(q, \tau) + N^+(q, \tau)} > C. \quad (3.3)$$

Пусть выполнено (3.2) и подмножества  $G^+(a, \lambda)$  и  $G^-(a, \lambda)$  не образуют правосторонне ориентированное разбиение графа. Тогда существует  $l$ , такое, что

$$R_l^+(a) < |\lambda| < R_{l+1}^-(a).$$

Рассмотрим точки  $\tau \in \Theta$  вида

$$\tau = (1, \dots, 1, t, t, 1, \dots, 1),$$

где число  $t$  стоит на местах с номерами  $l$  и  $l+1$ . Дальнейшие вычисления показывают, что при достаточно больших  $t$  и  $q=0$  выполнено (3.3), откуда следует, что оператор  $B - \lambda I$  не является правосторонне обратимым и его образ не совпадает со всем пространством. Но, в силу правосторонней обратимости всех операторов  $B(\tau) - \lambda I$ , образ оператора  $B - \lambda I$  является всюду плотным, откуда следует, что этот образ незамкнут.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневиц, А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневиц. – Минск : Университетское, 1988.
2. Antonevich, A. Functional differential equations: I.  $C^*$ -theory / A. Antonevich, A. Lebedev. – Harlow : Longman Scientific & Technical, 1994.
3. Мардиев, Р. Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом / Р. Мардиев // Докл. АН УзССР. – 1985. – Т. 2, № 2. – С. 5–7.
4. Belitskii, G. On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces / G. Belitskii, Yu. Lyubich // Operator Theory : Advances and Applications. – 1998. – Vol. 103. – P. 75–87.
5. Karlovich, A. Yu. One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces / A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich // Integral Equations Operator Theory. – 2002. – Vol. 42, № 2. – P. 201–228.
6. Antonevich, A. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points / A. Antonevich, Yu. Makowska // Complex analysis and Operator theory. – 2008. – Vol. 2, № 2. – P. 215–240.
7. Antonevich, A. Dynamics of linear mapping and invariant measures on sphere / A. Antonevich, A. Buraczewski // Demonstratio Math. – 1996. – Vol. 29, № 4. – P. 817–824.

Поступила в редакцию 30.04.12.

УДК 512.542

## О СТРОЕНИИ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА СЕКЦИИ ЛОКЕТТА $\pi$ -РАЗРЕШИМОГО ФИТТИНГОВА ФУНКТОРА

**Е.А. Витько**

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск*

## ON THE STRUCTURE OF THE SMALLEST ELEMENT OF THE LOCKETT SECTION OF A $\pi$ -SOLUBLE FITTING FUNCTOR

**E.A. Vitko**

*P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk*

Пусть  $f$  – сопряженный  $\Lambda$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор,  $f_*$  – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора  $f$ . В работе решена обобщенная версия проблемы Бейдельмана-Брюстера-Хаука: описано строение  $f_*$ .

**Ключевые слова:** оператор Локетта, секция Локетта, фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор.

Let  $f$  be a conjugate  $\Lambda$ -normally embedded  $\pi$ -soluble Fitting functor and let  $f_*$  be the smallest element of the Lockett section of  $f$  with respect to strong containment. A generalized version of an open question of Beidleman-Brewster-Hauck is to give a description of  $f_*$ . In this paper such a description is presented.

**Keywords:** Lockett's operation, Lockett section, Fitting  $\mathfrak{X}$ -functor.

### **Введение**

В теории разрешимых фиттинговых функторов известна

**Проблема** (Бейдельман, Брюстер, Хаук [1, проблема 8 (7)]): описать строение наименьшего элемента  $f_*$  секции Локетта для нормально вложенного сопряженного фиттингова функтора  $f$ . В частности, является ли  $f_*$  произведением фиттинговых функторов  $f$  и  $\text{Rad}_{\mathfrak{e}_\pi}$ , если  $f = \text{Hall}_\pi$ ?

Напомним, что если  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой класс Фиттинга, то фиттинговым  $\mathfrak{X}$ -функтором называется [2] отображение  $f$ , сопоставляющее каждой группе  $G \in \mathfrak{X}$  непустое множество ее  $\mathfrak{X}$ -подгрупп  $f(G)$  такое, что выполняются следующие условия:

- (i) если  $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$  – изоморфизм, то  $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X) : X \in f(G)\}$ ;
- (ii) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то

$$f(N) = \{X \cap N : X \in f(G)\}.$$

Фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор называется разрешимым, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$  классу всех разрешимых групп. Если для каждой группы  $G \in \mathfrak{X}$  множество  $f(G)$  есть класс сопряженных подгрупп группы  $G$ , то фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор мы называем сопряженным.

При этом секцией Локетта сопряженного фиттингова  $\mathfrak{X}$ -функтора  $f$  называется [3] множество  $\text{Locksec}(f) = \{g : g \text{ – сопряженный фиттингов } \mathfrak{X}\text{-функтор и } f^* = g^*\}$ , где  $f^*$  – отображение, сопоставляющее каждой группе  $G \in \mathfrak{X}$  множество

$\{\pi_1(T) : T \in f(G \times G)\}$ ,  $\pi_1(T)$  – проекция подгруппы  $T$  на первую компоненту.

Положительное решение указанной выше проблемы было получено Бейдельманом и Галледжи [4]. В настоящей работе мы даем положительное решение обобщенной версии указанной проблемы: нами получено полное описание строения функтора  $f_*$  для сопряженного нормально вложенного  $\pi$ -разрешимого фиттингова функтора  $f$ .

В определениях и обозначениях мы следуем [5]. В работе рассматриваются только конечные группы.

### **1 Предварительные сведения**

Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп  $\mathfrak{F}$ , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Если  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга, то подгруппа  $G_{\mathfrak{F}}$  группы  $G$  называется ее  $\mathfrak{F}$ -радикалом, если она является наибольшей из нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы  $G$ .

Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Тогда холловой  $\pi$ -подгруппой группы  $G$  называют такую подгруппу  $H$  из  $G$ , что  $|H|$  является  $\pi$ -числом, а её индекс  $|G : H|$  –  $\pi'$ -числом.

Следуя [5] (см. также [6]), холловой системой  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  будем называть такое множество  $\Sigma$  холловых подгрупп из  $G$ , что выполняются следующие условия:



1) для всякого множества  $\rho$  из  $\pi$  множество  $\Sigma$  содержит в точности одну холлову  $\rho$ -подгруппу и в точности одну холлову  $(\rho \cup \pi')$ -подгруппу;

2) если  $H, K \in \Sigma$ , то  $H \cdot K = K \cdot H$ .

Пусть  $\Sigma$  – холлова система  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и  $R$  – подгруппа группы  $G$ . Через  $\Sigma \cap R$  обозначают множество подгрупп  $\{S \cap R : S \in \Sigma\}$ . Если  $\Sigma \cap R$  – холлова система группы  $R$ , то говорят, что  $\Sigma$  редуцирует холлову систему  $\Sigma_R$  подгруппы  $R$ , и обозначают  $\Sigma \searrow R$ . В этом случае  $\Sigma$  называется продолжением холловой системы  $\Sigma_R$ . Если  $g \in G$ , то обозначим  $\Sigma^g = \{S^g : S \in \Sigma\}$ .

Всякие две холловы системы  $\pi$ -разрешимой группы сопряжены.

Пусть  $R$  – подгруппа  $\pi$ -разрешимой группы  $G$ . Тогда всякая холлова система  $\Sigma_R$  подгруппы  $R$  может быть продолжена до некоторой холловой системы  $\Sigma$  группы  $G$ . Всякая холлова система группы  $G$  редуцируется в некоторую сопряженную с  $R$  подгруппу.

Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется [7]  $\pi$ -связанной, если либо порядок подгруппы  $A$ , либо ее индекс в  $G$  является  $\pi$ -числом.

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется пронормальной в  $G$ , если для любого  $x \in G$  подгруппы  $H$  и  $H^x$  сопряжены между собой в  $\langle H, H^x \rangle$ .

**Лемма 1.1** [7].  $\pi$ -связанная подгруппа  $H$   $\pi$ -разрешимой группы  $G$  пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холлова система  $\Sigma$  группы  $G$  редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с  $H$ .

**Лемма 1.2** [7]. Пусть  $A$  и  $B$  пронормальные  $\pi$ -связанные подгруппы  $\pi$ -разрешимой группы  $G$ . Если  $A$  и  $B$  перестановочны, то подгруппа  $AB$  является  $\pi$ -связанной пронормальной подгруппой группы  $G$ .

Подгруппу  $X$  группы  $G$  называют  $\pi$ -нормально вложенной, если холлова  $\pi$ -подгруппа группы  $X$  является холловой  $\pi$ -подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы  $G$ .

**Лемма 1.3.** Пусть  $G \in \mathfrak{S}^\pi$ ,  $\Sigma$  – холлова система группы  $G$ ,  $X$  и  $Y$  –  $\pi$ -нормально вложенные  $\pi$ -связанные перестановочные подгруппы группы  $G$ , в которые редуцируется холлова система  $\Sigma$ . Тогда  $XY$   $\pi$ -нормально вложенная подгруппы группы  $G$ .

*Доказательство.* Пусть  $G_\pi \in \Sigma$ . Так как холлова система  $\Sigma$  редуцируется в подгруппы  $X$  и  $Y$ , то  $X \cap G_\pi \in \text{Hall}_\pi(X)$  и  $Y \cap G_\pi \in \text{Hall}_\pi(Y)$ . Но тогда, ввиду  $\pi$ -нормальной вложенности, существуют нормальные подгруппы  $M$  и  $N$  группы  $G$  такие, что  $X \cap G_\pi = M \cap G_\pi$  и  $Y \cap G_\pi = N \cap G_\pi$ . Таким образом,

$$(X \cap G_\pi)(Y \cap G_\pi) = (M \cap G_\pi)(N \cap G_\pi) = MN \cap G_\pi.$$

Следовательно,

$$XY \cap G_\pi = (X \cap G_\pi)(Y \cap G_\pi) \in \text{Hall}_\pi(XY) \cap \text{Hall}_\pi(MN).$$

Так как  $MN$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то подгруппа  $XY$  является  $\pi$ -нормально вложенной.

Лемма доказана.

**Лемма 1.4.** Пусть  $H_1, \dots, H_n$  –  $\pi$ -связанные подгруппы группы  $G \in \mathfrak{S}^\pi$  попарно взаимно простых порядков такие, что  $H_i H_j = H_j H_i$  для всех  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Пусть  $M_1, \dots, M_n$  – нормальные подгруппы группы  $G$ . Тогда  $(H_i \cap M_i)(H_j \cap M_j)$  является подгруппой группы  $G$  для любых  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $H = \prod_{i=1}^n H_i$  и

$N_i = H \cap M_i$ . Тогда  $H$  является подгруппой группы  $G$  и  $N_i$  – нормальная подгруппа группы  $H$ . Так как

$$H_i \cap N_i = H_i \cap H \cap M_i = H_i \cap M_i,$$

то достаточно показать, что

$$(H_i \cap N_i)(H_j \cap N_j) \leq H.$$

Пусть множество простых чисел  $\pi_i = \pi(H_i)$ , тогда  $H_i$  является холловой  $\pi_i$ -подгруппой группы  $H$ .

Пусть  $h_j \in H_j \cap N_j$ ,  $h_i \in H_i$ . Тогда произведение  $h_j h_i \in (H_j \cap N_j) H_i$ . Так как по условию леммы подгруппы  $H_i$  и  $H_j$  перестановочны, то существуют  $h'_i \in H_i$  и  $h'_j \in H_j$  такие, что

$$h_j h_i = h'_i h'_j. \tag{1.1}$$

Но  $h_j \in N_j$ . Кроме того,  $N_j$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Следовательно, существует такой элемент  $n_j \in N_j$ , что  $h_j h_i = h_i n_j$ .

Таким образом,  $h'_i h'_j = h_i n_j$ . Тогда получим

$$h_i^{-1} h'_i = n_j h'_j \in H_i \cap N_j H_j.$$

Но  $H_i \cap N_j \in \text{Hall}_{\pi_i}(N_j)$ . Кроме того,

$$\pi(H_j) = \pi_j \subseteq \pi'_i.$$

Следовательно,  $H_i \cap N_j \in \text{Hall}_{\pi_i}(N_j H_j)$  и

$$H_i \cap N_j H_j = H_i \cap N_j \leq N_j.$$

Таким образом,  $n_j h'_j \in N_j$  и  $h'_j \in N_j$ . Тогда из равенства (1.1) следует, что  $(H_j \cap N_j) H_i$  – подгруппа группы  $H$ . Следовательно,

$$T_{ij} = N_i (H_j \cap N_j) \cap H_i (H_j \cap N_j)$$

также является подгруппой группы  $H$ . Но  $(H_i \cap N_i)(H_j \cap N_j) \subseteq T_{ij}$ . Кроме того,

$$H_i \cap N_i \in \text{Hall}_{\pi_i}(N_i(H_j \cap N_j)) \text{ и}$$

$$H_j \cap N_j \in \text{Hall}_{\pi_j}(H_i(H_j \cap N_j)).$$

Так как порядок  $T_{ij}$  является  $(\pi_i \cup \pi_j)$ -числом, то получим  $(H_i \cap N_i)(H_j \cap N_j) = T_{ij} \leq H$ .

Лемма доказана.

Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Пусть  $\theta$  – некоторая конечная система попарно непересекающихся подмножеств множества всех простых чисел:  $\theta = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ , причем

$$\mathbb{P} = \bigcup_{i=1}^k \pi_i \text{ и } \pi' \subseteq \pi_j \text{ для некоторого } \pi_j \in \theta.$$

Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Напомним, что множество  $\Gamma$  подгрупп  $H_1, H_2, \dots, H_k$  группы  $G$  называется холловской  $\theta$ -базой группы  $G$ , если:

- 1)  $H_i$  –  $\pi_i$ -холлова подгруппа группы  $G$  для любого  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;
- 2)  $H_i H_j = H_j H_i$  для любых  $i \neq j$ .

Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда [6, теорема 1] группа  $G$  содержит по крайней мере одну холловскую  $\theta$ -базу и любые две холловские  $\theta$ -базы сопряжены между собой.

## 2 Фиттинговы $\mathfrak{X}$ -функторы

Напомним некоторые определения и свойства, полученные нами в [2].

Если  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой класс Фиттинга, то отображение  $f$ , которое каждой группе  $G \in \mathfrak{X}$  ставит в соответствие некоторое непустое множество ее  $\mathfrak{X}$ -подгрупп  $f(G)$ , называют фиттинговым  $\mathfrak{X}$ -функтором, если выполняются следующие условия:

- (i) если  $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$  – изоморфизм, то  $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X) : X \in f(G)\}$ ;
- (ii) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то

$$f(N) = \{X \cap N : X \in f(G)\}.$$

Коротко множество  $\{\alpha(X) : X \in f(G)\}$  будем обозначать через  $\alpha(f(G))$ , а множество  $\{X \cap N : X \in f(G)\}$  – через  $f(G) \cap N$ .

Пусть  $f$  – фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор. Множество всех простых чисел  $p$ , для которых существует такая группа  $G \in \mathfrak{X}$  и подгруппа  $X \in f(G)$ , что число  $p$  является делителем порядка  $|X|$ , назовем характеристикой фиттингова  $\mathfrak{X}$ -функтора  $f$  и обозначим  $\text{Char } f$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой класс Фиттинга. Тогда фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор называется:

- 1)  $\pi$ -функтором, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_\pi$ , в частности,  $p$ -функтором, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_p$ ;
- 2) разрешимым, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ ;
- 3)  $\pi$ -разрешимым, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}^\pi$ ;

4) сопряженным, если для каждой группы  $G \in \mathfrak{X}$  множество  $f(G)$  есть класс сопряженных подгрупп группы  $G$ ;

5)  $\pi$ -нормально вложенным, если каждая подгруппа  $X \in f(G)$  является  $\pi$ -нормально вложенной подгруппой группы  $G$ ;

6) пронормальным, если каждая подгруппа  $X \in f(G)$  является пронормальной в группе  $G$ ;

7)  $\pi$ -связанным, если каждая подгруппа  $X \in f(G)$  является  $\pi$ -связанной подгруппой группы  $G$ ;

8) наследственным, если класс  $\mathfrak{X}$  наследственен.

Фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор будем называть просто фиттинговым функтором для случая, когда  $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ .

Заметим, что отображение  $f = \text{Hall}_\pi$ , сопоставляющее каждой группе  $G \in \mathfrak{E}^\pi$  множество ее холловских  $\pi$ -подгрупп является сопряженным  $\pi$ -разрешимым фиттинговым функтором, и если  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга, то отображение  $g = \text{Rad}_\mathfrak{F}$ , сопоставляющее каждой группе  $G \in \mathfrak{E}$  ее  $\mathfrak{F}$ -радикал, является фиттинговым функтором.

Введем на множестве сопряженных фиттинговых  $\mathfrak{X}$ -функторов отношение “ $\ll$ ” следующим образом. Если  $f$  и  $g$  – сопряженные фиттинговы  $\mathfrak{X}$ -функторы, то  $f$  назовем сильно вложенным в  $g$  и обозначим  $f \ll g$  в том и только в том случае, когда для любой подгруппы  $X \in f(G)$  существует такая подгруппа  $Y \in g(G)$ , что  $X \leq Y$ .

Напомним, что если  $f$  и  $g$  – наследственные фиттинговы  $\mathfrak{X}$ -функторы, то произведением  $\mathfrak{X}$ -функторов  $f \circ g$  называется [8] множество  $\{X : X \in f(Y) \text{ для некоторой подгруппы } Y \in g(G)\}$ .

Для доказательства основного результата мы будем использовать также конструкцию класса Фиттинга  $L_\pi(f)$ , который был определен нами [2] следующим образом. Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой класс Фиттинга,  $f$  – фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор и  $\pi$  – множество простых чисел. Группа  $G \in L_\pi(f)$  тогда и только тогда, когда  $G \in \mathfrak{X}$  и индекс  $|G : X|$  является  $\pi'$ -числом для всех  $X \in f(G)$ .

Приведем некоторые свойства класса  $L_\pi(f)$ , полученные нами в [2].

**Лемма 2.1** [2, лемма 4.1]. Пусть  $\pi$  – непустое множество простых чисел,  $f$  –  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор. Тогда выполняется равенство

$$L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'} = L_\pi(f).$$

**Лемма 2.2** [2, следствие 4.3]. Пусть  $f$  – сопряженный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор. Справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f$  –  $\pi$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор тогда и только тогда, когда для любой группы  $G \in \mathfrak{E}^\pi$ , подгруппы

$X_\pi \in (\text{Hall}_\pi \circ f)(G)$  подгруппа  $X_\pi$  является холловой  $\pi$ -подгруппой группы  $G_{L_\pi(f)}$ ;

2)  $f$  –  $\pi$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор тогда и только тогда, когда для любой группы  $G \in \mathfrak{S}^\pi$ , подгрупп  $X_\pi \in (\text{Hall}_\pi \circ f)(G)$  и  $G_\pi \in \text{Hall}_\pi(G)$  таких, что  $X_\pi \leq G_\pi$ , подгруппа  $X_\pi$  является нормальной подгруппой в  $G_\pi$ .

Используя лемму 2.2, докажем критерий  $\pi$ -нормальной вложенности сопряженных  $\pi$ -разрешимых фиттинговых функторов.

**Предложение 2.3.** Пусть  $\{\pi_i : i \in I\}$  – множество попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел и  $\bigcup_{i \in I} \pi_i = \pi$ .

Тогда и только тогда сопряженный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор  $f$  является  $\pi$ -нормально вложенным, когда  $f$   $\pi_i$ -нормально вложен и  $L_{\pi_i}(f) = L_\pi(f) \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi$  для всех  $i \in I$ .

*Доказательство.* Так как  $\pi_i \subseteq \pi$ , то  $\pi' \subseteq \pi'_i$ . Следовательно,  $L_\pi(f) \subseteq L_{\pi_i}(f)$ . Пусть  $G \in \mathfrak{S}^\pi$ ,  $X \in f(G)$ ,  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(X)$  и  $X_\pi$  – холлова  $\pi$ -подгруппа группы  $X$  такая, что  $X_{\pi_i} \leq X_\pi$ . Так как  $f$  –  $\pi$ -нормально вложенный функтор, то ввиду утверждения 1) леммы 2.2 получим

$$X_{\pi_i} \leq X_\pi \leq G_{L_\pi(f)} \leq G_{L_{\pi_i}(f)}$$

Но тогда  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(X \cap G_{L_{\pi_i}(f)})$ .

Кроме того,  $X \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \in f(G_{L_{\pi_i}(f)})$ . Но группа  $G_{L_{\pi_i}(f)} \in L_{\pi_i}(f)$ . Следовательно, индекс  $\left| G_{L_{\pi_i}(f)} : (X \cap G_{L_{\pi_i}(f)}) \right|$  является  $\pi'_i$ -числом. Таким образом, индекс подгруппы  $X_{\pi_i}$  в  $G_{L_{\pi_i}(f)}$

$$\begin{aligned} & \left| G_{L_{\pi_i}(f)} : X_{\pi_i} \right| = \\ & = \left| (X \cap G_{L_{\pi_i}(f)}) : X_{\pi_i} \right| \cdot \left| G_{L_{\pi_i}(f)} : (X \cap G_{L_{\pi_i}(f)}) \right| \end{aligned}$$

также является  $\pi'_i$ -числом. Таким образом,  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(G_{L_{\pi_i}(f)})$  и  $f$  –  $\pi_i$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор.

Так как  $\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Hall}_\pi = \text{Hall}_{\pi_i}$ , то вследствие леммы 2.2 получим

$$\begin{aligned} \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_\pi(f)} &= \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Hall}_\pi \circ \text{Rad}_{L_\pi(f)} = \\ &= \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Hall}_\pi \circ f = \text{Hall}_{\pi_i} \circ f. \end{aligned}$$

Пусть  $G \in L_{\pi_i}(f)$ ,  $X \in f(G)$  и

$$X_{\pi_i} \in (\text{Hall}_{\pi_i} \circ f)(G).$$

По определению класса  $L_{\pi_i}(f)$  получим, что индекс  $\left| G : X_{\pi_i} \right| = \left| G : X \right| \cdot \left| X : X_{\pi_i} \right|$  является  $\pi'_i$ -числом. Следовательно,  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(G)$  и  $\text{Hall}_{\pi_i} \circ f = \text{Hall}_{\pi_i}$ . Таким образом,  $\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_\pi(f)} = \text{Hall}_{\pi_i}$ . Тогда  $G_{L_\pi(f)}$  содержит холлову  $\pi_i$ -подгруппу группы  $G$ . Следовательно,  $G/G_{L_\pi(f)} \in \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi$  и  $G \in L_\pi(f) \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi$ .

С другой стороны,

$$L_{\pi_i}(f) = L_{\pi_i}(f) \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi \supseteq L_\pi(f) \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi.$$

Таким образом,

$$L_{\pi_i}(f) = L_\pi(f) \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi.$$

Пусть теперь  $f$  –  $\pi_i$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор и  $L_{\pi_i}(f) = L_\pi(f) \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi$  для всех  $i \in I$ . Пусть  $G \in \mathfrak{S}^\pi$ ,  $X \in f(G)$  и  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(X)$ . Ввиду леммы 2.2 получим

$$\begin{aligned} \text{Hall}_{\pi_i} \circ f &= \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)} = \\ &= \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_\pi(f) \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi} = \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_\pi(f)}. \end{aligned}$$

Но  $\bigcup_{i \in I} \pi_i = \pi$ . Следовательно, холлова  $\pi$ -подгруппа  $X_\pi \leq G_{L_\pi(f)}$ , и по лемме 2.2 получим, что  $f$  –  $\pi$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор.

Предложение доказано.

Доказательство следующих свойств класса  $L_\pi(f)$ , которые мы будем использовать для доказательства основного результата, осуществляется непосредственной проверкой.

**Лемма 2.4.**

1) Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга,  $\pi, \rho$  – множества простых чисел такие, что  $\rho \subseteq \pi$  либо  $\pi' \subseteq \rho$ ,  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор  $f = \text{Rad}_{\mathfrak{F}}$ . Тогда  $L_\rho(f) = \mathfrak{F} \mathfrak{S}_{\rho'}^\pi$ .

2) Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга,  $\pi$  – множество простых чисел,  $f, g$  –  $\pi$ -разрешимые фиттинговы функторы и  $g = \text{Rad}_{\mathfrak{F}}$ , тогда

$$L_\pi(f \circ g) = L_\pi(f) \cap L_\pi(g).$$

### 3 Пронормальные фиттинговы $\mathfrak{X}$ -функторы

Следуя [9], введем определение операции “ $\vee$ ” на множестве пронормальных  $\pi$ -разрешимых фиттинговых функторов.

**Определение 3.1.** Фиттинговы  $\pi$ -разрешимые функторы  $f$  и  $g$  назовем перестановочными, если  $XY = YX$  для любых подгрупп  $X \in f(G)$  и  $Y \in g(G)$  таких, что существует холлова система группы  $G \in \mathfrak{S}^\pi$ , которая редуцируется в  $X$  и в  $Y$ .

**Определение 3.2.** Пусть  $I$  – множество индексов,  $\{f_i : i \in I\}$  – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных  $\pi$ -разрешимых  $\pi$ -связанных фиттинговых функторов и  $\text{Char } f_i \cap \text{Char } f_j = \emptyset$  для всех  $i, j \in I$ , если  $i \neq j$ . Определим операцию “ $\vee$ ” следующим образом:

$(\vee_{i \in I} f_i)(G) = \left\{ X : X = \prod_{i \in I} X_i, X_i \in f_i(G), \text{ существует холлова система группы } G, \text{ которая редуцируется в подгруппу } X_i \text{ для всех } i \in I \right\}$ .

**Теорема 3.3.** Пусть  $\{f_i : i \in I\}$  – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных  $\pi$ -разрешимых  $\pi$ -связанных фиттинговых функторов и  $\text{Char } f_i \cap \text{Char } f_j = \emptyset$  для всех  $i, j \in I$ , если  $i \neq j$ . Тогда  $\vee_{i \in I} f_i$  – пронормальный сопряженный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор.

*Доказательство.* Обозначим

$$f(G) = (\vee_{i \in I} f_i)(G).$$

Так как всякая холлова система подгруппы может быть продолжена до холловой системы группы, то множество  $f(G)$  не пусто.

Так как по условию теоремы функторы из  $\{f_i : i \in I\}$  попарно перестановочны, то ввиду леммы 1.2 каждая подгруппа из  $f(G)$  пронормальна.

Пусть  $X, Y$  – подгруппы из  $f(G)$ . Тогда

$$X = \prod_{i \in I} X_i, Y = \prod_{i \in I} Y_i,$$

где  $X_i$  и  $Y_i$  – подгруппы из  $f_i(G)$  и  $\Sigma_1$  – холлова система группы  $G$ , которая редуцируется в подгруппу  $X_i$  для всех  $i \in I$ ,  $\Sigma_2$  – холлова система группы  $G$ , которая редуцируется в подгруппу  $Y_i$  для всех  $i \in I$ . Так как любые две холловы системы  $\pi$ -разрешимой группы сопряжены, то существует элемент  $g \in G$  такой, что  $\Sigma_1 = \Sigma_2^g$ . Таким образом, для всех  $i \in I$  холлова система  $\Sigma_1$  редуцируется как в подгруппу  $X_i \in f_i(G)$ , так и в  $Y_i^g \in f_i(G)$ . Тогда по лемме 1.1 получим  $X_i = Y_i^g$ . Таким образом,

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} Y_i^g = Y^g.$$

Следовательно,  $f(G)$  – класс сопряженных подгрупп группы  $G$ .

Пусть  $\alpha : G \rightarrow \alpha(G)$  – изоморфизм и  $X$  – подгруппа из  $f(G)$ . Тогда  $X = \prod_{i \in I} X_i$ , где  $X_i$  – подгруппа из  $f_i(G)$  и  $\Sigma$  – холлова система группы  $G$ , которая редуцируется в подгруппу  $X_i$  для

всех  $i \in I$ . Но  $\alpha(X) = \alpha\left(\prod_{i \in I} X_i\right) = \prod_{i \in I} \alpha(X_i)$ .

Ввиду определения  $\pi$ -разрешимого фиттингова функтора получим

$$\alpha(X_i) \in \alpha(f_i(G)) = f_i(\alpha(G)).$$

Кроме того,  $\alpha(\Sigma)$  – холлова система группы  $\alpha(G)$ , которая редуцируется в каждую подгруппу  $\alpha(X_i)$  для всех  $i \in I$ . Таким образом,  $\alpha(f(G)) = f(\alpha(G))$ .

Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$  и  $X$  – подгруппа из  $f(G)$ . Тогда  $X = \prod_{i \in I} X_i$ , где  $X_i$  – подгруппа из  $f_i(G)$  и  $\Sigma$  – холлова система группы  $G$ , которая редуцируется в подгруппу  $X_i$  для всех  $i \in I$ . Тогда ввиду определения  $\pi$ -разрешимого фиттингова функтора  $X_i \cap N \in f_i(N)$ . Кроме того,  $\Sigma \cap N$  – холлова система группы  $N$ , которая редуцируется в подгруппу  $X_i \cap N$ . Тогда ввиду леммы 1.4 получим

$$X \cap N = \left( \prod_{i \in I} X_i \right) \cap N = \prod_{i \in I} (X_i \cap N) \in f(N).$$

Так как по доказанному выше  $f(G)$  и  $f(N)$  – классы сопряженных подгрупп групп  $G$  и  $N$  соответственно, то  $f(G) \cap N = f(N)$ .

Теорема доказана.

Ввиду леммы 1.3 получим

**Следствие 3.4.** Пусть  $\{f_i : i \in I\}$  – множество

пронормальных  $\pi$ -нормально вложенных сопряженных попарно перестановочных  $\pi$ -связанных  $\pi$ -разрешимых фиттинговых функторов и  $\text{Char } f_i \cap \text{Char } f_j = \emptyset$  для всех  $i, j \in I$ , если  $i \neq j$ .

Тогда  $\vee_{i \in I} f_i$  – пронормальный  $\pi$ -нормально вложенный сопряженный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор.

#### 4 $\Lambda$ -нормально вложенные фиттинговы $\mathfrak{X}$ -функторы

Выделим еще одно семейство  $\pi$ -разрешимых фиттинговых функторов.

**Определение 4.1.** Пусть  $I$  – множество индексов,  $\pi$  – некоторое множество простых чисел,  $\Lambda = \{\pi_i : i \in I\}$  – система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что  $\pi' \subseteq \pi_i$  для некоторого  $\pi_i \in \Lambda$

и  $\bigcup_{\pi_i \in \Lambda} \pi_i = \mathbb{P}$ . Фиттингов  $\pi$ -разрешимый функтор

$f$  назовем  $\Lambda$ -нормально вложенным, если функтор  $f$  является  $\pi_i$ -нормально вложенным для всех  $\pi_i \in \Lambda$ .

**Примеры 4.2.** Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел,  $\Lambda = \{\pi_i : i \in I\}$  – система попарно непересекающихся подмножеств множества

простых чисел такая, что  $\pi' \subseteq \pi_i$  для некоторого

$$\pi_i \in \Lambda \text{ и } \bigcup_{\pi_i \in \Lambda} \pi_i = \mathbb{P}.$$

1) Пусть  $f = \text{Hall}_{\pi_i}$  –  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор,  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Так как  $(\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Hall}_{\pi_i})(G) = \text{Hall}_{\pi_i}(G)$  и  $(\text{Hall}_{\pi_j} \circ \text{Hall}_{\pi_i})(G) = \{E\}$ , если  $i \neq j$ , то  $f$  является  $\Lambda$ -нормально вложенным  $\pi$ -разрешимым фиттинговым функтором.

2) Пусть  $\mathfrak{X}$  – класс Фиттинга,  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор  $f = \text{Rad}_{\mathfrak{X}}$ . Так как для любой группы  $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$  подгруппа  $G_{\mathfrak{X}} \in f(G)$  является нормальной подгруппой, то  $f$  является  $\Lambda$ -нормально вложенным  $\pi$ -разрешимым фиттинговым функтором.

Заметим, что если  $f, g$  –  $\Lambda$ -нормально вложенные  $\pi$ -разрешимые фиттинговы функторы, то ввиду [2, теорема 5.4] их произведение  $f \circ g$  также является  $\Lambda$ -нормально вложенным  $\pi$ -разрешимым фиттинговым функтором.

**Лемма 4.3.** Пусть  $f$  –  $\Lambda$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор. Тогда  $f$  является пронормальным  $\pi$ -разрешимым фиттинговым функтором.

*Доказательство.* Пусть  $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ ,  $X$  – подгруппа из  $f(G)$ , система подмножеств множества простых чисел  $\theta = \{\pi_i : \pi_i \in \Lambda, \pi(X) \cap \pi_i \neq \emptyset\}$  и  $H_1, H_2, \dots, H_k$  – холловская  $\theta$ -база группы  $X$ . Так как функтор  $f$  является  $\pi_i$ -нормально вложенным для любого  $\pi_i \in \Lambda$ , то холлова  $\pi_i$ -подгруппа  $H_i$  группы  $X$  является холловой  $\pi_i$ -подгруппой некоторой нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$ . Следовательно, для любого  $g \in G$  подгруппа  $H_i^g$  также является холловой  $\pi_i$ -подгруппой  $N$ . Тогда  $H_i$  и  $H_i^g$  являются холловыми  $\pi_i$ -подгруппами группы  $\langle H_i, H_i^g \rangle$ . Таким образом,  $H_i$  и  $H_i^g$  сопряжены в  $\langle H_i, H_i^g \rangle$  и подгруппа  $H_i$  пронормальна для всех  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Но так как по определению холловской  $\theta$ -базы подгруппы  $H_i$  перестановочны, то ввиду леммы 1.2 подгруппа  $X$  пронормальна.

Лемма доказана.

Ввиду леммы 4.3 операция “ $\vee$ ” может быть определена на множестве  $\Lambda$ -нормально вложенных сопряженных  $\pi$ -разрешимых  $\pi$ -связанных фиттинговых функторов. Справедлива

**Теорема 4.4.** Пусть  $\{f_i : i \in I\}$  – множество  $\Lambda$ -нормально вложенных сопряженных  $\pi$ -разрешимых  $\pi$ -связанных фиттинговых функторов и  $\text{Char } f_i \cap \text{Char } f_j = \emptyset$  для всех  $i, j \in I$ , если  $i \neq j$ .

Тогда  $\bigvee_{i \in I} f_i$  –  $\Lambda$ -нормально вложенный сопряженный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор.

*Доказательство.* Ввиду леммы 4.3 функторы  $\{f_i : i \in I\}$  пронормальны. Покажем, что они перестановочны. Пусть  $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ ,  $X_i$  и  $X_j$  – подгруппы из  $f_i(G)$  и  $f_j(G)$  соответственно такие, что существует холлова система  $\Sigma$  группы  $G$ , которая редуцируется в  $X_i$  и в  $X_j$ . Так как  $f_i$  и  $f_j$  –  $\Lambda$ -нормально вложенные сопряженные  $\pi$ -разрешимые фиттинговы функторы, то для любого  $\pi_k \in \Lambda$  в группе  $G$  существуют некоторые нормальные подгруппы  $N_{i, \pi_k}$  и  $N_{j, \pi_k}$  такие, что

$$G_{\pi_k} \cap X_i = G_{\pi_k} \cap N_{i, \pi_k} \text{ и } G_{\pi_k} \cap X_j = G_{\pi_k} \cap N_{j, \pi_k},$$

где  $G_{\pi_k} \in \Sigma$ . Тогда

$$X_i = \prod_{\pi_k \in \Lambda} (G_{\pi_k} \cap N_{i, \pi_k}) \text{ и } X_j = \prod_{\pi_k \in \Lambda} (G_{\pi_k} \cap N_{j, \pi_k}).$$

Тогда ввиду леммы 1.4 функторы  $f_i$  и  $f_j$  перестановочны и операция “ $\vee$ ” определена на множестве функторов  $\{f_i : i \in I\}$ . Кроме того, ввиду следствия 3.4  $\bigvee_{i \in I} f_i$  –  $\Lambda$ -нормально вложенный сопряженный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор.

Теорема доказана.

### 5 $\mathfrak{X}$ -функторы Локетта

Определим теперь на множестве фиттинговых  $\mathfrak{X}$ -функторов функторную версию известных в теории классов Фиттинга [10] операторов Локетта.

**Определение 5.1.** Фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор назовем  $\mathfrak{X}$ -функтором Локетта, если для любой группы  $G \in \mathfrak{X}$  и  $V \in f(G \times G)$  подгруппа

$$V = (V \cap (G \times 1)) \times (V \cap (1 \times G)).$$

**Лемма 5.2.** Пусть  $f$  – сопряженный  $\mathfrak{X}$ -функтор Локетта,  $X, Y$  – подгруппы из  $f(G)$ , тогда  $X \times Y \in f(G \times G)$ .

*Доказательство.* Так как  $f$  – сопряженный фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор, то  $Y = X^g$  для некоторого элемента  $g \in G$ .

Пусть  $\alpha$  – изоморфизм группы  $G$  на  $G \times 1$ . Так как  $X \in f(G)$ , то  $X \times 1 \in \alpha(f(G)) = f(\alpha(G)) = f(G \times 1)$ . Кроме того,  $G \times 1$  – нормальная подгруппа группы  $G \times G$ . Следовательно, ввиду определения фиттингова  $\mathfrak{X}$ -функтора существует подгруппа  $V \in f(G \times G)$  такая, что

$$V \cap (G \times 1) = X \times 1. \quad (5.1)$$

С другой стороны,  $1 \times G \trianglelefteq G \times G$  и  $V \cap (1 \times G) = 1 \times Z \in f(1 \times G)$ . Но  $1 \times G \cong G$ . Следовательно,  $Z \in f(G)$ . Тогда ввиду сопряженности  $\mathfrak{X}$ -функтора  $f$  подгруппа  $Z = X^h$  для некоторого  $h \in G$ . Таким образом,

$$V \cap (1 \times G) = 1 \times X^h. \quad (5.2)$$

Так как  $f$  –  $\mathfrak{X}$ -функтор Локетта и  $V \in f(G \times G)$ , то ввиду равенств (5.1) и (5.2)

$$\begin{aligned} V &= (V \cap (G \times 1)) \times (V \cap (1 \times G)) = \\ &= (X \times 1) \times (1 \times X^h) = X \times X^h. \end{aligned}$$

Тогда ввиду сопряженности  $\mathfrak{X}$ -функтора  $f$  получим

$$V^{(1, h^{-1}g)} = (X \times X^h)^{(1, h^{-1}g)} = X \times X^g = X \times Y \in f(G \times G).$$

Лемма доказана.

**Лемма 5.3.** Пусть  $\pi$  – множество простых чисел и  $f$  – сопряженный  $\pi$ -разрешимый функтор Локетта. Тогда  $L_\pi(f)$  – класс Локетта.

*Доказательство.* Обозначим  $\mathfrak{L} = L_\pi(f)$ . Допустим, что  $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}^*$  и  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{L}^* \setminus \mathfrak{L}$ . Пусть  $M = G_\mathfrak{L}$ . Пусть  $N$  – некоторая собственная нормальная подгруппа группы  $G$ . Так как  $\mathfrak{L}^*$  – класс Фиттинга, то  $N \in \mathfrak{L}^*$ . Кроме того, ввиду выбора группы  $G$  получим  $N \in \mathfrak{L}$ . Следовательно,  $N \leq G_\mathfrak{L} = M$ . Таким образом,  $M$  – единственная максимальная нормальная подгруппа группы  $G$ .

Так как  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, то главный фактор  $G/M$  является элементарной абелевой  $p$ -группой для некоторого  $p \in \pi$  либо  $\pi'$ -группой. Если  $G/M \in \mathfrak{E}_{\pi'}$ , то ввиду леммы 2.1  $G \in \mathfrak{L}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{L}$ . Следовательно,  $|G : M| = p \in \pi$ . Но так как ввиду [5, лемма X.1.2] справедливо равенство

$$(G \times G)_\mathfrak{L} = (M \times M) \langle (g, g^{-1}) : g \in G \rangle,$$

то  $|(G \times G)_\mathfrak{L} : M \times M| = p$ . Пусть  $V$  – подгруппа из  $f(G)$ . Так как  $M \trianglelefteq G$ , то  $V \cap M \in f(M)$ . Но  $M \in \mathfrak{L} = L_\pi(f)$ . Следовательно, индекс  $|M : V \cap M|$  –  $\pi'$ -число. Если  $V \not\leq M$ , то  $G = MV$  и индекс  $|G : V| = |MV : V| = |M : V \cap M|$  является  $\pi'$ -числом. Тогда  $G \in \mathfrak{L}$ , что противоречит выбору группы  $G$ . Таким образом,  $V \leq M$ .

Так как  $f$  – сопряженный  $\pi$ -разрешимый функтор Локетта, то по лемме 5.2 подгруппа  $V \times V \in f(G \times G)$ . Кроме того,  $(G \times G)_\mathfrak{L} \trianglelefteq G \times G$  и  $V \times V \leq M \times M \leq (G \times G)_\mathfrak{L}$ . Следовательно,  $V \times V \cap (G \times G)_\mathfrak{L} = V \times V \in f((G \times G)_\mathfrak{L})$ . Тогда по определению класса  $L_\pi(f)$  получим, что индекс  $|(G \times G)_\mathfrak{L} : V \times V|$  –  $\pi'$ -число. С другой стороны, индекс

$$\begin{aligned} &|(G \times G)_\mathfrak{L} : V \times V| = \\ &= |(G \times G)_\mathfrak{L} : M \times M| \cdot |M \times M : V \times V| = \\ &= p \cdot |M \times M : V \times V| \end{aligned}$$

и простое число  $p \in \pi$  является делителем  $\pi'$ -числа. Полученное противоречие показывает, что  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^*$ . Лемма доказана.

Напомним понятие и некоторые свойства оператора «\*», который определен нами в [3] на множестве фиттинговых  $\mathfrak{X}$ -функторов.

Пусть  $f$  – фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор. Тогда отображение  $f^*$  сопоставляет каждой группе  $G \in \mathfrak{X}$  множество  $\{\pi_1(T) : T \in f(G \times G)\}$ .

**Лемма 5.4** [3, теорема 2.3]. Пусть  $f$  – сопряженный фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор. Тогда

- 1)  $f^*$  – сопряженный фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор;
- 2) пусть  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , тогда  $f^*(G) = \{\pi_i(T) : T \in f(G^m)\}$ ;
- 3)  $(f^*)^* = f^*$ .

**Теорема 5.5.** Пусть  $f$  – сопряженный фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор. Тогда  $f^*$  является  $\mathfrak{X}$ -функтором Локетта.

*Доказательство.* Пусть  $G \in \mathfrak{X}$ ,  $X$  – подгруппа из  $f^*(G \times G)$ . Тогда ввиду утверждения (3) теоремы 5.4 получим

$$\pi_1(X) \in (f^*)^*(G) = f^*(G).$$

Но так как  $G \times 1 \trianglelefteq G \times G$ , то по определению фиттингова  $\mathfrak{X}$ -функтора подгруппа  $X \cap (G \times 1) \in f^*(G \times 1)$ . Тогда из сопряженности фиттингова  $\mathfrak{X}$ -функтора  $f^*$  следует равенство  $\pi_1(X) = \pi_1(X \cap (G \times 1))$ . Аналогично с учетом утверждения (2) леммы 5.4 получим  $\pi_2(X) = \pi_2(X \cap (1 \times G))$ . Таким образом,

$$X = (X \cap (G \times 1)) \times (X \cap (1 \times G)).$$

Теорема доказана.

**Следствие 5.6.** Пусть  $f$  – сопряженный фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор. Тогда и только тогда  $f$  является  $\mathfrak{X}$ -функтором Локетта, когда  $f = f^*$ .

**Теорема 5.7.** Пусть  $f$  – сопряженный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор. Тогда

$$(L_\pi(f))^* = L_\pi(f^*).$$

*Доказательство.* По теореме 5.5 получим, что  $f^*$  –  $\pi$ -разрешимый функтор Локетта. Следовательно, ввиду леммы 5.3 класс  $L_\pi(f^*)$  – класс Локетта. Но так как  $f \ll f^*$ , то  $L_\pi(f) \subseteq L_\pi(f^*)$ . Следовательно, ввиду [5, теорема X.1.8] получим

$$(L_\pi(f))^* \subseteq (L_\pi(f^*))^* = L_\pi(f^*).$$

Допустим, что  $(L_\pi(f))^* \neq L_\pi(f^*)$  и  $G$  – группа минимального порядка из  $L_\pi(f^*) \setminus (L_\pi(f))^*$ . Пусть  $M = G_{(L_\pi(f))^*}$  и  $N = G_{L_\pi(f^*)}$ . Тогда подгруппа  $M$  – единственная максимальная нормальная подгруппа группы  $G$  и индекс  $|G : M|$  –  $\pi'$ -число либо  $|G : M| = p$  для некоторого простого числа

$p \in \pi$ . Если  $G/M = G/G_{(L_\pi(f))^*} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$ , то  $G \in (L_\pi(f))^* \mathfrak{E}_{\pi'}$ . Но тогда ввиду [11, лемма 3] получим  $G \in (L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'})^* = (L_\pi(f))^*$ , что противоречит выбору группы  $G$ . Таким образом,  $|G:M| = p \in \pi$  и  $G/G'$  – циклическая  $p$ -группа. По [5, теорема X.1.21(b)] получим  $[M, G] \leq N$  и  $G/N$  – абелева группа. Таким образом,  $G' \leq N$  и  $G/N \in \mathfrak{S}_p^\pi$ .

Пусть  $V \in f^*(G)$  и  $U$  – подгруппа из  $f(G \times G)$  такая, что  $\pi_1(U) = V$ . Так как  $G \in L_\pi(f^*)$ , то индекс  $|G:V|$  –  $\pi'$ -число. Следовательно,  $G = NV$ .

Так как  $U$  – подгруппа из  $f(G \times G)$  и  $U(N \times N) \leq G \times G$ , то по определению  $\pi$ -разрешимого фиттингова функтора

$$U \cap (U(N \times N)) = U \in f(U(N \times N)).$$

С другой стороны,  $N \times N \leq G \times G$  и  $U \cap (N \times N) \in f(N \times N)$ . Так как  $N \times N \in L_\pi(f)$ , то индекс  $|(N \times N):(U \cap (N \times N))|$  является  $\pi'$ -числом. Но тогда индекс

$$|(N \times N)U:U| = \frac{|(N \times N)U|}{|U|} = \frac{|N \times N|}{|U \cap (N \times N)|}$$

также является  $\pi'$ -числом. Следовательно, ввиду сопряженности функтора  $f$  получим

$$(N \times N)U \in L_\pi(f).$$

Тогда  $U(N \times N) \leq (G \times G)_{L_\pi(f)}$ . Так как  $\pi_1(U) = V$ , то  $VN \leq \pi_1((G \times G)_{L_\pi(f)})$ . Но  $G = NV$ , поэтому  $\pi_1((G \times G)_{L_\pi(f)}) = G$ . Таким образом,  $(G \times G)_{L_\pi(f)}$  – подпрямое произведение прямого произведения  $G \times G$  и  $G \in L_\pi(f)^*$ .

Теорема доказана.

### 6 Секция Локетта

**Определение 6.1.** Пусть  $f$  – сопряженный фиттингов  $\mathfrak{X}$ -функтор. Секцией Локетта фиттингова  $\mathfrak{X}$ -функтора  $f$  назовем множество

$$\text{Locksec}(f) = \{g: g \text{ – сопряженный фиттингов } \mathfrak{X}\text{-функтор и } f^* = g^*\}.$$

Для доказательства основного результата докажем две леммы: о строении  $\Lambda$ -нормально вложенного  $\pi$ -разрешимого фиттингова функтора и о взаимосвязи между сильным вложением  $\pi$ -разрешимых фиттинговых функторов и свойствами классов групп, заданных посредством функторов.

**Лемма 6.2.** Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел,  $\Lambda = \{\pi_i: i \in I\}$  – система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что  $\pi' \subseteq \pi_i$  для некоторого  $\pi_i \in \Lambda$  и  $\bigcup_{\pi_i \in \Lambda} \pi_i = \mathbb{P}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $\{\mathfrak{X}_i: i \in I\}$  – множество классов Фиттинга, то функтор  $f = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{\mathfrak{X}_i})$

является сопряженным  $\Lambda$ -нормально вложенным  $\pi$ -разрешимым фиттинговым функтором и  $L_{\pi_i}(f) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi$  для всех  $\pi_i \in \Lambda$ ;

2) если  $f$  – сопряженный  $\Lambda$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор, то  $f = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})$ .

*Доказательство.* 1) Вследствие теоремы 4.4

$f = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{\mathfrak{X}_i})$  является сопряженным  $\Lambda$ -нормально вложенным  $\pi$ -разрешимым фиттинговым функтором. Кроме того,

$$L_{\pi_i} \left( \bigvee_{\pi_j \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_j} \circ \text{Rad}_{\mathfrak{X}_j}) \right) = L_{\pi_i} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{\mathfrak{X}_i})$$

и ввиду леммы 2.4 получим

$$\begin{aligned} L_{\pi_i} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{\mathfrak{X}_i}) &= \\ &= L_{\pi_i} (\text{Hall}_{\pi_i}) \cap L_{\pi_i} (\text{Rad}_{\mathfrak{X}_i}) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i}^\pi. \end{aligned}$$

2) Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $X \in f(G)$  и  $\Sigma$  – холлова система группы  $X$ . Так как  $f$   $\Lambda$ -нормально вложен, то по лемме 2.2 получим  $\text{Hall}_{\pi_i} \circ f = \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)}$ . Следовательно, холлова  $\pi_i$ -подгруппа  $X_{\pi_i} \in \Sigma$  принадлежит множеству  $(\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})(G)$  для всех  $\pi_i \in \Lambda$ . Но  $X = \prod_{\pi_i \in \Lambda} X_{\pi_i}$ . Таким образом,

$$X \in \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})(G).$$

Ввиду сопряженности получим, что

$$f = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)}).$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.3.** Если  $f$  и  $g$  – сопряженные  $\Lambda$ -нормально вложенные  $\pi$ -разрешимые фиттинговы функторы, то  $f \ll g$  тогда и только тогда, когда  $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$  для всех  $\pi_i \in \Lambda$ .

*Доказательство.* Пусть  $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$

для всех  $\pi_i \in \Lambda$ . Пусть  $G \in \mathfrak{S}^\pi$ ,  $T \in f(G)$  и  $\Sigma$  – холлова система группы  $G$ , которая редуцируется в  $T$ . Пусть  $S$  – подгруппа из  $g(G)$  такая, что  $\Sigma$  редуцируется в  $S$ . Тогда холлова  $\pi_i$ -подгруппа группы  $T$  может быть представлена в виде

$T_{\pi_i} = G_{\pi_i} \cap T$ , где  $G_{\pi_i} \in \Sigma$ . Так как  $T \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \trianglelefteq T$ , то

$$T_{\pi_i} \cap T \cap G_{L_{\pi_i}(f)} = T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \in \text{Hall}_{\pi_i}(T \cap G_{L_{\pi_i}(f)}).$$

Кроме того,  $G_{L_{\pi_i}(f)} \trianglelefteq G$ . Следовательно,  $T \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \in f(G_{L_{\pi_i}(f)})$ . Но  $G_{L_{\pi_i}(f)} \in L_{\pi_i}(f)$ . Тогда индекс  $|G_{L_{\pi_i}(f)} : (T \cap G_{L_{\pi_i}(f)})|$  является  $\pi_i'$ -числом и  $T \cap G_{L_{\pi_i}(f)}$  содержит холлову  $\pi_i$ -подгруппу группы  $G_{L_{\pi_i}(f)}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \in \text{Hall}_{\pi_i}(G_{L_{\pi_i}(f)}) &= \\ &= (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})(G). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} \in \text{Hall}_{\pi_i}(G_{L_{\pi_i}(g)}) &= \\ &= (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(g)})(G). \end{aligned} \quad (6.2)$$

С другой стороны,  $G_{L_{\pi_i}(f)}, G_{L_{\pi_i}(g)}$  – нормальные подгруппы группы  $G$ . Следовательно,  $T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} = G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)}$ ,  $S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} = G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)}$ .

Но так как  $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$ , то

$$\begin{aligned} T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} = G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} &\leq G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} = \\ &= S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} \end{aligned}$$

для всех  $\pi_i \in \Lambda$ . Следовательно, ввиду леммы 6.2 (2) и (6.1)–(6.2) получим

$$T = \prod_{\pi_i \in \Lambda} (T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)}) \leq \prod_{\pi_i \in \Lambda} (S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)}) = S.$$

Таким образом,  $f \ll g$ .

Предположим теперь, что  $f \ll g$ . Пусть  $\pi_i \in \Lambda$ ,  $G \in L_{\pi_i}(f)$ ,  $X \in f(G)$  и  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(X)$ . Тогда индекс  $|G : X|$  является  $\pi_i'$ -числом. Таким образом,  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(G)$ . Так как  $f \ll g$ , то существует подгруппа  $Y$  из  $g(G)$  такая, что  $X \leq Y$ . Но тогда  $X_{\pi_i} \in \text{Hall}_{\pi_i}(Y)$  и подгруппа  $Y$  содержит холлову  $\pi_i$ -подгруппу группы  $G$ . Следовательно,  $|G : Y|$  является  $\pi_i'$ -числом и ввиду сопряженности функтора  $g$  группа  $G \in L_{\pi_i}(g)$ .

Лемма доказана.

Следующая теорема и следствие из нее дает положительное решение обобщенной версии проблемы Бейдельмана, Брюстера и Хаука и представляет описание наименьшего элемента секции Локетта для сопряженных  $\Lambda$ -нормально вложенных  $\pi$ -разрешимых фиттинговых функторов.

**Теорема 6.4.** Пусть  $f$  – сопряженный  $\Lambda$ -нормально вложенный  $\pi$ -разрешимый фиттингов

функтор,  $f_*$  – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора  $f$ . Тогда

$$f_* = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left( \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)_*} \right).$$

*Доказательство.* Пусть

$$\mathfrak{X}_i = (L_{\pi_i}(f))_* \quad (6.3)$$

и  $h = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left( \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)_*} \right)$ . Ввиду утверждения 1) леммы 6.2 получим, что  $h$  является сопряженным  $\Lambda$ -нормально вложенным фиттинговым функтором и

$$L_{\pi_i}(h) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i} \quad (6.4)$$

для всех  $\pi_i \in \Lambda$ . Следовательно, с учетом теоремы 5.7 и (6.4) получаем, что

$$L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(h)^* = (\mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i})^*.$$

Тогда по [11, лемма 3]

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i})^* = \mathfrak{X}_i^* \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i}.$$

Используя свойства оператора «\*» [5, теорема 1.15] и (6.3), получим

$$\mathfrak{X}_i^* \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i} = \left( (L_{\pi_i}(f))_* \right)^* \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i} = (L_{\pi_i}(f))^* \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i}.$$

Снова применим теорему 5.7

$$(L_{\pi_i}(f))^* \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i} = L_{\pi_i}(f^*) \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i} = L_{\pi_i}(f^*).$$

Таким образом,  $L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(f^*)$ . Теперь, применяя утверждения 2) леммы 6.2,

$$\begin{aligned} f^* &= \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left( \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f^*)} \right) = \\ &= \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left( \text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(h^*)} \right) = h^*. \end{aligned}$$

Итак,  $h \in \text{Locksec}(f)$ .

Пусть  $g$  – произвольный  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор из  $\text{Locksec}(f)$ . Тогда

$$(L_{\pi_i}(g))^* = L_{\pi_i}(g^*) = L_{\pi_i}(f^*) = (L_{\pi_i}(f))^*.$$

Следовательно,  $L_{\pi_i}(g) \in \text{Locksec}(L_{\pi_i}(f))$ . Но

тогда для любого  $\pi_i \in \Lambda$  получим

$$\mathfrak{X}_i = (L_{\pi_i}(f))_* \subseteq L_{\pi_i}(g).$$

$$L_{\pi_i}(h) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i} \subseteq L_{\pi_i}(g) \mathfrak{S}_{\pi_i}^{\pi_i} = L_{\pi_i}(g).$$

Следовательно, по лемме 6.3  $h \ll g$ . Ввиду произвольности выбора функтора  $g$  мы заключаем, что  $h$  – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора  $f$ , то есть  $f_* = h$ .

Теорема доказана.

**Следствие 6.5.** Пусть  $\pi$  – множество простых чисел,  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор  $f = \text{Hall}_{\pi}$ . Тогда наименьший элемент секции Локетта  $f_* = f \circ \text{Rad}_{(\mathfrak{S}^{\pi})_*}$ .



Действительно, пусть  $\Lambda = \{\pi, \pi'\}$ . Тогда  $\pi$ -разрешимый фиттингов функтор  $f = \text{Hall}_\pi$  является  $\Lambda$ -нормально вложенным и по теореме 6.4

$$f_*(G) = \left( \text{Hall}_\pi \circ \text{Rad}_{(L_\pi(f))_*} \vee \text{Hall}_{\pi'} \circ \text{Rad}_{(L_{\pi'}(f))_*} \right) (G).$$

Пусть  $X \in f_*(G)$ . Тогда  $X = X_1 X_2$ , где

$$X_1 \in \left( \text{Hall}_{\pi'} \circ \text{Rad}_{(L_{\pi'}(f))_*} \right) (G)$$

$$\text{и } X_2 \in \left( \text{Hall}_\pi \circ \text{Rad}_{(L_\pi(f))_*} \right) (G).$$

Но  $X_1 \in \text{Hall}_{\pi'} \left( G_{(L_{\pi'}(f))_*} \right) = \{E\}$  и  $X = X_2$ . Кроме того,  $L_\pi(f) = \mathfrak{S}^\pi$ . Таким образом,

$$X = X_2 \in \left( \text{Hall}_\pi \circ \text{Rad}_{(\mathfrak{S}^\pi)_*} \right) (G) = \left( f \circ \text{Rad}_{(\mathfrak{S}^\pi)_*} \right) (G)$$

$$\text{и } f_* = f \circ \text{Rad}_{(\mathfrak{S}^\pi)_*}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Beidleman, J.C.* Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.

2. *Витько, Е.А.* Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // *Сиб. матем. журнал.* – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1253–1263.

3. *Витько, Е.А.* О наименьших и наибольших элементах секции Локетта фиттингова

функтора / Е.А. Витько // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2012. – № 1 (10). – С. 9–14.

4. *Beidleman, J.C.* Conjugate  $\pi$ -normally embedded fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // *Rend. Sem. Math. Univ. Padova.* – 1988. – Vol. 80. – P. 65–82.

5. *Doerk, K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

6. *Гольберг, П.А.* Холловские  $\theta$ -базы конечных групп / П.А. Гольберг // *Известия высших учебных заведений.* – 1961. – № 1 (20). – С. 36–43.

7. *Сементовский, В.Г.* О пронормальных подгруппах конечных  $\pi$ -разрешимых групп / В.Г. Сементовский // *Вісник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта.* – 2000. – № 3. – С. 55–59.

8. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларус. навука, 2003. – 254 с.

9. *Beidleman, J.C.* Fittingfunctoren in endlichen auflösbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // *Math. Z.* – 1983. – Bd. 182. – S. 359–384.

10. *Lockett, F.P.* The Fitting class  $\mathfrak{F}^*$  / F.P. Lockett // *Math. Z.* – 1974. – Vol. 137. – P. 131–136.

11. *Воробьев, Н.Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // *Математические заметки.* – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

Поступила в редакцию 13.06.12.

УДК 512.544

## ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ AFN-ГРУППЫ

О.Ю. Дашкова

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск, Украина

## LOCALLY SOLUBLE AFN-GROUPS

O.Yu. Dashkova

O. Honchar Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk, Ukraine

В работе изучается  $\mathbf{R}G$ -модуль  $A$ , такой, что  $\mathbf{R}$  – коммутативное нетерово кольцо с единицей,  $G$  – локально разрешимая группа,  $C_G(A)=1$  и любая собственная подгруппа  $H$  группы  $G$ , для которой фактор-модуль  $A/C_A(H)$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, конечно порождена. Доказано, что локально разрешимая группа  $G$ , удовлетворяющая заданным условиям, гиперабелева. Описана структура рассматриваемой группы  $G$  в случае, когда  $G$  – конечно порожденная разрешимая группа и фактор-модуль  $A/C_A(G)$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем.

**Ключевые слова:** групповое кольцо, локально разрешимая группа, нетеров  $\mathbf{R}$ -модуль.

Let  $A$  be an  $\mathbf{R}G$ -module, where  $\mathbf{R}$  is a commutative noetherian ring with the unit,  $G$  is a locally soluble group,  $C_G(A)=1$ , and each proper subgroup  $H$  of a group  $G$  for which  $A/C_A(H)$  is not a noetherian  $\mathbf{R}$ -module, is finitely generated. It is proved that a locally soluble group  $G$  with these conditions is hyperabelian. It is described the structure of a group  $G$  under consideration if  $G$  is a finitely generated soluble group and the quotient module  $A/C_A(G)$  is not a noetherian  $\mathbf{R}$ -module.

**Keywords:** group ring, locally soluble group, noetherian  $\mathbf{R}$ -module.

**Введение**

Пусть  $A$  – векторное пространство над полем  $F$ . Подгруппы группы  $GL(F, A)$  всех автоморфизмов пространства  $A$  называются линейными группами. Если  $A$  имеет конечную размерность над полем  $F$ ,  $GL(F, A)$  можно рассматривать как группу невырожденных  $(n \times n)$ -матриц, где  $n = \dim_F A$ . Конечномерные линейные группы изучались многими авторами. В случае, когда пространство  $A$  имеет бесконечную размерность над полем  $F$ , ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа  $G$  называется финитарной, если для каждого ее элемента  $g$  подпространство  $C_A(g)$  имеет конечную коразмерность в  $A$  (см., например, [1], [2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2].

В [3] авторы ввели в рассмотрение антифинитарные линейные группы. Пусть  $G \leq GL(F, A)$ ,  $A(wFG)$  – фундаментальный идеал группового кольца  $FG$ . Авторы полагают

$\text{augdim}_F(G) = \dim_F(A(wFG))$ . Линейная группа  $G$  называется антифинитарной, если каждая собственная подгруппа  $H$  группы  $G$ , для которой размерность  $\text{augdim}_F(H)$  бесконечна, конечно порождена. В [3] исследовались антифинитарные локально разрешимые линейные группы.

Если  $G \leq GL(F, A)$ , то  $A$  можно рассматривать как  $FG$ -модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение  $\mathbf{R}G$ -модуля  $A$ , где  $\mathbf{R}$  – кольцо. Б.А.Ф. Верфриц ввел в рассмотрение артиново-финитарные группы автоморфизмов модуля  $M$  над кольцом  $\mathbf{R}$  и нетерово-финитарные группы автоморфизмов модуля  $M$  над кольцом  $\mathbf{R}$ , являющиеся аналогами финитарных линейных групп [4]–[6]. Группа автоморфизмов  $F_1 \text{Aut}_{\mathbf{R}} M$  модуля  $M$  над кольцом  $\mathbf{R}$  называется артиново-финитарной, если  $A(g-1)$  является артиновым  $\mathbf{R}$ -модулем для любого элемента  $g \in F_1 \text{Aut}_{\mathbf{R}} M$ . Группа автоморфизмов  $F \text{Aut}_{\mathbf{R}} M$  модуля  $M$  над кольцом  $\mathbf{R}$  называется нетерово-финитарной, если  $A(g-1)$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем для любого элемента  $g \in F \text{Aut}_{\mathbf{R}} M$ . Б.А.Ф. Верфриц исследовал связь между группами  $F_1 \text{Aut}_{\mathbf{R}} M$  и  $F \text{Aut}_{\mathbf{R}} M$  [6].

При изучении модулей над групповыми кольцами с различными условиями конечности важную роль играет понятие коцентрализатора подгруппы  $H$  в модуле  $A$ , введенное в [7].

**Определение** [7]. Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль, где  $\mathbf{R}$  – кольцо,  $G$  – группа. Если  $H \leq G$ , то фактор-модуль  $A/C_A(H)$ , рассматриваемый как  $\mathbf{R}$ -модуль, называется коцентрализатором подгруппы  $H$  в модуле  $A$ .

В настоящей работе рассматривается аналог антифинитарных линейных групп в теории модулей над групповыми кольцами. Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль,  $\mathbf{R}$  – кольцо,  $G$  – группа. Будем говорить, что группа  $G$  является AFN-группой, если любая собственная подгруппа  $H$  группы  $G$ , коцентрализатор которой в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, конечно порождена.

В работе изучаются локально разрешимые AFN-группы. Всюду рассматривается  $\mathbf{RG}$ -модуль  $A$ , такой, что  $\mathbf{R}$  – ассоциативное кольцо,  $C_G(A) = 1$ . Основные результаты работы – теоремы 2.1 и 2.2 – доказаны в случае, когда  $\mathbf{R}$  является коммутативным нетеровым кольцом с единицей. В теореме 2.1 установлена гиперабелевость локально разрешимой AFN-группы, а в теореме 2.2 описана структура конечно порожденной разрешимой AFN-группы  $G$ , в случае, когда коцентрализатор группы  $G$  в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем.

### 1 Предварительные результаты

В настоящей главе мы сформулируем некоторые элементарные результаты, которые будут использоваться при доказательстве основных теорем.

**Лемма 1.1.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль.

(1) Если  $L \leq H \leq G$  и коцентрализатор подгруппы  $H$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то и коцентрализатор подгруппы  $L$  в модуле  $A$  – нетеров  $\mathbf{R}$ -модуль.

(2) Если  $L, H \leq G$  и коцентрализаторы подгрупп  $L$  и  $H$  в модуле  $A$  являются нетеровыми  $\mathbf{R}$ -модулями, то коцентрализатор подгруппы  $\langle L, H \rangle$  в модуле  $A$  – нетеров  $\mathbf{R}$ -модуль.

**Следствие 1.1.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль. Множество  $ND(G)$  всех элементов  $x \in G$ , таких, что коцентрализатор группы  $\langle x \rangle$  в модуле  $A$  – нетеров  $\mathbf{R}$ -модуль, является нормальной подгруппой группы  $G$ .

**Доказательство.** Из леммы 1.1 вытекает, что  $ND(G)$  является подгруппой группы  $G$ . Так как  $C_A(x^g) = C_A(x)g$  для всех  $x, g \in G$ , то подгруппа  $ND(G)$  нормальна в  $G$ . Следствие доказано.

**Следствие 1.2.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Если группа  $G$  содержит две собственные бесконечно порожденные подгруппы  $K$  и  $L$ , то коцентрализатор

подгруппы  $\langle K, L \rangle$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем.

**Лемма 1.2.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Пусть  $H \leq G$ ,  $K$  – нормальная подгруппа  $H$ , такая, что  $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$ ,  $H_\lambda \neq K$  для каждого  $\lambda \in \Lambda$ , и множество индексов  $\Lambda$  бесконечно. Тогда коцентрализатор подгруппы  $H$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем.

**Доказательство.** Фактор-группу  $H/K$  можно представить в виде прямого произведения  $H/K = H_1/K \times H_2/K$ , такого, что фактор-группы  $H_1/K$  и  $H_2/K$  бесконечно порождены. Так как  $G$  – AFN-группа, то коцентрализаторы подгрупп  $H_1$  и  $H_2$  в модуле  $A$  являются нетеровыми  $\mathbf{R}$ -модулями. Поскольку  $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ , по лемме 1.1 коцентрализатор подгруппы  $H$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Лемма доказана.

**Следствие 1.3.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Пусть  $H \leq G$ ,  $K$  – нормальная подгруппа  $H$ , такая, что  $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$ ,  $H_\lambda \neq K$  для каждого  $\lambda \in \Lambda$ , и множество индексов  $\Lambda$  бесконечно. Если  $g$  – элемент группы  $G$ , такой, что подгруппа  $H_\lambda \langle g \rangle$ -инвариантна для каждого  $\lambda \in \Lambda$ , то  $g \in ND(G)$ .

**Доказательство.** Отметим, что подгруппа  $K \langle g \rangle$ -инвариантна. Поскольку множество индексов  $\Lambda$  бесконечно,

$$Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K) \langle gK \rangle = (H_1/K) \langle gK \rangle \langle H_2/K \rangle \langle gK \rangle,$$

где фактор-группы  $H_1/K$  и  $(H_2/K) \langle gK \rangle$  – собственные и бесконечно порождены. Следовательно, коцентрализатор подгруппы  $\langle H, g \rangle$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. По лемме 1.1 коцентрализатор подгруппы  $\langle g \rangle$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Следствие доказано.

**Следствие 1.4.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Пусть  $H \leq G$ ,  $K$  – нормальная подгруппа  $H$ , такая, что  $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$ ,  $H_\lambda \neq K$  для каждого  $\lambda \in \Lambda$ , и множество индексов  $\Lambda$  бесконечно. Если  $H_\lambda$  –  $G$ -инвариантная подгруппа для каждого  $\lambda \in \Lambda$ , то  $G = ND(G)$ .

**Следствие 1.5.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{RG}$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Пусть  $H \leq G$ , и  $K$  – нормальная подгруппа  $H$ , такая, что  $H/K$  – бесконечная элементарная абелева  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ . Если  $g$  – элемент группы  $G$ , такой, что подгруппы  $H$  и  $K$

$\langle g \rangle$ -инвариантны и  $g^k \in C_G(H/K)$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ , то  $g \in ND(G)$ .

*Доказательство.* Пусть

$$1 \neq h_1 K \in H/K, \quad H_1/K = \langle h_1 K \rangle^{\langle g^k \rangle}.$$

Поскольку элемент  $g$  индуцирует на фактор-группе  $H/K$  автоморфизм конечного порядка, фактор-группа  $H_1/K$  конечна. Так как фактор-группа  $H/K$  элементарная абелева, справедливо равенство  $H/K = H_1/K \times C_1/K$ . Отметим, что множество  $\{C_1^y \mid y \in \langle g \rangle\}$  конечно. Пусть

$$\{C_1^y \mid y \in \langle g \rangle\} = \{U_1, \dots, U_m\}.$$

Тогда  $\langle g \rangle$ -инвариантная подгруппа

$$D_1 = U_1 \cap \dots \cap U_m = Core_{\langle g \rangle}(C_1)$$

имеет конечный индекс в подгруппе  $H$ . Поскольку подгруппа  $K$   $\langle g \rangle$ -инвариантна,  $K \leq D_1$ .

Пусть  $1 \neq h_2 K \in D_1/K$ ,  $H_2/K = \langle h_2 K \rangle^{\langle g^k \rangle}$ . Тогда

$$\langle H_1/K, H_2/K \rangle = H_1/K \times H_2/K.$$

Следовательно,  $H/K = (H_1/K \times H_2/K) \times C_2/K$  для некоторой подгруппы  $C_2$ . Продолжив рассуждения аналогичным образом, мы построим бесконечное семейство  $\{H_n/K \mid n \in \mathbb{N}\}$  неединичных  $\langle g \rangle$ -инвариантных подгрупп, такое, что

$$\langle H_n/K \mid n \in \mathbb{N} \rangle = Dr_{n \in \mathbb{N}} H_n/K.$$

По следствию 1.3  $g \in ND(G)$ . Следствие доказано.

## 2 Локально разрешимые AFN-группы

Напомним, что группа  $G$  имеет конечный 0-ранг  $r_0(G) = r$ , если  $G$  обладает конечным субнормальным рядом с  $r$  бесконечными циклическими факторами, все остальные факторы которого периодические. 0-ранг группы не зависит от выбора ряда и является числовым инвариантом.

**Лемма 2.1.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Если группа  $G$  содержит нормальную подгруппу  $K$ , такую, что фактор-группа  $G/K$  абелева и имеет бесконечный 0-ранг, то коцентральный фактор-модуль  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем.

*Доказательство.* Пусть  $B/K$  – свободная абелева подгруппа фактор-группы  $G/K$ , такая, что фактор-группа  $G/B$  периодическая. Если  $\pi(G/B)$  бесконечно, то по лемме 1.2 коцентральный фактор-модуль  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Предположим, что множество  $\pi(G/B)$  конечно. Выберем такое простое число  $q$ , что  $q \notin \pi(G/B)$ . Пусть  $C/K = (B/K)^q$ . Тогда  $B/C$  – силовская  $q$ -подгруппа фактор-группы

$G/C$ . Если  $P/C$  – силовская  $q'$ -подгруппа  $G/C$ , то  $G/P$  является бесконечной элементарной абелевой  $q$ -группой, и по лемме 1.2 коцентральный фактор-модуль  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Лемма доказана.

**Следствие 2.1.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Предположим, что группа  $G$  содержит нормальную подгруппу  $K$ , такую, что фактор-группа  $G/K$  почти абелева и имеет бесконечный 0-ранг. Тогда коцентральный фактор-модуль  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем.

*Доказательство.* Пусть  $L/K$  – нормальная абелева подгруппа фактор-группы  $G/K$ , такая, что  $G/L$  конечна. Тогда ранг  $r_0(L/K)$  бесконечен. Выберем элемент  $g \in G \setminus L$ . Пусть  $B/K$  – свободная абелева подгруппа фактор-группы  $L/K$ , такая, что фактор-группа  $L/B$  периодическая. Ранг  $r_0(B/K)$  бесконечен. Выберем элемент  $a_1 \in B \setminus K$ . Пусть  $A_1/K = (\langle a_1 \rangle K / K)^{\langle g^k \rangle}$ . Поскольку фактор-группа  $G/L$  конечна,  $A_1/K$  – конечно порожденная абелева группа. Следовательно, подгруппа  $A_1/K \cap B/K$  конечно порождена. Выберем максимальную подгруппу  $C_1/K$  фактор-группы  $B/K$ , удовлетворяющую условию  $(A_1/K \cap B/K) \cap C_1/K = \langle 1 \rangle$ . Тогда фактор-группа  $L/C_1$  имеет конечный 0-ранг. Так как фактор-группа  $G/L$  конечна, множество

$$\{(C_1/K)^{y^k} \mid y \in \langle g \rangle\}$$

конечно. Пусть

$$\{(C_1/K)^{y^k} \mid y \in \langle g \rangle\} = \{D_1/K, \dots, D_n/K\},$$

и пусть

$$E/K = D_1/K \cap \dots \cap D_n/K.$$

Тогда фактор-группа  $E/K \leq B/K$ ,  $E/K$   $\langle g \rangle$ -инвариантна, и по теореме Ремака  $L/E$  имеет конечный 0-ранг. В частности,  $E/K$  имеет бесконечный 0-ранг. Выберем элемент  $a_2 \in E \setminus K$ . Пусть  $A_2/K = (\langle a_2 \rangle K / K)^{\langle g^k \rangle}$ . Тогда  $A_2/K \leq E/K$ ,  $(A_1/K) \cap (A_2/K) = 1$ . Продолжив рассуждения аналогичным образом, построим семейство  $\{A_n/K \mid n \in \mathbb{N}\}$   $\langle g \rangle$ -инвариантных подгрупп, такое, что

$$\langle A_n/K \mid n \in \mathbb{N} \rangle = Dr_{n \in \mathbb{N}}(A_n/K).$$

Согласно следствию 1.3,  $g \in ND(G)$ . Можно выбрать конечно порожденную подгруппу  $F \leq G$ , такую, что  $G/K = (FK/K)(L/K)$ , и для каждого элемента  $g$  подгруппы  $F$   $g \in ND(G)$ . Поскольку подгруппа  $F$  конечно порождена,  $F \leq ND(G)$ . По лемме 2.1 коцентральный фактор-модуль  $A$  является нетеровым

$\mathbf{R}$ -модулем. Поскольку  $G = FL$ , по лемме 1.1 коцентралаизатор группы  $G$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Следствие доказано.

**Лемма 2.2.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Предположим, что группа  $G$  содержит подгруппы  $L \leq K \leq H$ , такие, что  $L$  и  $K$  – нормальные подгруппы  $H$ ,  $K/L$  – делимая черниковская группа,  $H/K$  – почти полициклическая группа. Если коцентралаизатор подгруппы  $H$  в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то  $H = G$ . Более того, либо  $G = K$ , и тогда фактор-группа  $G/L$  – квазициклическая  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ , либо  $G/K$  – циклическая  $q$ -группа для некоторого простого числа  $q$ .

*Доказательство.* Предположим сначала, что фактор-группа  $H/L$  конечно порождена. По теореме Ф. Холла [8, теорема 5.34]  $H/L$  удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп. В частности,  $K/L$  удовлетворяет условию  $\text{max} - H$ . Противоречие с тем, что  $K/L$  – делимая черниковская группа. Следовательно, фактор-группа  $H/L$  бесконечно порождена, и поэтому подгруппа  $H$  бесконечно порождена. Поскольку коцентралаизатор подгруппы  $H$  в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то  $H = G$ .

Пусть  $G \neq K$ . Тогда  $G = \langle K, M \rangle$  для некоторого конечного множества  $M$ . Поскольку множество  $M$  конечно, можно выбрать подмножество  $S$  множества  $M$ , такое, что  $G = \langle K, S \rangle$  и  $G \neq \langle K, X \rangle$  для любого собственного подмножества  $X$  множества  $S$ . Пусть

$$S = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Если  $m > 1$ , то  $\langle K, x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$  и  $\langle K, x_m \rangle$  – собственные бесконечно порожденные подгруппы группы  $G$ . Так как  $G$  является AFN-группой, коцентралаизаторы подгрупп  $\langle K, x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$  и  $\langle K, x_m \rangle$  в модуле  $A$  являются нетеровыми  $\mathbf{R}$ -модулями. Поскольку

$$G = \langle \langle K, x_1, \dots, x_{m-1} \rangle, \langle K, x_m \rangle \rangle,$$

то по лемме 1.1 коцентралаизатор группы  $G$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Противоречие. Следовательно,  $m = 1$ , и поэтому  $G/K = \langle xK \rangle$  – циклическая фактор-группа. Если  $G/K$  бесконечна, то группу  $G$  можно представить в виде произведения двух собственных бесконечно порожденных подгрупп. Противоречие с леммой 1.1. Если фактор-группа  $G/K$  конечна, но  $|\pi(G/K)| > 1$ , вновь получаем противоречие с леммой 1.1. Следовательно,  $G/K$  – циклическая  $q$ -группа для некоторого простого числа  $q$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.3.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Пусть  $H$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , такая, что  $G/H$  – бесконечная почти абелева периодическая фактор-группа. Если коцентралаизатор группы  $G$  в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то либо  $G/H$  – квазициклическая  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ , либо группа  $G$  содержит нормальную подгруппу  $K$ , такую, что  $G/K$  – циклическая  $q$ -группа для некоторого простого числа  $q$ ,  $H \leq K$  и  $K/H$  – делимая черниковская  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ .

*Доказательство.* Пусть  $L/H$  – нормальная абелева подгруппа фактор-группы  $G/H$ , такая, что фактор-группа  $G/L$  конечна. Если множество  $\pi(L/H)$  бесконечно, то по лемме 1.2 коцентралаизатор подгруппы  $L$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. По следствию 1.4  $G = ND(G)$ . Поскольку фактор-группа  $G/L$  конечна, то с учетом леммы 1.1 коцентралаизатор группы  $G$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Противоречие. Следовательно, множество  $\pi(L/H)$  конечно. Тогда существует простое число  $p$ , такое, что силовская  $p$ -подгруппа  $P/H$  фактор-группы  $L/H$  бесконечна. Пусть  $F/H$  – силовская  $p'$ -подгруппа  $L/H$ . Существует конечная фактор-группа  $S/H$ , такая, что  $G/H = (L/H)(S/H)$ . Если фактор-группа  $F/H$  бесконечна, то фактор-группы  $(P/H)(S/H)$  и  $(F/H)(S/H)$  бесконечно порождены, и поэтому коцентралаизаторы подгрупп  $PS$  и  $FS$  в модуле  $A$  являются нетеровыми  $\mathbf{R}$ -модулями. По лемме 1.1 коцентралаизатор группы  $G$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Противоречие. Следовательно, фактор-группа  $F/H$  конечна. Пусть  $B/H = (P/H)^p$ . Если фактор-группа  $P/B$  бесконечна, то  $P/B$  бесконечно порождена, и коцентралаизатор подгруппы  $P$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. По следствию 1.5  $G = ND(G)$ . Поскольку фактор-группа  $G/P$  конечна, по лемме 1.1 коцентралаизатор группы  $G$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Снова получаем противоречие. Следовательно, фактор-группа  $(P/H)/(B/H)$  конечна. По лемме 3 [9]  $P/H = (V/H) \times (D/H)$ , где  $D/H$  – делимая подгруппа, а  $V/H$  конечна. Подгруппа  $D$  является  $G$ -инвариантной. Положим  $K = D$ . Так как фактор-группа  $G/D$  конечна, применим лемму 2.2. Лемма доказана.

**Лемма 2.4.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Предположим, что группа  $G$  содержит нормальные подгруппы  $K \leq H$ ,

такие, что фактор-группа  $G/H$  конечна, а  $H/K$  – абелева группа без кручения. Если коцентралализатор группы  $G$  в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то  $H/K$  конечно порождена.

**Доказательство.** По следствию 2.1 фактор-группа  $H/K$  имеет конечный 0-ранг. Пусть  $B/K$  – свободная абелева подгруппа фактор-группы  $H/K$ , такая, что фактор-группа  $H/B$  периодическая. Ввиду конечности ранга  $r_0(H/K)$ ,  $B/K$  конечно порождена. Предположим, что фактор-группа  $H/K$  бесконечно порождена. Так как  $G/H$  конечна, фактор-группа  $C/K = (B/K)^{G/K}$  конечно порождена. По лемме 2.3  $|\pi(G/C)| \leq 2$ . Выберем два различных простых числа  $r, s$ , такие, что  $r, s \notin \pi(G/C)$ . Пусть  $D/K = (C/K)^{rs}$ . Тогда  $G/D$  – бесконечно порожденная периодическая почти абелева группа. По построению  $|\pi(G/D)| \geq 3$ . Противоречие с леммой 2.3. Следовательно, фактор-группа  $H/K$  конечно порождена. Лемма доказана.

**Лемма 2.5.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  является AFN-группой. Предположим, что группа  $G$  содержит нормальные подгруппы  $K \leq H$ , такие, что фактор-группа  $G/H$  конечна, а  $H/K$  абелева и бесконечно порождена. Если коцентралализатор группы  $G$  в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то  $H/K$  черниковская.

**Доказательство.** По следствию 2.1 фактор-группа  $H/K$  имеет конечный 0-ранг. Пусть  $T/K$  – периодическая часть фактор-группы  $H/K$ . По лемме 2.4  $H/T$  конечно порождена. Тогда  $H/K$  имеет конечно порожденную подгруппу  $V/K$ , такую, что фактор-группа  $H/V$  периодическая. Поскольку  $G/H$  конечна, фактор-группа  $C/K = (V/K)^{G/K}$  конечно порождена. По лемме 2.3  $G/C$  черниковская. Отсюда вытекает, что фактор-группа  $T/K$  также черниковская. Пусть  $D/K$  – делимая часть фактор-группы  $T/K$ . Тогда  $G/D$  – конечно порожденная почти абелева группа. Применим лемму 2.2. Лемма доказана.

**Лемма 2.6.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  – разрешимая AFN-группа, не являющаяся квазициклической  $p$ -группой для некоторого простого числа  $p$ . Тогда фактор-группа  $G/ND(G)$  является полициклической.

**Доказательство.** Пусть  $D = ND(G)$ . Если коцентралализатор группы  $G$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то  $G = ND(G)$ .

Предположим, что  $G \neq ND(G)$ . Пусть

$$D = D_0 \leq D_1 \leq \dots \leq D_n = G$$

– субнормальный ряд группы  $G$  с абелевыми факторами. Рассмотрим фактор  $D_j/D_{j-1}$ ,  $j < n$ .

Если этот фактор бесконечно порожден, то подгруппа  $D_j$  также бесконечно порождена, и поэтому коцентралализатор подгруппы  $D_j$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. В частности,  $D_j \leq ND(G)$ . Отсюда вытекает, что фактор  $D_j/D_{j-1}$  конечно порожден для каждого  $j = 1, \dots, n-1$ . Пусть  $K = D_{n-1}$ . Если фактор-группа  $G/K$  конечно порождена, то  $G/D$  – полициклическая. Предположим, что фактор-группа  $G/K$  бесконечно порождена. По лемме 2.5  $G/K$  – черниковская группа. Пусть  $P/K$  – делимая часть  $G/K$ . Если  $P/K \neq G/K$ , то  $P$  – собственная бесконечно порожденная подгруппа группы  $G$ . Следовательно, коцентралализатор подгруппы  $P$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Поэтому  $P \leq ND(G)$  и фактор-группа  $G/P$  конечна. Противоречие. Следовательно,  $G/K = P/K$ , и тогда  $G/K$  – квазициклическая  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ . Пусть  $g \in G \setminus K$ . Так как  $g \notin ND(G)$ , подгруппа  $\langle g, K \rangle$  конечно порождена. Из конечности фактор-группы  $\langle g \rangle K/K$  вытекает, что подгруппа  $K$  конечно порождена [8, теорема 1.41]. Так как группа  $G$  не является квазициклической  $p$ -группой,  $K \neq 1$ . Следовательно,  $K$  содержит собственную  $G$ -инвариантную подгруппу  $L$  конечного индекса, такую, что фактор-группа  $G/L$  черниковская и не является делимой. Ранее было доказано, что в этом случае фактор-группа  $G/ND(G)$  конечна. Лемма доказана.

**Определение 2.1** [10, глава 13]. Группа  $G$  называется квазилинейной, если она изоморфна подгруппе прямого произведения конечного множества конечномерных линейных групп.

**Лемма 2.7.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  – локально разрешимая группа,  $\mathbf{R}$  – коммутативное нетерово кольцо с единицей. Если коцентралализатор группы  $G$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, то группа  $G$  разрешима.

**Доказательство.** Отметим, что  $A/C_A(G)$  – нетеров  $\mathbf{R}$ -модуль. Пусть  $C = C_A(G)$ .  $A$  имеет конечный ряд  $\mathbf{R}G$ -подмодулей  $0 \leq C \leq A$ , такой, что фактор  $A/C$  – конечно порожденный  $\mathbf{R}$ -модуль.

По теореме 13.3 [10] фактор-группа  $G_1 = G/C_G(A/C)$  содержит нормальную нильпотентную подгруппу  $U$ , такую, что  $G_1/U$  – квазилинейная группа. Следовательно,

$$G_1/U \hookrightarrow M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k,$$

где  $M_i, i = 1, 2, \dots, k$ , – конечномерные линейные группы. Пусть  $L_i, i = 1, 2, \dots, k$ , – проекция  $G_1/U$  на  $M_i, i = 1, 2, \dots, k$ . По следствию 3.8 [10]

подгруппа  $L_i$  разрешима для любого  $i = 1, 2, \dots, k$ . По теореме А.И. Мальцева (теорема 3.6 [10])  $L_i, i = 1, 2, \dots, k$ , является расширением нильпотентной подгруппы при помощи почти абелевой. Следовательно, фактор-группа  $G_1/U$  является расширением нильпотентной подгруппы при помощи почти абелевой. Отсюда вытекает, что  $G_1/U$  разрешима, и поэтому разрешима фактор-группа  $G/C_G(A/C)$ . Из выбора подмодуля  $C$  вытекает, что фактор-группа  $G/C_G(C)$  тривиальна.

Пусть

$$H = C_G(C) \cap C_G(A/C).$$

Подгруппа  $H$  действует тривиально в каждом факторе ряда  $0 \leq C \leq A$ . Следовательно, подгруппа  $H$  абелева. По теореме Ремака

$$G/H \hookrightarrow G/C_G(C) \times G/C_G(A/C).$$

Отсюда вытекает, что фактор-группа  $G/H$  разрешима. Поскольку подгруппа  $H$  абелева, группа  $G$  разрешима. Лемма доказана.

**Теорема 2.1.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  – локально разрешимая AFN-группа,  $\mathbf{R}$  – коммутативное нетерово кольцо с единицей. Тогда группа  $G$  гиперабелева.

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда группа  $G$  не является разрешимой. Тогда  $G$  не является простой группой (следствие 1 к теореме 5.27 [8]). Следовательно,  $G$  содержит собственную нормальную нетривиальную подгруппу  $H_1$ . Если подгруппа  $H_1$  конечно порождена, то она разрешима. Если  $H_1$  бесконечно порождена, то коцентрализатор подгруппы  $H_1$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, и по лемме 2.7  $H_1$  разрешима. Пусть  $d_1$  – степень разрешимости подгруппы  $H_1$  и пусть  $W_1$  – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$  степени разрешимости  $d_1$ . Так как группа  $G$  не является разрешимой, то фактор-группа  $G/W_1$  также не является разрешимой. Как и ранее,  $G/W_1$  содержит собственную нормальную нетривиальную подгруппу  $H_2/W_1$ . Тогда  $H_2$  – разрешимая подгруппа степени разрешимости  $d_2$ , причем  $d_2 > d_1$ . Пусть  $W_2$  – максимальная нормальная разрешимая подгруппа степени разрешимости  $d_2$ , содержащая подгруппу  $W_1$ . Продолжив рассуждения аналогичным образом, построим возрастающий ряд нормальных подгрупп группы  $G$

$$\langle 1 \rangle = W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_n \leq W_{n+1} \leq \dots, \quad (2.1)$$

такой, что

1) для каждого  $n \in \mathbb{N}$   $W_n$  – разрешимая подгруппа степени разрешимости  $d_n$ ;

2)  $d_n < d_{n+1}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $W = \cup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $G = W$ . Тогда можно построить ряд нормальных подгрупп группы  $G$

$$\langle 1 \rangle = L_0 \leq L_1 \leq \dots \leq L_n \leq L_{n+1} \leq \dots,$$

являющийся уплотнением ряда (2.1), такой, что  $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} L_n$  и каждый фактор  $L_{i+1}/L_i, i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$  абелев. Следовательно, группа  $G$  гиперабелева. Пусть теперь  $G \neq W$ . По построению подгруппа  $W$  не является разрешимой. Следовательно,  $W$  бесконечно порождена. Поэтому коцентрализатор подгруппы  $W$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. По лемме 2.7 подгруппа  $W$  разрешима. Противоречие. Теорема доказана.

**Лемма 2.8.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  – конечно порожденная разрешимая AFN-группа. Тогда коцентрализатор подгруппы  $ND(G)$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем.

*Доказательство.* Пусть  $D = ND(G)$  и пусть

$$\langle 1 \rangle = D_0 \leq D_1 \leq \dots \leq D_n = D$$

– производный ряд подгруппы  $D$ . Если каждый фактор  $D_{j+1}/D_j, j = 0, 1, \dots, n-1$ , конечно порожден, то подгруппа  $D$  полициклическая, и поэтому  $D$  конечно порождена. По лемме 1.1 коцентрализатор подгруппы  $D$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Пусть теперь для некоторого  $j = 0, 1, \dots, n-1$  фактор  $D_{j+1}/D_j$  бесконечно порожден, и пусть  $t$  – такое число, что  $D_t/D_{t-1}$  бесконечно порожден, а факторы  $D_{j+1}/D_j$  конечно порождены для каждого  $j \geq t$ . Отсюда вытекает, что фактор-группа  $D/D_t$  – полициклическая. Поскольку группа  $G$  конечно порождена, бесконечно порожденная подгруппа  $D_t$  является собственной подгруппой  $G$ , и поэтому коцентрализатор  $D_t$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Так как фактор-группа  $D/D_t$  полициклическая, то  $D = KD_t$  для некоторой конечно порожденной подгруппы  $K$ . Из включения  $K \leq ND(G)$  следует, что коцентрализатор подгруппы  $K$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. По лемме 1.1 коцентрализатор подгруппы  $ND(G)$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем. Лемма доказана.

**Теорема 2.2.** Пусть  $A$  –  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  – конечно порожденная разрешимая AFN-группа,  $\mathbf{R}$  – коммутативное нетерово кольцо с единицей. Если коцентрализатор группы  $G$  в модуле  $A$  не является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, справедливы следующие утверждения:

(1) коцентрализатор подгруппы  $ND(G)$  в модуле  $A$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем;

(2) группа  $G$  обладает рядом нормальных подгрупп  $H \leq U \leq N \leq G$ , таким, что подгруппа  $H$  – абелева, фактор-группы  $U/H$  и  $N/U$  – нильпотентны, а фактор-группа  $G/N$  – полициклическая.

**Доказательство.** Справедливость утверждения (1) следует из леммы 2.8. Докажем утверждение (2). Пусть  $C = C_A(ND(G))$ . Так как фактор-модуль  $A/C$  является нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем,  $A$  имеет конечный ряд  $\mathbf{R}G$ -подмодулей

$$0 \leq C \leq A,$$

такой, что фактор  $A/C$  – конечно порожденный  $\mathbf{R}$ -модуль.

По теореме 13.3 [10] фактор-группа  $G_1 = G/C_G(A/C)$  содержит нормальную нильпотентную подгруппу  $U_1$ , такую, что  $G_1/U_1$  – квазилинейная группа. Следовательно,

$$G_1/U_1 \hookrightarrow M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k,$$

где  $M_i, i = 1, 2, \dots, k$  – конечномерные линейные группы. Пусть  $L_i, i = 1, 2, \dots, k$  – проекция  $G_1/U_1$  на  $M_i, i = 1, 2, \dots, k$ . По теореме А.И. Мальцева (теорема 3.6 [10])  $L_i, i = 1, 2, \dots, k$  является расширением нильпотентной подгруппы при помощи почти абелевой. Поскольку группа  $G$  конечно порождена, проекция  $L_i, i = 1, 2, \dots, k$  является расширением нильпотентной группы при помощи полициклической. Следовательно, фактор-группа  $G_1 = G/C_G(A/C)$  обладает рядом нормальных подгрупп  $U_1 \leq N_1 \leq G$  таким, что фактор-группа  $N_1/U_1$  и подгруппа  $U_1$  – нильпотентны, а фактор-группа  $G/N_1$  – полициклическая. Из выбора подмодуля  $C$  вытекает, что  $C_G(C) \geq ND(G)$ . По лемме 2.6 фактор-группа  $G/C_G(C)$  является полициклической.

Пусть

$$H = C_G(C) \cap C_G(A/C).$$

Подгруппа  $H$  действует тривиально в каждом факторе ряда  $0 \leq C \leq A$ . Следовательно, подгруппа  $H$  абелева. По теореме Ремака

$$G/H \hookrightarrow G/C_G(C) \times G/C_G(A/C).$$

Отсюда вытекает, что группа  $G$  обладает рядом нормальных подгрупп  $H \leq U \leq N \leq G$ , таким, что подгруппа  $H$  – абелева, фактор-группы

$U/H$  и  $N/U$  – нильпотентны, а фактор-группа  $G/N$  – полициклическая. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips, R.E. The structure of groups of finitary transformations / R.E. Phillips // J. Algebra. – 1988. – Vol. 119, № 2. – P. 400–448.
2. Phillips, R.E. Finitary linear groups: a survey. “Finite and locally finite groups” / R.E. Phillips // NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. – 1995. – Vol. 471. – P. 111–146.
3. Kurdachenko, L.A. Antifinitary linear groups / L.A. Kurdachenko, J.M. Muñoz-Escolano, J. Otal // Forum Math. – 2008. – Vol. 20, № 1. – P. 7–44.
4. Wehrfritz, B.A.F. Artinian-finitary groups over commutative rings / B.A.F. Wehrfritz // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47, № 1–2. – P. 551–565.
5. Wehrfritz, B.A.F. Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings / B.A.F. Wehrfritz // J. Lond. Math. Soc. (2). – 2004. – Vol. 70, № 2. – P. 325–340.
6. Wehrfritz, B.A.F. Artinian-finitary groups are locally normal-finitary / B.A.F. Wehrfritz // J. Algebra. – 2005. – Vol. 287, № 2. – P. 417–431.
7. Курдаченко, Л.А. О группах с минимаксными классами сопряженных элементов / Л.А. Курдаченко // Бесконечные группы и прилегающие алгебраические структуры : науч. тр. / Академия наук Украины, под ред. Черникова Н.С. – Киев, 1993. – С. 160–177.
8. Robinson, D.J.S. Finiteness conditions and generalized soluble groups / D.J.S. Robinson // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972. – Vols. 1, 2. – 464 p.
9. Курдаченко, Л.А. Непериодические FC-группы и связанные классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения / Л.А. Курдаченко // Сиб. мат. журн. – 1986. – Т. 287, № 2. – С. 227–236.
10. Wehrfritz, B.A.F. Infinite linear groups / B.A.F. Wehrfritz // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973. – 229 p.

Поступила в редакцию 09.02.12.



УДК 517.9

## СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОМЕРНОГО $P$ -АДИЧЕСКОГО АРГУМЕНТА

М.А. Заренок

Белорусский государственный университет, Минск

## CONVERGENCE OF THE FOURIER SERIES FOR DIFFERENTIABLE FUNCTIONS OF A MULTIDIMENSIONAL $P$ -ADIC ARGUMENT

M.A. Zarenok

Belarusian State University, Minsk

В данной статье рассматривается сходимость рядов Фурье функций многомерного  $p$ -адического аргумента. Даны определения многомерной функции Малера и частичных сумм ряда Фурье функций многомерного  $p$ -адического аргумента. Для получения основного результата был доказан ряд вспомогательных теорем: вычислена норма  $m$ -ой производной одномерной и многомерной функций Малера, получен критерий принадлежности функции пространству  $m$  раз непрерывно-дифференцируемых функций  $C^m(\mathbb{Z}_p^n)$  в терминах коэффициентов Малера. Доказана лемма о представлении коэффициентов и частичных сумм кратного ряда Фурье через коэффициенты и частичные суммы одномерного ряда. На основании данных результатов доказана теорема о том, что если  $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ , тогда ряд Фурье функции сходится равномерно, если  $m \geq n$ . Приведен пример функции  $f \in C^{n-1}(\mathbb{Z}_p^n)$  с расходящимся рядом Фурье.

**Ключевые слова:** функция  $p$ -адического векторного аргумента, ряд Фурье, коэффициенты Фурье, функция Малера.

This article discusses the convergence of the Fourier series for functions of the multidimensional  $p$ -adic argument. For this purpose we define the multidimensional Mahler function and partial sums of Fourier series for the functions of multidimensional  $p$ -adic argument. We calculate the norm of the  $m$ -th derivatives of multidimensional Mahler functions and prove the criterion of  $m$  times continuously differentiability in terms of Mahler coefficients. We represent coefficients and partial sums of multidimensional Fourier series in terms of coefficients and partial sums of one-dimensional Fourier series. The main result states that for positive integers  $m \geq n$  the Fourier series for function  $C^m(\mathbb{Z}_p^n)$  converges uniformly. An example of  $f \in C^{n-1}(\mathbb{Z}_p^n)$  with divergent Fourier series is given.

**Keywords:** function of multidimensional  $p$ -adic argument, Fourier series, Fourier coefficients, Mahler function.

### Введение

Исследование связи между гладкостью функции и убыванием ее образа Фурье имеет давнюю историю. Результаты такого рода имеют обобщающее название теорем типа Пэли-Винера. В частности, в анализе известен результат о том, что если функция  $k$  раз непрерывно-дифференцируема на  $n$ -мерном торе, то ряд Фурье функции для  $k > n/2$  сходится равномерно [1, с. 279].

Данная работа посвящена изучению варианта этой теоремы в случае функций многомерного  $p$ -адического аргумента, принимающих  $p$ -адические значения. Основным результатом, представленным в данной статье, является доказательство теоремы о сходимости кратных рядов Фурье. Получена зависимость между гладкостью функции, размерностью ее аргумента и сходимостью частичных сумм ряда Фурье.

### 1 Базис Малера пространства непрерывных функций векторного $p$ -адического аргумента

Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ . Рассмотрим функции  $f: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$  такие, что  $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ .

### Определение 1.1.

$n$ -Мерным замкнутым шаром с центром в точке  $x \in \mathbb{Z}_p^n$  и радиусом

$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  будем называть множество

$$B_\delta[x] = \{y \in \mathbb{Z}_p^n : |x_i - y_i|_p < \delta_i, \forall i = \overline{1, n}\}. \quad (1.1)$$

### Определение 1.2.

Функция  $f$  на  $\mathbb{Z}_p^n$  называется локально-постоянной функцией, если для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$  существует шар  $B_\delta[x]$  такой, что

$$\int_{B_\delta[x]} f \equiv \text{Const}.$$

### Определение 1.3.

$n$ -Мерной функцией Малера, определенной на  $\mathbb{Z}_p^n$  со значениями в  $\mathbb{Q}_p$ , будем называть функцию

$$\binom{x}{k}_n = \prod_{i=1}^n \binom{x_i}{k_i}, \quad (1.2)$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $k_i \geq 0$  для любого  $i = \overline{0, n}$ .

Покажем, что  $n$ -мерные функции Малера образуют ортонормированный базис пространства  $C(\mathbb{Z}_p^n)$ . Под пространством  $C(\mathbb{Z}_p^n)$  будем понимать пространство непрерывных на  $\mathbb{Z}_p^n$  функций.

На данном пространстве можно задать норму следующей формулой

$$\|f\| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p.$$

**Теорема 1.1.** Пусть  $f \in C(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  существует локально-постоянная функция  $g: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$  такая, что  $|f(x) - g(x)|_p < \varepsilon$  для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную функцию

$$f \in C(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p).$$

Определим на  $\mathbb{Z}_p^n$  отношение эквивалентности " $\sim$ " следующим образом:  $x \sim y$ , если  $|f(x) - f(y)|_p < \varepsilon$ . Данное отношение эквивалентности разбивает множество  $\mathbb{Z}_p^n$  на классы эквивалентности  $U_i$ ,  $i \in I$ . Для любого  $i \in I$  зафиксируем  $a_i \in U_i$  и определим функцию  $g: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$  так, что  $g(x) = f(a_i)$  для любого  $x \in U_i$ . Получаем, что функция  $g(x)$  является локально-постоянной и для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$  имеет место неравенство  $|f(x) - g(x)|_p < \varepsilon$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $f \in C(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  существует полиномиальная функция  $P: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$  такая, что  $|f(x) - P(x)|_p < \varepsilon$  для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$ .

*Доказательство.* Из теоремы 1.1 вытекает, что достаточно показать существование полиномиальной функции, удовлетворяющей условиям теоремы, для любой локально-постоянной функции  $f$ . Так как множество  $\mathbb{Z}_p^n$  компактно, существует  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ , где  $\delta_i \in (0, 1)$  для любого  $i = \overline{1, n}$ , такое, что  $f \equiv const$  на каждом из шаров радиуса  $\delta$ . Очевидно, что  $const$  на каждом шаре своя и количество шаров конечно. Поэтому такая локально-постоянная функция является конечной комбинацией характеристических функций шаров радиуса  $\delta$ . Без ограничения общности будем считать, что  $f$  характеристическая функция шара радиуса  $\delta$  и  $f(x) = 1$ . Не сложно видеть, что

$$B_\delta[x] = B_{\delta_1}[x_1] \times B_{\delta_2}[x_2] \times \dots \times B_{\delta_n}[x_n].$$

Следовательно, характеристическая функция  $n$ -мерного шара есть произведение характеристических функций одномерных шаров, то есть

$$f_{B_\delta}(x) = \prod_{i=1}^n f_{B_{\delta_i}}(x_i).$$

По теореме Капланского [2, с. 127], характеристическая функция одномерного шара приближается полиномом вида

$$P(x) = \prod_{j=1}^m \left( 1 - \left( \frac{x}{c_j} \right)^s \right)^{n_j},$$

то есть для любого  $i = \overline{1, n}$  существует такой полином  $P_i(x_i): \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ , что для любого  $x \in \mathbb{Z}_p$   $|f_{B_{\delta_i}}(x_i) - P_i(x_i)|_p < \varepsilon$ .

Пусть  $n = 2$ , тогда  $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ ,  $P(x) = P_1(x_1)P_2(x_2)$ . Для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^2$  и  $i = 1, 2$  имеют место неравенства

$$|f_i(x_i) - P_i(x_i)|_p < \varepsilon.$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)|_p &= \\ &= |f_1(x_1)f_2(x_2) - P_1(x_1)P_2(x_2)|_p = \\ &= |f_2(x_2)(f_{x_1} - P_1(x_1)) - P_2(x_2)(f_{x_2} - P_2(x_2))|_p \leq \\ &\leq |f_2(x_2)|_p \varepsilon + |P_1(x_1)|_p \varepsilon \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично для произвольного  $n$  можно показать, что

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)|_p &= \\ &= |f_1(x_1) \dots f_n(x_n) - P_1(x_1) \dots P_n(x_n)|_p \leq C'\varepsilon. \end{aligned}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что для характеристической функции

$$f_{B_\delta}(x) = \prod_{i=1}^n f_{B_{\delta_i}}(x_i)$$

существует полином

$$P(x) = \prod_{i=1}^n P_i(x_i)$$

такой, что  $|f_{B_\delta}(x) - P(x)|_p < \varepsilon'$  для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$ .

Пусть  $(E, \|\cdot\|)$  – банахово пространство над полем  $\mathbb{Q}_p$  с нормой  $\|\cdot\|$ , которая удовлетворяет сильному неравенству треугольника, и  $x, y \in E$ . Говорят, что  $x$  ортогонально  $y$  ( $x \perp y$ ), если  $\|x\| \leq \|x - \lambda y\|$ , для любого  $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ .

**Теорема 1.3** [3, с. 56]. Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in E.$$

(1) Набор  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  ортогонален тогда и только тогда, когда векторы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ортогональны между собой для любого  $n$ .

(2) Набор  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ортогонален тогда и только тогда, когда для любого набора  $p$ -адических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  верно равенство

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\| = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|_p \|x_j\|.$$

(3) Набор  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ортогонален тогда и только тогда, когда для любого набора  $p$ -адических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  верны неравенства

$$\left\| \sum_{j=m}^n \lambda_j x_j \right\| \geq |\lambda_m|_p \|x_m\|, \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

**Теорема 1.4.**  $n$ -Мерные функции Малера

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}_n : x \in \mathbb{Z}_p^n, k = (k_1, \dots, k_n), k_i = 0, 1, 2, \dots \forall i = \overline{1, n} \right\}$$

образуют ортонормированный базис пространства  $C(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p)$ , т. е. любая функция  $f \in C(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p)$  может быть представлена в виде сходящегося ряда

$$f(x) = \sum f_k \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}_n.$$

**Доказательство.** Из определения  $n$ -мерной функции Малера  $\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}_n$  следует, что она является полиномиальной функцией от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  степени  $k_1 + \dots + k_n$ . Очевидно, что любая полиномиальная функция из  $\mathbb{Z}_p^n$  в  $\mathbb{Q}_p$  представима в виде конечной линейной комбинации  $n$ -мерных функций Малера. Тогда из теоремы 1.2 вытекает, что линейная оболочка  $n$ -мерных функций Малера плотна в  $C(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p)$ .

В пространстве непрерывных на  $\mathbb{Z}_p^n$  функций зададим норму по формуле

$$\|f\| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p.$$

Несложно видеть, что

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}_n \right\| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p^n} \left| \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i \\ k_i \end{pmatrix}_p \right| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p^n} \prod_{i=1}^n \left| \begin{pmatrix} x_i \\ k_i \end{pmatrix}_p \right| \leq 1$$

и равенство достигается при  $x = k$ , где

$$k = (k_1, \dots, k_n). \text{ Тогда } \left\| \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}_n \right\| = 1 \text{ для любого}$$

$$k = (k_1, \dots, k_n), k_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

Для доказательства ортогональности рассмотрим множество векторов

$$\{k = (k_1, \dots, k_n) : k_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}.$$

Очевидно, что рассматриваемое множество счетно. Упорядочим введенное множество при помощи лексикографического порядка. Получаем упорядоченную последовательность векторов  $k^0, k^1, \dots, k^n, \dots$ . Тогда если  $l, m \geq 0$  и  $l < m$ , то существует такое  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , что  $k_i^l < k_i^m$ . Отметим, что для любых  $l, m$  таких, что  $l < m$ , верно

$$\begin{pmatrix} k^l \\ k^m \end{pmatrix}_n = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} k_i^l \\ k_i^m \end{pmatrix}_p = 0,$$

так как  $\begin{pmatrix} k_i^l \\ k_i^m \end{pmatrix}_p = 0$ , если  $k_i^l < k_i^m$  [2].

Зафиксируем  $r \geq 0$  и возьмем произвольные числа  $a_{k^0}, a_{k^1}, \dots, a_{k^r} \in \mathbb{Q}_p$ . Тогда для любого  $m$  такого, что  $0 \leq m \leq r$ , верно

$$\begin{aligned} & \left\| a_{k^m} \begin{pmatrix} x \\ k^m \end{pmatrix}_n + a_{k^{m+1}} \begin{pmatrix} x \\ k^{m+1} \end{pmatrix}_n + \dots + a_{k^r} \begin{pmatrix} x \\ k^r \end{pmatrix}_n \right\| \geq \\ & \geq \left| \sum_{j=m}^r a_{k^j} \begin{pmatrix} k^m \\ k^j \end{pmatrix}_n \right|_p = \\ & = \left| \sum_{j=m}^r a_{k^j} \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} k_i^m \\ k_i^j \end{pmatrix}_p \right|_p = |a_{k^m}|_p. \end{aligned}$$

Что по пункту 3 теоремы 1.3 означает ортогональность семейства функций

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ k^0 \end{pmatrix}_n, \begin{pmatrix} x \\ k^1 \end{pmatrix}_n, \dots, \begin{pmatrix} x \\ k^r \end{pmatrix}_n \right\}.$$

Так как  $r$  выбрано произвольно, то множество  $n$ -мерных функций Малера ортогонально.

**2 Критерий пространства  $m$  раз непрерывно-дифференцируемых функций  $p$ -адического векторного аргумента**

**Определение 2.1.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Определим множество

$$\nabla^m \mathbb{Z}_p = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}_p^m : \text{если } i \neq j, \text{ тогда } x_i \neq x_j\}.$$

Для функции  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  индуктивно определим функцию  $\Phi_m f : \nabla^{m+1} \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  так, что  $\Phi_0 f := f$ , а

$$\begin{aligned} \Phi_m f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) &= \\ &= \frac{\Phi_{m-1} f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) - \Phi_{m-1} f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1})}{x_m - x_{m+1}}. \end{aligned}$$

Функция  $f \in C^m(\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p)$ , если  $\Phi_m f$  непрерывна на  $\mathbb{Z}_p^{m+1}$ . В пространстве  $m$  раз непрерывно-дифференцируемых функций  $C^m(\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p)$  можно определить норму по формуле

$$\|f\|_m = \max_{i=0, m} \{\|\Phi_i f\|\},$$

где  $\|\Phi_i f\| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p^{i+1}} |\Phi_i f(x)|_p$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  и

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}, \text{ где } k \geq 0. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} & \|\Phi_m f\| = \\ a) & = \max_{j=1, k} \left\{ \frac{1}{|j_1|_p} \left\{ \dots \max_{j_{m-1}=1, j_{m-2}-(m-2)} \left\{ \frac{1}{|j_{m-1}|_p} \times \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\left. \left. \left. \times \frac{1}{|j_m|_p} \right\} \dots \right\} \right\}. \quad b) \quad \|\Phi_m f\| \asymp \max_{j=1, k} \frac{1}{|j|_p^m}, \quad (2.2)$$

то есть  $\|\Phi_m f\| = O(\max_{j=1, k} \frac{1}{|j|_p^m})$  и

$$\max_{j=1, k} \frac{1}{|j|_p^m} = O(\|\Phi_m f\|) \text{ при } k \rightarrow +\infty.$$

*Доказательство.* Пусть  $x, y \in \mathbb{Z}_p$ . Тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$  верна следующая формула [2, с. 138]

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{x}{j} \binom{y}{n-j}. \quad (2.3)$$

Тогда с учетом предыдущего равенства преобразуем функцию  $\Phi_1 f(x+y, x)$

$$\begin{aligned} \Phi_1 f(x+y, x) &= \frac{1}{y} \left( \binom{x+y}{k} - \binom{x}{k} \right) = \\ &= \frac{1}{y} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \binom{x}{j} \binom{y}{k-j} \right) = \\ &= \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{y} \frac{y}{k-j} \binom{x}{j} \binom{y-1}{k-j-1} \right) = \\ &= \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k-j} \binom{x}{j} \binom{y-1}{k-j-1} \right). \end{aligned}$$

С учетом ортогональности двумерных функций Малера (теорема 1.4) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Phi_1 f\| &= \max_{j=0, k-1} \left\{ \left| \frac{1}{k-j} \right| \left\| \binom{x}{j} \binom{y-1}{k-j-1} \right\| \right\} = \\ &= \max_{j=1, k} \frac{1}{|j|_p}. \end{aligned}$$

Очевидно, что пункт *b)* теоремы выполняется для  $\|\Phi_1 f\|$ .

Покажем, что в общем случае  $\Phi_{m-1} f(x_1, \dots, x_m)$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Phi_{m-1} f(x_1, \dots, x_m) &= \quad (2.4) \\ &= \sum_{j_1=0}^{k_{j_1}} A_1 \binom{x_1}{j_1} \left( \sum_{j_2=0}^{k_{j_2}} A_2 \binom{x_2}{j_2} \left( \dots \sum_{j_{m-1}=0}^{k_{j_{m-1}}} A_{m-1} \binom{x_{m-1}}{j_{m-1}} \binom{x_m}{k_{j_m}} \dots \right) \right), \end{aligned}$$

где  $k_{j_1} = k-1$ ,  $k_{j_{m-i}} = k_{j_{m-i-1}} - j_{m-i-1} - 1$ ,

$$A_{m-i} = \frac{1}{k_{j_{m-i-1}} - j_{m-i}}.$$

Очевидно, что  $\Phi_1 f(x_1, x_2)$  удовлетворяет приведенной выше формуле. Формула 2.4 верна для  $k=1$  и пусть она верна для  $k=m-1$ . Покажем, что она верна для  $k=m$ :

$$\begin{aligned} \Phi_m f(x_1, \dots, x_m, y) &= \\ &= \frac{1}{y} (\Phi_{m-1} f(x_1, \dots, x_m) - \Phi_{m-1} f(x_1, \dots, x_m + y)) = \\ &= \frac{1}{y} \sum_{j_1} A_1 \binom{x_1}{j_1} \left( \dots \sum_{j_{m-1}} A_{m-1} \binom{x_{m-1}}{j_{m-1}} \left( \binom{x_m}{k_{j_m}} - \binom{x_m+y}{k_{j_m}} \right) \dots \right) = \\ &= \frac{1}{y} \sum_{j_1} A_1 \binom{x_1}{k_{j_1}} \times \\ &\times \left( \dots \sum_{j_{m-1}} A_{m-1} \binom{x_{m-1}}{k_{j_{m-1}}} \left( \sum_{j_m=0}^{k_{j_m}} \binom{x_m}{j_m} \binom{y}{k_{j_m} - j_m} \right) \dots \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1} A_1 \binom{x_1}{k_{j_1}} \left( \dots \left( \sum_{j_m=0}^{k_{j_m}-1} \frac{1}{k_{j_m} - j_m} \binom{x_m}{j_m} \binom{y-1}{k_{j_m} - j_m - 1} \right) \dots \right).$$

Следовательно, формула (2.4) верна и для  $k=m$ . С учетом ортогональности  $n$ -мерных функций Малера получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Phi_m f(x_1, \dots, x_m, y)\| &= \\ &= \max_{j_1=0, k_{j_1}-1} \dots \max_{j_{m-1}=0, k_{j_{m-1}}-1} \max_{j_m=0, k_{j_m}-1} |A_1 \dots A_{m-1} A_m|_p = \\ &= \max_{j_1=0, k_{j_1}-1} \left\{ |A_1|_p \left\{ \dots \max_{j_{m-1}=0, k_{j_{m-1}}-1} \left\{ |A_{m-1}|_p \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \max_{j_m=0, k_{j_m}-1} |A_m|_p \right\} \dots \right\} = \\ &= \max_{j_1=0, k_{j_1}-1} \left\{ \frac{1}{|k_{j_1} - j_1|_p} \left\{ \dots \max_{j_{m-1}=0, k_{j_{m-1}}-1} \left\{ \frac{1}{|k_{j_{m-1}} - j_{m-1}|_p} \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \max_{j_m=0, k_{j_m}-1} \frac{1}{|k_{j_m} - j_m|_p} \right\} \dots \right\} = \\ &= \max_{j_1=0, k_{j_1}} \left\{ \frac{1}{|j_1|_p} \left\{ \dots \max_{j_{m-1}=0, k_{j_{m-1}}} \left\{ \frac{1}{|j_{m-1}|_p} \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \max_{j_m=0, k_{j_m}} \frac{1}{|j_m|_p} \right\} \dots \right\}. \end{aligned}$$

С учетом замен, введенных в формуле 2.4, получаем доказательство пункта *a)*.

В общем случае для любого  $i, s \in \mathbb{N}$  существует константа  $C_{i,s}$  такая, что

$$\begin{aligned} \max_{j=1, k} \left\{ \frac{1}{|j|_p} \max_{l=1, j-1} \frac{1}{|l|_p^s} \right\} &\leq \max_{j=1, k} \frac{1}{|j|_p^{s+1}} \leq \\ &\leq C_{i,s} \max_{j=1, k} \left\{ \frac{1}{|j|_p} \max_{l=1, j-1} \frac{1}{|l|_p^s} \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{i,s}} \max_{j=1, k} \frac{1}{|j|_p^{s+1}} &\leq \max_{j=1, k} \left\{ \frac{1}{|j|_p} \max_{l=1, j-1} \frac{1}{|l|_p^s} \right\} \leq \\ &\leq \max_{j=1, k} \frac{1}{|j|_p^{s+1}}. \end{aligned}$$

С учетом предыдущих неравенств получаем

$$\begin{aligned} \max_{j_1=1, k} \frac{1}{|j_1|_p^m} &\geq \\ &\geq \max_{j_1=1, k} \left\{ \frac{1}{|j_1|_p} \left\{ \dots \max_{j_{m-1}=1, j_{m-2}-(m-2)} \left\{ \frac{1}{|j_{m-1}|_p} \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \max_{j_m=1, j_{m-1}-(m-1)} \frac{1}{|j_m|_p} \right\} \dots \right\} \geq \\ &\geq \frac{1}{C_m} \max_{j_1=1, k} \left\{ \frac{1}{|j_1|_p} \left\{ \dots \max_{j_{m-1}=1, j_{m-2}-(m-2)} \left\{ \frac{1}{|j_{m-1}|_p^2} \right\} \dots \right\} \right\} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \dots \geq \frac{1}{C_2 \dots C_m} \max_{j=1, k} \frac{1}{|j_1|_p^m}.$$

Предыдущие неравенства доказывают пункт *b*) для произвольного  $\|\Phi_m f\|$ .

**Определение 2.2.** Пусть  $X = (\mathbb{C}_p^n)$  – пространство, линейно сопряженное к  $\mathbb{C}_p^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Будем говорить, что  $f: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{C}_p$  является  $m$  раз непрерывно-дифференцируемой функцией, и писать  $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{C}_p)$ , если существуют непрерывные функции

$$\Phi_j f: \mathbb{Z}_p^{n(j+1)} \rightarrow X^{\otimes m}, \quad 0 \leq j \leq m,$$

удовлетворяющие равенствам  $\Phi_0 f := f$ ,

$$\Phi_j f(x_1, \dots, x_j, x_{j+1})(x_j - x_{j+1}) =$$

$$= \Phi_{j-1} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j) - \Phi_{j-1} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}),$$

где  $1 \leq j \leq m$ ,

$$x_j - x_{j+1} = (x_j^{(1)} - x_{j+1}^{(1)}, x_j^{(2)} - x_{j+1}^{(2)}, \dots, x_j^{(n)} - x_{j+1}^{(n)}).$$

**Замечание 2.1.** Отметим, что функция из определения 2.2, вообще говоря, не единственна. Например, пусть  $f: \mathbb{Z}_p^2 \rightarrow \mathbb{Q}_p$  и  $f(x) = x^{(1)}$  равняется первой координате аргумента. Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^{(1)} - x_2^{(1)} = (1, \quad 0) \begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} - x_2^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= (1 + x_2^{(1)} - x_2^{(2)}, \quad 0 - (x_1^{(1)} - x_2^{(1)})) \begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} - x_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $\Phi_1 f$  не определена однозначно.

Для цилиндрических функций  $f: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$  и  $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n)$ , где  $f_i(x_i): \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  для любого  $i = \overline{1, n}$ , функцию  $\Phi_m f$  можно построить следующим образом. Из определения 2.2 получаем, что

$$(\Phi_1 f)(x_1, x_2)(x_1 - x_2) = (\Phi_0 f)(x_1) - (\Phi_0 f)(x_2).$$

Т. к.  $(\Phi_1 f)(x_1, x_2)$  принимает значения в пространстве  $(\mathbb{C}_p^n)'$ , то предыдущее равенство можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n (\Phi_1 f)_i(x_1, x_2)(x_1^{(i)} - x_2^{(i)}) =$$

$$= (\Phi_0 f)(x_1) - (\Phi_0 f)(x_2) =$$

$$= f_1(x_1^{(1)})f_2(x_1^{(2)})\dots f_n(x_1^{(n)}) -$$

$$- f_1(x_2^{(1)})f_2(x_2^{(2)})\dots f_n(x_2^{(n)}) =$$

$$= f_1(x_1^{(1)})f_2(x_1^{(2)})\dots f_n(x_1^{(n)}) -$$

$$- f_1(x_2^{(1)})f_2(x_1^{(2)})\dots f_n(x_1^{(n)}) +$$

$$+ f_1(x_2^{(1)})f_2(x_1^{(2)})\dots f_n(x_1^{(n)}) -$$

$$- f_1(x_2^{(1)})f_2(x_2^{(2)})\dots f_n(x_1^{(n)}) -$$

$$\dots$$

$$+ f_1(x_2^{(1)})f_2(x_2^{(2)})\dots f_n(x_1^{(n)}) -$$

$$- f_1(x_2^{(1)})f_2(x_2^{(2)})\dots f_n(x_2^{(n)}) =$$

$$= \frac{(f_1(x_1^{(1)}) - f_1(x_2^{(1)}))}{(x_1^{(1)} - x_2^{(1)})} (x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) f_2(x_1^{(2)})\dots f_n(x_1^{(n)}) + \dots$$

$$+ f_1(x_2^{(1)})f_2(x_2^{(2)})\dots \frac{(f_n(x_1^{(n)}) - f_n(x_2^{(n)}))}{(x_1^{(n)} - x_2^{(n)})} (x_1^{(n)} - x_2^{(n)}) =$$

$$= (\Phi_1 f_1)(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})(x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) \times$$

$$\times (\Phi_0 f_2)(x_1^{(2)})\dots (\Phi_0 f_n)(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) +$$

$$+ (\Phi_0 f_1)(x_2^{(1)})(\Phi_1 f_2)(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \times$$

$$\times (x_1^{(2)} - x_2^{(2)})\dots (\Phi_0 f_n)(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) + \dots +$$

$$+ (\Phi_0 f_1)(x_1^{(1)})(\Phi_0 f_2)(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \times$$

$$\times \dots (\Phi_1 f_n)(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})(x_1^{(n)} - x_2^{(n)}).$$

Откуда следует, что

$$(\Phi_1 f)_i(x_1, x_2) = \prod_{i' < i} \Phi_0 f_{i'}(x_2^{(i')}) \times$$

$$\times \Phi_1 f_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \times \prod_{i' > i} \Phi_0 f_{i'}(x_1^{(i')}) \quad (2.5)$$

для любого  $1 \leq i \leq n$ .

Из определения 2.2 получаем, что для произвольного  $m \geq 1$

$$\Phi_m f(x_1, \dots, x_{m+1}) =$$

$$= ((\Phi_m f)_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_{m+1}) : 1 \leq i_k \leq n, \forall k = \overline{1, m}). \quad (2.6)$$

Предположим, что  $(\Phi_m f)_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_{m+1})$  для фиксированного  $m \geq 1$  имеет вид

$$(\Phi_m f)_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_{m+1}) =$$

$$(2.7)$$

$$= \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) \times$$

$$\times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}),$$

где  $k_{i_m} + \sum_{i_m} k_{i_m} = m$  и  $1 \leq j_{k_{i_m}}, j_{k_{i_m}}, j_{k_{i_m}+1} \leq m$  для любых значений  $k_{i_m}$  и  $k_{i_m}$ , т. е. третий множитель не зависит от  $x_{m+1}$ , либо

$$(\Phi_m f)_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_{m+1}) = 0.$$

Очевидно, что элементы  $\Phi_1 f(x_1, x_2)$  удовлетворяет формуле 2.7. асмотрим  $\Phi_{m+1} f(x_1, \dots, x_{m+2})$ .

$$\sum_{i_{m+1}=1}^n (\Phi_{m+1} f)_{i_1 \dots i_{m+1}}(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2})(x_{m+1}^{(i_{m+1})} - x_{m+2}^{(i_{m+1})}) =$$

$$= (\Phi_m f)_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) -$$

$$- (\Phi_m f)_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_m, x_{m+2}) =$$

$$= \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) \times$$

$$\times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}) -$$

$$- \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m}(x_{m+2}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+2}^{(i_m)}) \times$$

$$\times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+1}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) - \right. \\
 &\quad - \Phi_0 f_1 (x_{m+2}^{(1)}) \prod_{1 < i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+1}^{(i_m)}) \times \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) + \\
 &\quad + \Phi_0 f_1 (x_{m+2}^{(1)}) \prod_{1 < i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+1}^{(i_m)}) \times \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) - \\
 &\quad - \Phi_0 f_1 (x_{m+2}^{(1)}) \Phi_0 f_2 (x_{m+2}^{(2)}) \prod_{2 < i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+1}^{(i_m)}) \times \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) + \\
 &\quad + \Phi_0 f_1 (x_{m+2}^{(1)}) \Phi_0 f_2 (x_{m+2}^{(2)}) \prod_{2 < i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+1}^{(i_m)}) \times \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) - \\
 &\quad \dots + \\
 &\quad + \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+2}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) - \\
 &\quad - \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+2}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) \times \\
 &\quad \times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}^{(i_m)}}) = \\
 &= \left( \Phi_1 f_1 (x_{m+1}^{(1)}, x_{m+2}^{(1)}) (x_{m+1}^{(1)} - x_{m+2}^{(1)}) \prod_{1 < i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+1}^{(i_m)}) \times \right. \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) + \\
 &\quad \dots + \\
 &\quad \left. + \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m} (x_{m+2}^{(i_m)}) \times \right. \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}+1} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}, x_{m+2}^{(i_m)}) (x_{m+1}^{(i_m)} - x_{m+2}^{(i_m)}) \left. \right) \\
 &\quad \times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}^{(i_m)}}).
 \end{aligned}$$

Тогда для  $i_{m+1} < i_m$  элемент

$$\begin{aligned}
 &(\Phi_{m+1} f)_{i_1, \dots, i_{m+1}} (x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}) = \\
 &= \prod_{i_{m+1} < i_{m+1}} \Phi_0 f_{i_{m+1}} (x_{m+2}^{(i_{m+1})}) \times \Phi_1 f_{i_{m+1}} (x_{m+1}^{(i_{m+1})}, x_{m+2}^{(i_{m+1})}) \times \\
 &\quad \times \prod_{i_{m+1} > i_{m+1}} \Phi_0 f_{i_{m+1}} (x_{m+1}^{(i_{m+1})}) \times \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) \times \\
 &\quad \times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}^{(i_m)}}),
 \end{aligned}$$

где  $1 + k_{i_m} + \sum_{i_m} k_{i_m} = m + 1$  и третий, четвертый и пятый множители не зависят от  $x_{m+2}$ .

Для  $i_{m+1} = i_m$  элемент

$$\begin{aligned}
 &(\Phi_{m+1} f)_{i_1, \dots, i_{m+1}} (x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}) = \\
 &= \prod_{i_{m+1} < i_{m+1}} \Phi_0 f_{i_{m+1}} (x_{m+2}^{(i_{m+1})}) \times \\
 &\quad \times \Phi_{k_{i_m}+1} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}, x_{m+2}^{(i_m)}) \times
 \end{aligned}$$

$$\times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m} (x_{j_1}^{(i_m)}, \dots, x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}^{(i_m)}}),$$

где  $k_{i_m} + 1 + \sum_{i_m} k_{i_m} = m + 1$  и третий множитель не зависит от  $x_{m+2}$ . При  $i_{m+1} > i_m$  получаем, что  $(\Phi_{m+1} f)_{i_1, \dots, i_{m+1}} (x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}) = 0$ . Таким образом, представление для  $(\Phi_{m+1} f)_{i_1, \dots, i_{m+1}} (x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2})$  удовлетворяет предположению 2.7. Из чего следует, что для цилиндрической функции получена рекуррентная формула для выражения элементов  $\Phi_{m+1} f$  через элементы  $\Phi_m f$ . В данном случае функция  $\Phi_m f$  определена однозначно, т. к. ее элементы представляются в виде произведения однозначно определенных функций  $\Phi_i f_j$ , где  $f_j : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ .

Из полученного выражения для матричных элементов  $(\Phi_m f)_{i_1, \dots, i_m}$  непосредственно вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Пусть  $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$  и

$f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$ , где  $f_i \in C^1(\mathbb{Z}_p)$  для любого  $i = \overline{1, n}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 &\|\Phi_m f\| = \\
 &= \max \{ \|\Phi_{i_1} f_1\| \cdot \|\Phi_{i_2} f_2\| \cdot \dots \cdot \|\Phi_{i_n} f_n\| : \\
 &\quad i_1, \dots, i_n \geq 0, i_1 + \dots + i_n = m \},
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

где  $\Phi_0 f_i := f_i$  для любого  $i = \overline{1, n}$ .

**Замечание 2.2.** Т. к.  $n$ -мерная функция Малера является цилиндрической функцией и для любой функции  $f \in C(\mathbb{Z}_p^n)$  имеет место пред-

ставление  $f(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} f_{k_1, \dots, k_n} \binom{x}{k}_n$ , то можем определить  $\Phi_m f$  следующим образом

$$\Phi_m f(x_1, \dots, x_{m+1}) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} f_{k_1, \dots, k_n} \Phi_m \binom{x}{k}_n,$$

причем в данном случае  $\Phi_m f$  определена однозначно.

**Теорема 2.3.** Пусть имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} f_{k_1, \dots, k_n} \binom{x}{k}_n,$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$  и  $\binom{x}{k}_n = \prod_{i=1}^n \binom{x_i}{k_i}$ . Тогда

$f(x) \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow \infty} |f_{k_1, \dots, k_n}|_p \max_{j=1, \dots, k_M} \frac{1}{|j|_p} = 0,$$

где  $k_M = \max \{k_1, \dots, k_n\}$ .

**Доказательство.** Функция  $f(x) \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$  тогда и только тогда, когда

$$\|f\| = \max_{i=1, \overline{m}} \{\|\Phi_i f\|\} < +\infty,$$

то есть  $\|\Phi_i f\| < +\infty$  для любого  $i = \overline{1, m}$ . Ряд

$$f(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} f_{k_1, \dots, k_n} \binom{x}{k}_n$$

и абсолютно, значит, для любого  $i = \overline{1, m}$  имеет

$$\text{место формула } \Phi_i f(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} f_{k_1, \dots, k_n} \Phi_i \binom{x}{k}_n.$$

А так как  $\|\Phi_i f\| < +\infty$ , следовательно, ряд

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} f_{k_1, \dots, k_n} \Phi_i \binom{x}{k}_n$$

сходится. Из критерия сходимости рядов в пространствах с ультраметрикой ([3], с. 24) вытекает, что

$$\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k_1, \dots, k_n} f_{k_1, \dots, k_n} \Phi_i \binom{x}{k}_n \right\| = 0.$$

Тогда с учетом теоремы 2.2 получаем

$$\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow +\infty} |f_{k_1, \dots, k_n}|_p \times \max_{i_1, \dots, i_n \geq 0, i_1 + \dots + i_n = i} \left\| \Phi_{i_1} \binom{x_1}{k_1} \dots \Phi_{i_n} \binom{x_n}{k_n} \right\| = 0.$$

По теореме 2.1 предыдущее равенство эквивалентно

$$\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow +\infty} |f_{k_1, \dots, k_n}|_p \times \max_{i_1, \dots, i_n \geq 0, i_1 + \dots + i_n = i} \left\{ \max_{j=1, k_1} \frac{1}{|j|_p^{i_1}} \dots \max_{j=1, k_n} \frac{1}{|j|_p^{i_n}} \right\} = 0,$$

которое в свою очередь эквивалентно

$$\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow \infty} |f_{k_1, \dots, k_n}|_p \max_{j=1, k_M} \frac{1}{|j|_p} = 0, \quad (2.9)$$

где  $k_M = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ .

Приведенные выше рассуждения верны для любого  $i = \overline{1, m}$ . Очевидно, что если для  $i = m$  выполняется равенство 2.9, то оно выполняется и для  $i = \overline{1, m-1}$ . Следовательно,  $f(x) \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow \infty} |f_{k_1, \dots, k_n}|_p \max_{j=1, k_M} \frac{1}{|j|_p^m} = 0,$$

где  $k_M = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ .

### 3 Условие сходимости ряда Фурье функций $p$ -адического векторного аргумента

Напомним определение частичных сумм ряда Фурье. Обозначим  $\mathbb{Z}_p^n$  через  $G$ . Очевидным является тот факт, что  $G$  – компактная группа. Пусть  $H_0 \hookrightarrow G$  – открыто-компактная подгруппа, а  $H_N = p^N H_0 \subset \mathbb{Z}_p^n$ . С учетом двойственности Понтрягина имеем точные последовательности

$$H \hookrightarrow G \rightarrow G/H, \quad \widehat{H} \leftarrow \widehat{G} \leftarrow \widehat{G/H} = H_G^{\perp}.$$

Фактор-группа компактной группы по открытой

подгруппе является конечной. Так как  $(H_N)_G^{\perp} \cong G/H_N$ , то  $(H_N)_G^{\perp}$  имеет конечное число элементов. Тогда определим частичную сумму ряда Фурье функции заданной на  $\mathbb{Z}_p^n$ .

**Определение 3.1.** Частичной суммой ряда Фурье функции  $f(t): C^1(\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{C}_p)$  будем называть функцию

$$(S_N f)(x) = \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} f_k \chi_p((k, x)), \quad (3.1)$$

где  $(k, x) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$ ,  $k_j$  – представитель класса смежности в  $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$  с нулевой целой частью  $[k_j]_p = 0$ . Коэффициенты Фурье находятся по формуле  $f_k = V \int_{\mathbb{Z}_p^n} f(t) \overline{\chi_p((k, t))} dt$ , где  $V \int_{\mathbb{Z}_p^n}$  – интеграл Волкенборна [2, с. 106].

Более детальное обоснование введенного определения можно найти в [4].

**Лемма 3.1.** Пусть  $f \in C(\mathbb{Z}_p^n)$  и

$$f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

Тогда  $f_k = f_{k_1} \dots f_{k_n}$  и  $S_N f = S_N f_1 \dots S_N f_n$ , где  $f_k, f_{k_i}$  – коэффициенты Фурье, а  $S_N f, S_N f_i$  – частичные суммы ряда Фурье.

*Доказательство.* Из определения 3.1 получаем, что

$$\begin{aligned} f_k &= V \int_{\mathbb{Z}_p^n} f(x) \overline{\chi_p((k, x))} dx = \\ &= V \int_{\mathbb{Z}_p^n} \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \prod_{i=1}^n \overline{\chi_p(k_i x_i)} dx = \\ &= V \int_{\mathbb{Z}_p^n} \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \chi_p(k_i x_i) dx = f_{k_1} \dots f_{k_n}, \end{aligned}$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $k_i \in \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$ .

Далее рассмотрим частичные суммы ряда Фурье

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} f_k \chi_p((k, x)) = \\ &= \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} \left( \prod_{i=1}^n f_{k_i} \prod_{i=1}^n \chi_p(k_i x_i) \right) = \\ &= \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} \left( \prod_{i=1}^n f_{k_i} \chi_p(k_i x_i) \right) = \\ &= \sum_{|k_1| \leq p^N, \dots, |k_n| \leq p^N} \prod_{i=1}^n (f_{k_i} \chi_p(k_i x_i)) = \\ &= \sum_{|k_1| \leq p^N} \dots \sum_{|k_n| \leq p^N} \prod_{i=1}^n (f_{k_i} \chi_p(k_i x_i)) = \\ &= \sum_{|k_1| \leq p^N} f_{k_1} \chi_p(k_1 x_1) \dots \sum_{|k_n| \leq p^N} f_{k_n} \chi_p(k_n x_n) = \\ &= S_N f_1(x_1) \dots S_N f_n(x_n). \end{aligned}$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ . Тогда ряд Фурье функции  $f$  сходится, если  $m \geq n$ .

*Доказательство.* По теореме 1.4 имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \binom{x}{k}_n, \text{ где } k = (k_1, \dots, k_n).$$

Обозначим через  $x^{\{N\}}$  остаток деления числа  $x$  на  $p^N$ , то есть  $x^{\{N\}} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i$ . Пусть

$$r_{k,N}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{x^{\{N\}}}{j} \frac{(-1)^{k-j} p^N}{k-j+1}. \text{ Тогда из [5] известно,}$$

что частичные суммы ряда Фурье одномерной функции Малера имеют вид

$$\left( S_N \binom{x}{k} \right) (x) = \binom{x^{\{N\}}}{k} + r_{k,N}(x),$$

а также  $\|r_{k,N}\| = p^{-N} \max_{j=2, k+1} \frac{1}{|j|_p}$ .

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье функции  $f$ :

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k S_N \binom{x}{k}_n = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \prod_{i=1}^n S_N \binom{x_i}{k_i} = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \left( \binom{x_1^{\{N\}}}{k_1} + r_{k_1, N}(x_1) \right) \dots \left( \binom{x_n^{\{N\}}}{k_n} + r_{k_n, N}(x_n) \right) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \binom{x_1^{\{N\}}}{k_1} \dots \binom{x_n^{\{N\}}}{k_n} + \\ &+ \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \left( \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in A} \binom{x_i^{\{N\}}}{k_i} \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus A} r_{k_j, N}(x_j) \right) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \binom{x_1^{\{N\}}}{k_1} \dots \binom{x_n^{\{N\}}}{k_n} + \\ &+ \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \left( \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \prod_{i \in A} \binom{x_i^{\{N\}}}{k_i} \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus A} r_{k_j, N}(x_j) \right) =: \\ &=: A_N(x) + B_N(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что  $A_N(x) \rightarrow f(x)$  при  $N \rightarrow \infty$  для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$ . Покажем, что  $B_N(x) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$ .

По теореме 2.3 функция  $f(x) \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow \infty} |f_{k_1, \dots, k_n}|_p \max_{j=1, k_M} \frac{1}{|j|_p^m} = 0,$$

где  $k_M = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ . И пусть  $l$  – количество элементов в множестве  $\{1, \dots, n\} \setminus A$ ,  $0 \leq l \leq n$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \prod_{i \in A} \binom{x_i^{\{N\}}}{k_i} \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus A} r_{k_j, N}(x_j) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} \left\| f_k \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus A} r_{k_j, N}(x_j) \right\| \leq \\ &\leq p^{-lN} \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} |f_k|_p \max_{j=2, k_l+1} \frac{1}{|j|_p} \dots \max_{j=2, k_l+1} \frac{1}{|j|_p} \leq \end{aligned}$$

$$\leq p^{-lN} \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} |f_k|_p \max_{j=2, k_M+1} \frac{1}{|j|_p^l},$$

где  $k_M = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ .

Так как  $m \geq n$ , то для любого  $l \in \{0, \dots, n\}$  имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k|_p \max_{j=2, k_M+1} \frac{1}{|j|_p} = 0$ . Это означает,

что ряд  $\sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} |f_k|_p \max_{j=2, k_M+1} \frac{1}{|j|_p}$  сходится и его значение не зависит от  $N$ . Это означает, что

$$p^{-lN} \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} |f_k|_p \max_{j=2, k_M+1} \frac{1}{|j|_p^l} \rightarrow 0, \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\left\| \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{+\infty} f_k \prod_{i \in A} \binom{x_i^{\{N\}}}{k_i} \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus A} r_{k_j, N}(x_j) \right\| \rightarrow 0,$$

при  $N \rightarrow \infty$ .

Сумма  $B_N(x)$  содержит конечное число членов, стремящихся к нулю, при  $N \rightarrow \infty$ . Значит,  $B_N(x) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  для любого  $x \in \mathbb{Z}_p^n$ .

**Замечание 3.1.** Приведем пример функции  $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ ,  $m < n$ , ряд Фурье которой не сходится. Пусть  $m = 1$ ,  $n = 2$  и

$$f(x) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} f_k \binom{x_1}{k_1} \binom{x_2}{k_2}.$$

Коэффициент  $f_k$  удовлетворяет следующему условию

$$|f_k|_p = p^{[(N_1 + 2N_2)/2]} = p^{[3N_1/2]},$$

где  $\max_{i=1, \max\{k_1, k_2\}} \frac{1}{|j|_p} = p^{N_1}$  и  $\max_{i=1, \max\{k_1, k_2\}} \frac{1}{|j|_p^2} = 2p^{N_1}$ .

Из условия определения коэффициентов Малера следует, что  $f \in C(\mathbb{Z}_p^2)$ , так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k|_p \max_{i=1, \max\{k_1, k_2\}} \frac{1}{|j|_p} = 0.$$

Как было показано в предыдущей теореме,  $S_N f$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} f_k \binom{x_1^{\{N\}}}{k_1} \binom{x_2^{\{N\}}}{k_2} + \\ &+ \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} f_k \binom{x_1^{\{N\}}}{k_1} r_{k_2, N}(x_2) + \\ &+ \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} f_k \binom{x_2^{\{N\}}}{k_2} r_{k_1, N}(x_1) + \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} f_k r_{k_1, N}(x_1) r_{k_2, N}(x_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} f_k r_{k_1, N}(x_1) r_{k_2, N}(x_2)$ . Из условия определения  $f_k$  получаем, что

$$\begin{aligned} &\lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty} \left\| f_k r_{k_1, N}(x_1) r_{k_2, N}(x_2) \right\| = \\ &= \lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty} |f_k|_p \max_{i=1, k_1} \frac{1}{|j|_p} \max_{i=1, k_2} \frac{1}{|j|_p} = \end{aligned}$$



$$= \lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty} |f_k|_p \frac{\max_{i=1, \max\{k_1, k_2\}} 1}{|j|_p^2} = \infty.$$

Это означает, что ряд

$$\sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} f_k r_{k_1, N}(x_1) r_{k_2, N}(x_2)$$

расходится, так как не сходится ряд представляющий частичную сумму ряда Фурье.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вейс, Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс; пер. с англ. В.В. Жаринова; под ред. Е.Д. Соломенцева, С.Б. Стечкина. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
2. Schikhov, W. Ultrametric calculus. An introduction to  $p$ -adic analysis / W. Schikhov. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984. – 306 p.

3. Радына, А.Я. Пачаткі нархімедавага аналізу: дапам. для студэнтаў мех.-мат. фак. / А.Я. Радына, Я.М. Радына, Я.В. Радына. – Мінск: БДУ, 2010. – 111 с.

4. Заренок М.А.  $p$ -Адическое ядро Дирихле и сходимость многомерного ряда Фурье для непрерывных и суммируемых функций на  $\mathbb{Z}_p^n$ . // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 1. – С. 90–95.

5. Заренок М.А. Сходимость рядов Фурье непрерывно-дифференцируемых функций  $p$ -адического аргумента. // Вестник ВГУ. – 2012. № 1 (67). – С. 12–17.

6. Владимиров, В.С.  $p$ -Адический анализ и математическая физика / В.С. Владимиров, В.И. Волович, Е.И. Зеленов. – М.: Наука: Физматлит, 1994. – 352 с.

Поступила в редакцию 16.05.12.

УДК 512.542

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ СИСТЕМАМИ КВАЗИПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

В.А. Ковалева, Чжао Сяоюй

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## FINITE GROUPS WITH GIVEN SYSTEMS OF QUASIPERMUTABLE SUBGROUPS

V.A. Kovalyova, Zhao Xiaoyu

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Пусть  $G$  – конечная группа. Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется квазиперестановочной в  $G$ , если  $A$  либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару  $(K, H)$  из  $G$ . Изучаются конечные группы с заданными системами квазиперестановочных подгрупп.

**Ключевые слова:** конечная группа, максимальная пара, (слабо) квазиперестановочная подгруппа, обобщенная подгруппа Фиттинга,  $p$ -нильпотентная группа,  $\mathcal{U}$ -гиперцентр.

Let  $G$  be a finite group. A subgroup  $A$  of  $G$  is said to be quasipermutable in  $G$  if  $A$  either covers or avoids every maximal pair  $(K, H)$  of  $G$ . We study the finite groups with given systems of quasipermutable subgroups.

**Keywords:** finite group, maximal pair, (weakly) quasipermutable subgroup, generalized Fitting subgroup,  $p$ -nilpotent group,  $\mathcal{U}$ -hypercentre.

### Introduction

Throughout this paper, all groups considered are finite. We write  $\mathcal{U}$  to denote the class of all supersoluble groups.

Let  $A$  be a subgroup of a group  $G$ ,  $K \leq H \leq G$ . Then we say that  $A$  covers the pair  $(K, H)$  if  $AH = AK$ ;  $A$  avoids  $(K, H)$  if  $A \cap H = A \cap K$ . A subgroup  $H$  of  $G$  is said to be quasinormal or permutable in  $G$  if  $HE = EH$  for all subgroups  $E$  of  $G$ . The permutable subgroups have many interesting properties. In particular, if  $E$  is a permutable subgroup of  $G$ , then for every maximal pair of  $G$ , that is, a pair  $(K, H)$ , where  $K$  is a maximal subgroup of  $H$ ,  $E$  either covers or avoids  $(K, H)$ . This observation leads us to the following generalizations of permutability.

**Definition.** Let  $A$  be a subgroup of a group  $G$ . We say that:

- (1)  $A$  is quasipermutable in  $G$  if  $A$  either covers or avoids every maximal pair  $(K, H)$  of  $G$ .
- (2)  $A$  is weakly quasipermutable in  $G$  if  $G$  has a subgroup  $T$  and a quasipermutable subgroup  $C$  such that  $G = AT$  and  $T \cap A \leq C \leq A$ .

In this paper we continue the research of the paper [1] and study the finite groups with given systems of quasipermutable subgroups and weakly quasipermutable subgroups. Our main goal here is to prove the following result.

**Theorem A.** Let  $G$  be a group. The following statements are equivalent:

- (1)  $G$  is supersoluble.
- (2) Every subgroup of  $F^*(G)$  is quasipermutable in  $G$ .
- (3) Every cyclic subgroup of  $F^*(G)$  with prime order and order 4 is weakly quasipermutable in  $G$ .

In this theorem  $F^*(G)$  denotes the generalized Fitting subgroup of  $G$ , that is, the product of all normal quasinilpotent subgroups of  $G$ ; see [2, Chapter X].

The proof of Theorem A consists of a large number steps and the following results are the main stages of it.

**Theorem B.** Let  $G$  be a group and  $p$  a prime dividing  $|G|$  such that  $(|G|, p-1) = 1$ . Then  $G$  is  $p$ -nilpotent if and only if for Sylow  $p$ -subgroup  $P$  of  $G$  either all maximal subgroups of  $P$  or all cyclic subgroup of  $P$  with prime order and order 4 (if  $P$  is a non-abelian 2-group) are weakly quasipermutable in  $G$ .

A chief factor  $H/K$  of a group  $G$  is called  $\mathcal{U}$ -central provided  $H/K \times (G/C_G(H/K)) \in \mathcal{U}$ . The product of all normal subgroups of a group  $G$  whose  $G$ -chief factors are  $\mathcal{U}$ -central in  $G$  is called the  $\mathcal{U}$ -hypercentre of  $G$  and denoted by  $Z_{\mathcal{U}}(G)$  [3].

**Theorem C.** Let  $E$  be a normal subgroup of a group  $G$ . Suppose that all cyclic subgroups of  $E$  of prime order and order 4 are weakly quasispermutable in  $G$ . Then  $E \leq Z_u(G)$ .

Note that Theorem C is independently interesting because it generalizes the main results of some papers (see, for example, [17]–[28]).

All unexplained notations and terminologies are standard. The reader is referred to [3]–[5] if necessary.

**1 Preliminaries**

We need the following properties of weakly quasispermutable subgroups.

**Lemma 1.1** [1, Lemma 2.15]. Let  $H$  be a normal subgroup of a group  $G$  and  $K$  a weakly quasispermutable subgroup of  $G$ . Then:

- (1) If  $K \leq E \leq G$ , then  $K$  is weakly quasispermutable in  $E$ .
- (2) If  $H \leq K$ , then  $K/H$  is weakly quasispermutable in  $G/H$ .
- (3) If  $(|H|, |K|) = 1$ , then  $HK/H$  is weakly quasispermutable in  $G/H$ .

**Lemma 1.2** [1, Lemma 2.15]. Let  $\mathcal{F}$  be a saturated formation containing all nilpotent groups and  $G$  a group with soluble  $\mathcal{F}$ -residual  $P = G^{\mathcal{F}}$ . Suppose that every maximal subgroup of  $G$  not containing  $P$  belongs to  $\mathcal{F}$ . Then  $P$  is a  $p$ -group for some prime  $p$ . In addition, if every cyclic subgroup of  $P$  with prime order and order 4 (if  $p = 2$  and  $P$  is non-abelian) is weakly quasispermutable in  $G$ , then  $|P| = p$  is not the smallest prime dividing  $|G|$ .

**Lemma 1.3** [1, Lemma 2.5]. Every quasispermutable subgroup of a group  $G$  is subnormal in  $G$ .

**Lemma 1.4** [6, Lemma 2.9]. Let  $G$  be a group,  $p$  the smallest prime divisor of  $|G|$  and  $P$  a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . If every maximal subgroup of  $P$  has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent.

**Lemma 1.5** [7]. Let  $A$  be a subnormal  $\pi$ -subgroup of a group  $G$ . Then  $A \leq O_\pi(G)$ .

Let  $P$  be a  $p$ -group. If  $P$  is not a non-abelian 2-group we use  $\Omega(P)$  to denote the subgroup  $\Omega_1(P)$ . Otherwise,  $\Omega(P) = \Omega_2(P)$ .

**Lemma 1.6** [8]. Let  $P$  be a  $p$ -group of class at most 2. Suppose that  $\exp(P/Z(P))$  divides  $p$ .

- (1) If  $p > 2$ , then  $\exp(\Omega(P)) = p$ .
- (2) If  $P$  is a non-abelian 2-group, then  $\exp(\Omega(P)) = 4$ .

**Lemma 1.7** (See [9, II] or [3, IV, Chapter 6]). Let  $P$  be a normal  $p$ -subgroup of a group  $G$ . If  $\Omega \leq Z_u(G)$ , then  $P \leq Z_u(G)$ .

**Lemma 1.8** [2, Chapter X]. Let  $G$  be a group. If  $F^*(G)$  is soluble, then  $F^*(G) = F(G)$ .

**Lemma 1.9** [10, Theorem C]. Let  $E$  be a subgroup of a group  $G$ . If every  $G$ -chief factor below  $F^*(G)$  is cyclic, then every  $G$ -chief factor below  $E$  is cyclic.

**2 Proof of Theorems B, C and A**

**Proof of Theorem B.** We only need to prove the “if part”. Suppose that this is false and let  $G$  be a counterexample with minimal order.

(1)  $O_{p'}(G) = 1$ .

Suppose that  $O_{p'}(G) \neq 1$ . By Lemma 1.1 (3), the hypothesis holds for  $G/O_{p'}(G)$ . Therefore  $G/O_{p'}(G)$  is  $p$ -nilpotent by the choice of  $G$ , a contradiction. Hence  $O_{p'}(G) = 1$ .

(2) Every maximal subgroup of  $P$  is weakly quasispermutable in  $G$ .

Suppose that this is false. Then by hypothesis every cyclic subgroup of  $P$  with prime order and order 4 (if  $P$  is a non-abelian 2-group) is weakly quasispermutable in  $G$ . Since  $G$  is not  $p$ -nilpotent, it has a  $p$ -closed Schmidt subgroup [11, IV, Theorem 5.4]  $H = H_p \rtimes H_q$ , where  $H_p \leq P$ . By Lemma 1.1 (1), every cyclic subgroup of  $H_p$  with prime order and order 4 (if  $H_p$  is a non-abelian 2-group) is weakly quasispermutable in  $H$ . Then by Lemma 1.2,  $|H_p| = p$ . Hence  $H/C_H(H_p) \cong L \leq \text{Aut}(H_p)$  and  $\text{Aut}(H_p)$  is a cyclic subgroup with order  $p-1$ . This contradiction shows that every maximal subgroup of  $P$  is weakly quasispermutable in  $G$ .

(3)  $O_p(G) = 1$ .

Suppose that  $O_p(G) \neq 1$ . Let  $N$  be a minimal normal subgroup of  $G$  contained in  $O_p(G)$ . Then  $N \leq P$  and by Lemma 1.1 (2) the hypothesis holds for  $G/N$ . Therefore  $G/N$  is  $p$ -nilpotent by the choice of  $G$ . Since the class of all  $p$ -nilpotent groups is a saturated formation,  $N$  is the only minimal normal subgroup of  $G$  contained in  $P$ ,  $N \not\leq \Phi(G)$  and  $N \not\leq Z(G)$ . Moreover,  $G$  is  $p$ -soluble. Since  $(|G|, p-1) = 1$ ,  $|N| > p$ . But  $O_{p'}(G) = 1$  by (1). Hence  $N$  is the only minimal normal subgroup of  $G$ . Let  $M$  be a maximal subgroup of  $G$  such that  $N \not\leq M$ . Then  $G = N \rtimes M$  and  $N = O_p(G)$ . Indeed,

$$O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M).$$

Since  $O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$  by [9],  $O_p(G) \cap M$  is normal in  $G$ , so  $O_p(G) \cap M = 1$ . Hence  $N = O_p(G)$ .

Since  $G = N \rtimes M$ ,  $AM = G$  for every maximal subgroup  $A$  of  $P$  containing  $N$ . Moreover,  $M = G/N$  is a  $p$ -nilpotent supplement of  $A$  in  $G$ . Therefore by Lemma 1.4, some maximal subgroup  $V$  of  $P$  neither contains  $N$  nor has a  $p$ -nilpotent supplement in  $G$ . Then by (2),  $V$  is weakly quasipermutable in  $G$ . Let  $C$  and  $T$  be subgroups of  $G$  such that  $VT = G$ ,  $C$  is quasipermutable in  $G$  and  $T \cap V \leq C \leq V$ . By Lemma 1.3,  $C$  is subnormal in  $G$ . Hence by Lemma 1.5,  $C \leq N$ . If  $C = 1$ , then  $T \cap V = 1$ , so  $|T_p| = |P \cap T| = p$ . Hence  $T$  is  $p$ -nilpotent by [12, Theorem 10.1.9], a contradiction. Therefore  $C \neq 1$ . Since  $C$  is quasipermutable in  $G$ ,  $CM = G$ , so  $C = N$ , a contradiction. Thus  $O_p(G) = 1$ .

*Final contradiction.* Let  $V$  be a maximal subgroup of  $P$ . By (2),  $V$  is weakly quasipermutable in  $G$ . Let  $C$  and  $T$  be subgroups of  $G$  such that  $VT = G$ ,  $C$  is quasipermutable in  $G$  and  $T \cap V \leq C \leq V$ . By Lemma 1.3,  $C$  is subnormal in  $G$ . Hence by Lemma 1.5,  $C \leq O_p(G) = 1$ . Then  $T \cap V = 1$ , so  $|T_p| = |P \cap T| = p$  and  $T$  is  $p$ -nilpotent. Therefore by Lemma 1.4,  $G$  is  $p$ -nilpotent. This contradiction completes the proof of Theorem B.

**Proof of Theorem C.** Suppose that theorem is false and consider a counterexample  $(G, E)$  for which  $|G||E|$  is minimal. Let  $P$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $E$ , where  $p$  is the smallest prime dividing  $|E|$ .

(1) *If  $X$  is a Hall subgroup of  $E$ , the hypothesis is still true for  $(X, X)$ . If, in addition,  $X$  is normal in  $G$ , then the hypothesis also holds for  $(G, X)$  and  $(G/X, E/X)$ .*

This follows directly from Lemma 1.1.

(2) *If  $X$  is a non-identity normal Hall subgroup of  $E$ , then  $X = E$ .*

Since  $X$  is a characteristic subgroup of  $E$ , it is normal in  $G$ . Hence by (1) the hypothesis is still true for  $(G/X, E/X)$  and  $(G, X)$ . If  $X \neq E$ , then  $E/X \leq Z_u(G/X)$  and  $X \leq Z_u(G)$  by the choice of  $(G, E)$ . Hence  $E \leq Z_u(G)$ , a contradiction. Thus  $X = E$ .

(3)  $E = P$ .

By Theorem B,  $E$  is  $p$ -nilpotent. If  $H$  is a Hall  $p'$ -subgroup of  $E$ , then  $H$  is normal in  $E$ . Suppose that  $E \neq P$ . Then  $H \neq E$ , which contradicts (2). Thus  $E = P$ .

(4)  $P$  is not cyclic.

This follows from (3) and [13, 7, Theorem 6.1].

(5)  $G$  has a normal subgroup  $R \leq P$  such that  $P/R$  is a non-cyclic chief factor of  $G$ ,  $R \leq Z_u(G)$

and  $V \leq R$  for any normal subgroup  $V \neq P$  of  $G$  contained in  $P$ .

Let  $P/R$  be a chief factor of  $G$ . Then by Lemma 1.1 the hypothesis holds for  $(G, R)$ . Hence  $R \leq Z_u(G)$ , so  $P/R$  is non-cyclic by the choice of  $(G, E)$ . Let  $V \neq P$  be any normal subgroup of  $G$  contained in  $P$ . Then  $V \leq Z_u(G)$  by the choice of  $(G, E)$  and Lemma 1.1. If  $V \not\leq R$ , then by [14, Lemma 2.3],  $P = VR \leq Z_u(G)$ , a contradiction. Hence  $V \leq R$ .

(6)  $\Omega(P) = P$ .

Suppose that  $\Omega(P) < P$ . Then by (5),  $\Omega(P) \leq Z_u(G)$ . Hence by Lemma 1.7,  $P \leq Z_u(G)$ , a contradiction. Thus  $\Omega(P) = P$ .

*The final contradiction.* Let  $H/R$  be any minimal subgroup of  $P/R \cap Z(G_p/R)$ , where  $G_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . Let  $x \in H \setminus R$  and  $L = \langle x \rangle$ . Then  $|L| = p$  or  $|L| = 4$  by (6) and Lemma 1.6. Hence by hypothesis  $L$  is weakly quasipermutable in  $G$ . Let  $C$  and  $T$  be subgroups of  $G$  such that  $LT = G$ ,  $C$  is quasipermutable in  $G$  and  $T \cap L \leq C \leq L$ . If  $T \neq G$ , then  $G$  has a maximal normal subgroup  $M$  such that  $G = LM$ . Hence  $P = L(P \cap M)$ , so  $p = |G/M| = |P/P \cap M|$ . Therefore  $P/P \cap M$  is cyclic and  $P \cap M \leq R \leq Z_u(G)$ . Hence  $P \leq Z_u(G)$ , a contradiction. Thus  $T = G$  and  $L$  is quasipermutable in  $G$ . Let  $W$  be a maximal subgroup of  $G$  such that  $G = P \rtimes W$ . Since  $L$  is quasipermutable in  $G$ ,  $L$  either covers or avoids  $(W, G)$ . If  $L$  covers  $(W, G)$ , then  $LW = G = PW$ , so  $L = P$ , a contradiction. Hence  $L$  avoids  $(W, G)$ . Thus  $L \leq W$ . This contradiction completes the proof of Theorem C.

**Proof of Theorem A.** First we show that (1) implies (2). Let  $A$  be any subgroup of  $F^*(G)$  and  $(K, H)$  a maximal pair of  $G$ . Since  $G$  is supersoluble,  $F^*(G) = F(G)$  by Lemma 1.8, so  $A \cap H \leq F(G) \cap H \leq F(H)$ . Hence by induction we may assume that  $H = G$ . If  $A \subseteq K$ , then  $A = A \cap K = A \cap G$ , that is,  $A$  avoids  $(K, G) = (K, H)$ . Suppose that  $A \not\subseteq K$  and  $K_G \neq 1$ . Since  $AK_G/K_G \leq F(G)K_G/K_G \leq F(G/K_G)$ , by induction,  $(K_G A/K_G)(K/K_G) = G/K_G$ . Hence  $AK = G$ , that is,  $A$  covers  $(K, G)$ . Hence we can assume that  $K_G = 1$ . In this case  $G$  is primitive. Therefore  $F(G)$  is a minimal normal subgroup of  $G$  and so  $|F(G)| = p$  is prime. Hence either  $A = 1$  or  $A = F(G)$ . Therefore  $A$  covers or avoids  $(K, G) = (K, H)$ . Thus, (2) is a consequence of (1).

(2)  $\Rightarrow$  (3) It is evident.

Finally, we shall prove the implication (3)  $\Rightarrow$

(1). By Theorem C,  $F^*(G) \leq Z_u(G)$ . Hence  $G$  is supersoluble by Lemma 1.9.

## REFERENCES

1. Guo, W. Finite groups with systems of  $\Sigma$ -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // Science China. Mathematics. – 2011. – 54. – P. 1–18.
2. Huppert, S. Finite Groups III / S. Huppert, N. Blackburn. – Berlin-New York : Springer-Verlag, 1982.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer-Verlag, 2006.
5. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.
6. Shemetkov, L.A. The generalized  $X$ -hypercentre of a finite group / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Proc. Fr. Skorina Gomel State University. – 2008. – № 6. – P. 128–130.
7. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups: Lectures given at the Ohio State University / H. Wielandt. – Columbus, Ohio, 1971.
8. Bercovich, Y. Indices of elements and normal structure of finite groups / Y. Bercovich, L. Kazarin // J. Algebra. – 2005. – 283 (1). – P. 564–583.
9. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – M. : Nauka, 1978.
10. Skiba, A.N. A characterization of the hypercyclically embedded subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Pure and Applied Algebra (2010) (in Press), (available at:doi:10.1016/j.jpaa.2010.04.017).
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967.
12. Robinson, D. A course in the theory of groups / D. Robinson. – New York-Heidelberg-Berlin : Springer-Verlag, 1982.
13. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York-Evanston-London: Harper & Row Publishers, 1968.
14. Shemetkov, L.A. On the  $\mathcal{XF}$ -hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – 322. – P. 2106–2117.
15. Wang, Y.  $c$ -normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – 180. – P. 954–965.
16. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – 35. – P. 210–214.
17. Ballester-Bolinches, A. Finite groups with some  $c$ -normal minimal subgroups A. Ballester-Bolinches, Y. Wang // J. Pure Appl. Algebra. – 2000. – 153. – P. 121–127.
18. Ballester-Bolinches, A.  $c$ -supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang, X.Y. Guo // Glasgow Math. J. – 2000. – 42. – P. 383–389.
19. Wang, Y. Finite groups with  $c$ -supplemented minimal subgroups / Y. Wang, Y. Li, J. Wang // Algebra Colloquium. – 2003. – 10 (3). – P. 413–425.
20. Wei, H. On  $c$ -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups, II / H. Wei, Y. Wang, Y. Li // Comm. Algebra. – 2003. – 31. – P. 4807–4816.
21. Wang, Y. A generalization of Kramer's theorem and its applications / Y. Wang, H. Wei, Y. Li // Bull. Australian Math. Soc. – 2002. – 65. – P. 467–475.
22. Wei, H. On  $c$ -supplemented maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei, Y. Wang, Y. Li // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – 132 (8). – P. 2197–2204.
23. Wei, H. On  $c$ -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. – 2001. – 29. – P. 2193–2200.
24. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X.Y. Guo // Arch. Math. – 1999. – 72. – P. 161–166.
25. Ballester-Bolinches, A. On minimal subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera // Acta Math. Hungar. – 1996. – 73. – P. 335–342.
26. Guo, X.Y. On  $p$ -Nilpotency of Finite Groups with Some Subgroups  $c$ -supplemented / X.Y. Guo // Algebra Colloquium. – 2003. – 10 (3). – P. 259–256.
27. Wang, Y. Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups  $c$ -supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – 224. – P. 464–78.
28. Radaman, M. On  $c$ -normality of certain subgroups of prime power order of finite groups / M. Radaman, M. Azzat Mohamed, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2005. – 85. – P. 203–210.

Поступила в редакцию 17.05.12.

УДК 512.542

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДААННЫМИ ОБОБЩЕННО ПРИМИТИВНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Н.С. Косенок

*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель*

## FINITE GROUPS WITH GIVEN GENERALIZED PRIMITIVE SUBGROUPS

N.S. Kosenok

*Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel*

Найден новый критерий сверхразрешимости конечных групп.

**Ключевые слова:** примитивные подгруппы, конечная группа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, субнормально примитивная подгруппа, нормально примитивная подгруппа.

A new criterion for supersolubility of finite groups has been found.

**Keywords:** primitive subgroups, finite group, soluble group, supersoluble group, subnormally primitive subgroup, normally primitive subgroup.

### Введение

Как известно, максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение группы. Так, например, согласно знаменитой теореме Хупперта [1] группа  $G$  сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы. Этот результат получил развитие во многих направлениях. Заметим, что если мы попытаемся заменить условие простоты индексов на более слабое: индекс каждой максимальной подгруппы есть степень простого числа, то, как показывает пример группы  $PSL(2,7)$ , группа при таких ограничениях не является даже разрешимой. Однако, как показано в работе [2], если мы накладываем такое ограничение на более широкий класс примитивных подгрупп [2], то группа  $G$  снова будет сверхразрешимой. Напомним, что собственная подгруппа  $H$  группы  $G$  называется примитивной подгруппой в  $G$ , если пересечение всех тех подгрупп из  $G$ , которые содержат  $H$  собственным образом, снова отлично от  $H$ .

По аналогии с этим, мы говорим, что  $H$  – субнормально примитивная подгруппа в  $G$ , если  $H$  – собственная субнормальная подгруппа в  $G$  и пересечение всех тех субнормальных подгрупп из  $G$ , которые содержат  $H$  собственным образом, отлично от  $H$ . Мы говорим, что  $H$  – нормально примитивная подгруппа в  $G$ , если  $H$  – собственная нормальная подгруппа в  $G$  и пересечение всех тех нормальных подгрупп из  $G$ , которые содержат  $H$  собственным образом, отлично от  $H$ .

Целью данной работы является изучение строения групп, в которых субнормально примитивные и нормально примитивные подгруппы обладают заданными добавлениями.

### 1 Свойства субнормально примитивных подгрупп

Нам необходимы следующие свойства субнормально примитивных подгрупп.

**Лемма 1.1.** Пусть  $K \leq H \leq G$ , где  $K \triangleleft G$ . Подгруппа  $H$  является субнормально примитивной подгруппой в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H/K$  является субнормально примитивной подгруппой в  $G/K$ .

**Доказательство.** Пусть  $H$  является субнормально примитивной подгруппой в  $G$ . Тогда  $H \neq G$ , и поэтому, конечно,  $H/K \neq G/K$ . Пусть  $\{X_i/K \mid i \in I\}$  – набор всех субнормальных подгрупп из  $G/K$ , которые содержат  $H/K$  собственным образом. Допустим, что

$$\bigcap_{i \in I} X_i/K = \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) / K = H/K.$$

Тогда  $H = \bigcap_{i \in I} X_i$ . Понятно также, что  $H \subset X_i$

для всех  $i = 1, \dots, t$ . При каноническом эпиморфизме  $\phi: G \rightarrow G/K$  имеет место  $\phi(X_i) = X_i/K$

и  $(X_i/K)^{\phi^{-1}} = X_i$ . Значит,  $\{X_i \mid i \in I\}$  – набор

$\tau$ -подгрупп в  $G$ . Следовательно, пересечение всех тех  $\tau$ -подгрупп из  $G$ , которые содержат  $H$  собственным образом, совпадает с  $H$ . Полученное противоречие показывает, что  $H/K$  – субнормально примитивная подгруппа в  $G/K$ . Аналогично проверяется, что  $H/K$  – субнормально примитивная в  $G/K$  подгруппа, следовательно,  $H$  – субнормально примитивная подгруппа в  $G$ . Лемма доказана.

**Лемма 1.2.** Пусть  $H \leq T \leq G$ , где  $G$  – конечная неединичная группа и  $H, T$  – подгруппы в  $G$ , причем  $H$  является субнормально примитивной подгруппой в  $T$ . Тогда найдется такая субнормально примитивная в  $G$  подгруппа  $X$ , что  $H = T \cap X$ .

*Доказательство.* Если  $H$  – субнормально примитивная в  $G$  подгруппа, то все ясно. В противном случае, пусть  $X_1, \dots, X_t$  – набор таких субнормально примитивных подгрупп из  $G$ , что  $H = X_1 \cap \dots \cap X_t$ . Понятно, что

$$H = X_1 \cap \dots \cap X_t = (X_1 \cap \dots \cap X_t) \cap T = (X_1 \cap T) \cap \dots \cap (X_t \cap T).$$

Значит, поскольку по условию  $H$  – субнормально примитивная подгруппа в  $T$ , то для некоторого  $i \in \{1, \dots, t\}$  имеет место  $H = T \cap X_i$ . Лемма доказана.

**Лемма 1.3** [3]. Если  $K \triangleleft G$  и  $H$  – холловская  $\pi$ -подгруппа из  $G$ , тогда  $H \cap K$  – холловская  $\pi$ -подгруппа из  $K$  и  $HK/K$  – холловская  $\pi$ -подгруппа в  $G/K$ .

**Лемма 1.4.** Пусть  $G$  – сверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если  $p$  и  $q$  – максимальный и минимальный простые делители  $|G|$  соответственно, тогда силовская  $p$ -подгруппа  $G$  нормальна в  $G$  и  $G$   $q$ -нильпотентна [1, с. 711].
2. Если  $L \trianglelefteq G$  и  $L/\Phi(G) \cap L$  сверхразрешимы, тогда  $L$  – сверхразрешимая группа [4].
3. Группа  $G$  сверхразрешима тогда и только тогда, когда  $|G : M|$  является простым числом для любой максимальной подгруппы  $M$  из  $G$  [1, с. 717].

## 2 Критерии сверхразрешимости и принадлежности конечной группы насыщенной формации

**Теорема 2.1.** Если каждая субнормально примитивная подгруппа неединичной группы  $G$  либо имеет примарный индекс в  $G$ , либо обладает холловским нильпотентным добавлением в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.

*Доказательство.* Предположим, что теорема не верна и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка. Тогда  $G \neq 1$ .

Пусть  $R$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G$ . Рассмотрим факторгруппу  $G/R$ . Пусть  $H/R$  – субнормально примитивная подгруппа в  $G/R$ . Тогда по лемме 1.1  $H$  – субнормально примитивная подгруппа в  $G$ . Значит, согласно условию  $H$  либо имеет примарный

индекс в  $G$ , либо в  $G$  имеется такая холловская нильпотентная подгруппа  $T$ , что  $HT = G$ . В первом случае, поскольку  $|G/R : H/R| = |G : H|$ , подгруппа  $H/R$  имеет примарный индекс в  $G$ . Пусть имеет место второе. Тогда ввиду изоморфизма  $TR/R \cong T/T \cap R$  подгруппа  $TR/R$  нильпотентна и, согласно лемме 1.3,  $TR/R$  – холловская в  $G/R$  подгруппа. Понятно также, что  $(H/R)(TR/R) = G/R$ . Таким образом, условие теоремы переносится на  $G/R$ . А поскольку  $|G/R| < |G|$ , то в силу выбора группы  $G$  мы видим, что  $G/R$  – сверхразрешимая группа. Если в группе  $G$ , кроме  $R$ , имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа  $L$ , то, как и выше,  $G/L \cong N/L \cap N$  – сверхразрешимая группа и поэтому  $G \cong G/1 = G/L \cap R$  – сверхразрешимая группа. Это противоречит выбору группы  $G$ . Значит,  $R$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ .

Покажем, что  $R$  – абелева группа. Пусть  $R = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$ , где  $A_1 \cong A_2 \cong \dots \cong A_t$  – простая группа. Предположим, что  $t = 1$ , т. е.  $R = A_1$  – простая группа. Тогда единичная подгруппа  $E$  является, очевидно, субнормально примитивной в  $R$ . Если  $E$  – субнормально примитивная подгруппа в  $G$ , то ввиду условия теоремы группа  $G$  разрешима. Значит,  $R$  – абелева группа. Пусть  $E$  не является субнормально примитивной в  $G$ . Тогда по лемме 1.2  $E = R \cap X$ , где  $X$  – субнормально примитивная подгруппа в  $G$ . Пусть  $|G : X| = p^\alpha$ , где  $\alpha \geq 1$ . Тогда поскольку  $X \subseteq RX$  и

$$|G : X| = |G : RX| |RX : X| = |G : RX| |R : R \cap X| = |G : RX| |R : E|,$$

то  $R$  –  $p$ -группа. Значит,  $R$  – абелева группа. Пусть  $G = TX$ , где  $X$  – холловская нильпотентная подгруппа в  $G$ . Пусть  $\pi = \pi(T)$ . Поскольку  $|G : X| = |T : T \cap X|$ , то  $|R| = |G : X|$  –  $\pi$ -число. Допустим, что  $R \not\subseteq T$ . Тогда  $T \subset RT$ . Но  $|RT| = \frac{|R||T|}{|T \cap R|}$  –  $\pi$ -число, что противоречит холловости подгруппы  $T$ . Значит,  $R \subseteq T$ , и поэтому  $R$  – абелева группа.

Пусть теперь  $t > 1$  и пусть  $M = A_1 \times \dots \times A_{t-1}$ . Тогда поскольку  $MA_t = R$ , то

$$R/M \cong A_t/M \cap A_t = A_t/E \cong A_t \cdot \#$$

Значит,  $R/M$  – простая группа, и поэтому  $M$  – субнормально примитивная в  $R$  подгруппа. Допустим, что  $M$  – субнормально примитивная в

$G$  подгруппа. Понятно, что  $R \not\subseteq M$ , и поэтому согласно условию теоремы либо  $|G:M| = p^a$ , либо  $G = TM$ , где  $T$  – нильпотентная холловская в  $G$  подгруппа. Если имеет место первое, то, поскольку  $|G:M| = |G:R||R:M| = |G:R||A_i|$ , мы видим, что  $A_i$  –  $p$ -группа. Значит,  $R$  – абелева  $p$ -группа. Пусть имеет место второе. Тогда  $|G:M|$  –  $\pi$ -число, где  $\pi = \pi(T)$ . Значит, поскольку  $|R| = |A_1||A_2|\dots|A_t| = |A_t|^t$ , то  $R$  –  $\pi$ -группа, и поэтому, как и выше, мы видим, что  $R \subseteq T$ , следовательно,  $R$  – абелева группа.

Предположим теперь, что  $M$  не является субнормально примитивной подгруппой в  $G$ . Тогда по лемме 1.2 в группе  $G$  имеется такая субнормально примитивная подгруппа  $X$ , что  $X \cap R = M$ . Ясно, что  $R \not\subseteq X$ , и поэтому либо  $|G:X| = p^\alpha$  для некоторого простого числа  $p$  и натурального  $\alpha \geq 1$ , либо  $G = TX$ , где  $T$  – холловская нильпотентная подгруппа в  $G$ . Пусть имеет место первое. Тогда поскольку  $|G:X| = |G:RX| = |G:RX||A_i|$ , то  $R$  –  $p$ -группа. Значит,  $R$  – абелева группа. Если же имеет место второе, то, как и выше, видим, что  $R \subseteq T$ . Значит,  $R$  – абелева группа. Итак, в любом из случаев мы видим, что  $R$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ .

Покажем, что  $|R| = p$ . Допустим, что это не так, и пусть  $M$  – максимальная в  $R$  подгруппа. Предположим, что  $M$  является субнормально примитивной в  $G$  подгруппой. Тогда если индекс  $M$  в  $G$  примарен, то очевидно,  $G$  –  $p$ -группа, что противоречит выбору группы  $G$ . Пусть  $G = TM$ , где  $T$  – нильпотентная холловская в  $G$  подгруппа. Тогда  $|G:M|$  –  $\pi$ -число, где  $\pi = \pi(T)$ . Но тогда  $R \subseteq T$ , и поэтому  $G = T$  – нильпотентная группа, что противоречит выбору группы  $G$ . Пусть  $M$  не является субнормально примитивной в  $G$  подгруппой. Тогда поскольку, очевидно,  $M$  – субнормально примитивная в  $R$  подгруппа, то  $M = X \cap R$ , где  $X$  – субнормально примитивная в  $G$  подгруппа. Понятно, что  $N \not\subseteq X$ , и поэтому либо  $X$  имеет нильпотентное холловское добавление  $T$  в  $G$ , либо индекс  $X$  в  $G$  примарен. Пусть имеет место первое. Тогда  $|G:X|$  –  $\pi$ -число, где  $\pi = \pi(T)$ . А поскольку

$$\begin{aligned} |G:X| &= |G:RX||RX:X| = \\ &= |G:RX||R:R \cap X||G:RX|_p, \end{aligned}$$

то  $p \in \pi$  и поэтому  $R \subseteq T$ . Поскольку класс всех

сверхразрешимых групп является локальной формацией и  $N/R$  – сверхразрешимая группа, то ввиду леммы 1.4  $R \not\subseteq \Phi(G)$ . Пусть  $M$  – такая максимальная в  $G$  подгруппа, что  $RM = G$ . Тогда если  $C = C_G(R)$ , то  $C \cap M \triangleleft G$ . Но  $R$  – единственная минимальная нормальная в  $G$  подгруппа. Значит,  $C \cap M = 1$ , и поскольку  $C = C \cap RM = R(C \cap M) = R$ . Поскольку  $R \subseteq T$  и  $T$  – нильпотентная группа, то холловская  $p'$ -подгруппа  $T_p$  содержится в  $C$ . Значит,  $T$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $G$ . Последнее означает, что  $|G:X| = p^a$ , где  $a \geq 1$ . Если же индекс  $X$  в  $G$  примарен, то, как и выше, видим, что снова  $|G:X|$  – степень числа  $p$ . Но в такой ситуации мы приходим к противоречию, как это было сделано в доказательстве основного результата работы [5]. Вновь полученное противоречие показывает, что  $|R| = p$ . Значит,  $R$  – циклическая группа. А поскольку  $N/R$  сверхразрешимая, то это означает, что  $N$  является сверхразрешимой группой, что противоречит выбору группы  $G$ . Теорема доказана.

**Следствие 2.1.** Если каждая субнормально примитивная подгруппа неединичной группы  $G$  имеет примарный индекс в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.

Нам необходимо следующее свойство нормально примитивных подгрупп.

**Лемма 2.1.** Пусть  $K \leq H \leq G$ , где  $K \triangleleft G$ . Подгруппа  $H$  является нормально примитивной подгруппой в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H/K$  является нормально примитивной подгруппой в  $G/K$ .

*Доказательство.* Аналогично доказательству леммы 1.1.

Напомним, что класс групп  $\mathfrak{F}$  называется формацией, если  $\mathfrak{F}$  является гомоморфом (т.е. классу  $\mathfrak{F}$  принадлежат все факторгруппы всех его групп) и любая группа обладает наименьшей нормальной подгруппой, факторгруппа по которой принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Неединичная группа  $G$  принадлежит  $\mathfrak{F}$  тогда и только тогда, когда каждая нормально примитивная подгруппа из  $G$  обладает добавлением, принадлежащим  $\mathfrak{F}$ .

*Доказательство.* Если  $G \in \mathfrak{F}$  и  $H$  – произвольная нормально примитивная подгруппа в  $G$ , то искомым добавлением к  $H$  является сама группа  $G$ .

Предположим теперь, что для каждой нормально примитивной подгруппы  $H$  из  $G$  в группе  $G$  найдется такая подгруппа  $T$  (добавление к  $H$  в  $G$ ), что  $T \in \mathfrak{F}$  и  $HT = G$ . Покажем,



что  $G \in \mathfrak{F}$ . Предположим, что это не так, и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка. Тогда группа  $G$  не проста. Действительно, предположим, что  $G$  – простая группа, и пусть  $E$  – единичная подгруппа в  $G$ . Тогда  $E$  – нормально примитивная подгруппа в  $G$ . Значит, по условию  $E = EG \in \mathfrak{F}$ . Полученное противоречие показывает, что  $G$  – непростая группа.

Пусть  $R$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G$ . Рассмотрим факторгруппу  $G/R$ . Пусть  $H/R$  – нормально примитивная подгруппа в  $G/R$ . Тогда по лемме 2.1,  $H$  – нормально примитивная подгруппа в  $G$ . Значит, согласно условию в  $G$  имеется такая подгруппа  $T$ , что  $HT = G$  и  $T \in \mathfrak{F}$ . Тогда ввиду изоморфизма  $TR/R \cong T/T \cap R$  подгруппа  $TR/R$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Понятно также, что  $(H/R)(TR/R) = G/R$ . Таким образом, условие теоремы переносится на  $G/R$ . А поскольку  $|G/R| < |R|$ , то в силу выбора группы  $G$  мы видим, что факторгруппа  $G/R$  принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Если в группе  $G$ , кроме  $R$ , имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа  $L$ , то, как и выше, факторгруппа  $G/R$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ , и поэтому группа  $G \cong G/1 = G/L \cap R$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Это противоречит выбору группы  $G$ . Значит,  $R$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Но тогда  $E$  – нормально примитивная подгруппа в  $G$ , и мы снова видим, что  $G \in \mathfrak{F}$ . Противоречие. Теорема доказана.

**Следствие 2.2.** Неединичная группа  $G$  является абелевой тогда и только тогда, когда каждая нормально примитивная подгруппа из  $G$  обладает абелевым добавлением.

**Следствие 2.3.** Неединичная группа  $G$  является разрешимой тогда и только тогда, когда каждая нормально примитивная подгруппа из  $G$  обладает разрешимым добавлением.

**Следствие 2.4.** Неединичная группа  $G$  является сверхразрешимой тогда и только тогда, когда каждая нормально примитивная подгруппа из  $G$  обладает сверхразрешимым добавлением.

**Следствие 2.5.** Неединичная группа  $G$  является нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая нормально примитивная подгруппа из  $G$  обладает нильпотентным добавлением.

### Заключение

Установлено влияние субнормально примитивных и нормально примитивных подгрупп на строение конечных групп. Найдены новые критерии сверхразрешимости и критерий принадлежности конечной группы насыщенной формации.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967. – 793 p.
2. Johnson, D.L. A note on supersoluble groups / D.L. Johnson // Canad. J. Math. – 1971. – Vol. 23, № 3. – P. 562–564.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
4. Шеметков Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
5. Косенок, Н.С. Некоторые критерии сверхразрешимости конечных групп / Н.С. Косенок, В.Н. Рыжик // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 5 (14), Вопросы алгебры –18, 2002. – С. 68–73.

Поступила в редакцию 12.03.12.

УДК 517.977

## РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ В СТЕРЖНЕ

Д.С. Кузьменков

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## PARALLELIZATION OF THE CALCULATIONS AT THE SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF A THERMAL PROCESS IN THE ROD

D.S. Kuzmenkov

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

В статье рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на правом конце, которая сводится к задаче оптимального управления специальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Последняя решается методом квазидекомпозиции. Описывается алгоритм работы оптимального регулятора, формирующего в режиме реального времени текущие значения оптимальной обратной связи. Приводится численный пример, иллюстрирующий работу метода квазидекомпозиции.

**Ключевые слова:** тепловой процесс, задача оптимального управления, метод квазидекомпозиции, оптимальная обратная связь, оптимальный регулятор.

The optimal control problem of a thermal process in the rod with the heat exchange on one of its ends is considered in the article. It's reduced to the optimal control problem of the special large-scale differential equations system. This problem is solved by a method of quasidecomposition. The algorithm of the operation of the optimal regulator which forms current values of the optimal feedback in real time is described. The numerical example illustrating the use of the quasidecomposition method is brought.

**Keywords:** thermal process, optimal control problem, method of quasidecomposition, optimal feedback, optimal regulator.

### Введение

Задачи оптимального управления системами, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, довольно часто встречаются на практике [1]–[4], изучаются и в настоящее время. В статье предлагается метод приближенного решения одной из таких задач (задачи оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на правом конце) путем сведения к задаче оптимального управления большой динамической системой, поведение которой описывается большим числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Синтезировать оптимальные обратные связи для таких систем очень сложно, несмотря на применение принципа максимума и динамического программирования. Поэтому в работе для оптимального управления большой динамической системой применяется принцип управления в реальном времени [5], согласно которому оптимальная обратная связь не строится, а ее текущие значения вычисляются по ходу процесса управления в режиме реального времени.

С возрастанием размерности динамических систем увеличивается трудоемкость операций, следовательно, необходимо использовать вычислительные устройства большей мощности. Но

всегда найдется такая размерность системы, при которой имеющиеся в наличии вычислительные устройства не справятся с необходимыми вычислениями в режиме реального времени. Цель работы – описать метод квазидекомпозиции, позволяющий распараллеливать вычисления, что играет важную роль при оптимальном управлении тепловым процессом в стержне. Эффективность предложенного метода подтверждается вычислительными экспериментами (один из которых приведен в разделе 4).

### 1 Постановка задачи

Пусть  $t_*, t^* > t_*, l > 0, a^2, \mu > 0, u^* > 0$  – заданные константы;  $\Omega = S \times T, S = [0, l], T = [t_*, t^*]; T_h = \{t_*, t_* + h_t, \dots, t^* - h_t\}, h_t = (t^* - t_*)/N, I = \{1, 2, \dots, m\}, m, N$  – натуральные числа;  $c(t) > 0, t \in T, x_0(s), y(s) \in R, \varphi(s) \in R^m, s \in S, -$  непрерывные функции;  $g_*, g^* \in R^m$  – заданные векторы.

**Определение 1.1.** Функцию  $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$  назовем *дискретной* (с периодом квантования  $h_t$ ), если  $u(t) \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h_t], \tau \in T_h$ .

В классе дискретных управляющих воздействий рассмотрим задачу оптимального управления тепловым процессом в стержне:

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_{t_*}^{t^*} c(t)|u(t)|dt \rightarrow \min, \\
 x_t &= a^2 x_{ss}, \quad (s, t) \in \Omega; \\
 x_s(0, t) &= 0, \quad x_s(l, t) = \mu[u(t) - x(l, t)], \quad t \in T; \\
 x(s, t_*) &= x_0(s), \quad s \in S; \\
 g_* &\leq \int_0^l [x(s, t^*) - y(s)]\varphi(s)ds \leq g^*; \quad (1.1) \\
 u(t) \in U &= \{u \in R : |u(t)| \leq u^*\}, \quad t \in T,
 \end{aligned}$$

где  $x = x(s, t) \in R$  – температура в точке  $s \in S$  в момент времени  $t \in T$ ,  $u = u(t) \in R$  – температура внешней среды в момент времени  $t \in T$ .

Аппроксимируя уравнение объекта управления методом прямых [6], заменим задачу (1.1) на следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_{t_*}^{t^*} c(t)|u(t)|dt \rightarrow \min, \quad (1.2) \\
 \left\{ \begin{aligned}
 x_i(s_1, t) &= \bar{a}^2 [x(s_2, t) - x(s_1, t)], \\
 x_i(s_i, t) &= \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], \\
 & \quad i = \overline{2, n-1}; \\
 x_i(s_n, t) &= \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \mu)x(s_n, t)] + \\
 & \quad + h_s \bar{a}^2 \mu u(t); \\
 x(s_i, t_*) &= x_0(s_i), \quad i = \overline{1, n};
 \end{aligned} \right. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

$$g_* \leq \sum_{i=1}^n [x(s_i, t^*) - y(s_i)]\phi(s_i) \leq g^*; \quad (1.4)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (1.5)$$

где  $h_s = l / (n-1)$ ,  $n$  – натуральное число;

$$\begin{aligned}
 \bar{a}^2 &= a^2 / h_s^2; \quad s_i = ih_s, \quad \phi(s_i) \in R^m, \quad i = \overline{1, n}; \\
 \phi(s_i) &= h_s \phi(s_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad \phi(s_1) = h_s \phi(s_1) / 2, \\
 \phi(s_n) &= h_s \phi(s_n) / 2.
 \end{aligned}$$

Пусть  $(f_{1j} \ f_{2j} \ \dots \ f_{nj})$ ,  $j = \overline{1, n}$ , – столбцы фундаментальной матрицы системы (1.3). Они удовлетворяют системе из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{f}_{1j} &= \bar{a}^2 (f_{2j} - f_{1j}), \\
 \dot{f}_{ij} &= \bar{a}^2 (f_{i-1j} - 2f_{ij} + f_{i+1j}), \quad i = \overline{2, n-1}; \\
 \dot{f}_{nj} &= \bar{a}^2 (f_{n-1j} - (1 + h_s \mu)f_{nj}), \\
 f_{ij}(t_*) &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 f_{nj}(t_*) &= 1, \quad j = \overline{1, n},
 \end{aligned}$$

где  $f_{ij} = f(s_i, t; s_j, \theta)$ ,  $t, \theta \in T_h$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Используя формулу Коши, показывается, что задача (1.2)–(1.5) эквивалентна интервальной задаче линейного программирования:

$$J(u) = \sum_{t \in T_h} c_h(t)|u(t)| \rightarrow \min,$$

$$\tilde{g}_* \leq \sum_{t \in T_h} d_h(t)u(t) \leq \tilde{g}^*, \quad u(t) \in U, \quad t \in T_h, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned}
 c_h(t) &= \int_t^{t+h_t} c(\tau)d\tau, \\
 \tilde{g}_{*k} &= g_{*k} - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*)x_0(s_j) - y(s_i) \right) \phi_k(s_i), \\
 \tilde{g}_k^* &= g_k^* - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*)x_0(s_j) - y(s_i) \right) \phi_k(s_i), \\
 d_{hk}(t) &= \sum_{i=1}^n f_h(s_i, t^*; s_n, t)\phi_k(s_i), \quad (1.7) \\
 t \in T_h, \quad k &= \overline{1, m}, \\
 f_h(s_i, t; s_n, \tau) &= h_s \bar{a}^2 \mu \int_{\tau}^{\tau+h_t} f(s_i, t; s_n, \xi)d\xi.
 \end{aligned}$$

## 2 Квазидекомпозиция фундаментальной матрицы решений

Для построения решения задачи (1.6) (соответственно и решения задачи (1.2)–(1.5)) используются прямой и двойственный методы [7], основанные на соответствующих методах ЛП [8] и процедуре квазидекомпозиции  $\tilde{F}(t)$ ,  $t \in T$ , фундаментальной матрицы  $F(t)$ ,  $t \in T$ , решений системы (1.3). Квазидекомпозиция учитывает структуру специальной системы дифференциальных уравнений (1.3) и позволяет быстро находить значения функции  $d_h(t)$ ,  $t \in T$ , что играет важную роль при оптимальном управлении в реальном времени.

Из (1.7) следует, что для нахождения  $d_h(t)$ ,  $t \in T$ , нужен только последний столбец фундаментальной матрицы

$$f(t) = (f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)), \quad t \in T,$$

элементы которого удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
 \dot{f}_1 &= \bar{a}^2 (f_2 - f_1), \\
 \dot{f}_i &= \bar{a}^2 (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}), \quad i = \overline{2, n-1}; \quad (2.1) \\
 \dot{f}_n &= \bar{a}^2 (f_{n-1} - (1 + h_s \mu)f_n), \\
 f_i(t_*) &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 f_n(t_*) &= 1.
 \end{aligned}$$

Запишем функцию  $f(t)$ ,  $t \in T$ , в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (\alpha_0(t) \in R, f^1(t) \in R^m, \alpha_1(t) \in R, \\
 f^2(t) \in R^m, \dots, \alpha_{r-1}(t) \in R, f^r(t) \in R^m, \alpha_r(t) \in R), \\
 & \quad t \in T,
 \end{aligned}$$

где  $f^q(t) = (f_i^q(t), i = \overline{1, m}) = (f_{p+i}(t), i = \overline{1, m})$ ,  $q = \overline{1, r}$ ;  $\alpha_q(t) = f_{q(m+1)+1}(t)$ ,  $q = \overline{0, r}$ ;  $t \in T$ ;  $m$  – натуральное число,  $p = (q-1)(m+1) + 1$ ,





2) полученного при подстановке оптимальной программы  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , задачи (4.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3) (сплошная линия).

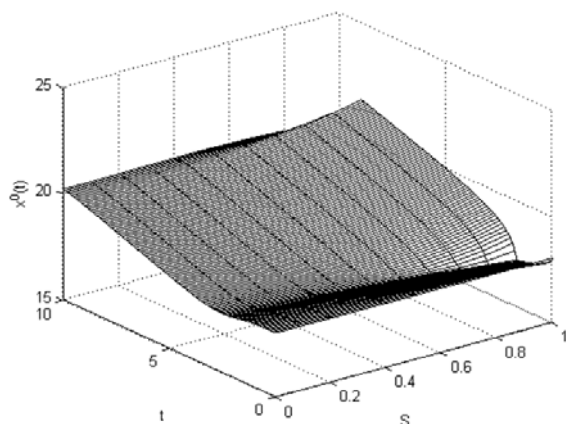


Рисунок 4.2 – Оптимальная траектория

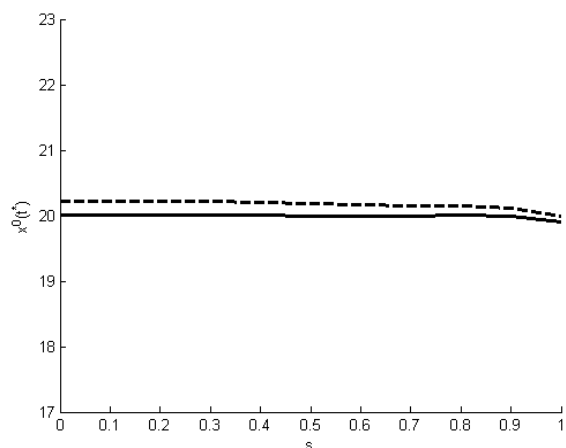


Рисунок 4.3 – Оптимальное распределение температуры  $x^0(t^*)$  в стержне

Чтобы оценить эффективность метода квазидекомпозиции, в таблице 4.1 для различных значений параметров аппроксимации  $P$ ,  $\tau^*$  приведены результаты программного решения: оптимальное значение критерия качества и отклонения по моментам терминального состояния системы (4.1) от заданного распределения температуры

Таблица 4.1 – Программное решение

$\tau^*$	$P$	$\lambda_1^0$	$\lambda_2^0$	$\lambda_3^0$	$J(u^0)$
5	4	-0.00038259	-0.00376210	-0.00195284	369.347374
	5	-0.00047094	-0.00376119	-0.00175492	369.545261
10	3	-0.00050690	-0.00378802	-0.00162672	369.757173
	4	-0.00064516	-0.00357485	-0.00242805	370.120398
	5	-0.00053070	-0.00362590	-0.00196052	370.208254
Без квазидекомпозиции		-0.00044701	-0.00365396	-0.00211055	370.252170

$$\lambda_i^0 = \int_0^1 [x^0(s, 10) - 20] \varphi_i(s) ds, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Из таблицы 4.1 следует, что использование квазидекомпозиции при соответствующем выборе параметров  $\tau^*$ ,  $P$  позволяет построить приближенное программное решение задачи (4.1), достаточно близкое к «точному» решению; с увеличением значений параметров  $\tau^*$ ,  $P$  увеличивается точность получаемых приближенных решений.

Предположим, что на систему (4.1) в процессе управления действовало неизвестное возмущение  $w(t)$ ,  $t \in T$ . Перед началом процесса управления в классе дискретных управляющих воздействий с периодом квантования  $h_t = 0.02$  была построена точная реализация  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , оптимальной обратной связи задачи (4.1) при реализовавшемся возмущении  $w^*(t) = \cos 2t$ ,  $t \in [0, 7[$ ;  $w^*(t) = 0$ ,  $t \in [7, 10]$ . На рисунке 4.4 изображен график  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ . Графики, изображенные на рисунках 4.2 и 4.3, для позиционного решения не приводятся, т. к. они мало отличаются от графиков, приведенных для программного решения.

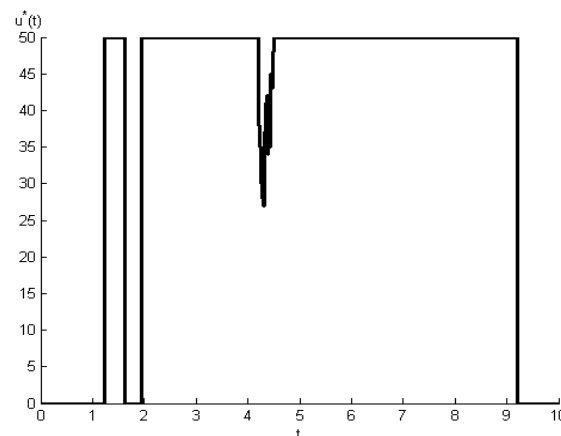


Рисунок 4.4 – Реализация позиционного решения

Следуя описанному в разделе 3 алгоритму, были найдены приближенные реализации оптимальной обратной связи задачи (4.1) с использованием квазидекомпозиции последнего столбца фундаментальной матрицы.

Таблица 4.2 – Позиционное решение

$\tau^*$	$P$	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$	$\lambda_3^*$	$J(u^*)$
5	4	-0.00025324	-0.00433251	-0.01044327	381.127608
	5	-0.00037432	-0.00431500	-0.00824608	381.501263
10	3	-0.00075123	-0.00429341	-0.00351260	381.851721
	4	-0.00069753	-0.00392253	-0.00394531	382.206530
	5	-0.00062126	-0.00420340	-0.00304326	382.292643
Без квазидекомпозиции		-0.00051131	-0.00412342	-0.00321414	382.313607

Как видно из таблицы 4.2

$$\left( \lambda_i^* = \int_0^1 [x^*(s, 10) - 20] \varphi_i(s) ds, \quad i = \overline{1, 3} \right),$$

при увеличении точности аппроксимации фундаментальной матрицы приближенные позиционные решения задачи (4.1) сходятся к «точному» позиционному решению. Следовательно, метод квазидекомпозиции при соответствующем выборе параметров  $\tau^*$ ,  $P$  является достаточно эффективным.

#### Заключение

В статье рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на правом конце, описывается метод квазидекомпозиции, позволяющий быстро вычислять текущие значения оптимальной обратной связи. Предлагается метод решения исследуемой задачи, основанный на процедуре квазидекомпозиции и динамической реализации двойственного метода ЛП [8], приводится численный пример, иллюстрирующий работу предложенных в статье методов. Полученные результаты могут быть обобщены на другие задачи оптимального управления системами параболического типа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский, А.Г. Методы оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.

2. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М. : Наука, 1978. – 468 с.

3. Лионс, Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. – М. : Мир, 1972. – 414 с.

4. Bokhari, M.A. Optimal control of parabolic systems with infinite time horizons / M.A. Bokhari, I.S. Sadek, // Appl. Math and Comput. – 2008. – Vol. 206, № 2. – P. 678–684.

5. Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15–18.

6. Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Мн. : Наука и техника, 1986. – 311 с.

7. Габасов, Р. Оптимальное управление тепловым процессом / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Д.С. Кузьменков // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 5–9.

8. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации: В 5 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск : Университетское, 1984–1998. – Ч. 1 : Линейные задачи. – 1984. – 213 с.

Поступила в редакцию 26.02.12.

УДК 532.1:517.958

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.К. Полевиков, Ю.Н. Волотовская

*Белорусский государственный университет, Минск*

## NUMERICAL MODELING OF EQUILIBRIUM CAPILLARY SURFACES WITH IRREGULAR BOUNDARY CONDITIONS

V.K. Polevnikov, Y.N. Volotovskaya

*Belarusian State University, Minsk*

Предлагается алгоритм численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей с нерегулярными условиями контакта. Он представляет собой комбинацию итерационно-разностного метода решения краевой задачи и метода Рунге-Кутты решения начальной задачи для моделирования равновесных форм капиллярной поверхности, опирающейся на линию излома твердой стенки. Алгоритм апробирован на известной задаче капиллярной гидростатики о жидкости, вытекающей из капилляра.

**Ключевые слова:** капиллярная поверхность, параметрические дифференциальные уравнения, нерегулярные граничные условия, численное моделирование, вычислительный алгоритм, численные результаты.

The algorithm for numerical modeling of equilibrium capillary surfaces with irregular contact conditions is presented. It is a combination of an iteration-difference method to solve the boundary-value problem and a Runge-Kutta method to solve the initial-value problem for modeling of equilibrium shapes of a capillary surface in contact with the fracture line of a solid wall. The algorithm is approved on the well-known problem of capillary hydrostatics about fluid flowing out of the capillary.

**Keywords:** capillary surface, parametric differential equations, irregular boundary conditions, numerical modeling, computational algorithm, numerical results.

### Введение

Освоение космического пространства потребовало развития новых разделов гидромеханики, изучающих поведение жидкости в слабых гравитационных полях и при невесомости. По мере совершенствования техники, расширения исследований на борту космических аппаратов роль жидких веществ все более возрастает. Они используются в двигательных и энергетических установках, системах терморегулирования, жизнеобеспечения и др. Создано научно-техническое направление – космическая технология, основу которого составляет получение жидких веществ или материалов, образуемых после затвердевания расплавов, с уникальными свойствами по чистоте и однородности структуры. В соответствии с этим расширяется круг возникающих задач гидромеханики. Их экспериментальные исследования сложны, трудоемки и требуют больших материальных затрат. Поэтому основное место при получении качественных и количественных результатов отводится математическому моделированию.

Специфика задач гидромеханики невесомости состоит в том, что в них при наличии свободной поверхности существенную, часто доминирующую, роль играют поверхностные силы. Капиллярные явления широко распространены и в наземных условиях, их изучение важно для многих приложений.

Составной и неотъемлемой частью общей проблемы являются задачи статики. В них изучаются формы свободной поверхности жидкости в состоянии равновесия и устойчивость этого состояния по отношению к малым возмущениям при наличии слабого поля массовых сил или его отсутствия. Решение указанных задач представляет самостоятельный интерес и имеет разнообразные приложения в наземной и космической технике и технологии. Задачи статики являются также исходными при исследовании большинства задач динамики жидкости [1].

Задачи с нерегулярными условиями на границе занимают важное место в гидромеханике невесомости. Например, численное моделирование процесса выращивания монокристаллов, как и решение многих других прикладных задач гидромеханики невесомости, требует определения равновесных форм свободной поверхности с нерегулярными условиями на границе, при которых свободная поверхность опирается на линию излома твердой стенки [1]–[7]. Такие задачи ранее численно не решались из-за отсутствия подходящих численных подходов.

Данная работа посвящена построению и апробации алгоритма численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей с нерегулярными граничными условиями для задачи о жидкости, вытекающей из капилляра [1]–[7].



### 1 Математическая модель

Рассмотрим каплю объема  $V$ , свисающую из вертикального цилиндрического капилляра радиуса  $R_0$ . Примем радиус  $R_0$  за единицу длины и сформулируем осесимметричную задачу о равновесной форме свободной поверхности жидкости, форма которой определяется равновесной линией меридиана, в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерные цилиндрические координаты  $z$  и  $r$  так, чтобы ось  $z$  совпала с осью симметрии капилляра, и направим её против вектора ускорения свободного падения  $g$ . Выберем начало координат на плоской горизонтальной пластине, а именно в центре основания капилляра. Обозначим через  $s$  безразмерную длину дуги искомой равновесной линии меридиана, изменяющуюся от  $s=0$  в точке контакта меридиана с плоскостью  $r=0$  до  $s=L$  в точке контакта меридиана с кромкой капилляра в плоскости  $z=0$ . Расположение осей, а также другие введенные обозначения продемонстрированы на рисунке 1.1.

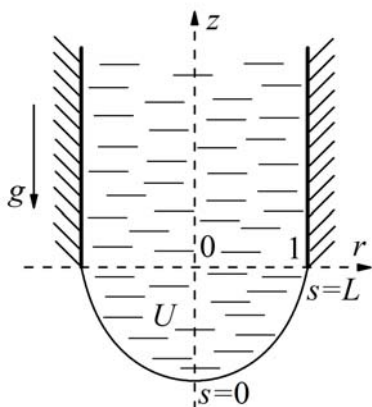


Рисунок 1.1 – Иллюстрация постановки задачи

В предположении осевой симметрии конфигурация свободной поверхности описывается некоторой парой параметрических функций  $r(s)$ ,  $z(s)$ , которые в условиях равновесия и присутствия силы тяжести удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям Юнга-Лапласа [2]–[5]:

$$\begin{aligned} z'' &= r'F, & r'' &= -z'F, & 0 \leq s \leq L, & \\ F &= -\text{Bo} z - z'/r + C, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где производные берутся по переменной  $s$ ;  $\text{Bo} = \rho g R_0^2 / \sigma$  – число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к силам поверхностного натяжения;  $C$  – неопределенная константа;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Система дифференциальных уравнений дополняется условиями симметрии на оси капилляра

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad z'(0) = 0 \quad (1.2)$$

и краевыми условиями контакта с кромкой капилляра

$$r(L) = 1, \quad z(L) = 0. \quad (1.3)$$

Считая безразмерный объем капли заданным, определим его как объем тела вращения:

$$U = -2\pi \int_0^L z r r' ds, \quad (U = V/R_0^3). \quad (1.4)$$

Естественным свойством параметрических функций  $r(s)$ ,  $z(s)$  является тождество  $r'^2 + z'^2 \equiv 1$ . Из системы (1.1) легко видеть, что если указанное равенство выполнено при каком-либо одном значении  $s$ , то оно справедливо и для всех  $s \in [0, L]$ .

Таким образом, математическая модель, описывающая равновесную форму свободной поверхности жидкости параметрическими функциями  $r(s)$ ,  $z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , состоит из дифференциальных уравнений (1.1), граничных условий (1.2), (1.3) и интегрального условия (1.4).

### 2 Замена переменных

Особенность параметрической постановки (1.1)–(1.4) в том, что отсутствует подходящая формула для вычисления безразмерной длины  $L$  равновесной линии меридиана на итерациях. Это создает большие трудности для численного решения. Следуя стратегии [8], [9], сделаем замену переменных

$$\bar{s} = s/L \in [0, 1], \quad \bar{z} = z/L, \quad \bar{r} = r/L$$

для получения явной формулы вычисления безразмерной длины  $L$  в процессе итерационного решения нелинейной задачи.

Задача (1.1)–(1.4) в новых переменных принимает вид

$$\begin{cases} \bar{z}'' = \bar{r}'F, \\ \bar{z}'(0) = 0, \quad \bar{z}(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\bar{z}'(0) = 0, \quad \bar{z}(1) = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \bar{r}'' = -\bar{z}'F, \\ \bar{r}(0) = 0, \quad \bar{r}'(0) = 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\bar{r}(0) = 0, \quad \bar{r}'(0) = 1, \quad (2.4)$$

$$F = -\text{Bo} L^2 \bar{z} - \bar{z}'/\bar{r} + C, \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1, \quad (2.5)$$

$$L = \left( \frac{-U}{2\pi} \right)^{1/3} \left( \int_0^1 \bar{z} \bar{r} \bar{r}' d\bar{s} \right)^{-1/3}, \quad (2.6)$$

где  $C$  – неопределенная константа,  $U$  – свободный параметр.

Чтобы определить константу  $C$  запишем уравнение (2.1) в виде

$$(\bar{r} \bar{z}')' = \bar{r} \bar{r}' (-\text{Bo} L^2 \bar{z} + C).$$

Проинтегрировав его затем на отрезке  $\bar{s} \in [0, 1]$  с учетом условий (2.2), (2.4), (2.6) имеем

$$C = L(2\bar{z}'(1) - \text{Bo} U / \pi). \quad (2.7)$$

### 3 Вычислительный алгоритм

Введем равномерную сетку

$$\{\bar{s}_i = ih \mid i = \overline{0, N}, h = 1/N\}.$$

Рассмотрим краевую задачу (2.1)–(2.2). Следуя стандартному подходу построения конечно-разностных методов, заменим производные в дифференциальном уравнении (2.1) разностными отношениями

$$\bar{z}_{ss,i} = \bar{r}_{s,i} F_i, \quad i = \overline{1, N-1},$$

где  $\bar{z}_{ss,i} = (\bar{z}_{i+1} - 2\bar{z}_i + \bar{z}_{i-1})/h^2$ ,

$$\bar{r}_{s,i} = (\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_{i-1})/(2h), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Полученное разностное уравнение имеет второй порядок аппроксимации. Аппроксимируем функцию  $F$  из (2.5) и краевые условия (2.2) со вторым порядком. Для функции  $F$  получаем

$$\begin{aligned} F(\bar{z}_i, \bar{r}_i, \bar{z}_{s,i}, L, C) &= F_i = \\ &= -\text{Bo} L^2 \bar{z}_i - \bar{z}_{s,i} / \bar{r}_i + C. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При определении безразмерной длины  $L$  применяем аналог правила средних для вычисления интеграла в (2.6)

$$L = \left( \frac{-U}{2\pi \sum_{i=1}^N (\bar{z}_i + \bar{z}_{i-1})(\bar{r}_i + \bar{r}_{i-1})(\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1})/4} \right)^{1/3}. \quad (3.2)$$

Определим константу  $C$  из (2.7)

$$C = L(2\bar{z}'_N - \text{Bo}U/\pi). \quad (3.3)$$

В (3.3) входит незаданное на правом конце значение производной  $\bar{z}'_N$ . Из разложения в ряд Тейлора с учетом граничных условий находим

$$\bar{z}'_N = \frac{-2L\bar{z}_{N-1} + hC(1 - L\bar{r}_{N-1})}{hL(3 - L\bar{r}_{N-1})} + O(h^2).$$

Подставляя полученное приближенное выражение в (3.3), после простых преобразований имеем

$$C = \frac{-4\pi L\bar{z}_{N-1} - \text{Bo}UhL(3 - L\bar{r}_{N-1})}{\pi h(1 + L\bar{r}_{N-1})}. \quad (3.4)$$

Теперь аппроксимируем условие симметрии  $\bar{z}'(0) = 0$ . Из разложения в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \bar{z}'_0 = 0 &= \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} - \frac{h}{2} z''_0 + O(h^2) = \\ &= \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} + \frac{h}{2} \left( \text{Bo} L^2 \bar{z}_0 + \frac{\bar{z}'_0}{\bar{r}_0} - C \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Для раскрытия неопределенности  $\frac{0}{0}$  применяем правило Лопитала

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{z}'(s)}{\bar{r}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{z}''(s)}{\bar{r}'(s)} = z''_0.$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка будем иметь

$$z''_0 = (-\text{Bo}L^2 \bar{z}_0 + C)/2,$$

откуда следует

$$\bar{z}_{s,0} = 1/4 h (-\text{Bo}L^2 \bar{z}_0 + C),$$

где  $\bar{z}_{s,0} = (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)/h$ .

Таким образом, приходим к конечно-разностной схеме второго порядка аппроксимации

$$\begin{cases} \bar{z}_{ss,i} = \bar{r}_{s,i} F_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ \bar{z}_{s,0} = 1/4 h (-\text{Bo} L^2 \bar{z}_0 + C), & \bar{z}_N = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $F$ ,  $L$  и  $C$  вычисляются по формулам (3.1), (3.2), (3.4) соответственно.

Дифференциальное уравнение (2.3) с начальными условиями (2.4) сведем к задаче Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \bar{r}' = v, & \bar{r}(0) = 0, \\ v' = -\bar{z}' F, & v(0) = 1. \end{cases}$$

Решение полученной задачи ищем явным методом Рунге-Кутты второго порядка точности

$$\begin{cases} \bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i + h(v_i + v_{i+1})/2, & \bar{r}_0 = 0, \\ v_{i+1} = v_i + h \bar{z}'_{s,i} \left( \text{Bo} L^2 \bar{z}_i + \frac{\bar{z}_{s,i}}{\bar{r}_i + h v_i/2} - C \right), \\ v_0 = 1, & i = \overline{0, N-1}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $L$  и  $C$  вычисляются по формулам (3.2), (3.4) соответственно.

Для решения нелинейной задачи (3.5)–(3.6) используем итерационную схему

$$\begin{cases} \bar{z}_{ss,i}^{n+1} = \bar{r}_{s,i}^n F(\bar{z}_i^n, \bar{r}_i^n, \bar{z}_{s,i}^n, L^n, C^n), & i = \overline{1, N-1}, \\ \bar{z}_{s,0}^{n+1} = 1/4 h (-\text{Bo} (L^n)^2 \bar{z}_0^n + C^n), & \bar{z}_N^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \bar{r}_{i+1}^{n+1} = \bar{r}_i^{n+1} + h(v_i + v_{i+1})/2, & \bar{r}_0^{n+1} = 0, \\ v_{i+1} = v_i + h \bar{z}'_{s,i}^{n+1} \times \\ \times \left( \text{Bo} (L^n)^2 \bar{z}_i^{n+1} + \frac{\bar{z}_{s,i}^{n+1}}{\bar{r}_i^{n+1} + h v_i/2} - C^n \right), \\ v_0 = 1, & i = \overline{0, N-1}. \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер итерации.

Реализация схемы (3.7)–(3.8) на каждой итерации сводится к решению прогоночной задачи (3.7) и решению по рекуррентным правилам задачи (3.8). Метод прогонки устойчив на каждой итерации. В результате определяются новые итерационные приближения  $\bar{r}_i^{n+1}$ ,  $\bar{z}_i^{n+1}$  для координат свободной поверхности, с помощью которых затем вычисляются  $L^{n+1}$ ,  $C^{n+1}$ ,  $F^{n+1}$ . Для улучшения устойчивости итерационной схемы в алгоритм вводились параметры релаксации.

### 4 Численные результаты

Расчеты осуществлялись на равномерной сетке с шагом  $h = 1/500$  для различных чисел Бонда. Считали, что значение объема превышает критическое, если при этом значении итерации

расходились. Такой способ исследования устойчивости апробирован в [8], [9]. Критические значения объема вычислены по методу дихотомии с погрешностью не более 0.01%.

На рисунке 4.1 показана эволюция жидкости, вытекающей из капилляра с увеличением объема капли  $U$  при различных числах Бонда. Из рисунка видно, что с ростом объема капля сначала принимает выпуклые формы, близкие к сферическим, но наступает момент, когда у свободной поверхности вблизи кромки капилляра скачкообразно образуется шейка, которая постепенно сглаживается, и в итоге капля не удерживается на кромке и происходит ее отрыв. Критические (отрывные)

формы показаны на рисунке штриховыми линиями.

В таблице 4.1 приведены теоретические критические значения объема  $U^*$  и высоты свисающей капли  $z_0^* = |z^*(0)|$  при  $U = U^*$  для некоторых характерных чисел Бонда, полученные линейной интерполяцией по данным таблицы 1, приведенной в [7], и соответствующие критические значения  $U_{cr}$ ,  $z_{cr} = |z_{cr}^*(0)|$  при  $U = U_{cr}$ , полученные численно. Погрешность между численными и аналитическими значениями может быть обусловлена погрешностью линейной интерполяции порядка 0.0014.

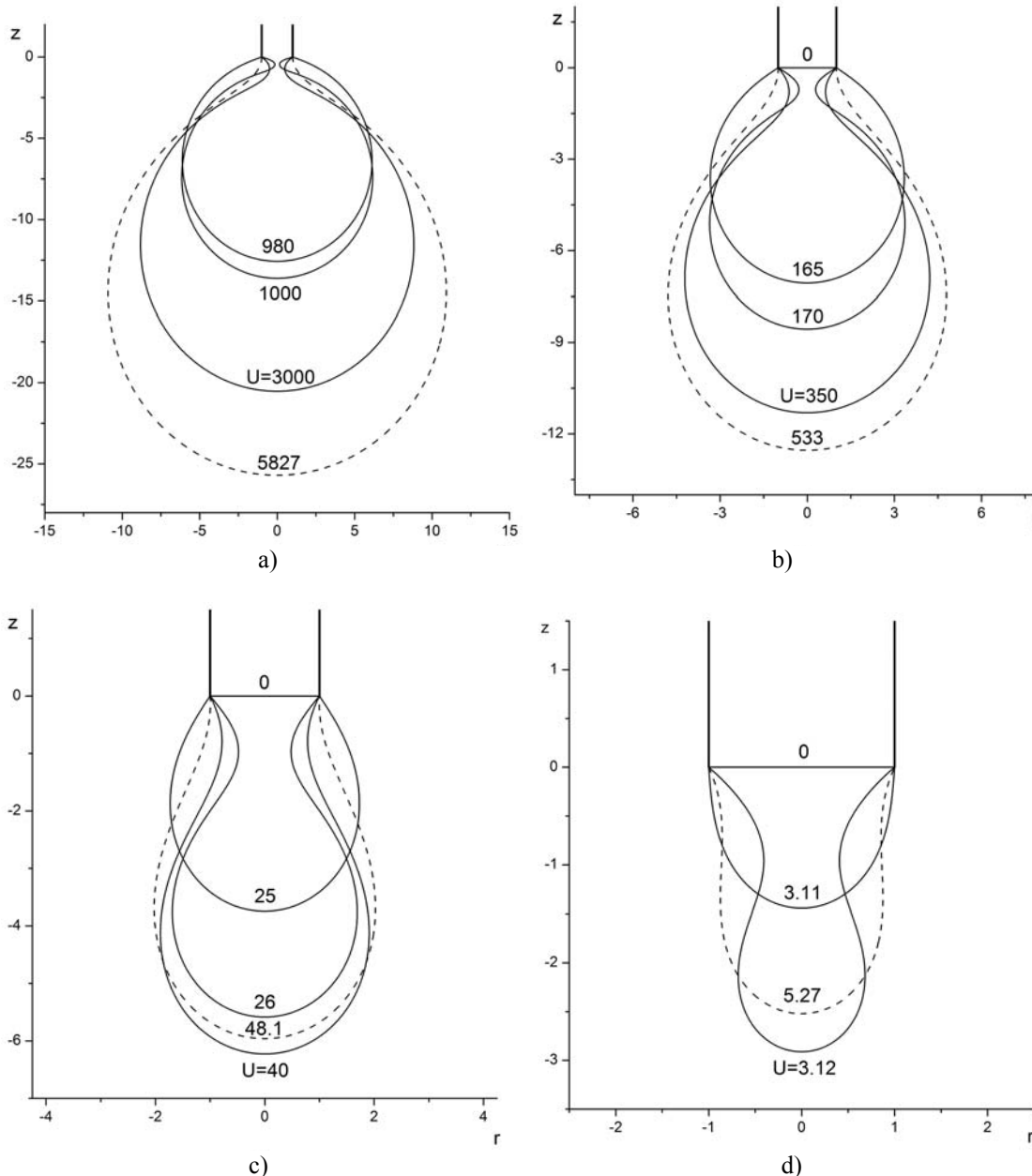


Рисунок 4.1 – Равновесные формы капли, свисающей с кромки капилляра:

a)  $Bo = 10^{-3}$ ; b)  $Bo = 10^{-2}$ ; c)  $Bo = 10^{-1}$ ; d)  $Bo = 1$ ;

штриховые линии – отрывные равновесные формы

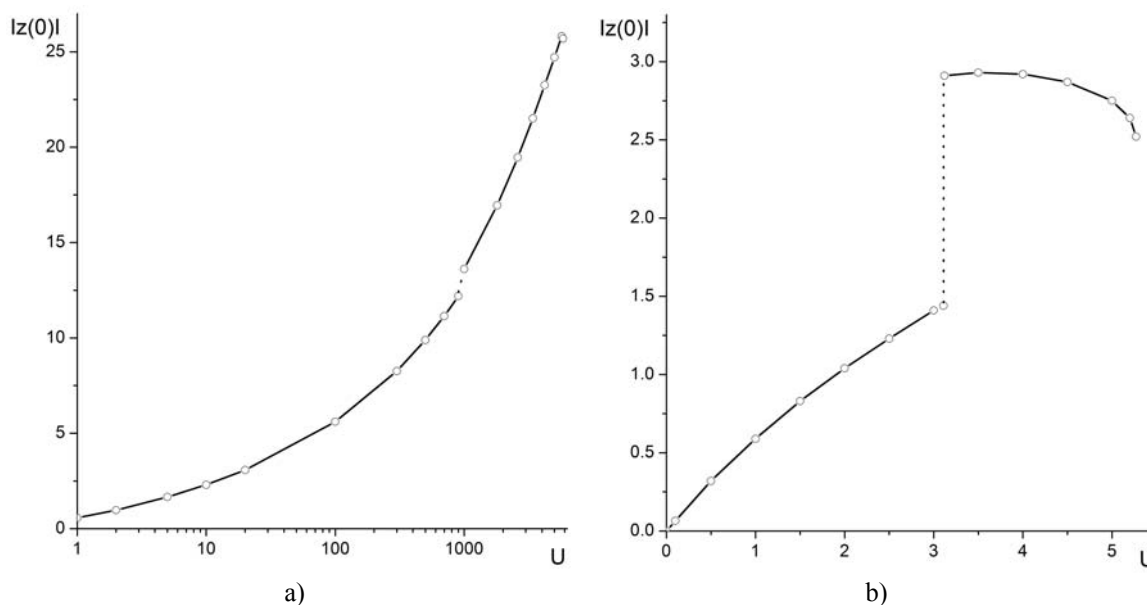


Рисунок 4.2 – Изменение высоты капли, свисающей с кромки капилляра, в зависимости от ее объема: а)  $Bo = 10^{-3}$ ; б)  $Bo = 1$

Таблица 4.1 – Значения характерных критических параметров, полученных численно и предсказанных теорией устойчивости

$Bo$	$U^* Bo^{3/2}$	$U_{cr} Bo^{3/2}$	$z_0^* \sqrt{Bo}$	$z_{cr} \sqrt{Bo}$
$10^{-4}$	0.060	0.061	0.53	0.53
$10^{-3}$	0.183	0.184	0.81	0.81
$10^{-2}$	0.532	0.533	1.25	1.25
$10^{-1}$	1.518	1.520	1.88	1.88
1	5.265	5.267	2.51	2.52

Таким образом, полученные численные результаты согласуются с данными линейной теории устойчивости [1]–[7], а итерационная схема (3.7)–(3.8) адекватно реагирует на кризис равновесного состояния, обусловленный осесимметричными возмущениями.

С ростом числа Бонда скачок между выпуклой и шейкообразной конфигурациями свободной поверхности увеличивается, он показан на рисунке 4.2 пунктирной линией. Интересно, что при достаточно больших числах Бонда по мере приближения к точке отрыва длина капли  $|z(0)|$  монотонно убывает вплоть до наступления неустойчивости.

### Заключение

В статье впервые построен алгоритм численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей в случае, когда свободная поверхность жидкости опирается на линию излома твердой стенки. Алгоритм апробирован на известной задаче капиллярной гидростатики о жидкости, вытекающей из вертикального капилляра в поле

силы тяжести. Впервые получены равновесные формы свободной поверхности с нерегулярными условиями контакта, вплоть до момента потери устойчивости, когда происходит отрыв капли от кромки капилляра. Совпадение критических значений параметров с данными линейной теории устойчивости дает основания предполагать, что построенный алгоритм адекватно реагирует на кризис равновесия и может использоваться не только для моделирования равновесных форм, но и как метод исследования их устойчивости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Слобожанин, Л.А. Гидростатика при слабой гравитации. Форма и устойчивость свободной поверхности : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05 / Л.А. Слобожанин; АН СССР. – Новосибирск, 1988. – 32 с.
2. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А.Д. Мышкис [и др.] ; под ред. А.Д. Мышкиса. – Киев : Наукова думка, 1992. – 592 с.
3. Гидромеханика невесомости / В.Г. Бабский [и др.] ; под ред. А.Д. Мышкиса. – М. : Наука, 1976. – 504 с.
4. Low-Gravity Fluid Mechanics / A.D. Myshkis. – Springer-Verlag, 1987. – 583 p.
5. Лабунцов, Д.А. Механика двухфазных систем : учеб. пособие для вузов / Д.А. Лабунцов, В.В. Ягов. – М. : Издательство МЭИ, 2000. – 374 с.
6. Слобожанин, Л.А. Об эволюции и отрыве капель и пузырей при их медленном росте / Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов. – Харьков, 1972. – 16с. – (Препринт / Физ.-техн. институт низких температур АН УССР).

7. Слобожанин, Л.А. Задачи гидростатики, возникающие при моделировании процесса очистки материалов и выращивания монокристаллов методом плавающей зоны. Часть I. Равновесие и устойчивость расплавленной капли / Л.А. Слобожанин, Н.С. Щербакова. – Харьков, 1984. – 26 с. – (Препринт / Физ.-техн. институт низких температур АН УССР; №13).

8. Polevikov, V.K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces / V.K. Polevikov // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, № 1. – P. 66–93.

9. Полевиков, В.К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей / В.К. Полевиков // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 7. – С. 975–981.

*Работа выполнена в рамках задания 1.5.03.2 подпрограммы «Математические методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция» на 2011–2015 гг.*

*Поступила в редакцию 20.04.12.*

УДК 512.542

## КРИТЕРИЙ НЕПРОСТОТЫ КОНЕЧНЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУПП

В.Н. Тютянов, В.А. Тютянова

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

## A NONSIMPLE CRITERION FOR FINITE FACTORIZED GROUPS

V.N. Tyutyaynov, V.A. Tyutyaynova

Gomel Branch of International University, Gomel

При изучении конечных факторизуемых групп для описания строения группы накладываются ограничения на строение сомножителей. Это мотивируется стремлением описать строение группы, сводя его к строению сомножителей либо получению некоторой информации о строении группы в зависимости от строения сомножителей. Классическими примерами являются теорема Ито о двухступенной разрешимости конечной группы, факторизуемой абелевыми подгруппами, и теорема Кегеля-Виландта о разрешимости конечной группы, представимой в виде произведения двух нильпотентных подгрупп. Отметим также гипотезу С.А. Чунихина о непрототе конечной группы, факторизуемой подгруппами с нетривиальными центрами, справедливость которой установил Л.С. Казарин.

**Ключевые слова:** конечная группа, простая неабелева группа, факторизуемая группа.

In the study of factorizable groups the authors consider some natural restrictions on the factors. Ito Theorem about two-step solubility of a finite group which is factorized by abelian subgroups, and Kegel-Wielandt Theorem about solubility of a finite group which is a product of two nilpotent subgroups are the classical examples in this trend. We should also note that L.S. Kazarin have obtained validity of the hypothesis of S.A. Chunikhin about non-simplicity of a finite group which is factorized by subgroups with nontrivial center.

**Keywords:** finite group, simple nonabelian group, factorized group.

**Введение и обозначения**

В работе [1] Л.С. Казарин описал простые неабелевы композиционные факторы конечной группы, представимой в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп. Позже он показал, что конечная группа, факторизуемая двумя разрешимыми подгруппами нечетных индексов, является разрешимой. Естественно рассмотреть вопрос о строении конечной группы, являющейся произведением двух разрешимых подгрупп с заданными ограничениями на их индексы.

В настоящей работе показано, что конечная группа, факторизуемая двумя разрешимыми подгруппами, индексы которых взаимно просты, с  $r \in \pi(G)$  такого, что  $r > 3$ , не является простой неабелевой группой.

Для удобства читателя приведем основные обозначения и определения. Остальные обозначения можно найти, например, в [2],  $|G|$  – порядок конечной группы  $G$ ;  $\pi(n)$  – множество всех простых делителей натурального числа  $n$ ;  $\pi(G) = \pi(|G|)$ ;  $(a, b)$  – наибольший общий делитель натуральных чисел  $a$  и  $b$ ;  $S_n$  – симметрическая группа перестановок на  $n$  символах;  $A_n$  – знакопеременная группа перестановок на  $n$  символах.

**1 Предварительные результаты**

**Лемма 1.1.** [1]. Пусть  $G = AB$  – конечная группа, где  $A$  и  $B$  – разрешимые подгруппы группы  $G$ . Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы  $G$  принадлежат следующему

списку:  $PSL_2(q)$ ,  $q > 3$ ;  $PSL_3(q)$ ,  $q < 9$ ;  $PSL_4(2)$ ,  $M_{11}$ ,  $PSp_4(3)$ ,  $PSU_3(8)$ .

**Лемма 1.2.** [3]. Пусть в группе  $PSL_2(p^n)$   $N$  – нормализатор силовой  $p$ -подгруппы,  $D$  – диэдральная группа порядка  $2(2^n+1)$  при  $p = 2$  и  $p^n+1$  при  $p > 2$ ,  $Z$  – циклическая подгруппа индекса 2 в  $D$ ,  $S_4$  и  $S_4^*$  – несопряженные в  $PSL_2(p^n)$  симметрические группы степени 4,  $A_4$  и  $A_4^*$  ( $A_5$  и  $A_5^*$ ) – несопряженные в  $PSL_2(p^n)$  знакопеременные группы степени 4 (соответственно 5). Группа  $PSL_2(p^n)$  допускает только следующие факторизации, с точностью до сопряженных подгрупп:

**A.**  $PSL_2(2^n) = ND = NZ$ ,  $n \geq 2$ .

**B.** Пусть  $p > 2$ .  $PSL_2(p^n) = ND$  тогда и только тогда, когда  $(p^n - 1)/2$  – нечетное число.

**C.** При  $p^n \geq 61$  и  $p > 2$  группа  $PSL_2(p^n)$  не имеет никаких факторизаций, кроме указанной в B.

**D.** Пусть  $p > 2$  и  $p^n \leq 59$ . Тогда

$$(1) PSL_2(7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^* ;$$

$$(2) PSL_2(9) = NA_5 = NA_5^* = S_4A_5 = S_4^*A_5^* = A_5A_5^* =$$

$$= A_4A_5^* = A_4^*A_5 ;$$

$$(3) PSL_2(11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11}A_5^* ;$$

$$(4) PSL_2(19) = ND = NA_5 = NA_5^* ;$$

$$(5) PSL_2(29) = NA_5 = NA_5^* = KA_5 = KA_5^* , где$$

$$K \leq N \text{ и } |K| = 7 \cdot 29 ;$$

- (6)  $PSL_2(59) = ND = NA_5 = NA_5^*$ ;  
 (7)  $PSL_2(p^n) = ND$ , где  $p^n = 23, 27, 31, 43, 47$ .

## 2 Доказательство основного результата

**Теорема 2.1.** Пусть  $G = AB$  – конечная группа, где  $A$  и  $B$  – разрешимые подгруппы группы  $G$ ,  $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3\}$ . Если  $(|G:A|, r) = 1 = (|G:B|, r)$ , тогда  $G$  не является простой неабелевой группой.

*Доказательство.* Предположим, что  $G$  является простой неабелевой группой. По лемме 1.1 необходимо рассмотреть следующие случаи.

1.  $G \cong M_{11}$ . Порядок группы  $M_{11}$  равен  $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ . Пусть  $|A|$  делится на 11. Тогда из [2] следует, что  $A = 11:5$ . Так как в группе  $M_{11}$  нет подгрупп индекса 5 [2], то  $r = 5$  и  $|G:B| = 11$ . Из [2] следует, что только подгруппа  $M_{10} \cong A_6 \cdot 2$  имеет индекс 11 в группе  $M_{11}$ . Однако данная подгруппа неразрешима и  $M_{11}$  не допускает нужной факторизации.

2.  $G \cong PSp_4(3)$ . Порядок группы  $PSp_4(3)$  равен  $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$ . Следовательно,  $r = 5$ . Из [2] следует, что максимальными подгруппами в  $PSp_4(3)$ , индекс которых не делится на 5, являются  $2^4:A_5$  и  $S_6$ . Поэтому  $A$  и  $B$  содержатся в этих подгруппах. Порядок силовской 3-подгруппы в  $PSp_4(3)$  равен  $3^4$ . Поэтому, если  $G = AB$ , то  $A$  и  $B$  содержатся в  $S_6$  и  $G = A_1B_1$ , где  $A_1, B_1$  изоморфны  $S_6$ . Так как в группе  $PSp_4(3)$  имеется один класс сопряженных подгрупп, изоморфных  $S_6$ , то последней факторизации не существует. Следовательно, группа  $PSp_4(3)$  не допускает нужной факторизации.

3.  $G \cong PSU_3(8)$ . Порядок группы  $PSU_3(8)$  равен  $2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$ . Пусть  $|A|$  делится на 19. Из [2] следует, что в этом случае  $A \leq 19:3$ . Из условия теоремы заключаем, что  $r = 19$ . Тогда  $B \leq 19:3$  и, очевидно, что  $G \neq AB$ .

4.  $G \cong PSL_4(2)$ . Порядок группы  $PSL_4(2)$  равен  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ . Пусть  $|A|$  делится на 7. Тогда из [2] следует, что  $A \leq 2^3:7:3$  – максимальная разрешимая подгруппа, порядок которой делится на 7. Из условия теоремы заключаем, что  $r = 7$  и  $B \leq 2^3:7:3$ . Очевидно, что  $G \neq AB$ .

5.  $G \cong PSL_3(2)$ . Порядок группы  $PSL_3(2)$  равен  $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ , поэтому  $r = 7$ . Группа  $PSL_3(2)$  содержит максимальную разрешимую подгруппу, порядок которой делится на 7, изоморфную  $7:3$ . Следовательно,  $A \leq 7:3$  и  $B \leq 7:3$ . Тогда  $G \neq AB$ .

6.  $G \cong PSL_3(3)$ . Порядок группы  $PSL_3(3)$  равен  $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$ , поэтому  $r = 13$ . Из [2] следует, что в этом случае  $A \leq 13:3$  и  $B \leq 13:3$ . Поэтому  $G \neq AB$ .

7.  $G \cong PSL_3(4)$ . Порядок группы  $PSL_3(4)$  равен  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ . Пусть  $|A|$  делится на 7. Из [2] следует, что  $A \leq 7:3$  и  $r = 7$ . Тогда  $B \leq 7:3$  и очевидно, что  $G \neq AB$ .

8.  $G \cong PSL_3(5)$ . Порядок группы  $PSL_3(5)$  равен  $2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$ . Пусть  $|A|$  делится на 31. Из [2] следует, что  $A \leq 31:3$  и  $r = 31$ . Тогда  $B \leq 31:3$  и  $G \neq AB$ .

9.  $G \cong PSL_3(7)$ . Порядок группы  $PSL_3(7)$  равен  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19$ . Пусть  $|A|$  делится на 19. Из [2] следует, что  $A \leq 19:3$  и  $r = 19$ . Тогда  $B \leq 19:3$  и  $G \neq AB$ .

10.  $G \cong PSL_3(8)$ . Порядок группы  $PSL_3(8)$  равен  $2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73$ . Пусть  $|A|$  делится на 73. Из [2] следует, что  $A \leq 73:3$  и  $r = 73$ . Тогда  $B \leq 73:3$  и  $G \neq AB$ .

11.  $G \cong PSL_2(q)$ ,  $q = p^n > 3$ . Обозначим  $\varepsilon = (2, q-1)^{-1}$ . Группа  $G$  содержит подгруппу Фробениуса  $P = U: H$ , где  $U$  – некоторая силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ ,  $H$  – циклическая группа порядка  $\varepsilon^{-1}(q-1)$ ; диэдральную подгруппу  $D$  порядка  $2\varepsilon^{-1}(q+1)$  и циклическую подгруппу  $Z$  порядка  $\varepsilon^{-1}(q+1)$ . Из леммы 1.2 следует, что если группа  $G$  допускает факторизацию, то, так как оба сомножителя разрешимые группы, выполняется только один из следующих случаев:  $G = PD$ ;  $G = PZ$ ;  $G = PSL_2(7) = PS_4 = US_4$ ;  $G = PSL_2(11) = PA_4$ . Поскольку  $(q-1, q+1) \in \{1, 2\}$ , то факторизации  $G = PD$  и  $G = PZ$  не удовлетворяют условию теоремы. Группа  $PSL_2(7)$  исключается в силу изоморфизма  $PSL_2(7) \cong PSL_3(2)$ . Данный случай был рассмотрен в п. 5. В факторизации  $G = PSL_2(11) = PA_4$  пересечение  $P \cap A_4 = 1$ , и данная группа не удовлетворяет условию теоремы. Теорема полностью доказана.

**Замечание 2.2.** Пусть  $L = AB$  – конечная простая неабелева группа, где  $A$  и  $B$  – разрешимые подгруппы группы  $L$ ,  $r \notin \pi(L)$  и  $U \cong Z_r$ . Рассмотрим группу  $G = U \times L = (UA)(UB) = A_1B_1$ . Тогда  $(|G:A_1|, r) = (|G:B_1|, r) = 1$  и  $L$  – композиционный фактор группы  $G$ . Этот пример показывает, что практически любая группа из списка работы [1] может быть композиционным фактором конечной группы, удовлетворяющей условию теоремы, и их нахождение не представляет интереса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kazarin, L.S. Product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. — Vol. 14, № 6. – P. 1001–1066.
2. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
3. Ito, N. On the factorizations of the linear fractional groups  $LF(2, p^n)$  / N. Ito // Acta Scient. Math. – 1953. – Vol. 15. – P. 79–84.

Поступила в редакцию 27.03.12.

УДК 007.003;007.008;65.0; 681.3

## АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ОПАСНОСТИ

**В.С. Смородин**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## ANALYSIS OF THE TECHNOLOGICAL PROCESSES FUNCTIONING WITH THE ELEMENTS OF POTENTIAL DANGER

**V.S. Smorodin**

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Предложена методика анализа надёжности функционирования вероятностных производственных систем, позволяющая определить параметры выполнения технологических операций, обеспечивающие заданный уровень надёжности функционирования технологического цикла. Практическая значимость состоит в реализации процедуры оценки вероятностных значений параметров надёжности функционирования компонентов производственной системы, обеспечивающей оптимальные варианты реализации структуры технологического цикла в рамках заданного критерия качества оценки выполнения технологического цикла.

**Ключевые слова:** анализ надёжности, пространство состояний, оценка значений параметров, структура технологического цикла.

The technique analysis of reliability of probabilistic production systems allowing to define the parameters of the technological operations providing a given level of reliability of the technological cycle. The implementation of the procedure for the assessment of probability values of the parameters of reliability of the components production system to ensure optimal variants of the structure of the technological cycle within specified criterion of the quality evaluation of the technological cycle is proved to be of exceptional practical significance.

**Keywords:** reliability analysis, state space, estimation of parameter values, structure of the technological cycle.

### **Введение**

Анализ функционирования технологических процессов при наличии элементов потенциальной опасности обладает рядом особенностей и связан с необходимостью учета вероятности сбоев, отказов и аварий оборудования. Наиболее сложными объектами для исследования являются технологические системы, в ходе реализации которых могут изменяться вероятностные параметры их функционирования. При этом под вероятностными параметрами могут пониматься параметры выполнения технологических операций, обеспечивающих заданный уровень надёжности функционирования технологического цикла производства, а также надёжностные характеристики оборудования, используемого при реализации технологических операций процесса производства.

Новизна класса формализуемых объектов вероятностных технологических процессов [1] при наличии элементов потенциальной опасности состоит в том, что в процессе функционирования технологического цикла могут произойти изменения в его структуре в результате управляющих воздействий аппаратуры управления или оператора, управляющего технологическим циклом, а также при необходимости упреждения выхода бракованной продукции.

В данной работе предлагается новый подход, связанный с погружением моделей технологических объектов, имеющих графовую структуру, в пространство возможных состояний объекта исследования при наличии функциональных зависимостей между операциями для реализации сквозной технологии объектно-ориентированного программирования контура управления технологическим циклом производства.

Следует отметить, что единственной технологией, обладающей возможностью структурной реконфигурации технологического процесса, остается технология имитационного моделирования, применяемая ко всему спектру задач синтеза оптимальной структуры вероятностных технологических систем в рамках предложенного нами подхода.

### **1 Методика анализа интегральной статистики и принятия проектных решений**

Отличительной особенностью векторной (многокритериальной) оптимизации является наличие множества недоминирующих решений, каждое из которых может быть выбрано исследователем в качестве оптимального. Как известно, в общем виде задачи векторной оптимизации могут быть сформулированы следующим образом:



$$f_i(x) \rightarrow \max, \quad i = \overline{1, k};$$

$$f_j(x) \rightarrow \min, \quad j = \overline{k+1, m}; \quad x \in G. \quad (1.1)$$

Понятие оптимального решения для таких задач заменяется понятием эффективного решения. В агрегатной системе имитации [2] процедура *PR.USTUPK* подсистемы *PS.RESHEN* реализует наиболее часто применяемые методы многокритериальной оптимизации, при этом выделяется главный критерий ( $f_1(x) \rightarrow \max$ ). В этом случае задача векторной оптимизации имеет вид:

$$f_i(x) \rightarrow \max; \quad f_i(x) \geq f_i^*, \quad i = \overline{1, k};$$

$$f_j(x) \leq f_j^*, \quad j = \overline{k+1, m}, \quad (1.2)$$

где  $f_i^*$  и  $f_j^*$  – множество экспертных оценок для неглавных критериев оптимизации. Подобная процедура реализует метод последовательных уступок, согласно которому все критерии эффективности располагаются в порядке уменьшения степени их важности ( $f_{i1}(x), f_{i2}(x), \dots, f_{in}(x)$ ).

Процедура *PR.SOSTKP* подсистемы *PS.RESHEN* реализует метод составного критерия. Исследователь определяет важность  $\gamma_i$ , где  $\gamma_i \geq 0$ ,  $i$ -го критерия (например, дисперсия  $f_i(x)$  может быть «весом» критерия). Составной критерий имеет вид:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i f_i(x) \rightarrow \max. \quad (1.3)$$

В более общем случае используется процедура *PR.BEZRA* подсистемы *PS.RESHEN*, реализующая общий случай нормативных методов векторной оптимизации. Все нормативные методы предполагают возможность предварительного получения нормативов  $\lambda_{f_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$  на основе приближенного решения многоцелевой задачи и приближения к этим нормативам по заданной метрике  $\rho(f(x), \lambda_{f_i}) \rightarrow \min$ , которая может вычисляться одним из следующих способов:

$$\rho_1(f(x), \lambda_{f_i}) = \sum_{i=1}^m [f_i(x) - \lambda_{f_i}]^2, \quad (1.4)$$

$$\rho_2(f(x), \lambda_{f_i}) = \sum_{i=1}^m |f_i(x) - \lambda_{f_i}|, \quad (1.5)$$

$$\rho_3(f(x), \lambda_{f_i}) = \max_i |f_i(x) - \lambda_{f_i}|. \quad (1.6)$$

В ряде случаев в качестве критериев выступают булевы переменные и функции их использующие. Для таких случаев в *PS.RESHEN* имеется процедура *PR.GLKP*, которая реализует метод логического объединения критерия и используется, когда  $f_i(x)$ , при  $i = \overline{1, m}$ , могут принимать значения только 1 ( $i$ -я цель достигнута) или 0 (в противном случае).

Для выбора рационального варианта используется процедура *PR.CRIT* подсистемы *PS.RESHEN*, которая выбирает рациональный вариант, согласно одной из стратегий выбора:

1) усредненные значения критериев

$$u_1 = \max_s \left( f_{is} = \frac{1}{2} \left( \max_i f_{is} + \min_i f_{is} \right) \right), \quad i = \overline{1, s}; \quad (1.7)$$

2) оптимистическое значение оценки принятия решений

$$u_2 = \max_s \left( f_{ir} = \max_i f_{is} \right), \quad i = \overline{1, s}; \quad (1.8)$$

3) пессимистическая оценка

$$u_3 = \max_s \left( f_{ir} = \min_i f_{is} \right), \quad i = \overline{1, s}; \quad (1.9)$$

4) нейтралитета

$$u_4 = \max_s \left( \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s f_{ir} \right), \quad i = \overline{1, s}; \quad (1.10)$$

5) Севиджа

$$u_5 = \min_s \left( f_{ir} = \max_i \left( \max_s f_{is} - l_{is} \right) \right), \quad i = \overline{1, s}. \quad (1.11)$$

Отметим, что все отклики  $f_{ir}$  и  $f_{is}$  являются скалярами. Набор классических критериев (1.7)–(1.11) позволяет принимать эффективные решения в условиях неопределенности и риска. Отметим, что эти критерии вычисляются при условии постоянства значений множеств  $\{G\}$  и  $\{Z\}$  в ходе выбора оптимального варианта решения.

Если же  $\{G\}$  и  $\{Z\}$  таковыми не являются, то составляется матрица принятия решений  $\|f_{ir}\|$ , в которой строками  $r$  являются варианты структуры технологического цикла, а столбцами – вероятности нахождения множеств  $\{G\}$  и  $\{Z\}$  в различных состояниях. В этом случае используется методика выбора варианта рациональной организации структуры по матрице принятия решения.

В таблице 1.1 приведены значения вероятностей перехода технологического цикла контрольного примера из состояния в состояние при определении рационально варианта организации его структуры при наличии сбоев и отказов оборудования.

## 2 Оценка ошибок имитации при оптимизации структуры технологического цикла

Для автоматизации постановки серий имитационных экспериментов на модели использовалась агрегатная система имитации [2], в библиотеке которой (*LIB.PROC*) реализованы соответствующие реентерабельные программы. С помощью подсистемы формирования имитационной модели (*PS.FORMPR*) на основании исходной информации происходит компоновка структуры программы модели.

В результате создается вариант программы имитационной модели, для которого параметры состава ресурсов и надежность характеристики функционирования оборудования технологического цикла находятся в «серединной» точке пространства параметров состояний модели.

Таблица 1.1

Вектор вероятностей начального состояния $v_n$	$i_n$	1	2	3	4	5	6	7
	$P_n$	0,60	0,10	0,05	0,05	0,05	0,05	0,10
Функция распределения цикла смен состояний $F_0(v)$	$P_k$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	1,00
	$v_k$	20	30	40	50	60	70	80
Вектор вероятностей конечного состояния $v_k$	$i_k$	1	2	3	4	5	6	7
	$P_k$	0,10	0,05	0,05	0,10	0,10	0,10	0,50
	$j$	1	2	3	4	5	6	7
	$i$							
Матрица вероятностей перехода из состояния $i$ в состояние $j$ $\ p_{ij}\ $	1	0,05	0,30	0,20	0,10	0,05	0,20	0,10
	2	0,30	0,05	0,10	0,05	0,05	0,05	0,40
	3	0,20	0,10	0,05	0,10	0,15	0,20	0,20
	4	0,05	0,30	0,30	0,05	0,10	0,10	0,10
	5	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,70	0,05
	6	0,10	0,10	0,10	0,20	0,25	0,05	0,20
	7	0,20	0,10	0,05	0,05	0,50	0,05	0,05

Вариант имитационной модели, для которого параметры находятся в серединной точке пространства, в дальнейшем будем называть «базовой моделью». Таким образом, универсальная имитационная модель из библиотеки *LIB.PROC* системы автоматизации моделирования превращается в модель, соответствующую конкретной структуре тестового варианта объекта исследования.

На данном этапе требуется определение достаточного числа реализаций процедуры Монте-Карло при постановке серий имитационных экспериментов, оценка погрешности имитации, анализ «чувствительности» откликов модели к вариациям параметров моделирования в диапазоне их изменения.

На *первом шаге* этапа с помощью универсальной процедуры *PR.TOCHN* определялась *точность* имитации. Число «прогонов» модели в имитационном эксперименте было установлено равным тридцати ( $N_1 = 30$ ). Каждый «прогон» предполагает запись интегральной статистики имитации в базу данных имитационной модели. Процедура *PR.TOCHN* по выборке объема  $N_1 = 30$  для каждого  $l$ -го «прогона» ( $l = \overline{1, N_1}$ ) определяет оценку математического ожидания и дисперсии  $n$ -го отклика ( $\bar{Y}_n$  и  $D_n$ ). Точность оценивается по формуле:

$$\varepsilon_n \% = \frac{0,75L}{\bar{Y}_n} \sqrt{\frac{D_n}{N_1 - 1}} \cdot 100\%. \quad (2.1)$$

Оценка общей ошибки имитации при этом равна  $\varepsilon = \max_n \varepsilon_n \%$ . При каждом «прогоне» начальные значения базовых генераторов равномерно распределенных величин  $\xi_0$  определялись путем совмещения значений двух конгруэнтных генераторов псевдослучайных величин  $\xi_0$ . После проведения тридцати имитационных экспериментов

для имитационной модели с помощью процедуры *PR.TOCHN* была определена точность имитации ( $\varepsilon_n = 10\%$ ). Для иллюстрации реализации предложенной методики исследования точность в 10%, с нашей точки зрения, достаточна. В том случае, когда подобная точность имитации мала, необходимо увеличить число реализаций процедуры Монте-Карло до величины  $N_2$ , большей  $N_1$ , но для этого необходимы дополнительные расходы ресурсов машинного времени.

На *втором шаге* этапа с помощью процедуры *PR.CHUVS* подсистемы *PS.ISPITAN* оценивается «чувствительность» откликов имитационной модели к изменению параметров имитации при числе реализаций  $N_1 = 30$  (использовалась известная методика [3]). Процедура *PR.CHUVS* позволила вычислить *коэффициент чувствительности* откликов к вариациям параметров по формуле:

$$\delta Y_n = \frac{|Y_h^+ - Y_h^-| \cdot 2}{(Y_h^+ + Y_h^-)} \cdot 100\%, \quad (2.2)$$

где  $Y_h^+$  и  $Y_h^-$  – значения откликов при значениях параметров имитационной модели соответственно из  $X_q^+$  и  $X_q^-$  (здесь диапазон изменения  $q$ -го параметра равен  $(X_q^+, X_q^-)$ ). Результаты расчетов коэффициентов с помощью процедуры *PR.CHUVS* показывают, что для всех откликов *коэффициент чувствительности*  $\delta Y_n$  изменяется от 20% до 30%. Поскольку  $\delta Y_n > \varepsilon_n$  для всех параметров, то в дальнейших имитационных экспериментах нельзя уменьшать состав параметров и откликов имитационной модели.

На *третьем шаге* этапа определялось число реализаций  $N$  процедуры Монте-Карло в имитационной модели с помощью расчетной формулы:

$$N > \frac{S_n}{d^2(1-\alpha)}, \quad (2.3)$$

где  $\alpha = 0,05$  – коэффициент значимости,  $d = S_n / 4$  – точность имитации. Расчеты по формуле (2.3) определили необходимость задания числа реализаций  $N_1 \geq 100$  экспериментов.

### 3 Апробация методики анализа надежности функционирования вероятностных производственных систем

Анализ надежности функционирования вероятностных производственных систем осуществлялся на имитационной модели в рабочей точке пространства параметров надежности  $\{GH\}$  на основании матрицы надежностных характеристик оборудования технологического цикла. В ходе перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  процесс  $PR.UZEL$  определял времена и стоимости нахождения технологического цикла в состояниях  $ij$ . Каждый  $j$ -й процесс  $PR.SOST_{ij}$  заказывал ресурсы в состояниях  $ij$   $l$ -й реализации ( $l \leq 100$ ). Процедура Монте-Карло активизировала  $PR.UZEL$  с начального состояния  $i_n = 1$ .

При выполнении алгоритмов  $PR.SOST_{ij}$  для тех случаев, когда использовалось оборудование, проверялась ситуация возникновения отказов. В  $l$ -й реализации для каждого устройства оборудования с номером  $k$  определялись конкретные значения характеристик надежности оборудования ( $\tau_{ВОК}$ ,  $\tau_{ВОК}$ ,  $C_{ВОК}$ ,  $\tau_{АВ1к}$ ,  $C_{АВ1к}$ ,  $\tau_{АВ2к}$ ,  $C_{АВ2к}$ ). Эти характеристики оставались неизменными до возникновения очередного отказа оборудования номера  $k$ . При очередной активизации процессу  $PR.SOST_{ij}$  процессом  $PR.UZEL$  передаются номера предыдущего  $i$  и последующего состояний  $j$ . В момент активизации  $PR.SOST_{ij}$  по матрице условных распределений определяет время нахождения технологического цикла в состоянии  $ij$   $\tau_{ijkl}$  и стоимость реализации в состоянии  $ij$   $C_{ijkl}$ .

При использовании оборудования номера  $k$  проверяется условие возникновения отказа из-за превышения граничного времени наработки устройства  $Q_{fkl} \leq Q_{нарk}$ , где  $Q_{fkl}$  – накопленное значение времени наработки  $k$ -го устройства в  $l$ -й реализации;  $Q_{нарk}$  – граничное значение времени наработки  $k$ -го устройства в  $l$ -й реализации имитационной модели.

После накопления статистик имитации процесс  $PR.SOST_{ij}$  активизирует процесс  $PR.UZEL$  вместе с указанием признаков ( $UKAZ$  и  $\pi_{ав}$ ), на

основе которых процесс выбирает номер активизируемого процесса  $PR.SOST_{ij}$ .

Процесс  $PR.SOST_{ij}$  в  $j$ -м состоянии формирует очередную точку временной диаграммы использования ресурсов при переходе ВТПП из состояния  $i$  в состояние  $j$ , состоящих из последовательностей статистик имитации.

В результате завершения имитационного эксперимента в файле статистики находится множество временных диаграмм реализации процесса в виде записи ( $\{ST1_{jhl}\}$ ;  $j = \overline{1,10}$ ,  $h = \overline{1,100}$ ,  $l = \overline{1,100}$ ) и множество интегральных статистик ( $\{STIN_{jl}\}$ ;  $j = \overline{1,10}$ ,  $l = \overline{1,100}$ ). По окончании  $N_1 = 100$  реализаций исследования варианта структуры в серединной точке параметров надежности  $\{GH\}$  в файле статистик имитации имеется  $N_1$  записей первого и второго типа. Этот файл статистики был обработан  $PS.OBRABOT$ . Обработка статистики имитации состояла в усреднении статистик имитации  $\{STIN_{jl}\}$ , нахождении средних значений по  $N_1$  реализациям интегральных откликов нахождения ВТПП в  $j$ -х состояниях и определении векторов откликов  $\{S\tau_j\}$ ,  $\{SC_j\}$ ,  $\{Sko_j\}$ ,  $\{Smt_j\}$ ;  $j = \overline{1,10}$  – среднее значение статистик соответственно времени нахождения, стоимости реализации, расхода комплектующих и материалов  $PR.SOST_{ij}$  в  $j$ -х состояниях. При этом вычислялись дисперсии статистик расхода ресурсов  $\{D\tau_j\}$ ,  $\{DC_j\}$ ,  $\{Dko_j\}$ ,  $\{Dmt_j\}$ ;  $j = \overline{1,10}$ .

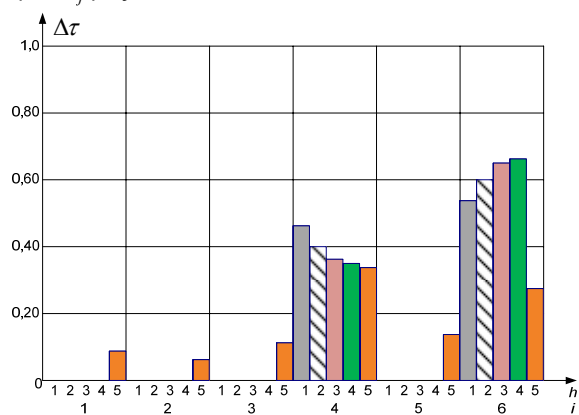


Рисунок 3.1 – Диаграмма превышения времени нахождения технологического цикла в  $i$ -х состояниях из-за отказов оборудования

Анализ нормированных значений откликов, представленных на рисунках 3.1 и 3.2, позволяет разделить состояния технологического процесса на 3 группы по суммарно используемым ресурсам ( $SC_j$ ,  $Sko_j$ ,  $Smt_j$ ) и суммарному времени нахождения в состояниях ( $S\tau_j$ ).

Анализ динамики реализации запросов ресурсов при наличии отказов оборудования в ходе серий экспериментов на модели позволил установить значение следующих статистик имитации:

– коэффициент превышения фактического времени  $\tau_{fij}$  выполнения  $PR.SOST_{ij}$  на значениях контрольного примера составляет  $k\tau_z = 0,69$ , а растяжение времени выполнения  $PR.SOST_{ij}$  из-за отказов оборудования составляет  $\gamma_R = 1,44$ ;

– вероятности использования ресурсов и оборудования составляют соответственно  $P_{ispR} = 0,76$  и  $P_{ispO} = 0,77$ .

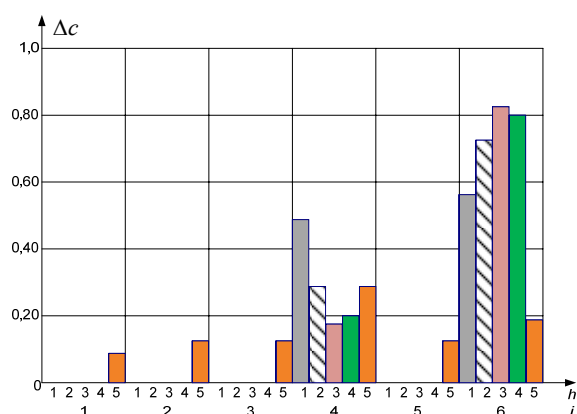


Рисунок 3.2 – Диаграмма превышения стоимости технологических операций в  $i$ -х состояниях из-за отказов оборудования

Как видно из рисунка 3.2, более 2/3 состояний технологического цикла используют ресурсы и оборудование. Из-за отказов оборудования и появления аварий время нахождения в состояниях увеличивается в среднем в 1,4 раза. При 100 сменах состояний оборудование отказывало в 7 случаях. Поэтому можно считать, что интегральная вероятность отказа оборудования в среднем составляет  $P_{OT} = 7/100 = 0,07$ .

На основании полученных результатов можно сделать заключение, что основная доля времени и стоимости выполнения технологического цикла приходится на состояние третьей группы ( $i = 4$  и  $i = 6$ ) и равна соответственно 0,535 и 0,477. При этом удельный вес нестандартных состояний по времени и стоимости нахождения в этих состояниях равен соответственно 0,257 и 0,22.

Таким образом, решающую роль в структурной реконфигурации технологического цикла играют надежные характеристики функционирования оборудования, а предложенный подход позволяет оценить параметры выполнения технологических операций, обеспечивающие заданный уровень надёжности функционирования технологического цикла.

### Заключение

Предлагается новый подход, связанный с погружением модели объекта исследования в пространство возможных состояний при наличии функциональных зависимостей между операциями для реализации сквозной технологии объектно-ориентированного программирования контура управления технологическим циклом производства.

Разработана методика анализа надёжности функционирования вероятностных производственных систем, позволяющая определить параметры выполнения технологических операций, обеспечивающие заданный уровень надёжности функционирования технологического цикла. Методика реализует процедуру комплексной оценки вероятностных характеристик выполнения технологических операций с использованием аппарата имитационного моделирования.

Новизна предложенной методики определяется введением пространства состояний параметров надёжности технологического цикла, основанного на определении вероятностей надёжности технологических операций, и введением пространства функций, позволяющих отобразить отношения и связи между технологическими операциями.

Практическая значимость данного подхода состоит в реализации процедуры оценки вероятностных значений параметров надёжности функционирования компонентов производственной системы, обеспечивающей оптимальные варианты реализации структуры технологического цикла в рамках многофункционального критерия качества его выполнения.

В основу структурной реконфигурации технологического процесса производства положена технология имитационного моделирования, применяемая ко всему спектру задач синтеза оптимальной структуры вероятностных технологических систем с использованием агрегатной системы автоматизации моделирования [2], которая опирается на построение динамических имитационных моделей объекта исследования.

### ЛИТЕРАТУРА

- Смородин, В.С. Метод динамической имитации вероятностных производственных систем / В.С. Смородин // Математичні машини і системи (Mathematical Machines and Systems). – 2012. – № 2. – С. 96–101.
- Смородин, В.С. Агрегатная система автоматизации моделирования вероятностных технологических процессов производства / В.С. Смородин // Математичні машини і системи (Mathematical Machines and Systems). – 2007. – № 1. – С. 105–110.
- Лоу, А. Имитационное моделирование. Классика CS / А. Лоу, В. Кельтон. – 3-е изд. – СПб. : Питер; Киев. : ВНУ, 2004. – 847 с.

Поступила в редакцию 19.06.12.

УДК 541.13

**СТРУКТУРА ПЛЕНОК ПОРИСТОГО ОКСИДА АЛЮМИНИЯ,  
ФОРМИРУЕМЫХ В ЭЛЕКТРОЛИТАХ НА ОСНОВЕ  
ОРГАНИЧЕСКИХ КИСЛОТ**

**И.А. Врублевский, С.К. Дик, А.С. Терех, А.В. Смирнов, К.В. Чернякова**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск*

**STRUCTURE OF THE POROUS ALUMINIUM OXIDE FILMS  
FORMED IN THE SOLUTIONS OF ORGANIC ACIDS**

**I.A. Vrublevsky, S.K. Dick, A.S. Tereh, A.V. Smirnov, K.V. Chernyakova**

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk*

Рассмотрены закономерности анодного роста пленок пористого оксида алюминия в электролитах на основе водных растворов щавелевой и малоновой кислот. Показано, что при анодировании алюминия в гальваностатическом режиме в 0,3 М растворе щавелевой кислоты и в 0,8 М растворе малоновой кислоты формируются пористые пленки оксида алюминия с регулярно-упакованной ячеистой структурой. Анодирование алюминия в этих электролитах приводит к формированию пористых пленок с межпористым расстоянием в диапазоне 90–270 нм.

**Ключевые слова:** оксид алюминия, щавелевая кислота, малоновая кислота, пористая пленка.

The study deals with the experimental results of the peculiarities of the anodic growth of the porous aluminium oxide films formed in aqueous solutions of oxalic and malonic acids. The results obtained show that during galvanostatic aluminum anodizing in 0.3 M and 0.8 M solutions of oxalic and malonic acids, the films with regular porous structure are formed. Aluminum anodizing in the solutions of malonic and tartaric acids leads to the forming of the porous films with inter-porous spacing in the range of 90–270 nm.

**Keywords:** aluminium oxide, oxalic acid, malonic acid, porous film.

**Введение**

Пористые оксидные пленки, имеющие регулярную ячеистую структуру гексагональной формы и размер пор от 10 до 100 нм, могут быть получены методом электролитического анодирования алюминия. Свойства пористых матриц с полноразмерной структурой, сформированных на основе анодного оксида алюминия, находят применение в магнитных, электронных и фотонных структурах и приборах.

Для получения анодных оксидных пленок алюминия с высокой упорядоченностью ячеисто-пористой структуры желательнее иметь контролируемый и воспроизводимый процесс пленочного формирования. Ранее было установлено, что самоупорядоченный рост пористых пленок наблюдается, если значение коэффициента объемного роста пористого оксида алюминия лежит в интервале 1,2–1,4. Следовательно, исследование закономерностей анодного роста пленок пористого оксида алюминия является актуальной задачей. Известно, что в процессе анодирования толщина пористой пленки анодного оксида алюминия увеличивается в соответствии с законом Фарадея. Основные характеристики структуры пленок анодного оксида алюминия такие, как толщина барьерного слоя, диаметр пор и диаметр ячеек, при анодировании в установившемся режиме пропорциональны напряжению анодирования.

В связи с этим важным является установление взаимосвязи между физико-химическими механизмами электрохимического окисления и такими физическими свойствами, как объемный рост.

**1 Описание эксперимента**

Для исследований использовалась алюминиевая фольга 99,999 % чистоты и толщиной 10 мкм (Goodfellow). Из этой фольги вырезали полоски размерами 2 см × 2,5 см и затем проводили двухстороннее анодирование в гальваностатическом режиме. При анодировании алюминия электролит интенсивно перемешивали. Постоянство температуры электролита ( $18,0 \pm 0,1$ ) °C поддерживали с помощью термостата TherMo Naake DC10. Анодирование алюминия в 0,3 М растворе щавелевой кислоты проводили при постоянной плотности тока  $10,0 \text{ mA cm}^{-2}$  (напряжение на участке стационарного оксидного роста 40 В). Анодирование в 0,8 М растворе малоновой кислоты ( $\text{HOOCCH}_2\text{COOH}$ , ч.д.а.) проводили с постоянной плотностью тока  $6,0 \text{ mA cm}^{-2}$  в течение 60 мин. до полного окисления алюминия. При этом, на участке стационарного роста пленки фиксировали напряжение равное 102 В [1]–[3]. Морфологию поверхности и поперечное сечение пленок пористого оксида алюминия, сформированных в растворах щавелевой и малоновой кислот, исследовали с помощью сканирующего

электронного микроскопа JOEL 840A (SEM) и атомно-силового микроскопа NT-206. Для приготовления растворов использовали дистиллированную воду.

ИК спектры пропускания анодных пленок были получены с использованием спектрометра Bruker IFS 48 FTIR. Для высокотемпературного отжига пленок использовалась муфельная печь с электронным блоком управления, обеспечивающим стабильное поддержание заданной температуры. Температурная обработка отдельных образцов проводилась на воздухе в течение 2 часов.

## 2 Результаты

### 2.1 Исследование микроструктуры

На рисунке 2.1 показана морфология поверхности и поперечное сечение пленки пористого оксида алюминия, сформированной в 0,3 М растворе щавелевой кислоты (напряжение анодирования на участке стационарного роста 40 В). Как видно, пористая пленка анодного оксида имеет достаточно регулярно-упакованную ячеистую структуру с межпористым расстоянием около 91 нм.

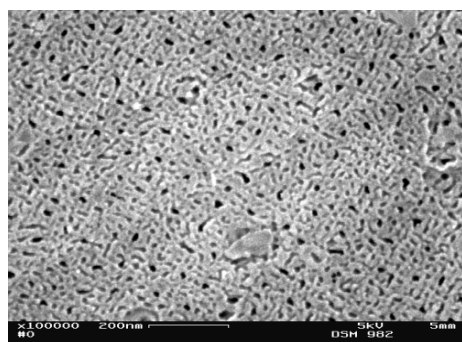
На рисунке 2.2 показано поперечное сечение пленки пористого оксида алюминия, сформированной в 0,8 М растворе малоновой кислоты. Как видно из рисунка 2.2, пористая пленка имеет относительно регулярно-упакованную ячеистую структуру с межпористым расстоянием около 262 нм.

### 2.2 Измерение толщины пленок пористого оксида алюминия и расчет коэффициента объемного роста

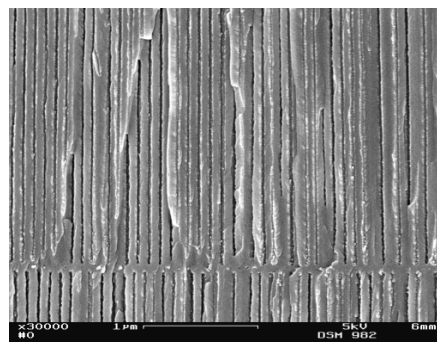
Оценку толщины пленок с точностью  $\pm 0,5$  мкм проводили с помощью микрометра с ценой деления 1,0 мкм.

Коэффициент объемного роста пленок пористого оксида алюминия рассчитывали как отношение толщины пористой пленки оксида алюминия к толщине исходного слоя алюминия.

Общее количество электричества, затраченное на электрохимическое окисление алюминиевой фольги толщиной 11,5 мкм в щавелевой кислоте в различных режимах, было приблизительно одинаково. Это свидетельствовало о постоянстве эффективности анодного тока во всех экспериментах.

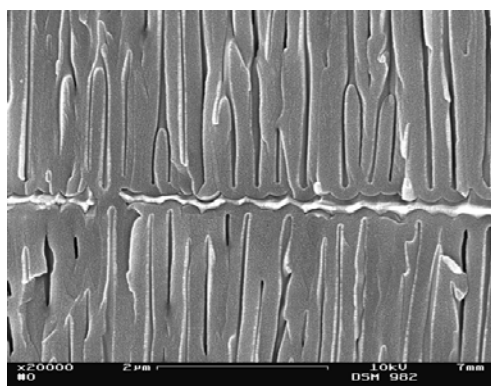


а)

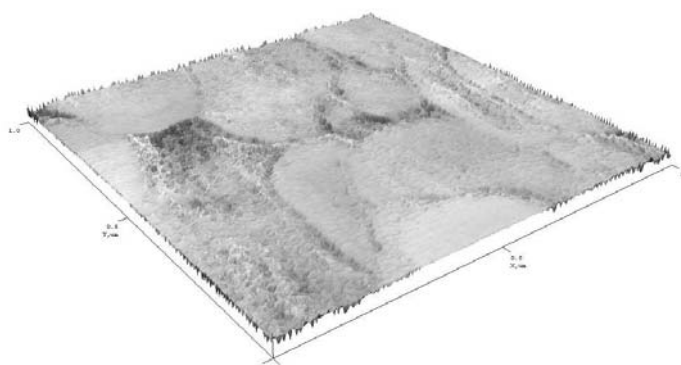


б)

Рисунок 2.1 – Морфология поверхности (а) и поперечного сечения (б) пленки пористого оксида алюминия, сформированной в растворе щавелевой кислоты



а)



б)

Рисунок 2.2 – Поперечное сечение пленки пористого оксида алюминия, сформированного в 0,8 М растворе малоновой кислоты, полученного с помощью сканирующего электронного микроскопа (а) и атомно-силового микроскопа (б)

### 2.3 ИК спектры пленок пористого оксида алюминия

Хорошо известно, что физические свойства пористого оксида алюминия определяются структурой пленок и могут изменяться под воздействием тепловой обработки. Чтобы получить информацию о влиянии температурной обработки на изучаемые свойства анодной оксидной пленки, записывались и анализировались ИК спектры пропускания пленок, термообработанных при различных температурах.

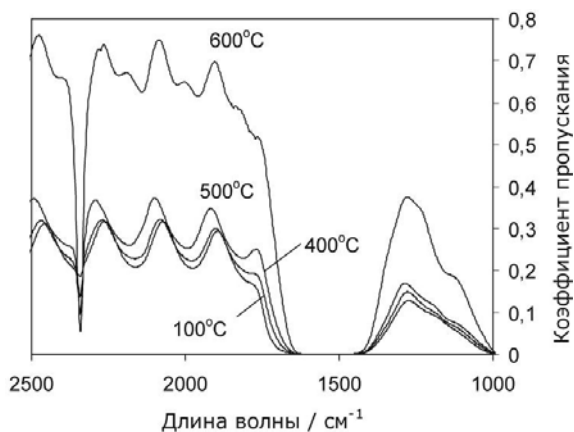


Рисунок 2.3 – ИК спектры пропускания пленок пористого оксида алюминия, сформированных в растворе щавелевой кислоты, термообработываемых на воздухе при различных температурах

На рисунке 2.3 показаны ИК спектры пленок после термообработки на воздухе при различных температурах обработки в диапазоне длин волн 2600–1000  $\text{см}^{-1}$ . Все спектры имеют полосу поглощения при длине волны 2339  $\text{см}^{-1}$ . Возникновение полосы поглощения с пиком на длине волны 2339  $\text{см}^{-1}$  связывается с поглощением  $\text{CO}_2$ .

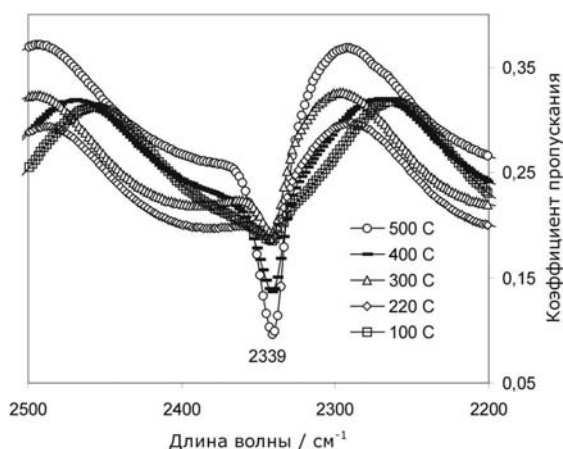


Рисунок 2.4 – ИК спектры пропускания пленок пористого оксида алюминия в диапазоне длин волн 2500–2200  $\text{см}^{-1}$

Анализ ИК спектров показывает, что пик поглощения  $\text{CO}_2$  значительно увеличивается в спектре пленок, обработанных при 600°C, хотя незначительное увеличение полосы поглощения наблюдается уже при 400°C (рисунок 2.4).

Увеличение пика поглощения с температурой свидетельствует об увеличении содержания  $\text{CO}_2$  в термообработанных анодных оксидных пленках, что может быть результатом термического разложения анионов щавелевой кислоты, встроенных в анодные оксидные пленки. Об этом свидетельствует также тот факт, что для пленок анодного оксида алюминия, обработанных при 600°C, коэффициент прозрачности резко увеличивается.

### 2.4 Выход по току электродной реакции $\text{Al} \rightarrow \text{Al}^{3+}$

В ходе экспериментов было установлено, что количество электричества, необходимое для окисления алюминиевой фольги толщиной 11,5 мкм, постоянно в щавелевой кислотах и равно  $40,2 \pm 1,8 \text{ Кл/см}^2$ . Это позволило сделать вывод о постоянстве выхода по току при электрохимическом окислении алюминия.

Для определения выхода по току определяли скорость потери алюминия как отношение толщины фольги алюминия к времени окисления алюминия. На рисунке 2.5 представлена зависимость скорости потери алюминия (мг/мин) от удельной плотности анодного тока при анодировании в 4 % растворе щавелевой кислоты при 24 °C. Для расчета массы алюминия использовали удельную плотность алюминия ( $2,697 \text{ г/см}^3$ ).

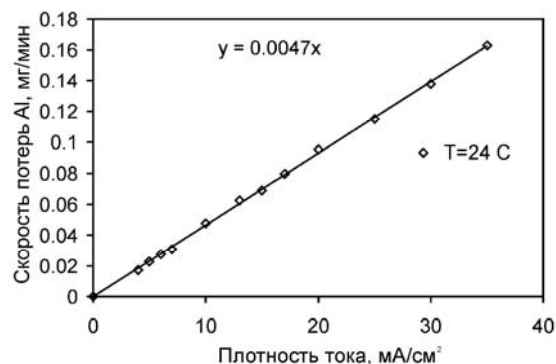


Рисунок 2.5 – Зависимость скорости потери алюминия (мг/мин) от плотности анодного тока при анодировании в 4 % растворе щавелевой кислоты при 24 °C

Обработка экспериментальных результатов методом наименьших квадратов позволила получить следующую зависимость:

$$m t^{-1} = 0,0047 j. \quad (2.1)$$

Массу алюминия, израсходованную на образование оксида, рассчитывали, используя закон Фарадея:

$$m = k_0 j S t \eta, \quad (2.2)$$

где  $k_0$  – электрохимический эквивалент, который для алюминия равен 0,336 г/А · ч,  $m$  – масса алюминия, израсходованная на формирование оксида,  $j$  – плотность тока,  $S$  – площадь анодирования алюминия,  $t$  – время анодирования,  $\eta$  – выход по току.

Сравнивая (2.1) и (2.2), получили, что выход по току для электродной реакции  $Al \rightarrow Al^{3+}$  близок к 89 %.

### 2.5 Влияние режимов анодирования алюминия на коэффициент объемного роста

На рисунках 2.6 и 2.7 показано изменение коэффициентов объемного роста оксидной пленки в щавелевой кислоте от плотности тока и напряжения анодирования.

Как видно из рисунков 2.6 и 2.7, анодная плотность тока и температура электролита существенно влияют на объемный рост пленок пористого оксида алюминия. При анодировании с постоянной плотностью тока увеличение температуры электролита приводит к уменьшению напряжения анодирования и коэффициента объемного роста. Увеличение плотности тока приводит к увеличению этих параметров. Наблюдаемые изменения коэффициента объемного роста от анодного напряжения имеют линейный характер. Варьирование температурой электролита не приводит к изменению характера зависимостей, и все точки, полученные для разных температур, лежат на одной линии (рисунок 2.7).

Для анодных оксидных пленок, сформированных при напряжениях анодирования выше 55 В, наблюдается уменьшение угла наклона прямых. Для пленок, сформированных в диапазоне напряжений от 30 до 55 В (участок I), методом наименьших квадратов была получена следующая зависимость коэффициента объемного роста пленок от напряжения анодирования:

$$k = 0,0057U + 1,144, \quad (2.3)$$

для напряжений анодирования свыше 55 В (участок II):

$$k = 0,003U + 1,308. \quad (2.4)$$

На рисунке 2.8 показана зависимость логарифма плотности анодного тока от обратного коэффициента объемного роста пленок оксида алюминия, формируемых в щавелевой кислоте.

Полученные зависимости имеют линейный характер. Как видно из рисунка 2.8, каждая температура электролита имеет свою зависимость логарифма плотности тока анодирования от  $1/k$ . Особенность зависимостей для щавелевой кислоты заключается в наличии двух линейных участков. При достижении коэффициента объемного роста 1,45 одновременно на зависимостях для температур 20 и 24°C происходит изменение угла наклона.

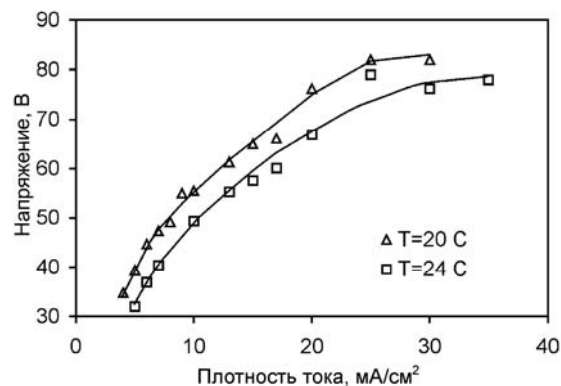


Рисунок 2.6 – Зависимость коэффициента объемного роста от плотности тока пленок пористого оксида алюминия, полученных в щавелевой кислоте

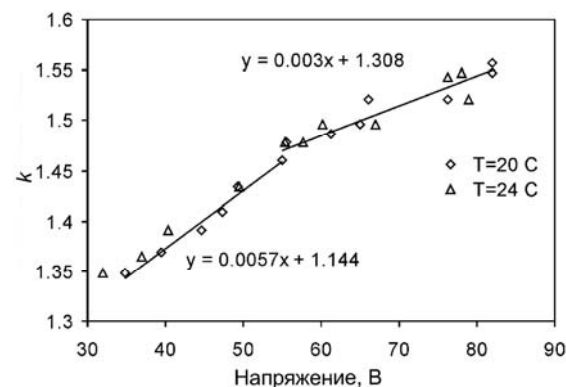


Рисунок 2.7 – Зависимости коэффициента объемного роста анодных пленок от напряжения анодирования в щавелевой кислоте

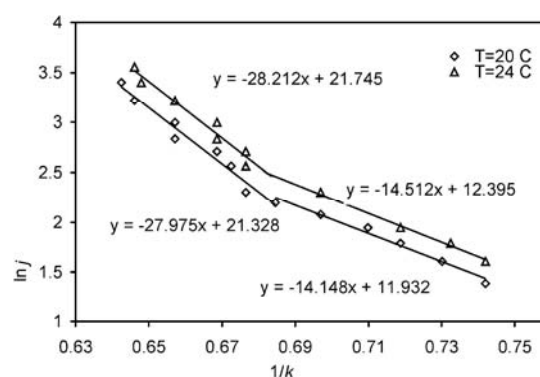


Рисунок 2.8 – Зависимость логарифма плотности анодного тока от обратного коэффициента объемного роста пленок оксида алюминия в щавелевой кислоте

### Заключение

Результаты исследования показывают, что при анодировании алюминия в гальваностатическом режиме с плотностью тока 6,0 мА · см<sup>-2</sup>



в 0,8 М растворе малоновой кислоты и 0,3 М растворе щавелевой кислоты формируются пористые пленки оксида алюминия с регулярно-упакованной ячеистой структурой. Межпористое расстояние в пленках, полученных в растворе малоновой кислоты, равно 263 нм (напряжение анодирования 103 В на участке стационарного роста).

При анодировании в гальваностатическом режиме увеличение температуры электролита приводит к уменьшению напряжения анодирования и коэффициента объемного роста пленок пористого оксида алюминия. Коэффициент объемного роста так же, как размеры ячеек и толщина барьерного слоя пленок пористого оксида алюминия, линейно зависит от напряжения анодирования. Зависимость коэффициента объемного роста от напряжения анодирования в щавелевой кислоте имеет два прямолинейных участка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Masuda, H. Ordered Metal Nanohole Arrays Made by a Two-Step Replication of Honeycomb Structures of Anodic Alumina / H. Masuda, K. Fukuda // *Science*. – 1995. – № 268. – P. 1466.
2. Masuda, H. Self-ordering of cell arrangement of anodic porous alumina formed in sulfuric acid solution / H. Masuda, F. Hasegawa, S. Ono // *J. Electrochem. Soc.* – 1997. – № 144. – P. L127.
3. Masuda, H. Investigation of Porous Alumina as a Self-Assembled Diffractive Element to Facilitate Light Trapping in Thin Film Silicon Solar Cells / H. Masuda, K. Yada, A. Osaka // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 1998. – № 37. – L1340.

*Поступила в редакцию 29.05.12.*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (банделеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).