



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 1 (10) 2012

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (10) 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Анищик В.М., Валько Н.Г., Поляк Н.И., Война В.В.** Модификация физико-механических свойств Zn-Ni покрытий рентгеновским излучением 7
- Гиргель С.С.** Свойства векторных парааксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация 11
- Кулак Г.В., Анисимова А.Е.** Коллинеарное акустооптическое взаимодействие двукратно вырожденных мод в двулучепреломляющих оптических волоконных световодах 15
- Митюрин Г.С., Свиридова В.В., Сердюков А.Н.** Термооптическое возбуждение звука в гиротропном двухслойнике при встречном взаимодействии электромагнитных волн 19
- Стаськов Н.И., Ивашкевич И.В., Сотский А.Б., Сотская Л.И.** Учет влияния естественного поверхностного слоя при исследовании кремниевых пластин методом спектральной эллипсометрии 26
- Тимошенко Е.В., Юревич В.А., Юревич Ю.В.** Отражение излучения поверхностным слоем среды с неоднородным уширением линии резонансного поглощения 31
- Томас Р.Д., Шмидт Х.Т., Андлер Г., Бьоркхаге М., Блум М., Брэнхольм Л., Бэкстрём Э., Дэнаред Х., Даш С., Хааг Н., Холден П., Хеллберг Ф., Хольм А.И.С., Юханссон Х.А.Б., Чельберг А., Челлерсьё Г., Ларссон М., Леонтен С., Лильбию Л., Лёфгрэн П., Мальм Б., Маннервик С., Масуда М., Мисра Д., Орбэн А., Пэль А., Рэйнхед П., Ренсфелт К.-Г., Розен С., Шмидт Ч., Сеитз Ф., Симонссон А., Веймер Я., Зеттерген Х., Седерквист Х.** Устройство для изучения ультрахолодных реакций, использующее объединённые пучки 36
- Умрейко Д.С., Зажогин А.А., Комяк А.И., Умрейко С.Д.** Исследование процессов образования оксидов урана из уранатных соединений при воздействии сдвоенных лазерных импульсов 41
- Хандрамай В.Л., Соловцова О.П., Тепляков В.Г.** Правило сумм Гросса-Ллевеллина Смита: вклады высших твистов 46
- Цветкова Е.А., Гольдаде В.А.** Взаимодействие электромагнитных полей с биополем человека 51
- Цырельчук И.Н., Михайловский Д.Н., Булычёва В.Б.** Оптимизация нерегулярных релятивистских ламп бегущей волны О-типа с учетом расслоения и распределения скоростей в электронном пучке 59
- Юревич В.А., Тимошенко Е.В., Юревич Ю.В.** Динамика излучения в квантоворазмерных структурах при учете диполь-дипольного взаимодействия 64

МАТЕМАТИКА

- Витько Е.А.** О наименьших и наибольших элементах секции локетта фиттингова функтора 69
- Гальмак А.М.** О вектор-матрицах и пространственных матрицах 75
- Лемешев И.В., Монахов В.С.** О разрешимости некоторых конечных примитивных групп .. 87
- Майоровская С.В.** Отражающая функция и периодичность решений одной неавтономной кубической системы 92
- Рыжик В.Н.** Новые характеристики конечных p -сверхразрешимых групп 94
- Рябченко Н.В., Старовойтов А.П., Казимиров Г.Н.** Эрмитовская аппроксимация двух экспонент 97
- Селькин В.М.** Об одном свойстве произведения неединичных формаций 101

ТЕХНИКА

- Меженная М.М., Осипов А.Н., Ильясевич И.А., Давыдова Н.С., Давыдов М.В., Кульчицкий В.А.** Метод частотно-временного анализа суммарной электромиограммы в оценке функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека 105

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 16.03.12. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,4. Уч.-изд. л. 11,7. Тираж 100 экз. Заказ № 179.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГТУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (10) 2012

CONTENTS

PHYSICS

| | |
|--|----|
| Anishchik V.M., Valko N.G., Poliak N.I., Vojna V.V. Modification of physical and mechanical properties of Zn-Ni coatings by X-ray radiation | 7 |
| Girgel S.S. Properties of vectorial paraxial light beams. II. The non homogeneous polarization | 11 |
| Kulak G.V., Anisimova A.E. Collinear acousto-optical interaction of twofold-degenerated modes of bi-refractive optical fiber-optical waveguides | 15 |
| Mityurich G.S., Sviridova V.V., Serdyukov A.N. Thermo-optical sounds excitation in gyrotropic two-layers under opposite interaction of electromagnetic waves | 19 |
| Stas'kov N.I., Ivashkevich I.V., Sotski A.B., Sotskaya L.I. The account of influence of the natural surface layer under investigation of silicon plates by the method of spectral ellipsometry | 26 |
| Timoschenko E.V., Yurevich V.A., Yurevich Yu.V. Light reflection by the subsurface layer with unhomogenous broadening of absorption resonance | 31 |
| Thomas R.D., Schmidt H.T., Andler G., Björkhage M., Blom M., Brännholm L., Bäckström E., Danared H., Das S., Haag N., Halldén P., Hellberg F., Holm A.I.S., Johansson H.A.B., Källberg A., Källersjö G., Larsson M., Leontein S., Liljeby L., Löfgren P., Malm B., Mannervik S., Masuda M., Misra D., Orbán A., Paál A., Reinhed P., Rensfelt K.-G., Rosén S., Schmidt K., Seitz F., Simonsson A., Weimer J., Zettergren H., Cederquist H. Merged-beams tools for the study of ultra-cold reactions | 36 |
| Umreiko D.S., Zazhigin A.A., Komyak A.I., Umreiko S.D. Study of the processes of uranium oxides formation from uranate compounds under the effect of double laser pulses | 41 |
| Khandramai V.L., Solovtsova O.P., Teplyakov V.G. Gross-Llevellyn Smith sum rule: higher twist terms contribution | 46 |
| Tsvetkova E.A., Goldade V.A. Interaction between electromagnetic fields and human biofield | 51 |
| Tsyrelchuk I.N., Mikhailovsky D.N., Bulycheva V.B. Irregular travelling wave tubes optimization based on bundle and velocity dispersion in electron beam | 59 |
| Yurevich V.A., Timoschenko E.V., Yurevich Yu.V. Radiation dynamics on quantum-well structures under the condition of dipole-dipole interactions | 64 |

MATHEMATICS

| | |
|--|-----|
| Vitko E.A. On the smallest and the largest elements of the lockett section of a Fitting functor | 69 |
| Gal'mak A.M. On vector-matrices and spacematrices | 75 |
| Lemeshev I.V., Monakhov V.S. On the solvability of some finite primitive groups | 87 |
| Mayorauskaya S.V. Reflecting function and solution-periodicity of a nonautonomous cubic system | 92 |
| Rizhik V.N. New characterization of finite p -supersoluble groups | 94 |
| Rjabchenko N.V., Starovoitov A.P., Kazimirov G.N. Hermitian approximation of two exponents | 97 |
| Selkin V.M. On one property of the product of non-identity formations | 101 |

TECHNICS

| | |
|--|-----|
| Mezhennaya M.M., Osipov A.N., Ilyasevich I.A., Davydova N.S., Davydov M.V., Kulchitsky V.A. Method of time-frequency analysis of global electromyogram in estimation of human neuromuscular system functional condition | 105 |
|--|-----|

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

УДК 544.542.1; 621.357.9

МОДИФИКАЦИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ Zn-Ni ПОКРЫТИЙ РЕНТГЕНОВСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

В.М. Анищик¹, Н.Г. Валько², Н.И. Поляк¹, В.В. Война²

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

MODIFICATION OF PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF Zn-Ni COATINGS BY X-RAY RADIATION

V.M. Anishchik¹, N.G. Valko², N.I. Poliak¹, V.V. Vojna²

¹Belarussian State University, Minsk

²Y. Kupala Grodno State University, Grodno

В работе представлены результаты исследования физико-механических свойств Zn-Ni покрытий, модифицированных рентгеновским излучением в процессе электроосаждения. Обнаружена зависимость механических характеристик покрытий от кислотности электролитов, используемых для осаждения Zn-Ni сплавов. Установлено, что действие рентгеновского излучения обуславливает увеличение микротвёрдости и уменьшение коэффициента трения покрытий, осажённых из нейтрального и слабокислого электролита. Для покрытий, осажённых из кислого электролита, наблюдаются обратные зависимости.

Ключевые слова: сплав, рентгеновское излучение, микротвёрдость, коэффициент трения, элементный состав.

This paper presents the results of the study of physical and mechanical properties of the Zn-Ni alloy coatings modified by X-ray radiation. Non-monotonic dependence of the mechanical characteristics of coatings on the acidity of electrolyte used for deposition of Zn-Ni alloys was found. It was established that the effect of X-rays leads to the increase of microhardness and to the decrease of the coefficient of friction of the coatings deposited from neutral and weakly acidic electrolytes. The inverse relationship for the coatings deposited from acidic electrolyte was observed.

Keywords: alloy, X-radiation, microhardness, friction coefficient, elemental composition.

Введение

Решение вопросов экономии металлов, борьбы с коррозией и уменьшения износа деталей машин в настоящее время связано с электролитическим нанесением металлических покрытий и покрытий сплавами. Самыми распространёнными защитными покрытиями являются цинковые, легированные металлами семейства железа, среди которых лидирующее место занимают цинкникелевые (Zn-Ni) покрытия [1]. Преимуществом Zn-Ni покрытий является их повышенная коррозионная стойкость и микротвёрдость, что позволяет использовать данные сплавы не только в качестве защитных, но и в целях восстановления изношенных поверхностей и упрочнения деталей машин из стали и алюминиевых сплавов.

В настоящее время интенсивно разрабатываются новые методики электрохимической защиты стальных изделий с использованием внешних воздействий: ультразвука, магнитного поля и высокоинтенсивного излучения, посредством которых удаётся значительно улучшить физико-механические свойства гальванопокрытий [2]. Актуальным является вопрос об использовании рентгеновского излучения в процессе электролитического осаждения, так как при воздействии

облучения на электрохимическую систему равномерно по всему объёму электролита генерируются продукты радиолиза [3]. Обладая высокой подвижностью и восстановительными свойствами, они способствуют увеличению потока диффундирующих ионов осаждаемого металла в прикатодном диффузионном слое и, как следствие, ускорению процесса разрядки на подложке. В свою очередь, интенсификация процессов электроосаждения обуславливает изменение некоторых защитных свойств покрытий, таких как пористость, прочность сцепления с основой, коррозионная стойкость, шероховатость и др. Кроме того, при воздействии рентгеновского излучения на электролиты, используемые для осаждения сплавов, вследствие радиационно-химических реакций образуются активные комплексные металлические кластеры. Возникновение последних может быть причиной изменения процесса первичной кристаллизации и соответствующего изменения фазового и элементного состава, механических свойств.

В данной работе представлены результаты исследования механических свойств Zn-Ni покрытий, модифицированных рентгеновским излучением в процессе электроосаждения.

1 Методика проведения экспериментов

Осаждение сплава Zn-Ni осуществлялось из кислого (pH = 3), слабокислого (pH = 4) и нейтрального (pH = 7) электролитов (таблица 1.1) в термостатируемой электрохимической ячейке объемом 20 мл при температуре 21°C в течение одного часа.

Таблица 1.1 – Состав электролитов для электроосаждения сплава Zn-Ni (г/л)

| | Кислый (pH = 3) | Слабо- кислый (pH = 4) | Нейтральный (pH = 7) |
|----------------------|--------------------|------------------------------|-------------------------|
| $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ | – | 125 | – |
| $NiSO_4 \cdot 7H_2O$ | – | 75 | – |
| ZnO | – | – | 15 |
| $ZnCl_2 \cdot 6H_2O$ | 200 | – | – |
| $NiCl_2 \cdot 6H_2O$ | 150 | – | 90 |
| NH_4Cl | 250 | – | 250 |
| H_3BO_3 | – | 25 | 30 |
| CH_3COOH | 40 | – | – |

В качестве катода использовались индифферентные подложки из низкоуглеродистой стали 08кп. Площадь поверхности катода, на которой осаждалось покрытие, во всех экспериментах была фиксирована – 240 мм². Из кислого и слабокислого электролитов электроосаждение покрытий проводилось при плотности катодного тока 2 А/дм², из нейтрального – при плотности катодного тока 1 А/дм².

В процессе электроосаждения сплава электролит подвергался воздействию рентгеновского излучения. В качестве источника излучения использовалась рентгеновская установка с молибденовым анодом ($\lambda_{K\alpha} = 0,707 \text{ \AA}$) при напряжении на трубке 50 кВ и силе тока 15 мА. Мощность экспозиционной дозы на расстоянии 10 см от рентгеновской трубки составляла $P_{\text{экс}} \approx 100 \text{ кР/ч}$.

Измерение микротвердости образцов по Берковичу проводилось на динамическом ультрамикротвердомере SHIMADZU DUN 202. Нагрузка на индентор составляла 10 мН. Трибологические испытания проводились на установке ТАУ-1М при возвратно-поступательном движении исследуемой поверхности под сферическим индентором из сплава ВК8 при нагрузке 20 мН в условиях сухого трения. Шероховатость измерялась посредством профилометра с индуктивным преобразователем и алмазной иглой, радиус закругления которой 10 мкм. Исследование морфологии поверхности Zn-Ni покрытий проводилось с применением растрового электронного комплекса (МРСА)LEO-1455VP, а также сканирующего зондового микроскопа Solver

R4-PRO. Рентгеновский фазовый анализ проведён на дифрактометре ДРОН 4.0 с использованием K_{α} -излучения меди.

2 Результаты и их обсуждение

При исследовании механических свойств была обнаружена немонотонная зависимость микротвёрдости от кислотности электролита, обусловленная различием в элементном и, как следствие, фазовом составе электроосажденных покрытий. Среди образцов, осажденных из кислого, слабокислого и нейтрального электролита, наибольшую микротвёрдость имеют те, которые сформированы из нейтрального электролита (рисунки 2.1). Из электролита данного типа формируются сплавы, в которых концентрация никеля составляет 14 ат. % [4]. Из кислого электролита кристаллизуются осадки, в которых концентрация никеля не превышает 10 ат. % При соотношении никеля в цинкникелевых сплавах от 10% до 20% фазовое состояние должно соответствовать твёрдому раствору Ni_5Zn_{21} [5], [6], который характеризуется повышенной прочностью и хорошими механическими свойствами. Как установлено в результате рентгеноструктурного анализа, из кислого и нейтрального электролита формируются гомогенные осадки Ni_5Zn_{21} . Однако покрытия, полученные из нейтрального электролита, отличаются меньшей толщиной оксидного слоя, что следует и из результатов анализа элементного состава – содержание кислорода в поверхностном слое сплава из кислого электролита равно 18%. Микротвердость покрытий, полученных из кислого электролита, на 30% меньше, чем у покрытий, осажденных из нейтрального электролита. Это может быть обусловлено более низким содержанием никеля в сплавах, осажденных из кислого электролита, по сравнению с его содержанием в покрытиях из нейтрального электролита. Кроме того, известно [7], что в растворах, содержащих аммониевые соли, цинк и никель присутствуют в виде аммиачных комплексных катионов. Комплексные соединения металлов в нейтральных электролитах, как правило, имеют большие константы устойчивости по сравнению с их константами устойчивости в кислых растворах, чем обеспечиваются их высокая поляризуемость и сближение потенциалов выделения металлов, способствующее увеличению содержания легирующего металла в сплаве. Вследствие этого в покрытиях, осажденных из нейтрального электролита, содержание никеля больше, чем в покрытиях, осажденных из кислого электролита. Поэтому при одинаковом фазовом составе сплавов микротвёрдость покрытий, полученных из нейтрального электролита, выше, чем микротвёрдость покрытий, осажденных из кислого электролита.

Микротвердость покрытий, сформированных из слабокислого электролита, на 66% ниже, чем микротвёрдость покрытий, осаждённых из нейтрального электролита, и на 47% ниже, чем у покрытий, полученных из кислого электролита. При исследовании элементного и фазового состава контрольных образцов обнаружено, что содержание никеля в сплавах не превышает 4 ат.%, и они являются многофазными. Данные сплавы представляют собой эвтектическую смесь Zn и Ni [5].

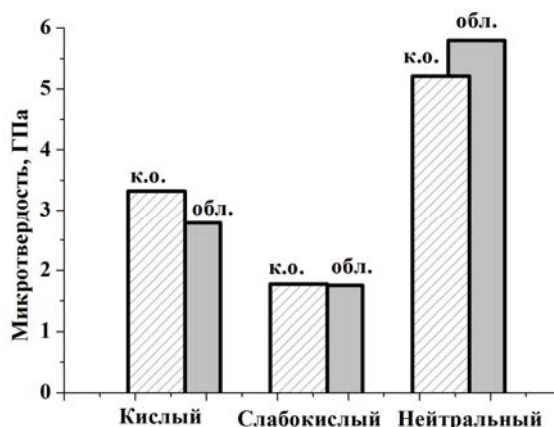


Рисунок 2.1 – Микротвердость Zn-Ni-сплавов, осаждённых из электролитов различной кислотности (к.о. – контрольные образцы; обл. – образцы, полученные в условиях облучения)

Как видно на рисунке 2.1, действие рентгеновского излучения в процессе формирования покрытий из нейтрального электролита обуславливает возрастание микротвердости, из кислого – её снижение, а на микротвердость покрытий из слабокислого электролита не влияет. Это связано, в первую очередь, с изменением фазового и элементного состава покрытий, осаждённых в условиях облучения. Например, покрытия, осаждённые из слабокислого электролита в поле рентгеновского излучения, представляют смесь Zn, Ni и твёрдого раствора никеля в цинке Ni_3Zn_{21} . Однако, как можно заключить по относительной интенсивности рефлексов на дифрактограммах, содержание Ni_3Zn_{21} настолько мало, что эта структурная составляющая не вносит существенного вклада в повышение микротвёрдости. При облучении кислого электролита осаждаются покрытия такого же фазового состава, каков он у контрольных образцов, однако их микротвёрдости на 16% меньше микротвёрдости контрольных покрытий, что обусловлено активными окислительными процессами, протекающими на поверхности покрытий, а также высокой кислотностью электролита.

Микротвёрдость покрытий, осаждённых в условиях облучения из нейтрального электролита, на 18% больше, чем микротвёрдость

контрольных образцов, и её величина при увеличении глубины проникновения индентора монотонно убывает до значения, соответствующего микротвёрдости необлученных покрытий. Таким образом, действие рентгеновского излучения в процессе формирования покрытий обуславливает упрочнение их поверхностного слоя. Следует отметить, что содержание никеля в покрытиях, сформированных в поле рентгеновского излучения, составляет 17 ат. %.

Результаты исследований микротвердости цинкникелевых сплавов хорошо коррелируют с результатами трибологических испытаний. Например, коэффициент трения образцов, осаждённых из слабокислого электролита, выше, чем коэффициент трения покрытий из кислого и нейтрального электролита. При этом наблюдаются сильные флуктуации, связанные с проявлением абразивного износа, обусловленного разрушением поверхностного слоя покрытий индентором (рисунок 2.2). Это вполне ясно, так как поверхность данных покрытий сильно развита и рыхлая.

Обнаружено также, что при воздействии рентгеновского излучения в процессе электроосаждения Zn-Ni-сплавов из слабокислого электролита, формируются осадки с несколько пониженным значением коэффициента трения – коэффициент трения образцов, полученных в условиях облучения, на 16% ниже коэффициента трения контрольных образцов. Это может быть обусловлено, кроме прочего, уменьшением шероховатости поверхности. Средняя шероховатость R_a поверхности образцов, полученных в условиях облучения, на 29% ниже, чем у контрольных образцов.

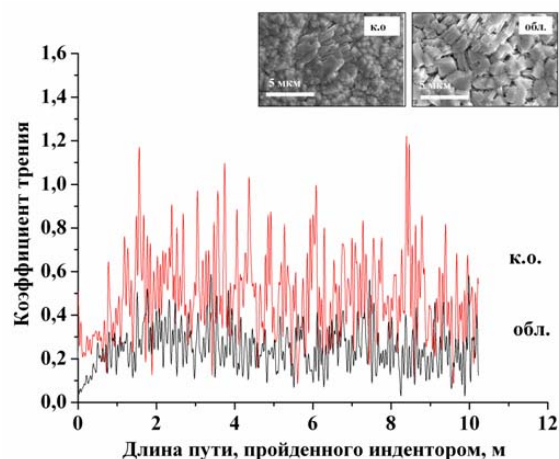


Рисунок 2.2 – Зависимость коэффициента трения Zn-Ni-сплавов, осаждённых из слабокислого электролита, от длины пути, пройденного индентором (к.о. – контрольный образец; обл. – облучённый образец)

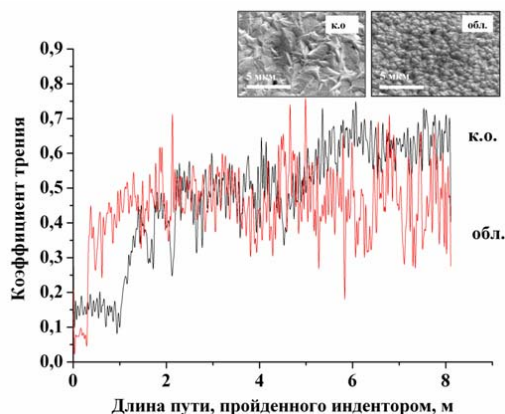


Рисунок 2.3 – Зависимость коэффициента трения Zn-Ni-сплавов, осаждённых из нейтрального электролита, от длины пути, пройденного индентором (к.о. – контрольный образец; обл. – облучённый образец)

У покрытий, полученных из нейтрального электролита, действием рентгеновского излучения в процессе их формирования обусловлено снижение абразивного износа и коэффициента трения на 43% (рисунок 2.3). При этом значение средней шероховатости таких покрытий уменьшается от 0,08 мкм до 0,06 мкм. Коэффициент трения и абразивный износ образцов, осаждённых из кислого электролита в условиях облучения, значительно выше этих показателей для контрольных образцов (рисунок 2.4). Возможно, это связано с увеличением содержания цинка и снижением содержания кислорода в поверхностном слое покрытия.

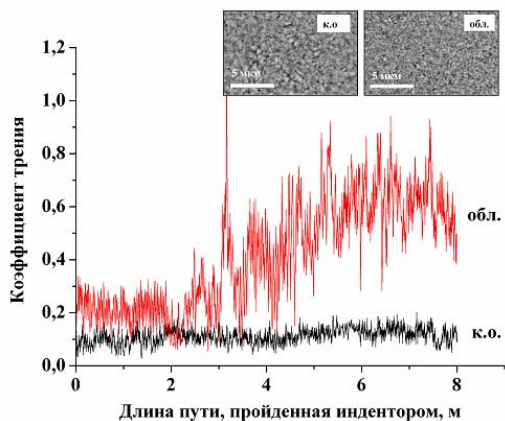


Рисунок 2.4 – Зависимость коэффициента трения Zn-Ni-сплавов, осаждённых из кислого электролита, от длины пути, пройденного индентором (к.о. – контрольный образец; обл. – облучённый образец)

Заключение

Анализируя вышеизложенное, можно сделать следующие выводы:

– действие рентгеновского излучения способствует формированию покрытий с более тонким оксидным слоем и повышенным содержанием никеля в сплавах, что следует из результатов

исследования микроморфологии поверхности, элементного и фазового состава Zn-Ni-сплавов, осаждённых из кислого, слабокислого и нейтрального электролита;

– действие рентгеновского излучения на рН-нейтральный электролит в процессе осаждения обуславливает формирование Zn-Ni покрытий с упрочненным поверхностным слоем. Микротвёрдость облучённых образцов на 15% больше, а коэффициент трения на 43% меньше, чем у контрольных образцов, полученных в идентичных условиях, но в отсутствие облучения. Покрытия, осаждённые из кислого электролита в поле рентгеновского излучения, отличаются от контрольных образцов меньшей микротвёрдостью и большим коэффициентом трения. Микротвёрдость и коэффициент трения Zn-Ni-покрытий, осаждённых из слабокислого электролита в поле рентгеновского излучения, незначительно отличаются от соответствующих параметров покрытий, сформированных в отсутствие облучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Окулов, В.В. Цинкование. Техника и технология / В.В. Окулов. – М. : Глобус, 2008. – 252 с.
2. Mendi, E. Influence of magnetic field on the electrodeposition of Ni-Co alloy / E. Mendi, W.J. Basirun, Yatimah Alias. // J. Chem. Sci. – 2010. – Vol. 122, №2. – P 279–285.
3. Ершов, Б.Г. Атомы, ионы в необычных состояниях окисления и малые кластеры металлов в водных растворах / Б.Г. Ершов // Журнал неорганической химии. – 2002. – Т. 47, № 4. – С. 644 – 653.
4. Валько, Н.Г. Моделирование электроосаждения сплавов Zn-Ni из кислого и нейтрального электролитов при воздействии рентгеновского излучения / Н.Г. Валько, И.И. Кургузенкова // Материалы, технологии, инструменты, 2011. – Т. 16, № 2 – С. 34–38.
5. Влияние отжига на структуру и свойства Zn-Ni покрытий, электроосаждённых при воздействии рентгеновского излучения / В.М. Анищик [и др.] // Тезисы докладов XLI международной конференции по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами / Под ред. проф. М.И. Панасюка. – М. : Университетская книга, 2011. – С. 155.
6. Проскуркин, Е.В. Цинкование / Е.В. Проскуркин, В.А. Попович, А.Т. Мороз. – М. : Металлургия, 1988. – 528 с.
7. Пурин, Б.А. Комплексные электролиты в гальванотехнике / Б.А. Пурин [и др.]. – Рига : Лиесма, 1978. – 265 с.

Поступила в редакцию 16.11.11.

УДК 535.42+537.86.22

СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ. II. НЕОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

PROPERTIES OF VECTORIAL PARAXIAL LIGHT BEAMS. II. THE NON HOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Формализм для описания векторных параксиальных световых пучков распространён на пучки с неоднородной поляризацией. Найдены простые выражения для поляризации и плотности потока энергии электромагнитного поля векторных световых пучков с неоднородной поляризацией различных видов. Описаны несколько новых типов векторных параксиальных световых пучков. Установлено, что если любой параксиальный световой пучок с неоднородной поляризацией разложить на два когерентных циркулярно поляризованных пучка, то последние распространяются независимо, их потоки энергии разделяются и также независимы.

Ключевые слова: параксиальные пучки, векторные пучки, световые пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, неоднородная поляризация.

The formalism for the description of the vector paraxial light beams to the beams with nonhomogeneous polarization is propagated. Simple expressions for polarization and energy flux density of electromagnetic field of the vector light beams with nonhomogeneous polarization of various types were discovered. New types of the vector paraxial light beams are featured. It is proved, that if any paraxial light beam with the nonhomogeneous polarization is spread out into two coherent circular polarized beams and the former are spread independently, then their streams of energy are parted and they are independent.

Keywords: paraxial beams, vector beams, light beams, polarizable properties, energy properties, nonhomogeneous polarization.

Введение

Узко направленные световые пучки находят широкое применение в науке и технике [1]–[5]. В предыдущей работе [6] был предложен общий формализм для аналитического описания векторных параксиальных пучков. Этот формализм был применён для изучения векторных параксиальных пучков с однородной поляризацией. В настоящей работе этот формализм распространяется на векторные параксиальные пучки с неоднородной поляризацией.

1 Общий формализм для описания векторных параксиальных пучков

Общее электрическое поле векторных параксиальных пучков можно описывать функцией вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.1)$$

где, однако, векторная амплитуда \mathbf{E} не является постоянной, а зависит от координат x, y, z . Параксиальные пучки однозначно определяются поперечной частью \mathbf{E}_\perp вектора электрического поля. Поэтому все векторные амплитуды поля произвольного параксиального светового пучка можно выразить через его поперечные компоненты электрического поля \mathbf{E}_\perp . Получаем пучки двух типов:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \frac{i}{k} \nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)} \cdot \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(2)}; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp^{(1)}] + \frac{i}{k} \nabla_\perp [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp^{(1)}] \cdot \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(1)}. \quad (1.3)$$

Верхние индексы (1) и (2) здесь и далее означают пучки первого и второго типов. $\nabla_\perp = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y$ – векторный поперечный оператор набла; \mathbf{e}_z – единичный вектор в направлении оси z пучка, n – показатель преломления среды. Используются обозначения $k_0 = \omega/c$, $n^2 = \varepsilon\mu$, $k = k_0 n$. Эти выражения могут описывать пучки как с однородной, так и с неоднородной поляризацией.

В (1.2)–(1.3) векторы электрических полей $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ взаимосвязаны: ($\mathbf{E}_\perp^{(2)} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp^{(1)}]$). Такие пучки будем называть сопряжёнными друг другу.

Усреднённые по времени плотность энергии w и плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) \mathbf{S} [5], [7]

$$w = \frac{\varepsilon |\mathbf{E}|^2}{8\pi}; \quad \mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\mathbf{E}^* \mathbf{H}] \quad (1.4)$$

для сопряжённых пучков являются одинаковыми:

$$w^{(1)} = w^{(2)} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} |\mathbf{E}_\perp|^2;$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \mathbf{S}_\perp^{(2)} =$$

$$= \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \cdot \text{Im}(\mathbf{E}_\perp^{(1)*} \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \mathbf{E}_\perp^{(2)*} \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_\perp^{(1)}). \quad (1.5)$$

Перейдем к поляризационным характеристикам пучков $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$. Предварительно отметим, что $\mathbf{E}_\perp^{(1)} \mathbf{E}_\perp^{(2)} = 0$. Это означает, что векторы $\mathbf{E}_\perp^{(1)}$ и $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$ имеют одинаковую эллиптичность. Главные оси эллипсов поляризации векторов $\mathbf{E}_\perp^{(1)}$ и $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$ при этом повернуты на 90° , а их направления вращения одинаковы. Поляризационные и энергетические характеристики сопряженных пучков аналогичны. Поэтому в дальнейшем будем ограничиваться, как правило, анализом только одного из двух сопряженных пучков.

Запишем выражения для вычисления поляризации параксиальных сопряженных векторных пучков типа $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$. Всегда можно разложить произвольный вектор \mathbf{E}_\perp по ортогональному базису ($\mathbf{E}_\perp = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$) и ввести комплексный параметр поляризации соотношением $\eta = \eta' + i\eta'' = \frac{E_y}{E_x}$. Сейчас, согласно Федорову [7],

можно ввести комплексный угол ($\psi' + i\psi''$) соотношением $\eta = \text{tg}(\psi' + i\psi'')$, тогда азимут эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс равен ψ' , а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = \text{th}\psi''$. При численных расчетах удобно пользоваться формулами [7]:

$$\text{tg } 2\psi' = \frac{2\eta'}{1 - |\eta|^2}; \quad \text{th } 2\psi'' = \frac{2\eta''}{1 + |\eta|^2}. \quad (1.6)$$

Если параметр η является константой, то имеем однородно поляризованные пучки. Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и изучались нами в [6].

В настоящей работе используется предложенный в [6] векторный формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков с неоднородной поляризацией.

2 Свойства векторных мод с неоднородной поляризацией

Обсудим теперь свойства параксиальных векторных световых пучков первого типа ($\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$). Пусть некоторая волновая функция F удовлетворяет скалярному параболическому уравнению

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)F = 0. \quad (2.1)$$

Тогда в качестве компонент E_x и E_y поперечного вектора \mathbf{E}_\perp в (1.2) можно взять комбинации

форм $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ и, в более общих случаях, любые комбинации частных производных функции F по x и y : $\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}$, $m, n \in N$.

Рассмотрим сначала следующие простые комбинации:

$$\mathbf{E}_\perp^{(1)} = \partial_x F \cdot \mathbf{e}_x + a \cdot \partial_y F \cdot \mathbf{e}_y; \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(2)}; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E}_\perp^{(2)} = -a \cdot \partial_y F \cdot \mathbf{e}_x + \partial_x F \cdot \mathbf{e}_y; \quad \mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(1)}, \quad (2.3)$$

где a – некоторая комплексная константа.

А) Пусть $a = 1$, тогда полные векторы полей мод первого и второго типа равны:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \nabla_\perp F + 2\partial_z F \cdot \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} [\mathbf{e}_z, \nabla_\perp F]; \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = [\mathbf{e}_z, \nabla_\perp F]; \quad \mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n} (\nabla_\perp F + 2\partial_z F \cdot \mathbf{e}_z). \quad (2.5)$$

Векторы $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ в (2.4) характеризуют *ТН*-моды, а $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ – *ТЕ*-моды. Если в качестве функции F взять фундаментальную гауссову моду (гауссиан), тогда получаем известные [8], [9] гауссовы *ТЕ* и *ТН*-моды. При этом вектор $\mathbf{E}^{(2)}$ пучка поляризован азимутально, а вектор $\mathbf{E}^{(1)}$ – радиально.

Усредненные по времени плотности энергии w и потока энергии \mathbf{S} электромагнитного поля обоих сопряженных *ТЕ* и *ТН* пучков при этом соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon |\nabla_\perp F|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \mathbf{S}_\perp^{(2)} = -\frac{c\varepsilon}{4\pi n} \text{Re}(\nabla_\perp F \cdot \partial_z F).$$

Б) Мы полагали в (2.2) и (2.3) $a = 1$ и получили *ТЕ* и *ТН*-моды, не обязательно гауссовы.

Если же взять в (2.2) и (2.3) $a = -1$, либо $a = \pm i$, или a – произвольное комплексное число, то получаем новые типы параксиальных векторных световых пучков, которые, насколько известно автору, еще не исследовались.

3 Суперпозиции сопряженных пучков с неоднородной поляризацией

Возьмем теперь когерентную суперпозицию мод $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ в (1.2), (1.3), не конкретизируя явных выражений для \mathbf{E}_\perp . Получаем

$$\mathbf{E}_\perp^{(3)} = \eta_1 \mathbf{E}_\perp^{(1)} + \eta_2 \mathbf{E}_\perp^{(2)};$$

$$\mathbf{E}_\perp^{(4)} = \eta_1 \mathbf{E}_\perp^{(2)} - \eta_2 \mathbf{E}_\perp^{(1)};$$

$$\mathbf{H}^{(3)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(4)}; \quad \mathbf{H}^{(4)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(3)}, \quad (3.1)$$

где η_1 и η_2 – некоторые комплексные постоянные коэффициенты. Продольные компоненты векторов поля вычисляются из уравнений

Максвелла в параксиальном приближении, например,

$$E_z^{(3)} = \frac{i}{k} \nabla_{\perp} E_{\perp}^{(3)}, \quad H_z^{(3)} = \frac{\varepsilon}{n} E_z^{(4)}.$$

Для вычисления поляризации мод $\mathbf{E}^{(3)}$ введем параметр поляризации волн $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ отношением $\eta = \frac{E_y^{(1)}}{E_x^{(1)}} = \operatorname{tg} \psi$ и параметр η_k когерентного смешивания мод $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ отношением $\eta_k \equiv \frac{\eta_2}{\eta_1} = \operatorname{tg} \psi_k$. Пользуясь схемой Федорова [7], находим, что общий азимут поляризации световой моды $\mathbf{E}^{(3)}$ равен $\psi_{\text{общ}}^{(3)} = \psi' + \psi_k'$, а ее эллиптичность $\gamma_{\text{общ}} = \operatorname{th}(\psi'' + \psi_k'')$.

Перейдем к расчету энергетических характеристик пучков $\mathbf{E}^{(3)}$, $\mathbf{E}^{(4)}$. Вычисляя, находим, что усредненные по времени плотности энергии w и потоков энергии \mathbf{S} электромагнитного поля сопряженных мод $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ соответственно равны:

$$\begin{aligned} w^{(3)} &= w^{(4)} = w = \\ &= \frac{\varepsilon}{8\pi} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2) |\mathbf{E}_{\perp}^{(1)}|^2 (1 + \operatorname{th} 2\psi'' \operatorname{th} 2\psi_k''); \quad (3.2) \\ \mathbf{S}_{\perp}^{(3)} &= \mathbf{S}_{\perp}^{(4)} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2) \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ (\mathbf{E}_{\perp}^{(1)*} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^{(1)} + \mathbf{E}_{\perp}^{(2)*} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}) + \right. \\ &\left. + i \operatorname{th} 2\psi_k'' (\mathbf{E}_{\perp}^{(1)*} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} - \mathbf{E}_{\perp}^{(2)*} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^{(1)}) \right\}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Из мод $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ можно сконструировать циркулярно поляризованные моды $\mathbf{E}_{\perp\pm} = \mathbf{E}_{\perp}^{(1)} \pm i\mathbf{E}_{\perp}^{(2)}$, которые представляют особый интерес. Это означает, что тогда в (3.1) $\eta_k = \pm 1$. Легко убедиться, что $\mathbf{E}_{\perp\pm}^2 = 0$. Теперь разложим $\mathbf{E}_{\perp\pm}$ по циркулярному базису $(\mathbf{e}_{\pm}, \mathbf{e}_{\mp})$. Получаем $\mathbf{E}_{\perp\pm} = \mathbf{e}_{\pm} E_{\pm}$, где $E_{\pm} = \sqrt{2} (E_x \mp iE_y)$. Здесь и далее векторы поляризации \mathbf{e}_{\pm} и операторы дифференцирования ∂_{\pm} в циркулярном базисе соответственно равны:

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}; \quad \partial_{\pm} = \mathbf{e}_{\pm} \nabla_{\perp} = \frac{\partial_x \pm i\partial_y}{\sqrt{2}}. \quad (3.4)$$

Векторы циркулярного базиса удовлетворяют соотношениям [7]

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\pm}, \mathbf{e}_{\mp}] &= \mp i\mathbf{e}_z, \quad [\mathbf{e}_{\pm}, \mathbf{e}_{\pm}] = \pm i\mathbf{e}_{\pm}, \\ \mathbf{e}_{\pm} \mathbf{e}_{\pm} &= |\mathbf{e}_{\pm}|^2 = 1, \quad \mathbf{e}_{\pm}^2 = 0. \end{aligned}$$

Целесообразно разложить вектор $\mathbf{E}_{\perp}^{(3)}$ по введенным циркулярным модам $\mathbf{E}_{\perp\pm}$. Получаем

$$\mathbf{E}_{\perp\pm}^{(3)} = \eta_{\pm} \mathbf{E}_{\perp\pm} + \eta_{\mp} \mathbf{E}_{\perp\mp} = \eta_{\pm} E_{\pm} \mathbf{e}_{\pm} + \eta_{\mp} E_{\mp} \mathbf{e}_{\mp}. \quad (3.5)$$

Для того, чтобы характеризовать поляризацию пучков $\mathbf{E}_{\perp}^{(3)}$, естественно ввести для них

параметр эллиптичности $\eta_c = \frac{\eta_{-} E_{-}}{\eta_{+} E_{+}}$. Нетрудно

убедиться, что эллиптичность γ и азимут ψ большой оси эллипса поляризации для пучка $\mathbf{E}_{\perp}^{(3)}$ относительно оси абсцисс соответственно равны:

$$\gamma = \frac{1 - |\eta_c|}{1 + |\eta_c|}; \quad \psi = \frac{1}{2} \arg(\eta_c). \quad (3.6)$$

Теперь усредненные по времени плотности энергии w и потока энергии \mathbf{S} электромагнитного поля мод $\mathbf{E}_{\perp}^{(3)}$ соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} (|\mathbf{E}_{\perp+}|^2 + |\mathbf{E}_{\perp-}|^2); \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad (3.7)$$

$$\mathbf{S}_{\perp}^{(1)} = -\frac{c\varepsilon}{4\pi nk} \cdot \operatorname{Im} (\mathbf{E}_{\perp+}^* \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp+} + \mathbf{E}_{\perp-}^* \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp-}). \quad (3.8)$$

Таким образом, мы видим, что если векторный параксиальный пучок с неоднородной поляризацией разложить на циркулярно поляризованные моды с противоположными направлениями вращения, то такие моды распространяются независимо, энергетические характеристики их разделяются и также независимы:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{+} + \mathbf{E}_{-}; \\ w &= w_{+} + w_{-}; \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{+} + \mathbf{S}_{-}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Такой вывод был получен нами ранее в [6] для однородно поляризованных мод. Вывод (3.9) для неоднородно поляризованных пучков не является тривиальным. Действительно, как видно из вышеизложенного, если эллиптически поляризованный пучок разложить, например, в когерентную сумму двух линейно поляризованных пучков, то такие пучки не являются независимыми и интерферируют. Вклады в общий поток энергии \mathbf{S} обоих пучков в последнем случае не разделяются. Таким образом, циркулярно поляризованные моды являются, в некотором смысле, более фундаментальными, чем линейно поляризованные. Это обусловлено вращательной инвариантностью циркулярных мод относительно оси z пучка.

4 Суперпозиции TE и TH-мод

Обсудим сейчас свойства параксиальных векторных пучков $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ с неоднородной поляризацией, которые представляют собой когерентную линейную суперпозицию TE и TH-мод (2.4) и (2.5). Теперь в (3.2) и (3.3) полагаем $|\mathbf{E}_{\perp}^{(1)}|^2 = |\nabla_{\perp} F|^2$. При этом выражение (3.2) остается без изменений, а (3.3) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\perp}^{(3)} &= -\frac{c\varepsilon}{4\pi n} (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2) \times \\ &\times \operatorname{Re} ((\nabla_{\perp} F^* - i \operatorname{th} 2\psi_k'' [\mathbf{e}_{\pm}, \nabla_{\perp} F^*]) \cdot \partial_{\pm} F). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь при произвольном параметре смешивания

$$\eta_k = \frac{\eta_1}{\eta_2} \text{ получаются параксиальные векторные}$$

пучки, большая часть которых еще не исследовалась.

Естественно первоначально взять $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \pm i$, тогда $\eta_k = \pm i$. Поэтому $\text{th } 2\psi_k'' = \pm 1$ и суперпозиция TE и TH -мод снова редуцируется к циркулярно поляризованным модам. При этом все выражения значительно упрощаются. Например:

$$\mathbf{E}_{\pm}^{(3)} = (\mathbf{e}_{\pm} \partial_{\mp} + 2 \mathbf{e}_{\pm} \partial_z) F; \quad \mathbf{H}_{\pm}^{(3)} = \mp i \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}_{\pm}^{(3)};$$

$$w_{\pm} = \frac{\varepsilon |\nabla_{\perp} F|^2}{8\pi}; \quad S_{z\pm}^{(3)} = \frac{c}{n} w_{\pm};$$

$$\mathbf{S}_{\pm}^{(3)} = -\frac{c\varepsilon}{\pi n} \text{Re}(\mathbf{e}_{\pm} \partial_{\mp} F^* \cdot \partial_z F).$$

Заключение

На базе предложенного в предыдущей работе автора [6] формализма исследованы физические свойства векторных параксиальных световых пучков с неоднородной поляризацией. Показано, что произвольный векторный параксиальный пучок однозначно определяется линейной комбинацией решений скалярного параболического уравнения.

Рассмотрены несколько типов таких пучков, включая TE и TH -моды. Исследованы также когерентные суперпозиции таких неоднородно поляризованных мод. Часть из них являются новыми и еще не исследованными.

Найдены простые выражения для поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков с неоднородной поляризацией. Для дальнейшего изучения их свойств необходима специализация найденных общих выражений на конкретные типы пучков.

Установлено, что если произвольный векторный параксиальный световой пучок разложить в когерентную сумму двух циркулярно

поляризованных мод, то эти моды являются независимыми. Это означает, что они распространяются независимо друг от друга, их плотности энергии и плотности потока энергии разделяются и также являются независимыми. Этот парадоксальный, на первый взгляд, вывод обусловлен циркулярными поляризациями пучков и их параксиальностью.

Свойство независимости циркулярных мод может найти применение в оптических системах передачи и обработки информации, поскольку может увеличивать пропускную способность оптического канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бельский, А.М.* Оптика световых пучков / А.М. Бельский. – Мн. : БГУ, 2000. – 210 с.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 144 с.
3. *Хаус, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус. – М. : Мир, 1988. – 432 с.
4. *Вайнштейн, Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
5. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 587 с.
6. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
7. *Федоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн. : Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.
8. *Davis, L.W.* TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis and G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № 1. – P. 22–23.
9. *Shimoda, Koichi.* Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Koichi Shimoda // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – Vol. 60, № 1. – P. 141–144.

Поступила в редакцию 13.01.12.

УДК 535.42:534.8

КОЛЛИНЕАРНОЕ АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУКРАТНО ВЫРОЖДЕННЫХ МОД В ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДАХ

Г.В. Кулак, А.Е. Анисимова

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

COLLINEAR ACOUSTO-OPTICAL INTERACTION OF TWOFOLD-DEGENERATED MODES OF BI-REFRACTIVE OPTICAL FIBER-OPTICAL WAVEGUIDES

G.V. Kulak, A.E. Anisimova

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr

Исследовано акустооптическое преобразование линейно поляризованных (LP_{0m}) мод волоконного световода, помещенного во внешнее электрическое поле и изготовленного из материала, в котором возможен поперечный электрооптический эффект. Показана возможность одновременной акусто- и электрооптической поляризационно-независимой модуляции света на продольной акустической моде L_{01} цилиндрического волокна. Установлена возможность применения акустооптического преобразования мод с указанными свойствами для создания перестраиваемых акустооптических фильтров.

Ключевые слова: оптическое волокно, акустооптическое взаимодействие, электрооптический эффект, модуляция света.

Acousto-optical transformation of linearly polarized (LP_{0m}) modes of fiber-optic waveguides placed into external electrical field and made from the material in which it is possible to achieve transverse electro-optical effect is investigated. The possibility of simultaneous acousto- and electro-optical polarization-independent light modulation by the longitudinal acoustic mode L_{01} of a cylindrical waveguide is shown. The possibility of the application of the acousto-optical transformation of such a mode transformation with indicated properties for construction of tunable acousto-optical filters is stated.

Keywords: optical fibers, acousto-optical interaction, electro-optical effect, light modulation.

Введение

Исследование акустооптического (АО) взаимодействия в волоконных световодах (ВС) интересно в научном и практическом отношении в связи с созданием волоконно-оптических модуляторов, фильтров, волоконно-оптических датчиков [1], также ВС на основе различных акусто- и электрооптических материалов, включая ниобат лития [2] и кристаллы структуры силленита [3]. В работе [4] исследована интерференция линейно поляризованных мод в двулучепреломляющих двухмодовых ВС. Показана перспективность их использования для волоконно-оптических датчиков и оптических фильтров. Практическая осуществимость акусто- и электрооптических устройств обеспечена тем, что в физике и технике разработаны надежные и эффективные методы возбуждения продольных [5], изгибных [6] и крутильных [7] ультразвуковых (УЗ) волн в ВС.

В настоящей работе с использованием метода медленно изменяющихся амплитуд исследованы особенности АО взаимодействия двукратно вырожденных линейно поляризованных LP_{0m} ($m = 1, 2, 3, \dots$) мод двулучепреломляющего ВС, помещенного во внешнее электрическое поле.

1 Теоретические результаты и обсуждение

Предположим, что УЗ волна, характеризующаяся волновым вектором \vec{K} и круговой частотой Ω , распространяется вдоль оси OZ кристаллографической системы координат XYZ . Соответствующие этой волне компоненты тензора деформаций U_{pq} запишем в виде [8]:

$$U_{pq} = B_{qp} V_{qp}(x, y) \exp[i(Kz - \Omega t)], \quad (1.1)$$

где B_{qp} – амплитуда деформации, V_{qp} – функция, посредством которой описывается поперечное распределение упругих деформаций в сечении волокна.

Волоконная система, состоящая из сердцевины и оболочки, имеет форму, близкую к цилиндрической [8]. Постоянные распространения различных волоконных мод в системе такой структуры неодинаковы по величине. Эффективные тензоры диэлектрической проницаемости среды $\hat{\epsilon}^0$ и $\hat{\epsilon}^1$ соответственно для волоконных мод LP_{0m} и LP_{0m}' имеют компоненты:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^0 &= N_{0x}^2, & \epsilon_{22}^0 &= N_{0y}^2, & \epsilon_{33}^0 &= n_1^2, \\ \epsilon_{11}^1 &= N_{1x}^2, & \epsilon_{22}^1 &= N_{1y}^2, & \epsilon_{33}^1 &= n_1^2, \end{aligned}$$

где n_1 – показатель преломления сердцевинны ВС.

УЗ волной в среде формируется периодическая в пространстве и времени решетка диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon}_{0,1} = \hat{\varepsilon}^{0,1} + \Delta \hat{\varepsilon}_e^{0,1} + \Delta \hat{\varepsilon}_a^{0,1} \exp(Kz - \Omega t), \quad (1.2)$$

с которой взаимодействует каждая из мод ВС. В формуле (1.2) $(\Delta \hat{\varepsilon}_e^{0,1})_{ij} = -\varepsilon_{ik}^{0,1} \varepsilon_{jl}^{0,1} r_{kl} E_i^e$; r_{kl} – компоненты тензора электрооптических постоянных, E_i^e – компоненты вектора напряженности внешнего электрического поля;

$$(\Delta \hat{\varepsilon}_a^{0,1})_{ij} = -\varepsilon_{ik}^{0,1} \varepsilon_{jl}^{0,1} P_{klmn} U_{mn},$$

P_{klmn} – компоненты тензора фотоупругих постоянных, U_{mn} – компоненты тензора деформаций.

Из уравнений Максвелла следует волновое уравнение для напряженности \vec{E} электрического поля световой волны, сформулированное в [9]. Решение его представим в виде:

$$\vec{E} = \hat{\varepsilon}_0^{-1} \vec{D}_0 \exp[i(k_0 z - \omega t)] + \hat{\varepsilon}_1^{-1} \vec{D}_1(x, y) \exp[i(k_1 z - \omega t)], \quad (1.3)$$

$$\vec{D}_0 = A_0(z) b_{0x}(x, y) \vec{e}_x + B_0(z) b_{0y}(x, y) \vec{e}_y,$$

$$\vec{D}_1 = A_1(z) b_{1x}(x, y) \vec{e}_x + B_1(z) b_{1y}(x, y) \vec{e}_y,$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}$, $k_1 = \frac{\omega \pm \Omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}$; $\vec{e}_0 = \frac{1}{3} Sp \hat{\varepsilon}_0$,

$\vec{e}_1 = \frac{1}{3} Sp \hat{\varepsilon}_1$; \vec{e}_x, \vec{e}_y – единичные векторы, направленные вдоль осей X и Y ; $b_{0x,y}(x, y), b_{1x,y}(x, y)$ – функции, посредством которых описывается пространственное распределение волоконных мод.

Подставляя выражения (1.1)–(1.3) в волновое уравнение получим систему четырех уравнений для A_0, B_0, A_1, B_1 , которую удобно преобразовать в систему двух векторно-матричных уравнений:

$$\frac{d\vec{E}_0}{dz} = P\vec{E}_0 + iQ\vec{E}_1, \quad \frac{d\vec{E}_1}{dz} = F\vec{E}_1 + iC\vec{E}_0, \quad (1.4)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} i(\Delta_1 + \Delta_1^{ae}) & i\Delta_1^e \\ i\Delta_2^e & i(\Delta_2 + \Delta_2^{ae}) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \chi_{xx} F_{xx} & \chi_{xy} F_{xy} \\ \chi_{yx} F_{yx} & \chi_{yy} F_{yy} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} i(\delta + \tilde{\Delta}_1 + \tilde{\Delta}_1^{ae}) & i\tilde{\Delta}_1^e \\ i\tilde{\Delta}_2^e & i(\delta + \tilde{\Delta}_2 + \tilde{\Delta}_2^{ae}) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{xx} \tilde{F}_{xx} & \tilde{\chi}_{xy} \tilde{F}_{xy} \\ \tilde{\chi}_{yx} \tilde{F}_{yx} & \tilde{\chi}_{yy} \tilde{F}_{yy} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta_1 = q_0 \{ \vec{e}_x (\hat{\varepsilon}^0 - \vec{e}_0) \vec{e}_x \}, \quad \Delta_2 = q_1 \{ \vec{e}_y (\hat{\varepsilon}^0 - \vec{e}_0) \vec{e}_y \},$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \tilde{q}_0 \{ \vec{e}_x (\hat{\varepsilon}^1 - \vec{e}_1) \vec{e}_x \}, \quad \tilde{\Delta}_2 = q_1 \{ \vec{e}_y (\hat{\varepsilon}^1 - \vec{e}_1) \},$$

$$\Delta_1^{ae} = q_0 (\vec{e}_x \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_x), \quad \Delta_1^e = q_0 (\vec{e}_x \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_y),$$

$$\Delta_2^{ae} = q_1 (\vec{e}_y \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_y), \quad \Delta_2^e = q_1 (\vec{e}_y \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_x),$$

$$\Delta_1^{ae} = q_0 (\vec{e}_y \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_x), \quad \tilde{\Delta}_2^{ae} = \tilde{q}_1 (\vec{e}_y \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_y),$$

$$\tilde{\Delta}_1^e = \tilde{q}_0 (\vec{e}_x \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_y), \quad \tilde{\Delta}_2^e = \tilde{q}_1 (\vec{e}_y \Delta \hat{\varepsilon}_e \vec{e}_x),$$

$$q_0 = \frac{\omega}{2c\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad q_1 = \frac{\omega_1}{2c\sqrt{\varepsilon_0}},$$

$$\tilde{q}_0 = \frac{\omega}{2c\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad \tilde{q}_1 = \frac{\omega_1}{2c\sqrt{\varepsilon_1}},$$

$\delta = (k_1 - k_0 - K)$ – фазовая отстройка. Величины χ_{ij} и $\tilde{\chi}_{ij}$ выразим соответственно через свертки тензоров $\Delta \hat{\varepsilon}^0$ и $\Delta \hat{\varepsilon}^1$ с единичными векторами \vec{e}_x, \vec{e}_y так, что

$$\chi_{ij} = \frac{\omega [\vec{e}_i (\Delta \hat{\varepsilon}_a^0)_{ij} \vec{e}_j]}{4c}, \quad \tilde{\chi}_{ij} = \frac{\omega [\vec{e}_i (\Delta \hat{\varepsilon}_a^1)_{ij}^* \vec{e}_j]}{4c}$$

(символом * обозначена операция комплексного сопряжения); интегралы перекрытия полей определяются в соответствии с формулами

$$F_{ij} = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty (b_{0i} V_{gz} b_{1j}) dx dy}{\int_0^\infty \int_0^\infty |b_{0i}|^2 dx dy}, \quad (1.6)$$

где $i, j = x, y$. Величины \tilde{F}_{ij} получаются из F_{ij} посредством замен $b_{0x} \rightarrow b_{1x}, b_{0y} \rightarrow b_{1y}$ в знаменателях выражений (1.6). Интегралы перекрытия (1.6) вычисляем после перехода в цилиндрическую систему координат (r, θ, z) с учётом замены $dx dy \rightarrow r dr d\theta$, где $0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ [10].

Решение системы уравнений (1.4) находим с использованием граничных условий:

$$A_0(z=0) = A_x, \quad B_0(z=0) = A_y,$$

$$A_1(z=0) = B_1(z=0) = 0.$$

При возбуждении в цилиндрическом волноводе продольной акустической моды L_{01} компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат удовлетворяют соотношениям [5]: $U_{zz} \gg |U_{\theta\theta}|, |U_{rr}|, |U_{r\theta}|$. При этом

$$U_{zz} = \frac{v_g V_{zz}}{v_l} \sqrt{\frac{2I_a}{\rho v_g^3}}, \quad \text{где } v_g \text{ и } v_l \text{ – соответственно}$$

групповая и фазовая скорости продольной УЗ волны. Функция пространственного распределения упругих деформаций $V_{zz} = J_0(\xi r)$ выражается через функцию Бесселя $J_0(x)$ нулевого порядка;

$\xi = \sqrt{\left(\frac{\Omega}{v_l}\right)^2 - K^2}$. Для эффективного АО взаимодействия волноводных мод LP_{0m} и $LP_{0m'}$

необходимо, чтобы частота ультразвука была близка к $f_0 \approx \frac{\nu_l(N_1 - N_0)}{\lambda_0}$, где $N_0 \approx N_{0x} \approx N_{0y}$, $N_1 \approx N_{1x} \approx N_{1y}$. Для ВС с радиусом сердцевин a_0 функции пространственного распределения определяются соотношениями, приведенными в [10].

Далее рассмотрим взаимодействие волноводных мод в частных случаях продольного ($\vec{E}^e \parallel OZ$) и поперечного ($\vec{E}^e \parallel OX$) электрооптического эффекта. В первой ситуации отличными от нуля элементами матриц (1.5) являются:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_1^{ae} = \Delta_2^{ae} = \tilde{\Delta}_1^{ae} = \tilde{\Delta}_2^{ae}, \\ \Delta &= -\pi(\bar{\epsilon}_0)^{3/2} r_{13} |E^e| / \lambda_0; \\ \chi &= i\chi_{xx} = i\chi_{yy} = -i\tilde{\chi}_{xx} = -i\tilde{\chi}_{yy}, \\ \chi &= \frac{2\pi\bar{\epsilon}_0^{3/2} P_{13} \nu_g F}{\lambda_0 \nu_l} \sqrt{\frac{2I_a}{\rho \nu_g^3}}. \end{aligned}$$

Во второй ситуации отличные от нуля элементы матрицы (1.5) удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_1^e = \Delta_2^e = \tilde{\Delta}_1^e = \tilde{\Delta}_2^e, \\ \Delta &= -\pi(\bar{\epsilon}_0)^{3/2} r_{22} |E^e| / \lambda_0, \\ \chi &= i\chi_{xx} = i\chi_{yy} = -i\tilde{\chi}_{xx} = -i\tilde{\chi}_{yy}. \end{aligned}$$

При наличии продольного электрооптического эффекта имеет место только фазовая модуляция дифрагированного света. При наличии поперечного электрооптического эффекта реализуются два независимых варианта модуляции света: амплитудная акустооптическая и электрооптическая.

2 Результаты расчетов

Численные расчеты выполнены нами для тригонального кристалла ниобата лития ($LiNbO_3$). Эффективность дифракции рассчитывалась по формуле

$$\eta_1 = \frac{|\vec{E}|}{|A_x|^2 + |A_y|^2}.$$

Предполагалось, что длина световой волны в вакууме $\lambda_0 = 0,6328$ мкм, $P_{13} = 0,103$; $\nu_l \approx \nu_g = 7200$ м/с; $a_0 = 2$ мкм, радиус оболочки ВС $R_0 = 0,5$ мм; $r_{22} = 6 \cdot 10^{-12}$ В/м, $\rho = 4700$ кг/м³; $F_{12} = 0,48$; $f = 22,7$ МГц; показатели преломления сердцевин и оболочки ВС соответственно равны $n_1 = 2,3212$ и $n_2 = 2,2982$.

На рисунке 2.1, а представлена зависимость эффективности η_1 АО преобразования света из моды LP_{01} в моду LP_{02} от интенсивности продольного ультразвука I_a , рассчитанная при различных значениях длины АО взаимодействия l . Анализируя представленные зависимости, видим, что при наименьшем использованном

значении длины взаимодействия ($l = 1$ см) полная перекачка энергии в дифрагированную волну достигается при интенсивности ультразвука $I_a = 0,5$ Вт/см². Это соответствует мощности продольной акустической моды LP_{01} , равной $P_a = 0,025$ мВт. Столь малое значение мощности обусловлено малостью радиуса сердцевин ВС.

Зависимости эффективности АО дифракции η_1 от модуля напряженности внешнего электрического поля E_e , рассчитанные при различных значениях длины АО взаимодействия l , представлены на рисунке 2.1, б.

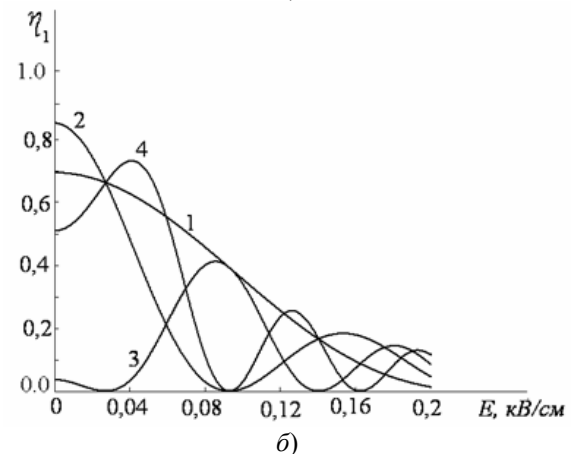
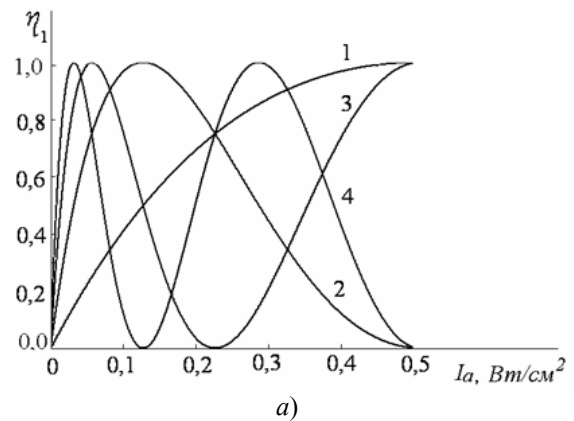


Рисунок 2.1 – Зависимость эффективности преобразования η_1 волоконной моды LP_{01} в моду LP_{02} от интенсивности ультразвука I_a (а) и модуля напряженности внешнего электрического поля E^e (б) при различной длине АО взаимодействия l в кристалле $LiNbO_3$ ($1-l=1$ см; $2-l=2$ см; $3-l=3$ см; $A_y=0$; $a-E_e=0$; б – $I_a=0,2$ Вт/см²)

Анализируя зависимости, представленные на рисунке 2.1, приходим к выводу, что при некотором специальном выборе параметров изучаемые здесь волоконные световоды могут служить основой для создания оптических элементов, в которых одновременно возможна электрооптическая и амплитудная АО модуляция света. Тот факт, что при выполнении замены $A_x \leftrightarrow A_y$

эффективность дифракции η_1 не изменяется, означает, что модуляция света поляризационно-независима.

В результате численных расчетов, выполненных на основе системы уравнений (1.4), показано, что при длине АО взаимодействия $l = 1$ см и интенсивности ультразвука $I_a = 0,5$ Вт/см² ширина полосы акустооптической фильтрации по уровню 3 дБ составляет $\Delta\lambda_{1/2} = 0,7$ нм [1]. При увеличении длины АО взаимодействия до $l = 4$ см ширина полосы АО фильтрации уменьшается до $\Delta\lambda_{1/2} \approx 0,2$ нм.

Заключение

Таким образом, в статье обоснована возможность применения волоконных световодов на основе кристаллов $LiNbO_3$ для создания поляризационно-независимых модуляторов света, перестраиваемых АО фильтров и волоконно-оптических датчиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуляев, Ю.В. Модуляционные эффекты в волоконных световодах и их применение / Ю.В. Гуляев, М.Я. Мещ, В.В. Проклов. – М.: Радио и связь, 1991. – 151 с.
2. *Growth of Single Crystal Photorefractive Fibers of $Bi_{12}SiO_{20}$* / V.V. Prokofiev [et al.] // Topical Meeting on Photorefractive materials, Effects and Devices. PRM' 93 Technical Digest. August 11–15, 1993. Kiev, Ukraine. – P. 228–231.
3. Zhong, H. Growth of lithium niobate single crystal fiber / H. Zhong, H. Yinchan, Q. Ningsan // J. Chin. Ceram Soc. – 1991. – Vol. 19, № 6. – P. 527–531.
4. Effimov, T.A. Resultant mode pattern and polarization in a LP_{01} , LP_{02} two – mode linearly birefringent optical fiber / T.A. Effimov // Optical and Quantum Electronics. – 1991. – Vol. 23. – P. 1143–1160.
5. Jen, C.K. Backward collinear guided – wave acousto – optic devices / C.K. Jen, N. Goto // J. Light Wave Tech. – 1989. – Vol. 7, № 12. – P. 2018–2023.
6. Thorston, R.N. Elastic waves in rods and clad rods / R.N. Thorston. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1978. – Vol. 64, № 1. – P. 1–37.
7. Engan, H.E. Analysis of polarization – mode coupling by acoustic torsional waves in optical fibers / H.E. Engan. // J. Opt. Soc. Am. – 1996. – Vol. 13, № 1. – P. 428–436.
8. *Введение в интегральную оптику* / под ред. М. Барноски. – М.: Мир, 1977. – 367 с.
9. Кулак, Г.В. Коллинеарное акустооптическое взаимодействие в гиротропных волоконных световодах во внешнем электрическом поле / Г.В. Кулак, С.Н. Ковчур. // ЖТФ. – 1996. – Т. 66, № 1. – С. 85–91.
10. Снайдер, А. Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – М.: Мир, 1987. – 656 с.
11. *Акустические кристаллы. Справочник* / А.А. Блистанов [и др.] ; под ред. М.П. Шаскольской. – М.: Наука, 1996. – 629 с.

Поступила в редакцию 29.08.11.

УДК 535.16:534.341

ТЕРМООПТИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗВУКА В ГИРОТРОПНОМ ДВУХСЛОЙНИКЕ ПРИ ВСТРЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Г.С. Митюрин¹, В.В. Свиридова², А.Н. Сердюков²

¹Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THERMOOPTICAL SOUNDS EXCITATION IN GYROTROPIC TWO-LAYERS UNDER OPPOSITE INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES

G.S. Mityurich¹, V.V. Sviridova², A.N. Serdyukov²

¹Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel

²F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе исследовано фотоакустическое преобразование в гиротропной двухслойной среде в условиях туннельной электромагнитной интерференции. Обнаружен эффект полного подавления амплитуды фотоакустического сигнала в зависимости от интенсивности встречно взаимодействующих волн, разности их фаз и частоты модуляции излучения. Предложен метод управления амплитудно-фазовыми характеристиками фотоакустического сигнала.

Ключевые слова: фотоакустический эффект, туннельная электромагнитная интерференция, гиротропия, циркулярный дихроизм, уравнение теплопроводности, амплитуда фотоакустического сигнала, фотоакустическая ячейка.

Photoacoustic transformation in the gyrotropic two-layer medium under the tunnel electromagnetic interference has been studied in the work. The effect of full suppression of photoacoustic signal amplitude depending on the intensiveness of opposite-interactive waves, phase difference and modulation frequency has been revealed. The method of the amplitude-phase characteristics control of the photoacoustic signal has been proposed.

Keywords: photoacoustic effect, tunnel electromagnetic interference, gyrotropy, circularly dichroism, heat conduction equation, photoacoustic signal amplitude, photoacoustic cell.

Введение

При взаимодействии встречных электромагнитных волн в поглощающей среде имеет место явление туннельной интерференции [1]–[5], обуславливающее резкое возрастание коэффициента прозрачности среды и позволяющее управлять энергетическими параметрами интерференционного поля внутри слоя. В работе [2] экспериментально исследовано явление туннельной электромагнитной интерференции в металлических плёнках титана при взаимодействии двух встречных световых пучков и показано, что величина коэффициента прозрачности существенно зависит от интенсивности встречных световых пучков, разности их фаз, поляризации волн, а также от диссипативных свойств образца. Влияние внешнего магнитного поля на эффективность управления интерференционным потоком в намагниченной поглощающей пластинке изучено в статье [6]. Авторы работы [7] исследовали возбуждение ультра- и гиперзвуковых колебаний в поглощающих конденсированных средах при импульсном нагреве их интерференционным потоком когерентного излучения и предложили метод определения скорости звука и коэффициента его затухания в образце.

Указанные эффекты в поглощающих естественно гиротропных или магнитоактивных средах имеют ряд особенностей, обусловленных характерными для сред с пространственной дисперсией тонких оптических эффектов, например, связанных с проявлением естественного или магнитного циркулярного дихроизма. В работах [8], [9] показано, что естественная и вынужденная (эффект Фарадея) гиротропия исследуемого образца существенно влияет на механизм формирования фотоакустического (ФА) сигнала. В частности, изменяя величину реальной части параметра гирации, ответственного за удельное вращение плоскости поляризации световой волны, можно добиться увеличения на несколько порядков амплитуды ФА сигнала при неизменной напряжённости поля взаимодействующих световых волн. Исследование формирования фотодефлекционного отклика в условиях туннельной электромагнитной интерференции в изотропно-гиротропной среде проведено в работе [10].

Следует отметить, что явление туннельной интерференции проявляется также и для акустических волн. Так, в работе [11] исследована интерференция встречных продольных акустических волн в одномерной слоистой среде и

показана возможность определения положения дефектного слоя. Экспериментальное подтверждение возможности туннельной интерференции акустических волн на частотах $\nu \approx 10^5 \div 10^6$ Гц получено в [12].

1 Теория

Рассмотрим ниже особенности ФА преобразования в поглощающей гиротропной двухслойной среде при встречном взаимодействии электромагнитных волн произвольной поляризации в рамках метода газомикрофонной регистрации ФА сигнала. Источником тепловых волн будем считать плотность мощности диссипации энергии собственных волн в образце, которую определим на основе точного решения граничной задачи электродинамики.

Пусть две плоские монохроматические произвольно поляризованные электромагнитные волны

$$\begin{cases} \vec{E}_0(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \varphi_0]}, \\ \vec{H}_0(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i[(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \varphi_0]}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{i[(-\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \varphi]}, \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H} e^{i[(-\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \varphi]} \end{cases} \quad (1.2)$$

имеют начальные фазы φ_0 и φ и, распространяясь навстречу друг другу, нормально падают на поверхность двухслойного образца, составленного из изотропных гиротропных материалов и расположенного внутри прозрачной ФА ячейки [13] (рисунок 1.1). В уравнениях (1.1) и (1.2)

$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \vec{n}$ – волновой вектор, ω – циклическая частота, n – показатель преломления, \vec{n} – единичный вектор, направленный вдоль волновой нормали.

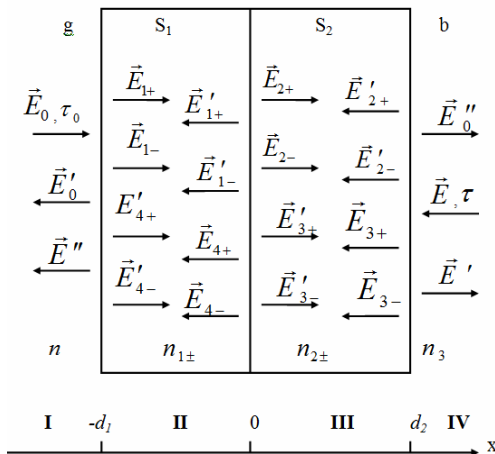


Рисунок 1.1 – Схема встречного взаимодействия двух электромагнитных волн в поглощающем гиротропном двухслойнике, расположенном в цилиндрической фотоакустической ячейке (d_1, d_2 – толщина каждого из гиротропных компонентов двухслойника)

Представим векторы поля \vec{E} через их циркулярно поляризованные составляющие, модули амплитуд у которых равны ε_{\pm} :

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{r}, t) &= (\varepsilon_{0+} \vec{e}_{0+} + \varepsilon_{0-} \vec{e}_{0-}) e^{i\left[\omega\left(\frac{n}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi_0\right]}, \\ \vec{E}'_0(\vec{r}, t) &= (\varepsilon'_{0+} \vec{e}_{0+} + \varepsilon'_{0-} \vec{e}_{0-}) e^{i\left[\omega\left(\frac{n}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi_0\right]}, \\ \vec{E}_{1\pm, 2\pm}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_{1\pm, 2\pm} \vec{e}_{\pm} e^{i\left[\omega\left(\frac{n_{1\pm, 2\pm}}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi_0\right]}, \\ \vec{E}'_{1\pm, 2\pm}(\vec{r}, t) &= \varepsilon'_{1\pm, 2\pm} \vec{e}_{\pm} e^{i\left[\omega\left(\frac{n_{1\pm, 2\pm}}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi_0\right]}, \\ \vec{E}''_0(\vec{r}, t) &= (\varepsilon''_{0+} \vec{e}_{0+} + \varepsilon''_{0-} \vec{e}_{0-}) e^{i\left[\omega\left(\frac{n_3}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi_0\right]}, \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= (\varepsilon_+ \vec{e}_+ + \varepsilon_- \vec{e}_-) e^{i\left[\omega\left(\frac{n_3}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi\right]}, \\ \vec{E}'(\vec{r}, t) &= (\varepsilon'_+ \vec{e}_+ + \varepsilon'_- \vec{e}_-) e^{i\left[\omega\left(\frac{n_3}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi\right]}, \\ \vec{E}_{3\pm, 4\pm}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_{3\pm, 4\pm} \vec{e}_{\mp} e^{i\left[\omega\left(\frac{n_{3\pm, 4\pm}}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi\right]}, \\ \vec{E}'_{3\pm, 4\pm}(\vec{r}, t) &= \varepsilon'_{3\pm, 4\pm} \vec{e}_{\mp} e^{i\left[\omega\left(\frac{n_{3\pm, 4\pm}}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi\right]}, \\ \vec{E}''(\vec{r}, t) &= (\varepsilon''_+ \vec{e}_+ + \varepsilon''_- \vec{e}_-) e^{i\left[\omega\left(\frac{n}{c} \vec{n}\vec{r} - t\right) + \varphi\right]}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\vec{e}_{\pm} = \frac{\vec{e}_1 \pm i \vec{e}_2}{\sqrt{2}}$ – единичные векторы циркулярной поляризации, $\varepsilon_{j\pm}, \varepsilon'_{j\pm}, \varepsilon''_{j\pm}$ – соответствующие каждой циркулярно поляризованной составляющей волны комплексные амплитуды, \vec{e}_1 и \vec{e}_2 – единичные вектора главных осей эллипса поляризации, образующие с нормалью \vec{n} правую тройку ортогональных векторов ($\vec{e}_1 \vec{e}_2$); n, n_3 – показатели преломления непоглощающих негиротропных сред I и IV (рисунок 1.1); $n_{1\pm}, n_{2\pm}$ – комплексные показатели преломления гиротропных поглощающих кристаллов II и III соответственно. Показатели преломления $n_{j\pm}$ соответствуют двум циркулярно поляризованным плоским волнам $\vec{E}_{j\pm}$ с противоположными направлениями вращения векторов поля.

Основываясь на уравнениях Максвелла для плоских электромагнитных волн [14], [15]

$$\vec{D} = -[\vec{m}\vec{H}], \quad \vec{B} = [\vec{m}\vec{E}], \quad (1.4)$$

материальных уравнениях [16], [17]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i\gamma \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} - i\gamma \vec{E}, \quad (1.5)$$

а также используя граничные условия [15] для векторов поля и условия круговой поляризации $\vec{E}_{\pm} = \pm i[\vec{n}\vec{E}_{\pm}], \vec{H}_{\pm} = \pm i[\vec{n}\vec{H}_{\pm}]$, определим комплексные амплитуды циркулярно поляризованных световых волн:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1\pm} &= B^{(1)} C_{\pm}^{(1)} \varepsilon_{0\pm}, & \varepsilon'_{1\pm} &= C_{\mp}^{(1)} \varepsilon_{0\mp}, \\ \varepsilon_{2\pm} &= A^{(1)} P_{\pm}^{(1)} \varepsilon_{0\pm}, & \varepsilon'_{2\pm} &= P_{\mp}^{(1)} \varepsilon_{0\mp}, \\ \varepsilon_{3\pm} &= B^{(2)} C_{\pm}^{(2)} \varepsilon_{\pm}, & \varepsilon'_{3\pm} &= C_{\mp}^{(2)} \varepsilon_{\mp}, \\ \varepsilon_{4\pm} &= A^{(2)} P_{\pm}^{(2)} \varepsilon_{\pm}, & \varepsilon'_{4\pm} &= P_{\mp}^{(2)} \varepsilon_{\mp}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В (1.6) введены обозначения:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \frac{n_{20} + n_3}{n_{20} - n_3} e^{-i(\varphi_{2+} + \varphi_{2-})}, & A^{(2)} &= \frac{n_{10} + n}{n_{10} - n} e^{-i(\varphi_{1+} + \varphi_{1-})}, \\ B^{(1)} &= \frac{A^{(1)}(n_{10} + n_{20}) + (n_{10} - n_{20})}{A^{(1)}(n_{10} - n_{20}) + (n_{10} + n_{20})}, \\ B^{(2)} &= \frac{A^{(2)}(n_{20} + n_{10}) + (n_{20} - n_{10})}{A^{(2)}(n_{20} - n_{10}) + (n_{20} + n_{10})}, \\ C_{\pm}^{(1)} &= \frac{2ne^{-i\varphi}}{B^{(1)}(n - n_{10})e^{-i\varphi_{1\pm}} + (n - n_{10})e^{-i\varphi_{1\mp}}}, \\ C_{\pm}^{(2)} &= \frac{2n_3 e^{-i\varphi_3}}{B^{(2)}(n_3 - n_{20})e^{-i\varphi_{2\pm}} + (n_3 - n_{20})e^{-i\varphi_{2\mp}}}, \\ P_{\pm}^{(1)} &= \frac{B^{(1)}C_{\pm}^{(1)} + C_{\pm}^{(1)}}{A^{(1)} + 1}, & P_{\pm}^{(2)} &= \frac{B^{(2)}C_{\pm}^{(2)} + C_{\pm}^{(2)}}{A^{(2)} + 1}, \\ \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} nd_1, & \varphi_{1\pm} &= \frac{2\pi}{\lambda} n_{1\pm} d_1, \\ \varphi_3 &= \frac{2\pi}{\lambda} n_3 d_2, & \varphi_{2\pm} &= \frac{2\pi}{\lambda} n_{2\pm} d_2, \\ n_{10} &= \frac{n_{1+} + n_{1-}}{2}, & n_{20} &= \frac{n_{2+} + n_{2-}}{2}, \\ n_{j\pm} &= \sqrt{\varepsilon_j \pm \gamma_j}, & j &= 1, 2 \\ \varepsilon_{0\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \tau_0}{\sqrt{1 + \tau_0^2}} E_0, & \varepsilon_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 \pm \tau_0}{\sqrt{1 + \tau^2}} E, \end{aligned}$$

E , E_0 и τ , τ_0 – попарно модули напряженности электрических полей падающих световых волн и их эллиптичности соответственно; d_1 , d_2 – толщины слоев, λ – длина волны излучения, $\varepsilon_j = \varepsilon'_j + i\varepsilon''_j$ – комплексный тензор диэлектрической проницаемости j -го слоя, $\gamma_j = \gamma'_j + i\gamma''_j$ – псевдотензор оптической активности j -го слоя; его действительной частью γ'_j определяется удельное вращение плоскости поляризации, а его мнимая часть γ''_j ответственна за циркулярный дихроизм.

С использованием результатов решения граничной задачи и с учетом выражения для Q_{\pm} [18]

$$Q_{\pm} = \frac{\omega}{8\pi} \left[\varepsilon'' |\vec{E}_{\pm}|^2 + i\gamma'' (\vec{E}_{\pm}^* \vec{H}_{\pm} - \text{к.с.}) \right]$$

после несложных, хотя и громоздких вычислений, получим выражения для скорости объёмной диссипации энергии в каждом слое гиротропного поглощающего двухслойника:

$$\begin{aligned} Q &= Q_+ + Q_{-1}, \\ Q_{\pm} &= (Q_{\pm} + Q_{\pm}^{ИИТ})'' + Q_{\pm} + (Q_{\pm} + Q_{\pm}^{ИИТ})''' \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$(Q_{\pm})'' = R_{\pm} \exp(-\alpha_{\pm} x) + S_{\pm} \exp(\alpha_{\pm} x), \quad (1.8)$$

$$(Q_{\pm}^{ИИТ})'' = T_{\pm} \cos\left(\frac{2\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_1} x\right) \exp\left(\pm \frac{2\omega}{c} \gamma''_1 x\right), \quad (1.9)$$

$$(Q_{\pm})''' = V_{\pm} \exp(-\beta_{\pm} x) + W_{\pm} \exp(\beta_{\pm} x), \quad (1.10)$$

$$(Q_{\pm}^{ИИТ})''' = X_{\pm} \cos\left(\frac{2\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_1} x\right) \exp\left(\pm \frac{2\omega}{c} \gamma''_1 x\right), \quad (1.11)$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{2\omega}{c} n''_{1\pm}, \quad \beta_{\pm} = \frac{2\omega}{c} n''_{2\pm}.$$

В (1.8)–(1.11) обозначено:

$$R_{\pm} = N_{1\pm} \left\{ |\varepsilon_{1\pm}|^2 + |\varepsilon'_{4\pm}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\varepsilon_{1\pm} \varepsilon'_{4\pm}) \cos(\varphi_0 - \varphi) \right\},$$

$$S_{\pm} = N_{1\pm} \left\{ |\varepsilon'_{1\pm}|^2 + |\varepsilon_{4\pm}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\varepsilon'_{1\pm} \varepsilon_{4\pm}) \cos(\varphi_0 - \varphi) \right\},$$

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= 2N_{1\pm} \left\{ |\varepsilon'_{1\pm}|^2 \operatorname{Re}(B^{(1)}) + |\varepsilon_{4\pm}|^2 + \operatorname{Re}(A^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. + [\operatorname{Re}(\varepsilon'_{1\pm} \varepsilon'_{4\pm}) + \operatorname{Re}(\varepsilon_{1\pm} \varepsilon_{4\pm})] \cos(\varphi_0 - \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

$$V_{\pm} = N_{2\pm} \left\{ |\varepsilon_{2\pm}|^2 + |\varepsilon'_{3\pm}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\varepsilon_{2\pm} \varepsilon'_{3\pm}) \cos(\varphi_0 - \varphi) \right\},$$

$$W_{\pm} = N_{2\pm} \left\{ |\varepsilon'_{2\pm}|^2 + |\varepsilon_{3\pm}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\varepsilon'_{2\pm} \varepsilon_{3\pm}) \cos(\varphi_0 - \varphi) \right\},$$

$$\begin{aligned} X_{\pm} &= 2N_{2\pm} \left\{ |\varepsilon'_{2\pm}|^2 \operatorname{Re}(A^{(1)}) + |\varepsilon_{3\pm}|^2 + \operatorname{Re}(B^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. + [\operatorname{Re}(\varepsilon'_{2\pm} \varepsilon'_{3\pm}) + \operatorname{Re}(\varepsilon_{2\pm} \varepsilon_{3\pm})] \cos(\varphi_0 - \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

$$N_j = \frac{\omega}{4\pi} \sqrt{\varepsilon'_j} \left(\frac{\varepsilon''_j}{2\sqrt{\varepsilon'_j}} \pm \gamma''_j \right), \quad j=1,2.$$

По формулам (1.9) и (1.11) определяются интерференционные составляющие диссипации энергии в каждом слое.

Далее для каждой области фотоакустической ячейки решим систему уравнений теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\beta_{s_1}} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_{s_1}} Q'' (1 + e^{i\Omega t}), \quad -d_1 \leq x \leq 0;$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\beta_{s_2}} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_{s_2}} Q''' (1 + e^{i\Omega t}), \quad 0_1 \leq x \leq d_2;$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\beta_{s_1}} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \begin{cases} \beta_i = \beta_0, & -\infty < x < -d_1; \\ \beta_i = \beta_1, & d_2 < x < +\infty, \end{cases} \quad (1.12)$$

принимая в качестве плотности мощности тепловых источников величину диссипации энергии

$$(Q)'' = (Q_+)'' + (Q_-)'', \quad (Q)''' = (Q_+)''' + (Q_-)''';$$

в таком подходе возможно определение распределения температурных полей в исследуемом образце.

Воспользуемся при этом условиями непрерывности температуры и её градиента на границах раздела областей ФА ячейки:

$$T_0(-d_1) = T_{s_1}(-d_1), \quad T_{s_1}(0) = T_{s_2}(0), \quad T_{s_2}(d_2) = T_1(d_2),$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x}(-d_1) = k_{s_1} \frac{\partial T_{s_1}}{\partial x}(-d_1) + Q''_{ИИТ}(-d_1),$$

$$k_{s1} \frac{\partial T_{s1}}{\partial x}(0) + Q_{\text{ИИТ}}^{\text{II}}(0) = k_{s2} \frac{\partial T_{s2}}{\partial x}(0) + Q_{\text{ИИТ}}^{\text{III}}(0),$$

$$k_{s1} \frac{\partial T_1}{\partial x}(d_2) = k_{s2} \frac{\partial T_2}{\partial x}(d_2) + Q_{\text{ИИТ}}^{\text{III}}(d_2),$$

где

$$(Q_{\text{ИИТ}}^{\text{II}})^{\pm} = (Q_{+}^{\text{ИИТ}})^{\pm} + (Q_{-}^{\text{ИИТ}})^{\pm},$$

$$(Q_{\text{ИИТ}}^{\text{III}})^{\pm} = (Q_{+}^{\text{ИИТ}})^{\pm} + (Q_{-}^{\text{ИИТ}})^{\pm}.$$

Решая систему уравнений теплопроводности (1.12) с учетом граничных условий можно найти комплексную амплитуду температурного поля на границе гиротропный двухслойник – детекторный газ ($x = -d$):

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{\Delta} (E_{1\pm} \theta_{1\pm} + E_{2\pm} \theta_{2\pm} + E_{3\pm} \theta_{3\pm} + E_{4\pm} \theta_{4\pm} + \theta_{\pm}^{\text{ИИТ}}), \quad (1.13)$$

где

$$\theta_{1\pm} = (s_1 - s_2)(r_{1\pm} - 1)\eta_{1\pm}^{-1} + 2(s - 1)(s + r_{1\pm})\xi_2^{-1} - 2(s + 1)(s - r_{1\pm})\xi_2,$$

$$\theta_{2\pm} = (s_1 - s_2)(r_{1\pm} + 1)\eta_{1\pm} + 2(s - 1)(s - r_{1\pm})\xi_2^{-1} - 2(s + 1)(s + r_{1\pm})\xi_2,$$

$$\theta_{3\pm} = 2s((s + 1)(1 + r_{2\pm})\xi_2 - (s - 1)(1 + r_{2\pm})\xi_2^{-1} + 2(sr_{2\pm} - 1)\eta_{2\pm}),$$

$$\theta_{4\pm} = 2s((s + 1)(1 + r_{2\pm})\xi_2 - (s - 1)(1 - r_{2\pm})\xi_2^{-1} - 2(sr_{2\pm} - 1)\eta_{2\pm}^{-1}),$$

$$\theta_{\pm}^{\text{ИИТ}} = \frac{2\{(Q_{\pm}^{\text{ИИТ}}(0))^{\text{II}} - (Q_{\pm}^{\text{ИИТ}}(0))^{\text{III}}\}}{k_{s1}\sigma_{s1}} \times$$

$$\times [(s - 1)\xi_2^{-1} + (s + 1)\xi_2] + \frac{4S[Q_{\pm}^{\text{ИИТ}}(d_2)]^{\text{III}}}{k_{s1}\sigma_{s1}},$$

$$s_1 = (s - 1)^2 \xi_1 \xi_2^{-1} - (s + 1)^2 \xi_1 \xi_2,$$

$$s_2 = (s^2 - 1)(\xi_2^{-1} \xi_2 - \xi_1^{-1} \xi_2^{-1}),$$

$$\Delta = (s_0 + 1)s_1 + (s_0 - 1)s_2, \quad \xi_j = \exp(\sigma_{sj} d_j),$$

$$\eta_{1+} = \exp(-\alpha_{+} d_1), \quad \eta_{2+} = \exp(-\beta_{+} d_2),$$

$$s_0 = \frac{k_0 \sigma_0}{k_{s1} \sigma_{s1}}, \quad s = \frac{k_{s2} \sigma_{s2}}{k_{s1} \sigma_{s1}}, \quad r_{1\pm} = \frac{\alpha_{\pm}}{\sigma_{s1}}, \quad r_{2\pm} = \frac{\beta_{\pm}}{\sigma_{s2}}.$$

В уравнении (1.13) слагаемые $\theta_{\pm}^{\text{ИИТ}}$ представляют интерференционные вклады каждого слоя в диссипацию энергии, а пары величин $E_{1\pm}$, $E_{2\pm}$ и $E_{3\pm}$, $E_{4\pm}$ определяют суммарные амплитуды волн в первом и втором слоях соответственно.

Характерные особенности формирования ФА сигнала при встречном взаимодействии световых волн в естественно-гиротропном двухслойнике выявлены в ходе анализа зависимостей амплитуды ФА сигнала от интенсивностей

взаимодействующих пучков I_0 и I , частоты модуляции Ω падающего излучения, разности начальных фаз $\Delta\varphi$ и действительной части γ' параметра гирации (рисунки 1.2–1.8).

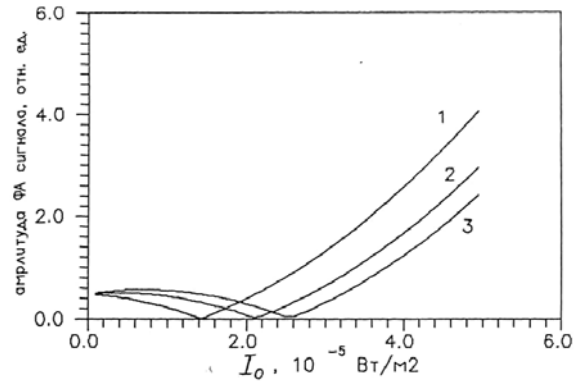


Рисунок 1.2 – Зависимость амплитуды ФА сигнала от интенсивности I_0 при различных значениях разности начальных фаз $\Delta\varphi$ взаимодействующих световых пучков ($1 - \Delta\varphi = 0^\circ$; $2 - \Delta\varphi = 45^\circ$; $3 - \Delta\varphi = 90^\circ$)

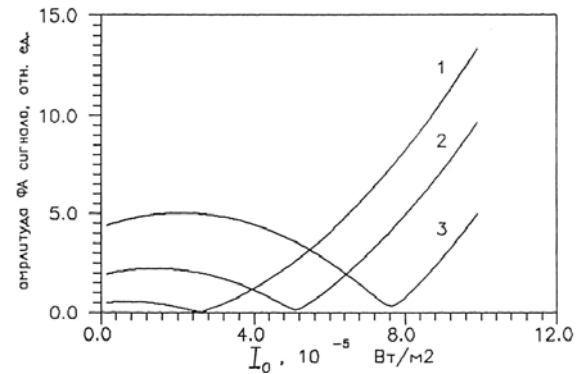


Рисунок 1.3 – Зависимость амплитуды ФА сигнала от интенсивности I_0 при различных значениях интенсивности I ($1 - I = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2$, $2 - I = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2$, $3 - I = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2$)

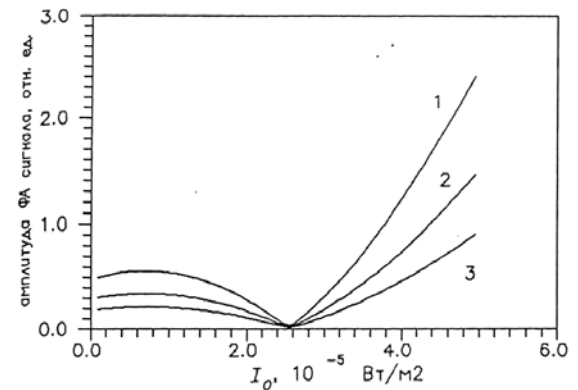


Рисунок 1.4 – Зависимость амплитуды ФА сигнала от интенсивности I_0 при различных значениях частоты модуляции Ω падающего излучения ($1 - \Omega = 100 \text{ Гц}$, $2 - \Omega = 120 \text{ Гц}$, $3 - \Omega = 140 \text{ Гц}$)

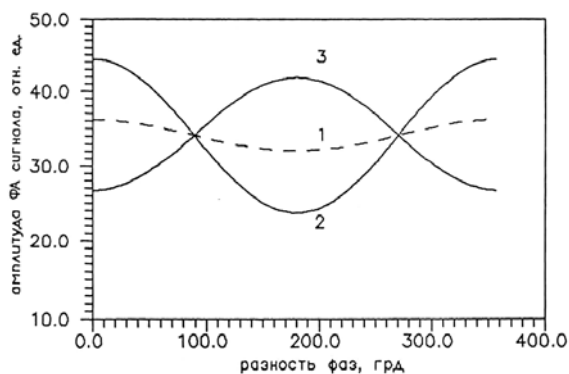


Рисунок 1.5 – Зависимость амплитуды q ФА сигнала от разности начальных фаз взаимодействующих световых пучков при различных поляризациях волны E_0 ($1 - \tau_0 = 0$, $2 - \tau_0 = -1$, $3 - \tau_0 = +1$)

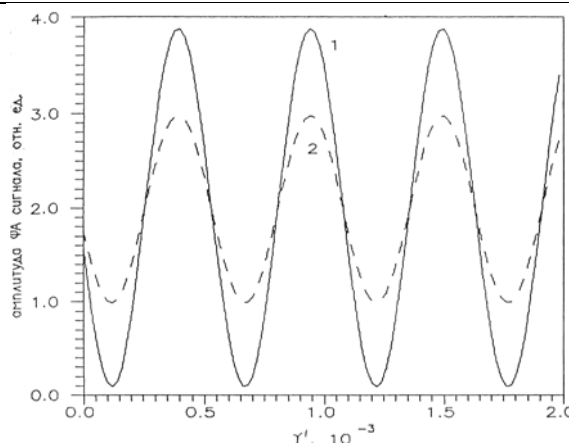


Рисунок 1.8 – Зависимость амплитуды ФА сигнала q от действительной части γ' параметра гирации при различных значениях разности начальных фаз ($\tau = 0$, $s = 30$;

$$1 - \Delta\varphi = 0 \text{ рад}, \quad \tau_0 = -1;$$

$$2 - \Delta\varphi = \pi/4 \text{ рад}, \quad \tau_0 = -1;$$

$$3 - \Delta\varphi = 0 \text{ рад}, \quad \tau_0 = +1;$$

$$4 - \Delta\varphi = \pi/4 \text{ рад}, \quad \tau_0 = +1)$$

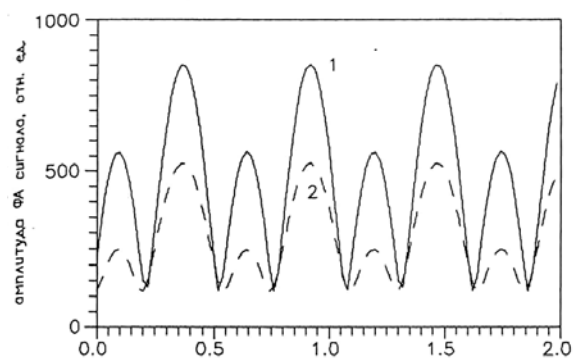


Рисунок 1.6 – Зависимость амплитуды ФА сигнала q от действительной части γ' параметра гирации при различных значениях разности начальных фаз ($\tau_0 = +1$, $\tau = 0$, $s = 3,9$;

$$1 - \Delta\varphi = 0 \text{ рад}, \quad 2 - \Delta\varphi = \pi/4 \text{ рад})$$

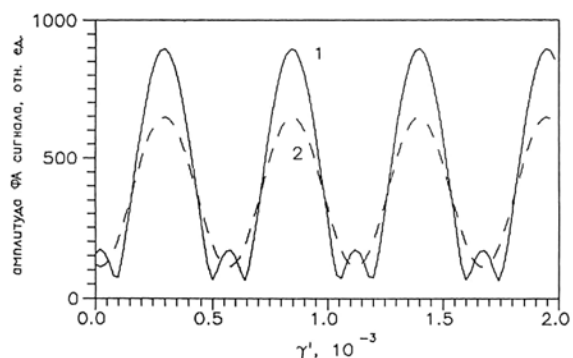


Рисунок 1.7 – Зависимость амплитуды ФА сигнала q от действительной части γ' параметра гирации при различных значениях разности начальных фаз

$$(\tau_0 = -1, \quad \tau = 0, \quad s = 3,9;$$

$$1 - \Delta\varphi = 0 \text{ рад}, \quad 2 - \Delta\varphi = \pi/4 \text{ рад})$$

2 Анализ результатов

Анализ полученного выражения (1.13) выполним для гиротропной структуры, образованной кубическим кристаллом германата висмута $Bi_{12}GeO_{20}$ и вырезанного вдоль оптической оси одноосным кристаллом йодата лития $LiIO_3$. Постоянными в расчетах принимались следующие параметры:

$$d_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad d_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \lambda = 5,5 \cdot 10^7 \text{ м},$$

$$\varepsilon'_1 = 6,53, \quad \varepsilon''_1 = 1 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon'_2 = 3,61, \quad \varepsilon''_2 = 2,5 \cdot 10^{-3},$$

$$\rho_{s1} = 9200 \text{ кг/м}^3, \quad c_{s1} = 356,15 \text{ Дж/к} \cdot \text{К},$$

$$\rho_{s2} = 4500 \text{ кг/м}^3, \quad c_{s2} = 200 \text{ Дж/к} \cdot \text{К},$$

$$k_{s1} = 0,6285 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}, \quad k_{s2} = 46,09 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}.$$

В ходе анализа зависимости амплитуды ФА отклика от интенсивности I_0 одной из взаимодействующих волн (рисунок 1.2) обнаружен эффект полного подавления сигнала и выявлено, что положение минимума анализируемой функции определяется разностью начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ встречных световых волн. Если разность начальных фаз постоянна и равна нулю ($\Delta\varphi = 0$), то при дискретном изменении интенсивности I второй взаимодействующей волны величина смещения точки, соответствующей минимальной амплитуде ФА сигнала, возрастает с увеличением интенсивности второй взаимодействующей волны I (рисунок 1.3). Как видно на рисунке 1.4, изменение частоты модуляции излучения, падающего с обеих сторон на двухслойник, не оказывает влияния на положение экстремума, а влияет только на амплитуду ФА сигнала.

При взаимодействии право- и левоциркулярно поляризованной волны E_0 с линейно поляризованной волной E изменение амплитуды ФА сигнала максимально при $\Delta\varphi = n \cdot \pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), когда зависимости $q_+ = f(\Delta\varphi)$ и $q_- = f(\Delta\varphi)$ находятся в противофазах (рисунок 1.5).

Весьма существенно влияние параметра γ'_1 , ответственного за удельное вращение плоскости поляризации, на величину ФА сигнала; при изменении $\Delta\varphi$ и состояния поляризации взаимодействующих мод характер зависимости амплитуды ФА сигнала от параметра γ'_1 изменяется (рисунки 1.6 и 1.7), при этом $s = 3,9$. Увеличение отношения тепловых импедансов компонентов гиротропной слоистой структуры ($s = 30$) обуславливает уменьшение амплитуды ФА сигнала и изменение вида функциональной зависимости (рисунок 1.8). Сравнивая графики, приведённые на рисунках 1.6–1.8, видим, что амплитуда ФА сигнала при варьировании параметра γ'_1 может изменяться в диапазоне нескольких порядков.

Явление туннельной интерференции встречных волн различной физической природы представляет интерес не только в теоретическом отношении, но имеет также и прикладное значение. На основе эффекта туннельной интерференции предложен способ транспортировки потоков энергии через сильно поглощающие среды [19], с применением которого можно на несколько порядков повысить эффективность передачи сигналов в радио- и оптических каналах с значительным затуханием. В [20] предложен способ индукционного нагрева изделий из электропроводных материалов, в котором использование туннельной интерференции обуславливает увеличение КПД нагрева на 50–100% в сравнении с обычным индукционным нагревом.

Еще одним важным направлением технического применения туннельной интерференции встречных волн является способ синтеза голограммы длинноволнового приближения [21]. Указанные голограммы могут иметь размеры длины волны и эффективно преобразовывать модовую структуру электромагнитного поля. В частности, подобные электромагнитные интерференционные преобразователи могут использоваться в качестве антенн направленного излучения в СВЧ диапазоне.

Безусловно, обнаруженный эффект подавления фотоакустического сигнала, а также основанный на его использовании способ эффективного управления амплитудно-фазовыми характеристиками результирующего ФА отклика могут стать базовыми для разработки новых методов [22] лазерной фотоакустической диагностики функциональных и конструкционных структур и

материалов, а также для создания элементной базы акустооптики, квантовой и оптической электроники, включая наноэлектронику.

Заключение

Таким образом, в работе исследована термооптическая генерация звука в поглощающем гиротропном двухслойнике при встречном взаимодействии электромагнитных волн. Обнаружен эффект полного подавления фотоакустического сигнала в условиях туннельной электромагнитной интерференции.

Выявлена возможность управления амплитудно-фазовыми характеристиками фотоакустического сигнала посредством изменения величины удельного вращения плоскости поляризации, разности начальных фаз и состояния поляризации световых волн, взаимодействующих в поглощающей естественно гиротропной двухслойной среде.

Частично работа выполнена при финансовой поддержке, оказываемой исполнителям Государственной комплексной программы научных исследований Республики Беларусь «Фотоника 3.03».

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоренков, В.В. Эффект туннельной электромагнитной интерференции в металлических пленках / В.В. Сидоренков, В.В. Толмачев // Письма в ЖТФ. – 1989. – Т. 15, В. 21. – С. 34–37.
2. Сидоренков, В.В. Эффекты электромагнитной интерференции в металлических пластинах / В.В. Сидоренков, В.В. Толмачев // Письма в ЖТФ. – 1990. – Т. 16, В. 3. – С. 20–25.
3. Баркладзе, Р.В. Интерференционная прозрачность плоскопараллельной пластинки при падении на нее с двух сторон плоских электромагнитных волн / Р.В. Баркладзе, Н.Б. Брант, В.В. Толмачев // Механика сплошной среды / Сб. науч. тр. – М., 1981. – С. 3–46.
4. Санников, Р.Г. Интерференция встречных волн в невзаимной киральной среде // Р.Г. Санников, Д.И. Семенов // Письма в ЖТФ. – 2007. – Т. 33, В. 23. – С. 19–26.
5. Афанасьев, С.А. Потоки энергии при интерференции электромагнитных волн / С.А. Афанасьев, Д.И. Семенов // УНФ. – 2008. – Т. 178. – С. 377–384.
6. Афанасьев, С.А. Туннельная интерференция встречных волн в области отрицательной магнитной проницаемости / С.А. Афанасьев, Д.И. Семенов // ЖТФ. – 1997. – Т. 67. – № 67. – С. 77–80.
7. Ивакин, Е.В. Термическое интерференционно-оптическое возбуждение ультразвуковых волн в конденсированных средах / Е.В. Ивакин, И.П. Петрович, А.С. Рубанов // Квантовая электроника. – 1977. – Т. 4, № 11. – С. 2421–2426.

8. *Mityurich, G.S.* Photoacoustic transformation in gyrotropic media at interaction of two light beams / G.S. Mityurich, V.P. Zelyony, A.N. Serdyukov // Proc. 5th Spring School on Acousto-optics and Applications. SPIE. – 1992. – Vol. 184. – P. 309–318.
9. *Photoacoustic transformation in magnetically active under the interaction of opposing light waves* / G.S. Mityurich [et al.] // Journ. de Phys. IV Colloque C7. – 1994. – Vol. 4. – P. C7-769–C7-772.
10. *Астахов, П.В.* Фотодефлекционный отклик гиротропно-изотропного образца в условиях туннельной электромагнитной интерференции / П.В. Астахов, Г.С. Митюрин / Письма в ЖТФ. – 1998. – Т. 24, № 15. – С. 85–90.
11. *Интерференция встречных продольных акустических волн в изотропной поглощающей пластинке и периодической структуре с дефектами* / А.А. Карабутов [и др.] // Акуст. журн. – 2001. – Т. 47, № 6. – С. 890–896.
12. *Сидоренко, В.В.* Эффект туннельной интерференции полей произвольной физической природы и его технические приложения / В.В. Сидоренко, В.В. Толмачев // SciTecLibrary / 02.04.2008 / <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/9021.html/>.
13. *Caher, D.* Photoacoustic cell for reflection and transition measurements / D. Caher // Rev. Sci. Instrum. – 1981. – Vol. 52, № 9. – P. 1306–1310.
14. *Федоров, Ф.И.* Теория гиротропии / Ф.И. Федоров // Минск : Наука и техника. – 1976. – 456 с.
15. *Федоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров // Минск : Изд. АН БССР, 1958. – 380 с.
16. *Бокуть, Б.В.* К феноменологической теории поглощающих оптически активных сред / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков, В.В. Шепелевич // Опт. и спектр. – 1974. – Т. 37, № 1. – С. 120–124.
17. *Бокуть, Б.В.* К феноменологической теории естественной оптической активности / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61, № 5 – С. 1803–1813.
18. *Митюрин Г.С.* Фотоакустическая спектроскопия гиротропных слоистых образцов / Г.С. Митюрин, В.В. Свиридова, А.Н. Сердюков // ЖПС. – 1990. – Т. 53, № 4. – С. 611–617.
19. *А.С. № 1689925.* Способ передачи электромагнитных сигналов через тонкопленочную среду // Б.И. – 1991. – № 41.
20. *А.С. № 1707782.* Способ индукционного нагрева плоского изделия из электропроводного материала // Б.И. – 1992. – № 3.
21. *Патент № 2089027.* Объемное голографическое антенное устройство // Б.И. 1997. – № 24.
22. *Заявка на изобретение № 200912779.* Комбинированная система фотоакустической индукции и ультразвуковой визуализации // Б.И. – 2011. – № 3.

Поступила в редакцию 24.11.11.

УДК 535.51

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ЕСТЕСТВЕННОГО ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КРЕМНИЕВЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЭЛЛИПСОМЕТРИИ

Н.И. Стаськов¹, И.В. Ивашкевич¹, А.Б. Сотский¹, Л.И. Сотская²

¹Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев

²Белорусско-Российский университет, Могилев

THE ACCOUNT OF INFLUENCE OF THE NATURAL SURFACE LAYER UNDER INVESTIGATION OF SILICON PLATES BY THE METHOD OF SPECTRAL ELLIPSOMETRY

N.I. Stas'kov¹, I.V. Ivashkevich¹, A.B. Sotski¹, L.I. Sotskaya²

¹Mogilev State A. Kuleshov University, Mogilev

²Belarusian-Russian University, Mogilev

Исследуется возможность исключения влияния естественного поверхностного слоя при определении методом спектральной эллипсометрии дисперсии показателей преломления $n(\lambda)$ и поглощения $k(\lambda)$ полупроводниковой подложки. Показано, что при решении обратных эллипсометрических задач можно использовать простейшую модель переходного слоя с одним параметром, который определяется толщиной и показателем преломления слоя.

Ключевые слова: спектральная эллипсометрия, поверхностный слой, оптическая модель, дисперсия оптических характеристик.

The possibility of exclusion of the influence of a natural surface layer is investigated at determination by the method of spectral ellipsometry dependencies $n(\lambda)$ and $k(\lambda)$ for a semiconductor substrate. It is shown that in the solution of the inverse ellipsometric problems a simple model of the transition layer with a single parameter which is determined by the thickness and refractive index of the layer can be used.

Keywords: spectral ellipsometry, surface layer, optical model, dispersion of optical characteristics.

Введение

Для решения обратных оптических задач необходима априорная информация о дисперсионных характеристиках материалов, входящих в исследуемую структуру. Обычно эти характеристики определяют оптическими методами для каждого материала на основании модели чистой подложки [1]. Однако в реальных условиях на поверхности образцов всегда существуют естественные неоднородные переходные слои, оптические и геометрические характеристики которых неизвестны. Несмотря на то, что толщина этих слоев обычно значительно меньше длины волны излучения ($d \ll \lambda$) [1]–[4], они существенно влияют на измеряемые поляризационные углы. Поэтому наличие этих слоев необходимо учитывать в моделях среды, используемых при решении прямой эллипсометрической задачи. Известно [5], что успех решения обратной задачи напрямую связан с числом параметров модели исследуемой среды. Поэтому для переходного слоя необходима модель с минимальным числом свободных параметров. Такая модель может быть создана на основе метода интегральных уравнений, при использовании которого не требуется накладывать ограничения на толщину слоя и его оптическую однородность.

Целью данной работы является сравнение эффективности моделей, в которых учитываются естественные поверхностные слои, при определении методом спектральной эллипсометрии дисперсионных зависимостей показателей преломления и поглощения $n_2(\lambda)$ и $k_2(\lambda)$ кремниевых промышленных пластин КДБ12.

1 Модели переходного слоя

Для решения обратных задач эллипсометрии используется уравнение

$$\operatorname{tg} \Psi e^{i\Delta} = R_p / R_s,$$

в котором содержатся, с одной стороны, измеряемые поляризационные углы Ψ и Δ при заданных углах падения φ_0 , а с другой – амплитудные коэффициенты отражения p - и s -поляризованного излучения.

В выбранной спектральной области эти коэффициенты зависят от вида геометрической модели комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(y)$ (ось oy перпендикулярна поверхности образца).

В настоящее время в эллипсометрии используется несколько моделей переходного поверхностного слоя:

а) неоднородный слой на подложке.

Для p -поляризованного излучения методом интегральных уравнений можно получить выражение для коэффициента отражения

$$R_p = \frac{\sigma_+ \varepsilon_- - \sigma_- \varepsilon_+ + i(\varepsilon_+ \varepsilon_- \beta^2 I_2 + \sigma_+ \sigma_- I_1)}{\sigma_+ \varepsilon_- + \sigma_- \varepsilon_+ - i(\varepsilon_+ \varepsilon_- \beta^2 I_2 + \sigma_+ \sigma_- I_1)} + O\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2, \quad (1.1)$$

где неоднородный переходной слой на поверхности подложки учитывается всего двумя комплексными интегралами

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(y) - \theta(\varepsilon)] dy, \\ I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon(y)} - \theta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right] dy, \quad (1.2)$$

имеющими порядок $O\left(\frac{d}{\lambda}\right)$. В (1.2) фигурируют ступенчатые функции, отличные от нуля только в пределах переходного слоя: $\theta(\varepsilon) = \varepsilon_+$ при $y > 0$, $\theta(\varepsilon) = \varepsilon_-$ при $y < 0$, $\theta(1/\varepsilon) = 1/\varepsilon_+$ при $y > 0$, $\theta(1/\varepsilon) = 1/\varepsilon_-$ при $y < 0$.

Для s -поляризованного излучения в таком случае имеем

$$R_s = \frac{\sigma_+ - \sigma_- + k_0 I_1}{\sigma_+ + \sigma_- - k_0 I_1} + O\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2. \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.3) легко получить отношение R_p/R_s , которое содержится в основном уравнении эллипсометрии для переходного слоя с любой зависимостью $\varepsilon(y)$. При $d \ll \lambda$ в отношении R_p/R_s можно пренебречь малыми величинами

порядка $O\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$. Тогда

$$\frac{R_p}{R_s} = \frac{(\sigma_+ \varepsilon_- - \sigma_- \varepsilon_+)(\sigma_+ + \sigma_-)}{(\sigma_+ \varepsilon_- + \sigma_- \varepsilon_+)(\sigma_+ - \sigma_-)} + i \frac{k_0 2\sigma_+(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)\beta^2 \varepsilon_-}{(\sigma_+ + \sigma_-)^2 (\sigma_+ \varepsilon_- + \sigma_- \varepsilon_+)^2} J, \quad (1.4)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$, ε_+ , ε_- — диэлектрические проницаемости сред под слоем и над ним,

$$\beta = k_0 \sqrt{\varepsilon_+} \sin \varphi_0, \quad \sigma_{\pm} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\pm} - \beta^2}, \\ J = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varepsilon(y) - \varepsilon_+)(\varepsilon(y) - \varepsilon_-)}{\varepsilon(y)} dy. \quad (1.5)$$

В (1.5) область интегрирования не выходит за пределы переходного слоя;

б) однородный слой на подложке [1]. В такой модели

$$\frac{R_p}{R_s} = \frac{R_{01p} + R_{12p} e^{-2i\delta}}{1 + R_{01p} R_{12p} e^{-2i\delta}} \cdot \frac{1 + R_{01s} R_{12s} e^{-2i\delta}}{R_{01s} + R_{12s} e^{-2i\delta}}; \quad (1.6)$$

в) бесконечно тонкий слой ориентированных диполей на подложке, который характеризуют двумя параметрами γ_y и γ_x (xy — плоскость падения излучения) [2];

з) бесконечно тонкий проводящий слой на подложке, который в вертикальном направлении характеризуется поляризуемостью α_y , а в горизонтальном направлении — высокочастотной проводимостью [3];

д) бесконечно тонкий слой ориентированных диполей на подложке, имеющий в вертикальном направлении поляризуемость α_y [4]. При использовании этой модели принимают условия, что при падении s -поляризованного излучения ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$) из среды с комплексным показателем преломления $N_0 = n_0 - ik_0$ под углом φ_0 на среду с показателем преломления $N_2 = n_2 - ik_2$ диполи переходного слоя ориентируются в плоскости раздела сред (xz) и что их связанные заряды не обуславливают разрыва линий напряженности поля E_z . При этом амплитудный коэффициент отражения имеет вид:

$$R_s = \frac{N_0 \cos \varphi_0 - N_2 \cos \varphi_2}{N_0 \cos \varphi_0 + N_2 \cos \varphi_2}. \quad (1.7)$$

В напряженности \mathbf{E} падающего на границу раздела p -поляризованного излучения ($\mathbf{E} \in xy$) можно выделить тангенциальную E_x и нормальную E_y составляющие. Компонент E_y обуславливает поляризацию двух граничащих сред, вследствие которой на границе раздела (в окрестности плоскости xz) появляется тонкий двойной слой связанных зарядов, который нельзя охарактеризовать макроскопическими параметрами n_1 , k_1 , d . Тогда амплитудный коэффициент отражения p -волны можно представить в виде [3]:

$$R_p = \frac{N_2 \cos \varphi_0 - N_0 \cos \varphi_2 + i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha_y N_0^3 N_2 \sin^2 \varphi_0}{N_2 \cos \varphi_0 + N_0 \cos \varphi_2 - i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha_y N_0^3 N_2 \sin^2 \varphi_0}. \quad (1.8)$$

При $\alpha_y \ll \lambda$ из (1.7) и (1.8) получим

$$\frac{R_p}{R_s} = \frac{\bar{R}_p}{\bar{R}_s} + 2i \alpha_y \frac{2\pi}{\lambda} N_0^3 N_2 \sin^2 \varphi_0 \times \frac{N_2 \cos \varphi_0 (N_0 \cos \varphi_0 + N_2 \cos \varphi_2)}{(N_0 \cos \varphi_0 - N_2 \cos \varphi_2)(N_2 \cos \varphi_0 + N_0 \cos \varphi_2)^2}. \quad (1.9)$$

Если $\varphi_0 = 0$, то $R_p/R_s = -1$. При $\varphi_0 = 90^\circ$ $R_p/R_s = 1$.

В отличие от выражения (1.6), в котором величина R_p/R_s зависит от пяти параметров, в формулах (1.9) и (1.4) содержится только по три неизвестных параметра: α_y или J соответственно и n_2 , k_2 . Так как устойчивость решения обратной задачи эллипсометрии снижается при увеличении числа свободных параметров модели $\varepsilon(y)$ исследуемой среды [5], для описания переходного слоя следует выбрать модель с минимальным числом параметров. При заданных φ_0 , N_0 , λ , Ψ_e , Δ_e параметр α_y явно выражается через N_2 . По физическим соображениям величина $\alpha_y < 0$

является действительной и имеет размерность длины. Так как отношение R_p/R_s комплексно, то в общем случае $\alpha_y = \alpha_{y1} + i\alpha_{y2}$. Параметр N_2 легко определяется при условии минимальности значения α_{y2} .

Влияние неоднородных поверхностных слоев на коэффициенты отражения R_s и R_p полимерных пленок было экспериментально исследовано в работе [6] при проверке известного соотношения $R_p = R_s^2$, которое должно выполняться для подложки без слоя при угле падения $\varphi_0 = 45^\circ$. Оказалось, что присутствие переходного слоя на пленках полистирола приводит к значительному увеличению R_p в сравнении с увеличением R_s .

2 Экспериментальные результаты и их анализ

Эксперименты выполнены с использованием пластин из кремния марки КДБ-12, протравленных в буферном растворе после предварительной шлифовки и полировки. На рисунке 2.1 представлены рентгеновские фотоэлектронные спектры (РФЭС) таких пластин, зарегистрированные на установке ESCALAB MRH (Alka). При оценке толщины образовавшегося приповерхностного слоя по интенсивности двух спектральных линий, длины волн которых соответствуют ионизации атомов кремния, находящихся в $2p$ -состоянии в твердотельном кремнии и оксиде кремния (энергии связи $2p$ -электронов соответственно 99,15 эВ и 103,4 эВ), показано, что она не превышает 3 нм.

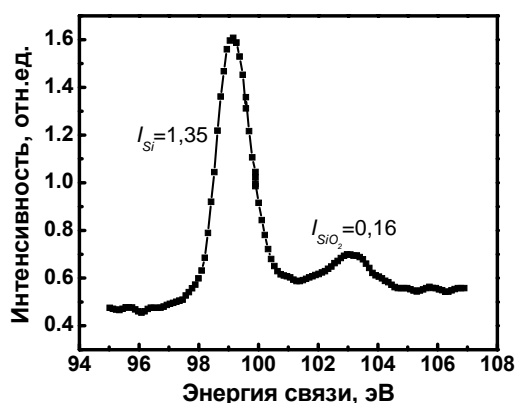


Рисунок 2.1 – Рентгеновские фотоэлектронные спектры пластин кремния марки КДБ-12

На рисунке 2.2 представлены распределения концентраций атомов кислорода и кремния по глубине приповерхностного слоя пластины КДБ-12, определённые методом оже-спектроскопии в условиях пошаговой ионно-плазменной обработки на РНИ-600 (Perkin Elmer). Толщина неоднородного приповерхностного слоя, оцененная по этим данным, не превышает 2 нм.

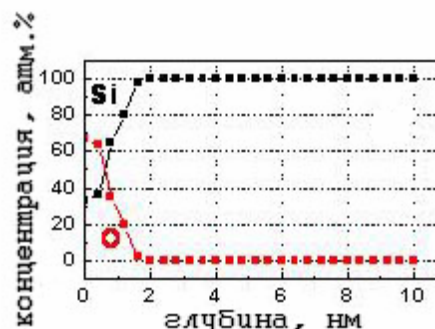


Рисунок 2.2 – Распределение концентраций кремния и кислорода по глубине в пластине из кремния КДБ-12

Измерения спектров поляризационных углов $\Psi_e(\lambda)$ и $\Delta_e(\lambda)$ пластин КДБ-12 осуществляли на спектральном эллипсометре ES-2 с бинарной модуляцией состояния поляризации [7] в диапазоне длин волн $380 \text{ нм} \leq \lambda \leq 1000 \text{ нм}$ при углах падения излучения 65° и 70° . Решение обратных эллипсометрических задач было получено методом наименьших квадратов. При этом минимизировался функционал невязки спектральных зависимостей – экспериментальных $\text{tg}\Psi_e(\lambda)$, $\cos\Delta_e(\varphi_0)$ и теоретических $\text{tg}\Psi(\lambda, x_j)$, $\cos\Delta_r(\lambda, x_j)$:

$$I(x_j) = \sum_{k=1}^m \left\{ \left[\text{tg}\Psi_e(\lambda_k) - \text{tg}\Psi_r(\lambda_k, x_j) \right]^2 + \left[\cos\Delta_e(\lambda_k) - \cos\Delta_r(\lambda_k, x_j) \right]^2 \right\}. \quad (2.1)$$

В формуле (2.1) x_j ($j = \overline{1, n}$) – вещественные параметры электродинамической модели плоско-слоистой среды, m – число точек в спектре для фиксированного угла падения излучения φ_0 . Оптимальные значения x_j определяются из условия минимума функции $I(x_j)$.

Хорошо известно, что описанная задача является некорректно поставленной. Это означает, что ее решение неустойчиво в силу погрешностей регистрации зависимостей $\text{tg}\Psi_e(\varphi_0, \lambda)$ и $\cos\Delta_e(\varphi_0, \lambda)$. Кроме того, при численном отыскании минимума целевой функции $I(x_j)$ серьезную проблему составляет существование ложных локальных минимумов [5].

Как было отмечено выше, указанные проблемы быстро усугубляются при увеличении числа неизвестных параметров x_j . Поэтому успешное решение обратных задач спектральной эллипсометрии возможно при использовании модели с минимальным числом неопределенных (варьируемых) параметров, адекватно характеризующих дисперсионные свойства сред.

С учетом вышеизложенных обстоятельств, для описания дисперсии кремния была выбрана модель Тока-Лоренца [8]. Принимая во внимание неоднородность поверхностного слоя пластин из кремния при решении обратной задачи в рамках модели (а), мы минимизировали целевую

функцию $I(x_j)$ семи параметров (пять параметров модели Тока-Лоренца для дисперсии кремния и два дополнительных параметра для поверхностного слоя (1.2)). По спектрам $\text{tg}\Psi_e(\varphi_0, \lambda)$ и $\cos\Delta_e(\varphi_0, \lambda)$, измеренным при угле падения 70° , были рассчитаны оптические функции $n_2(\lambda)$ и $k_2(\lambda)$ КДБ-12 (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Дисперсионные зависимости показателей преломления и показателей поглощения кремния марки КДБ-12

| λ , нм | n_2 | k_2 |
|----------------|-------|-----------------------|
| 480 | 4,320 | $8,036 \cdot 10^{-2}$ |
| 530 | 4,079 | $4,804 \cdot 10^{-2}$ |
| 580 | 3,931 | $3,098 \cdot 10^{-2}$ |
| 630 | 3,830 | $2,073 \cdot 10^{-2}$ |
| 680 | 3,759 | $1,406 \cdot 10^{-2}$ |
| 730 | 3,706 | $0,952 \cdot 10^{-2}$ |
| 780 | 3,664 | $0,633 \cdot 10^{-2}$ |
| 830 | 3,632 | $0,407 \cdot 10^{-2}$ |
| 880 | 3,605 | $0,247 \cdot 10^{-2}$ |
| 930 | 3,584 | $0,136 \cdot 10^{-2}$ |
| 980 | 3,566 | $0,063 \cdot 10^{-2}$ |

Ранее методом многоугловой эллисометрии было установлено [4], что поверхностный слой на пластинах КДБ-12 при $\lambda = 632,8$ нм можно учесть в рамках модели (б) – с параметрами $n_1 = 1,456$; $k_1 = 0$; $d = 3,8$ нм – и модели (д) – с параметром $\alpha_s = (-1,756 - i5,2 \cdot 10^{-5})$ нм.

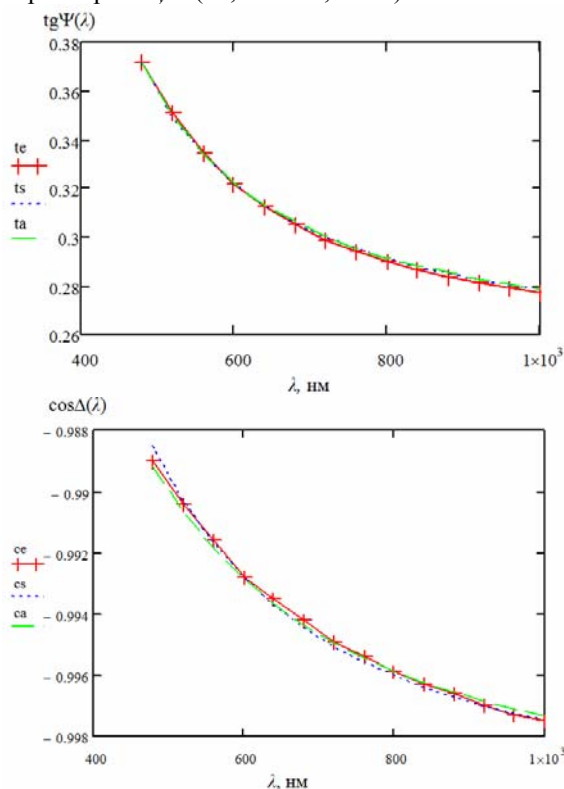


Рисунок 2.3 – Спектры $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\cos\Delta(\lambda)$ кремниевых пластин

Приемлемость рассматриваемых моделей учёта влияния переходных слоев на параметры подложек оценивалась при сопоставлении полученных экспериментально (кривые te и ce) и рассчитанных по формулам (1.6) (кривые ts и cs) и (1.8) (кривые ta и ca) поляризационных спектров кремниевой пластины (рисунок 2.3). Анализируемые спектры получены при угле падения излучения $\varphi_0 = 65^\circ$. Спектры поляризационных углов, рассчитанные на основе модели (а), практически не отличаются от экспериментальных и на рисунке не приведены. Функции $n_2(\lambda)$ и $k_2(\lambda)$ подложек, использованные во всех обсуждаемых моделях, были одинаковыми (они приведены в таблице 2.1).

Заключение

Таким образом, при использовании трёх различных моделей (а, б, д) тонкого поверхностного слоя, локализованного на подложке, получены практически одинаковые спектры $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\cos\Delta(\lambda)$, которые характерны для пластины из кремния марки КДБ12. Толщина этого слоя, определенная неразрушающим оптическим методом, удовлетворительно согласуется с данными, полученными другими методами, при использовании которых исходная структура слоя нарушается. На основе интегральных уравнений удалось получить основное уравнение эллисометрии, в котором переходный слой с произвольным профилем диэлектрической проницаемости учитывается посредством двух комплексных интегралов. При решении обратных эллисометрических задач для подложек с естественными поверхностными слоями, если $d \ll \lambda$, можно использовать простейшую модель переходного слоя с одним комплексным параметром, который зависит от толщины и показателя преломления слоя. В частности, варьируя значения этих двух величин, можно обеспечить получение любого значения комплексного интеграла J в (1.5). В спектральной эллисометрии существенно также, что дисперсией интегральных характеристик J и α_s можно пренебречь вследствие малости их значений.

Заметим также, что модель (а), в отличие от моделей (б) и (д), может быть использована при исследовании подложек с толстыми неоднородными слоями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аззам, Р. Эллисометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара. – М. : Мир, 1981. – 583 с.
2. Сивухин, Д.В. Общий курс физики : в 5 т. – Т. 4. Оптика. – М. : Наука, 1980. – 752 с.
3. Пшеницын, В.И. Эллисометрия в физико-химических исследованиях / В.И. Пшеницын, М.И. Абаев, Н.Ю. Лызлов. – Л. : Химия, 1986. – 152 с.

-
4. Стаськов, Н.И. Моделирование переходного слоя слоев диполей при эллипсометрическом исследовании диэлектриков и полупроводников / Н.И. Стаськов, В.В. Филиппов, Н.А. Крекотень // Оптика неоднородных структур : материалы 3-й междунар. научн.-практ. конф., Могилев, 2011 г. / МГУ им. А.А. Кулешова. – Могилев, 2011. – С. 107–111.
5. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 285с.
6. Определение оптических постоянных пленок полистирола методом НПВО / Н.И. Стаськов [и др.] // ЖПС. – 1980. – Т. 32. – № 2. – С. 343–347.
7. Спектральная эллипсометрия многослойных гетероструктур ZnS/ZnSe / В.И. Ковалев [и др.] // ЖПС. – 2002. – Т. 69. – № 2. – С. 258–263.
8. Jellison, G.E. Spectroscopic ellipsometry data analysis: measured versus calculated quantities / G.E. Jellison // Thin Solid Films. – 1998. – Vol. 313–314. – P. 33–39.

Поступила в редакцию 24.11.11.

УДК 535.32:621.373

ОТРАЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫМ СЛОЕМ СРЕДЫ С НЕОДНОРОДНЫМ УШИРЕНИЕМ ЛИНИИ РЕЗОНАНСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

Е.В. Тимощенко¹, В.А. Юревич², Ю.В. Юревич²

¹Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев

²Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

LIGHT REFLECTION BY THE SUBSURFACE LAYER WITH UNHOMOGENIOUS BROADENING OF ABSORPTION RESONANCE

E.V. Timoschenko¹, V.A. Yurevich², Yu.V. Yurevich²

¹Mogilev State A. Kuleshov University, Mogilev

²Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

С учётом автомодуляционного спектрального смещения и неоднородного уширения линии резонансного поглощения теоретически обоснована возможность проявления гистерезиса в нелинейной и спектральной зависимостях резонансного отражения излучения тонкой граничной пленкой. Для численного анализа решений задачи выбраны значения параметров квантоворазмерных планарных структур, используемые в оптике и лазерной физике полупроводников.

Ключевые слова: автомодуляционное спектральное уширение поля излучения, оптический гистерезис, субмикронные полупроводниковые плёнки.

The possibility of hysteresis behaviour of nonlinear and spectral dependences of thin boundary film resonant reflection is theoretically defined under conditions of light field spectrum linewidth broadening and unhomogenous broadening of absorption resonance. The problem is considered for parameters of planar thin layers on the basis of quantum-well semiconductor structures.

Keywords: light field spectrum linewidth broadening, optical hysteresis, submicronic semiconductor films.

Введение

Воздействию лазерного излучения на планарную поверхность полупроводниковых слоистых структур в настоящее время уделяется много внимания. Во многом это обусловлено поиском возможности создания активных отражателей и оптических фильтров в тонкопленочном исполнении в целях разработки и совершенствования компактных устройств управления потоками когерентного излучения. Особые перспективы открываются в связи с применением тонких слоев на основе полупроводниковых наноструктур, состоящих из квантовых точек [1]. С применением современных технологий формирования наноструктур удаётся достичь высокой концентрации активных центров, поэтому при описании взаимодействия таких материалов с когерентным излучением можно рассматривать их как плотные резонансные среды. Кроме того, элементы наноструктур характеризуются большими дипольными моментами, связанными с экситонными переходами, — их величина составляет несколько десятков Дебай [2]. В результате компоновки системы из десяти и более страт возможно образование из наноструктурных элементов субмикронной планарной пленки с выраженным нелинейным откликом [3]. При воздействии света на такую плёнку в отраженных (прошедших)

пучках оказывается существенным дополнительным к френелевской составляющей отражения (преломления) компонент, который обусловлен резонансной поверхностной поляризацией [4].

В исследовании, результаты которого составили основу настоящей работы, ставилась задача оценки вклада поверхностной поляризованности в коэффициент нелинейного отражения (пропускания) света граничным тонким слоем плотной резонансной среды. Оригинальность исследования состоит в одновременном учёте ряда дополнительных факторов, определяющих нелинейную реакцию слоя на излучение, — квазирезонансной поляризуемости активных центров и диполь-дипольного взаимодействия в условиях неоднородного уширения линии резонансного поглощения, которое достаточно типично для ряда квантоворазмерных структур [1].

1 Основные уравнения

Рассмотрим воздействие света на тонкий поверхностный слой, для изготовления которого наиболее перспективны полупроводниковые структуры. Будем считать, что данным граничным слоем разделены оптические среды с линейными диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Расстояние между резонансными частицами в тонком слое примем достаточно большим во

избежание перекрытия их электронных орбиталей и сохранения возможности традиционного описания взаимодействия атомарных диполей в квантоворазмерной структуре [5]. Пусть на граничный слой нормально к его поверхности падает квазистационарная электромагнитная волна амплитуды E_i с плоским фронтом.

Взаимодействие вещества границы с полем лазерного излучения (несущая частота $\omega = 2\pi c / \lambda$) может быть описано в рамках модифицированной системы уравнений Максвелла – Блоха для квазистационарных комплексных амплитуд проходящей (E) и отраженной волн (E_r) и вероятностных переменных резонансного отклика среды (отнесённых к одному атому) – поляризованности $\rho(t, \omega)$ и разности заселённости $n(t, \omega)$ уровней экситонного перехода:

$$E = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} E_i(t) - \frac{\omega N l}{(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}) c} \times \left[\frac{\mu}{\epsilon_0} \langle \rho \rangle + i 2\pi \Delta \alpha (n_0 - \langle n \rangle) E' \right],$$

$$\dot{\rho} + \frac{1}{T_2} (1 + i \Delta) \rho = \frac{\mu}{\hbar} n E', \quad (1.1)$$

$$\dot{n} + \frac{1}{T_1} (n - n_0) = -\frac{\mu}{2\hbar} (\rho^* E' + \rho E^*),$$

$$E' = \frac{1}{1 - 2\pi \Delta \alpha N (n_0 - \langle n \rangle) / 3} \left(E + i \frac{\mu N}{3\epsilon_0} \langle \rho \rangle \right),$$

$$E_r = E - E_i, \quad \Delta = (\omega - \omega_{12}) T_2.$$

Здесь μ – средний дипольный момент активных частиц, N – их объёмная плотность, n_0 – начальная разность населённостей, T_1 и T_2 – времена продольной и поперечной релаксации (соответствующие времени межзонной релаксации и ширине линии, при однородном уширении обратной T_2), Δ – нормированная отстройка частоты зондирующего поля относительно центра ω_{12} отдельной однородно уширенной резонансной спектральной линии поглощения. Разбросом центров ω_{12} с характерной величиной $1/T_2^*$ вблизи резонансной частоты ω_0 определяется результирующий неоднородно уширенный контур линии поглощения. Уравнения связи полей в (1.1) подобны приведённым, например, в [6] и записаны в приближении особо тонкого слоя с использованием условий, которые выполняются для полей E , E_r и E_i на границе раздела сред (принято, что толщина слоя l значительно меньше длины волны λ). Введением в уравнения связи переменных поляризованности ρ обеспечен учёт нелинейной (связанной с сверхизлучением ансамбля активных частиц, образующих его среду) составляющей отклика вещества граничного слоя. Угловые скобки в обозначении материальных переменных означают усреднение по частоте в пределах диапазона, обусловленного

неоднородным уширением. Выражение для поляризованности ρ содержит составляющую, которой обычно учитывается квазирезонансный компонент поляризуемости, существенный при наличии переходов, близких к резонансному, возбуждаемых внешним полем частоты ω . При этом оказывается значимым параметр $\Delta \alpha$ – разность поляризуемостей в основном и возбуждённом состоянии атома. Так как рассматриваются плотные резонансные среды, система (1.1) модифицирована с учетом влияния локальных полей, создаваемых дипольными атомами – в формулу модуля напряженности светового поля $E'(t)$, действующего на атомы пленки, введена поправка Лоренца, которая рассчитана в приближении среднего поля и определяется только динамической резонансной составляющей.

Отличительной особенностью отклика особо тонкого слоя на воздействие резонансного излучения, обычно рассматриваемой на основе подобных модельных представлений, является оптическая бистабильность. Условия её проявления определяют, решая стационарную задачу, когда изменение интенсивности излучения, зондирующего граничный слой, за время релаксации двухуровневой системы пренебрежимо мало, и поэтому интенсивность можно считать постоянной во времени. Это означает, что при данном значении амплитуды внешнего поля $E_i(t) = E_0$ устанавливается равновесное состояние слоя, характеризующее определенными значениями материальных переменных. Интенсивности падающего (Y) и прошедшего (X) излучения удобно нормировать по мощности поля, при которой достигается насыщение поглощения:

$$Y = \mu^2 T_1 T_2 E_0^2 / \hbar^2,$$

$$X = \mu^2 T_1 T_2 |E_s|^2 / \hbar^2,$$

где E_s – равновесная амплитуда вошедшего в слой поля. В рамках использованных представлений, то есть в стационарном приближении, из системы (1.1) выразим связь интенсивностей вошедшего в слой излучения X и действующего в пленке поля X' (при учете локальной поправки) с интенсивностью Y :

$$\frac{4\eta Y}{(1 + \eta)^2} = X' \left[1 + \kappa_0 \left(\frac{K}{1 + \eta} - \gamma F \right) \right]^2 + \kappa_0^2 X' \left(\frac{F}{1 + \eta} + \gamma \right)^2,$$

$$X = \left[(1 - \kappa_0 \gamma F)^2 + (\kappa_0 \gamma K)^2 \right] X', \quad (1.2)$$

$$\kappa_0 = \frac{\mu^2 \omega_0 N l}{\epsilon_0 c \hbar} T_2, \quad K = \int \frac{g (\omega'_{12} - \omega_0)}{1 + \Delta^2 + X'} d\omega'_{12},$$

$$F = \int \frac{\Delta - \beta X'}{1 + \Delta^2 + X'} g (\omega'_{12} - \omega_0) d\omega'_{12}.$$

Содержащие гауссову функцию $g(\omega_0 - \omega'_{12})$ интегральные компоненты K и F в соотношениях

(1.2) описывают неоднородно уширенную линию поглощения с центром ω_0 как результат непрерывного суммирования набора перекрывающихся частотных распределений, характеризующихся однородно уширенными линиями с центрами ω'_{12} ; $\beta = 2\pi\Delta\alpha\varepsilon_0\hbar/\mu^2T_2$ – параметр резонансной нелинейной рефракции; $\gamma = c/3\omega_0(1+\eta)l$ – нормировочный коэффициент, содержащийся в локальной лоренцевской поправке; κ_0 – показатель поглощения в отсутствие насыщения, $\eta = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ – относительный показатель преломления.

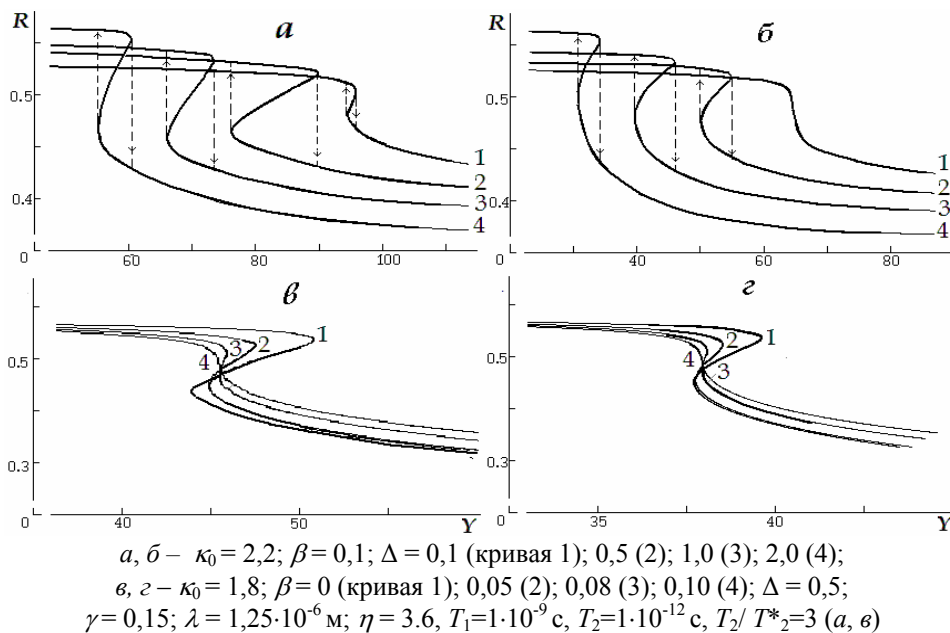
Первое из соотношений (1.2) можно рассматривать как уравнение, описывающее нелинейные свойства оптической среды слоя в приближении среднего поля при условии, что ширина линии поглощения и значение резонансной частоты поглощения зависят от интенсивности действующего на резонансные частицы (эффективного) поля. В уравнении содержится дисперсионная составляющая, которой, наряду со смещением центра линии поглощения вследствие влияния квазирезонансной поляризуемости и ближних полей диполей, обусловлен эффект фазовой модуляции, заключающийся в «затягивании» периферийных частот к центру линии. Вследствие этого при насыщении рассматриваемый тонкий слой вблизи резонансной частоты может просветляться в большей мере [7]. Выполняя расчёт величины X непосредственно по формулам (1.2), с учётом связи прошедшего и эффективного полей можно построить теоретический аналог нелинейной характеристики пропускания активной плёнки – тонкого слоя из полупроводника, используемого в лазерной физике.

2 Гистерезис при нелинейном отражении

Пользуясь соотношениями (1.2), можно выразить коэффициент пропускания слоя $X(Y)$, а также его эффективный коэффициент отражения $R(Y)$ как функции интенсивности. В частности, получим:

$$R = \frac{[r + \kappa_0(K - r\gamma F)]^2 + \kappa_0^2 \left[\frac{F}{\eta + 1} + r\gamma K \right]^2}{\left[1 + \kappa_0 \left(\frac{K}{\eta + 1} - \gamma F \right) \right]^2 + \kappa_0^2 \left[\frac{F}{\eta + 1} + \gamma K \right]^2}, \quad (2.1)$$

где $r = (\eta - 1)/(\eta + 1)$ – френелевский амплитудный коэффициент отражения. Характерные особенности указанных зависимостей удобно изучать, проводя параметрический расчёт по формулам (1.2), (2.1), полагая одну из переменных величин (X) параметром, линейно растущим при увеличении интенсивности. Приведенные на рисунке 2.1 результаты вычислений получены с использованием таких значений модельных коэффициентов, которые соответствовали диапазону значений параметров квантоворазмерных структур в системах *InAs/(Al)GaAs*, в основном, указанному в [1], [2]. Анализируя зависимости, изображенные на рисунке 2.1, видим, что значения резонансного коэффициента отражения больше значений френелевских коэффициентов отражения, однако по мере насыщения поглощения в слое их значения уменьшаются, приближаясь именно к значению френелевского коэффициента отражения r^2 .



На фрагментах а, б пунктирными стрелками указаны направления гистерезисных скачков

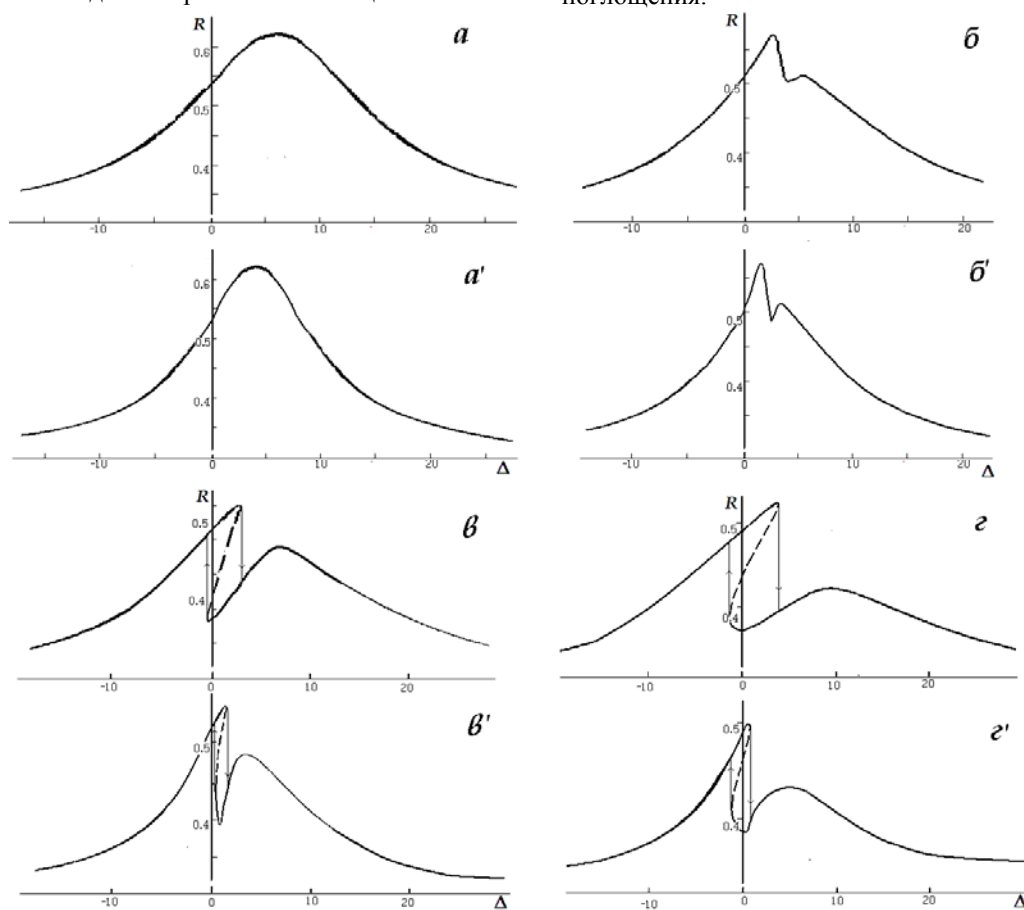
Рисунок 2.1 – Зависимость резонансного отражения от нормированной интенсивности поля падающего излучения

Изменения фазового соотношения поля и отклика среды слоя вызваны, в основном, двумя рассматриваемыми в нашей модели факторами – поляризующим влиянием ближнего поля атомных диполей и автомодуляционным смещением центра линии в условиях квазирезонансной поляризуемости. В определенной области значений Y , в которой оба фазовых вклада сравнимы по величине, нелинейной характеристике отражения $R(Y)$ свойственна бистабильность, если значение показателя поглощения выше порогового значения ($\kappa_0 \sim 1,5$). При выполнении этого условия циклическое изменение интенсивности внешнего сигнала сопровождается проявлением гистерезиса в стационарном отклике структуры. Расстояние между точками, которыми на кривых $R(Y)$ ограничена область возможных гистерезисных изменений отражения, зависит от величины частотной отстройки (рисунок 2.1, *a, б*) и параметра нелинейной рефракции β (рисунок 2.1, *в, г*). Если уширение неоднородно (рисунок 2.1, *a, в*), гистерезисные явления при отражении должны наблюдаться при большей мощности

внешнего сигнала, так как насыщение поглощения реализуется при большей мощности [7], чем при однородном уширении (этому варианту соответствуют фрагменты *б, г* на рисунке 2.1). В условиях неоднородного уширения зависимость размеров петли гистерезиса от величины отстройки и параметра β проявляется сильнее.

3 Бистабильность резонансных кривых поглощения

Первое из соотношений (1.2) можно рассматривать как алгебраическое уравнение относительно X' . Определяя X' на основе его решения и рассчитывая R по формуле (2.1), при фиксированных значениях Y и последовательно увеличивающихся значениях отстройки Δ , можно построить дисперсионную кривую $R(\Delta, Y)$. Тем самым определяется зависимость коэффициента отражения от частоты при условии, что в шкале частот спектральная ширина сигнала с однородной интенсивностью Y значительно превышает спектральную ширину линии резонансного поглощения.



$$Y = 40 (a, a'); 54 (б, б'); 58 (в, в'); 64 (г, г');$$

$$\kappa_0 = 2,4; \beta = 0,05; \gamma = 0,14; \eta = 3,6; T_1 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ с}, T_2 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ с}, T_2/T_1^* = 3 (a - г)$$

Фрагменты, отмеченные штрихом, соответствуют условиям однородного уширения; на фрагментах *в, г* указаны направления гистерезисных скачков

Рисунок 3.1 – Дисперсионная зависимость коэффициента отражения

На рисунке 3.1 иллюстрировано изменение формы дисперсионных кривых отражения по мере приближения к состоянию насыщения поглощения в тонком слое. При сравнительно невысоком уровне пропускания (нелинейность резонансного поглощения, приводящая к просветлению слоя, проявляется слабо) кривые практически симметричны относительно вертикальной линии, проходящей через смещённый из-за фазовых эффектов максимум функции $R(\Delta)$ (рисунок 3.1, a, a'). При увеличении интенсивности поглощаемого излучения до значений, при которых начинает сказываться влияние фазовой автомодуляции, на частоте, соответствующей центру линии, насыщение поглощения достигается быстрее – за счёт спектральных составляющих из периферийных участков линии, уровень отражения в центре снижается, и на кривой $R(\Delta)$ образуется «провал». По мере увеличения интенсивности действующего излучения сначала увеличивается асимметричность кривой $R(\Delta)$ относительно вертикальной указанной линии (рисунок 3.1, b, b'), затем характер деформации кривых изменяется – фрагмент линии, соответствующий резонансной области частот, наклоняется, и зависимость $R(\Delta)$ становится неоднозначной (рисунок 3.1, v, v', z, z'). Таким образом, в зависимости коэффициента отражения от величины частотной отстройки при определённом значении интенсивности действующего излучения в тонком слое плотной резонансной среды должна проявляться бистабильность.

Реальным проявлением этого свойства может быть резкое изменение коэффициента отражения при изменении частоты зондирующего поля в области резонансного поглощения. В условиях нестационарного взаимодействия следствия этого явления могут быть значимы для динамики фазовомодулированных сигналов, формируемых или усиливаемых в оптических или лазерных системах, в структуре которых имеются тонкие активные слои. На фрагментах v, z рисунка 3.1 заметно, что точки поворота бистабильных кривых на шкале частот удалены друг от друга на большее расстояние, если уширение неоднородно. Как правило, в этом случае большим оказывается и изменение коэффициента отражения. Естественно заключить, что неоднородно уширенная линия резонансного поглощения предпочтительна для наблюдения бистабильности.

Заключение

Физические условия существования гистерезиса при нелинейном отражении излучения реализуются, когда оказывается действенным

ряд факторов, определяющих нелинейный отклик системы на внешнее воздействие и характеризующих, в общем случае, различными временами релаксации.

Гистерезис может рассматриваться как особый случай нелинейного резонанса, возникающего при наличии обратной связи, когда эффекты, обусловленные различными значимыми факторами, могут ослаблять или усиливать друг друга. В диапазоне значений параметров, в котором возможна взаимная компенсация обусловленных ими эффектов, на зависимости $R(\Delta)$ проявляется бистабильность. Участки бистабильности имеются как на нелинейной зависимости, так и на дисперсионной (при условии насыщения поглощения) и локализованы в области деформированного (наклонённого относительно вертикальной оси) резонанса.

Выявление условий резонансного отражения света планарными квантово-размерными структурами и проявляющейся при этом безрезонаторной бистабильности важно для разработчиков элементов пассивных устройств управления когерентным излучением – нелинейных отражателей, активных покрытий и безынерционных частотных фильтров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гетероструктуры с квантовыми точками: получение, свойства, лазеры* / Ж.И. Алфёров [и др.] // ФТП.– 1998. – Т. 32, № 4. – С. 385–410.
2. *Panzarini, G. Self-induced transparency in semiconductor quantum dots* / G. Panzarini, U. Hohenester, E. Molinari // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 65, № 16. – P. 165322-1–165322-6.
3. *Khomchenko, A.V. Waveguide spectroscopy of thin films* / A.V. Khomchenko // NY: Academic Press, 2005. – 220 p.
4. *Гадомский, О.Н. Эхо – спектроскопия поверхности* / О.Н. Гадомский, Р.А. Власов // Мн. : Наука і тэхніка, 1990. – 216 с.
5. *Каплан, А.Е. Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, «магические» числа и оптическая бистабильность* / А.Е. Каплан, С.Н. Волков // УФН.– 2009.– Т. 179, № 5.– С. 539–547.
6. *Захаров, С.М. Нелинейная резонансная оптика тонких плёнок* / С.М. Захаров // ЖЭТФ.– 2002. – Т. 118, № 6. – С. 2234–2247.
7. *Глазунова, Е.В. Спектры пропускания слоя активных атомов при неоднородном уширении* / Е.В. Глазунова, В.А. Юревич // Журнал прикладной спектроскопии. – 2005. – Т. 72, вып.2. – С. 271–273.

Поступила в редакцию 12.12.11.

УДК 539.1.078

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ РЕАКЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ ОБЪЕДИНЁННЫЕ ПУЧКИ

Р.Д. Томас, Х.Т. Шмидт, Г. Андлер, М. Бьоркхаге, М. Блум, Л. Брэнхольм,
Э. Бэкстрём, Х. Дэнаред, С. Даш, Н. Хааг, П. Холден, Ф. Хеллберг, А.И.С. Хольм,
Х.А.Б. Юханссон, А. Чельберг, Г. Челлерсьё, М. Ларссон, С. Леонтен, Л. Лильбию,
П. Лёфгрэн, Б. Мальм, С. Маннервик, М. Масуда, Д. Мисра, А. Орбэн, А. Пэль,
П. Рэйнхед, К.-Г. Ренсфелт, С. Розен, Ч. Шмидт, Ф. Сеитз, А. Симонссон,
Я. Веймер, Х. Зеттерген, Х. Седерквист

Физический факультет, Стокгольмский университет, SE-106 91 Стокгольм, Швеция

MERGED-BEAMS TOOLS FOR THE STUDY OF ULTRA-COLD REACTIONS

R.D. Thomas, H.T. Schmidt, G. Andler, M. Björkhage, M. Blom, L. Brännholm,
E. Bäckström, H. Danared, S. Das, N. Haag, P. Halldén, F. Hellberg, A.I.S. Holm,
H.A.B. Johansson, A. Källberg, G. Källersjö, M. Larsson, S. Leontein, L. Liljeby,
P. Löfgren, B. Malm, S. Mannervik, M. Masuda, D. Misra, A. Orbán, A. Paál,
P. Reinhed, K.-G. Rensfelt, S. Rosén, K. Schmidt, F. Seitz, A. Simonsson,
J. Weimer, H. Zettergren, H. Cederquist

Department of Physics, Stockholm University, SE-106 91 Stockholm, Sweden

В статье кратко описывается новая установка для сохранения ионов, которая в настоящее время строится в Стокгольмском университете, Швеция. Эта установка использует только электростатические фокусирующие и отклоняющие элементы и позволяет сохранять ионные пучки противоположных зарядов, находящиеся в экстремально высоком вакууме и при криогенных условиях, в отдельных «кольцах» и затем объединять их на общем прямом участке. Этот аппарат для Экспериментов на Двойном Электростатическом Ионном Кольце (Double ElectroStatic Ion Ring ExpEriment (DESIREE)) позволяет изучать взаимодействие между катионами и анионами при низких и точно определённых энергиях в системе центра масс. Статья завершается обсуждением примера такого потенциально возможного исследования. Полный технический обзор этой установки недавно был опубликован [1].

Ключевые слова: кольцевой накопитель, катионы, анионы, реакции в объединённых пучках, криогенные температуры, реакции взаимной нейтрализации.

Here we will briefly describe a new ion storage device currently under construction at Stockholm University, Sweden. This device uses purely electrostatic focussing and deflection elements and allows ion beams of opposite charge to be confined under extreme high vacuum and cryogenic conditions in separate “rings” and then merged over a common straight section. This Double ElectroStatic Ion Ring ExpEriment (DESIREE) apparatus allows studies of interactions between cations and anions at low and well-defined centre-of-mass energies, and we will finish the paper by discussing an example of such potential research. A complete technical review of this facility has been recently published [1].

Keywords: Storage ring, cations, anions, merged beams reactions, cryogenic temperatures, mutual neutralisation reactions.

Introduction

One driving force for initial development of ion storage rings was taken from high-energy particle physics. In recent decades these devices have also proven to be successful in addressing the needs of the atomic and molecular physics communities into low-energy processes. Many such devices are modeled after LEAR [2] at CERN, in which magnetic elements such as dipole, quadrupole and higher multipole magnets are used to define and control the ion orbits in the device, and examples of such devices are CRYRING [3] (Stockholm, Sweden),

ASTRID [4] (Aarhus, Denmark), and TSR [5] (Heidelberg, Germany).

Electrostatic elements are rarely used in these devices: when they are used it is primarily for electrostatic septa for the injection/extraction of ions. This aspect is relevant when it comes to comparing devices based on electrostatic storage as opposed to magnetic storage. The use of electrostatic elements clearly removes the problems associated with the effects such as remanent fields and hysteresis in the magnets and the requirements for water cooling. Magnets are also expensive, big and heavy, while with electrostatic elements a compact and less

© R.D. Thomas, H.T. Schmidt, G. Andler, M. Björkhage, M. Blom, L. Brännholm, E. Bäckström, H. Danared, S. Das, N. Haag, P. Halldén, F. Hellberg, A.I.S. Holm, H.A.B. Johansson, A. Källberg, G. Källersjö, M. Larsson, S. Leontein, L. Liljeby, P. Löfgren, B. Malm, S. Mannervik, M. Masuda, D. Misra, A. Orbán, A. Paál, P. Reinhed, K.-G. Rensfelt, S. Rosén, K. Schmidt, F. Seitz, A. Simonsson, J. Weimer, H. Zettergren, H. Cederquist, 2012

expensive solution can be realized. The fact that all elements are electrostatic means that, for an injector on a given potential, the mass and charge of the injected ions can be changed without need to change the settings of the ion-optical elements. Another advantage is that an electrostatic device can store heavy ions in low charge states, an issue which is often a problem in magnetic rings where the maximum mass of the stored ions is limited by the bending power of the magnets, and this plays an important role in the experimental uncertainties [6]. Finally, from a purely scientific perspective, the lack of magnetic fields also plays a role in studies fundamental physics since such fields can give rise to mixing and transitions between quantum states in the ions being stored in the device.

These advantages were realised through the pioneering work of Møller in Aarhus, Denmark, with the construction of the purely electrostatic storage ring ELISA [7]. The DESIREE facility adds a unique twist to this storage-ring design: it consists of two separate storage rings with a common section in which, for example, the interaction between oppositely charged ions can be studied in a merged beams configuration [1]. The unique position of the DESIREE facility is further highlighted through its design. Instead of the usual approach, in which the two rings would be mounted in separate beam pipes, the ion optics for the whole device is fully open and the

whole “storage volume” is enclosed in a double-walled vacuum vessel. This has many advantages if one takes into account experimental perspective: it is easier to create extreme high vacuum conditions, leading to longer storage times; and since all the ion-optical elements are mounted on a common base-plate, which then also serves as the floor for the inner vacuum chamber, everything thermally shrinks together during cooling, allowing the inner vessel to be cryogenically cooled to approximately 10 Kelvin through the use of cryogenerators without significantly affecting the environment. Figure 0.1 shows a schematic overview of the DESIREE facility.

1 The DESIREE facility

The DESIREE facility consists of two high-voltage ion source platforms, one at 100 kV and the other at 25 kV, which service the two storage rings and the common straight merging section that are located in the common vacuum vessel. The main DESIREE vessel consists of a double-walled chamber, i. e., two separate vacuum vessels with the one placed inside the other and separated with a thermal screen. The outer box is constructed entirely of steel plates which are welded together, and has external dimensions of $4.7\text{ m} \times 2.5\text{ m} \times 0.7\text{ m}$. For mainly thermal-conduction reasons the inner chamber is constructed from plates of an aluminium alloy which are welded together.

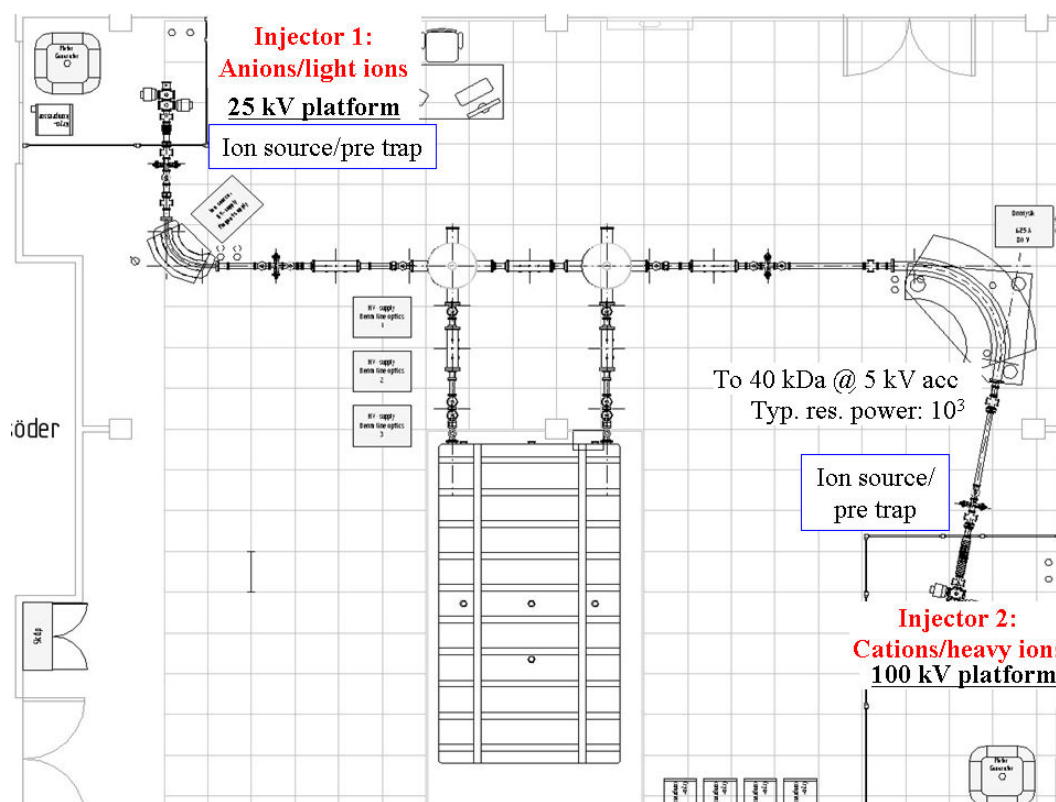


Figure 0.1 – Overview of the DESIREE facility: the two ion source platforms, injection beam-lines, and the main vacuum chamber

The particular alloy used in the final construction was chosen because it can be machined, and both its thermal properties are known, and its heat conductivity is sufficiently good, over the whole temperature range from 400 K down to a few Kelvins. The physical dimensions of the inner chamber are $4.4 \text{ m} \times 2.4 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$. All ion-optical elements and detectors are carefully mounted directly on the bottom of this chamber. Access to all components for their mounting is through the top of the chamber via a removable lid. The lid and the bottom plate, together with nearly all of the ports into the inner chamber, such as pump-ports, feedthroughs etc., are made vacuum-tight with AstraSeal gaskets. Separating the two vessels is a thermal screen which, for its excellent thermal conductivity, is constructed from copper sheets and 30 layers of Mylar super-insulation, which are placed directly on the outside of the copper screen.

During cryogenic operation, the inner chamber will be cooled with four cryogenerators (Sumitomo RDK-415D) where the first stage of each cryogenerator is connected to the thermal screen and the second stage to the bottom of the inner chamber. The total heat load on the thermal screen and the inner vessel is estimated to be 60 W and 3 W, respectively. If this low heat load can be realized the final temperature of the inner vessel and the rings should be about 5 K. At cryogenic temperatures the inner vessel will be pumped by the cold walls of the chamber. The main contribution to the background pressure will be H_2 , which will be reduced by Ti sublimation pumps. After the initial baking at $\sim 400 \text{ K}$ of the aluminium vessel, a pressure of 1×10^{-10} mbar is expected to be reached at room temperature. The outer chamber, whose main purpose is to thermally insulate the inner vessel, will be pumped with turbo pumps. All feedthroughs and pump-ports

located on the inner chamber are sealed with a combination of Helicoflex and Astraseal gaskets while those through the outer chamber are sealed with standard Viton gaskets.

Figure 1.1 shows a rough scheme of the ion-optical layout of the inner chamber: the heart of the DESIREE facility:

Each ring is $\sim 8.8 \text{ m}$ in circumference and has two 160° cylindrical deflectors and four 10° parallel-plate horizontal deflectors, where the two 10° deflectors on both ends of the merging section (MR) are common to the both rings. Only ions with opposite charge can be stored if both rings are operated at the same time though either ring can be operated independently with ions of any charge. R2 has a somewhat different layout compared to R1, and can store ions with different energy [and charge] compared to R1. Hence the bending angle will differ from 10° in the two common deflectors. To compensate, and to make the ion beams collinear in the merging region, additional deflector plates are added to the second ring.

In addition to the “traditional” filament and cold-cathode ion sources which have been used to create the singly charged atomic and molecular ions studied in molecular storage rings such as CRYRING [6], the platforms have been designed to accommodate a suite of different ion sources ranging from an expansion source for producing rotationally cold molecular ions, an electrospray source for creating biomolecules and large molecular cluster ions, and a sputter source for generating negative ions [6]. Each of these ion sources is available, having been either purchased or constructed in-house, and are currently undergoing testing on a dedicated ion-source experimental platform – though this is beyond the scope of these proceedings.

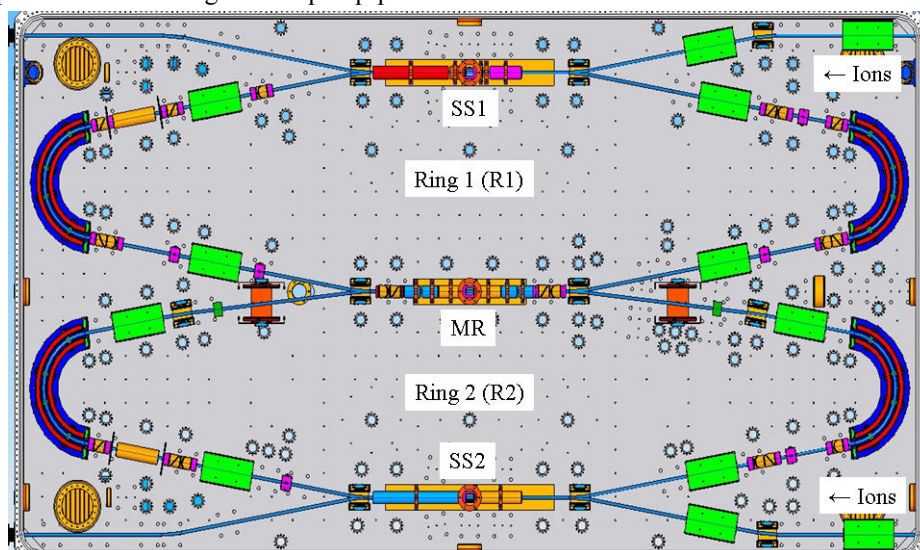


Figure 1.1 – A rough scheme of the heart of the DESIREE facility showing: the two rings, the two straight sections in each ring (SS1, SS2) and the common straight section – the merging section MR

2 The test system

It became quickly clear during the initial development of the project that in order to meet the technical challenge of designing a complex system like DESIREE a smaller test and training system needed to be constructed. This chamber was built as a cryostat, with an inner and outer chamber and a copper screen in between, and represented an almost exact copy of the design for DESIREE. One of the important tasks for this chamber was to test the cryogenic properties of the different kinds of detectors that were planned for use in DESIREE. One such family of detectors are microchannel-plate based detectors (MCPs), in which these plates are coupled to different types of anode depending on the purpose of the detector. Both resistive- and phosphor screen-anodes have been tested, and the results from the MCP-phosphor screen anode have been reported [8], and showed that these detectors successfully operate under cryogenic conditions.

One of the most significant scientific highlights to come out of these investigations arose from the placing of an electrostatic ion trap in the test chamber, i.e. to mimic the ion-storage properties of DESIREE. Here, a linear ion-trap, ConeTrap [9], was placed inside the inner vacuum chamber. A pulse of ions was injected into the trap, which was then closed, and the lifetime of the ions in the trap studied as function of their storage time. The ions chosen for this particular test were the metastable helium anion, $\text{He}^-(1s2s2p\ ^4P_{5/2})$, with the motivation that results from earlier lifetime measurements were limited in the accuracy of systematic effects due to the photo-detachment of the loosely bound $2p$ electron by 300 K blackbody radiation photons emitted from the surrounding vacuum chamber. In the course of this experiment in a suitable cryogenic environment, in practice less than 80 K, this effect is eliminated. The results from these tests gave the most accurate measurement for the lifetime of these ions [10], as well as providing valuable information on the ion-beam storage lifetimes as a function of the residual gas pressure in the chamber [11].

3 Proposed experiments

DESIREE has been planned and constructed so that any given experiment can be undertaken in either of the two rings or a single experiment can utilise both rings. Examples of such experiments are discussed in the recently published technical paper [1]. The most unique feature is the merging region, and so we briefly discuss an example of the type of experiment which now can be undertaken at DESIREE and which otherwise have proven extremely difficult or impossible. The possibility to perform merged-beams experiments with positive and negative ions that are stored and cooled to low temperatures by temperature equilibrium with the surroundings is the most clearly unique feature of DESIREE.

Here we consider the mutual neutralisation between small molecular cations and anions. The formation of polyatomic ions in the interstellar medium is considered to be through chemistry involving ionized species. The degree of ionization in the interstellar clouds is determined by a balance between ionization through cosmic and stellar radiation and neutralisation processes. In the gas phase two such neutralisation processes exist: Electron-cation dissociative recombination (DR) and cation/anion mutual neutralisation (MN). One of the primary motivations for the studies at CRYRING of DR for astrophysically abundant cations (ref [6] and references therein) has been the role of this process in interstellar chemistry in regions where the negative charge is primarily in the form of free electrons. One of the most recent observations in the interstellar medium has been that of long carbon-chain anions [12]. If present in the amounts required to explain the observed absorption, it is possible that in these regions negative charge is more often in the form of anions than free electrons. In such an environment the role of MN in the ion chemistry is more important than DR and the possibility offered by DESIREE to study these processes highly relevant to this field. For the simplest such MN reaction, $\text{H}^+ + \text{H}^-$, high-level fully quantum calculations have recently been published [13] and allow benchmarking for the planned experimental studies, and suggestions for how this reaction could be measured in DESIREE are presented in the technical review [1].

4 Current Status

Both the inner and outer vacuum chambers, as well as the copper screen, have been machined and fully assembled, as have all of the electrostatic/dynamic elements that will be located inside the main vacuum vessel. The 25-kV platform has also been constructed and assembled, as have all parts for both the injection beam lines and their associated ion optics. The next stages include transfer the inner chamber into the copper shield, attachment of the super-insulation layers, and completion of the leak testing of the whole chamber, followed by testing both the cryogenic cooling and electrical testing of the whole inner and outer chamber, with all elements in place.

REFERENCES

1. *The double electrostatic ion ring experiment: A unique cryogenic electrostatic storage ring for merged ion-beams studies* / R. Thomas [et al.] // Rev. Sci. Instrum. – 2011. – Vol. 82. – P. 065112-1–065112-18.
2. *Walcher, T.* Experiments at the Low-Energy Antiproton Ring (LEAR) / T. Walcher // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. – 1988. – Vol. 38. – P. 67–95.
3. *CRYRING – a synchrotron, cooler and storage ring* / K. Abrahamsson [et al.] // Nucl. Instrum.

Methods Phys. Res. – 1993. – Sect. B 79. – P. 269–272.

4. Møller, S.P. in Conference Record of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference, edited by L. Lizama and J. Chew (New York, IEEE, 1991). – 1991. – P. 2811–2813.

5. One year of operation at the Heidelberg TSR / D. Krämer [et al.] // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. – 1989. – A 287. – P. 268–272.

6. Thomas, R.D. When electrons meet molecular ions and what happens next: Dissociative recombination from interstellar molecular clouds to internal combustion engines / R.D. Thomas // Mass. Spec. Rev. – 2008. – Vol. 27. – P. 485–530.

7. Møller, S.P. ELISA, an electrostatic storage ring for atomic physics / S.P. Møller // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. – 1997. – A 394. – P. 281–286.

8. Operating a triple stack microchannel plate-phosphor assembly for single particle counting in the 12–300 K temperature range / S. Rosén [et al.] //

Rev. Sci. Instrum. – 2007. – Vol. 78. – P. 113301-1 – 113301-5.

9. Conetrap: A compact electrostatic ion trap / H. T. Schmidt [et al.] // Nucl. Instr. Methods Phys. Res. – 2001. – B 173. – P. 523–527.

10. Precision Lifetime Measurements of He⁻ in a Cryogenic Electrostatic Ion-Beam Trap / P. Reinhard [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 103. – P. 213002-1 – 213002-4.

11. Cryogenic keV ion-beam storage in Cone-Trap – A tool for ion-temperature control / P. Reinhard [et al.] // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. – 2010. – A 621. – P. 83–90.

12. Laboratory and astronomical identification of the negative molecular ion C₆H⁻ / M.C. McCarthy [et al.] // Ap. J. – 2006. – Vol. 652. – L141–L144.

13. Mutual neutralization in low-energy H⁺ + H⁻ collisions: A quantum ab initio study / M. Stenrup [et al.] // Phys. Rev. – 2009. – A 79. – P. 012713-1 – 012713-12.

Поступила в редакцию 22.02.12.

УДК 542.42: 546.792

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАНИЯ ОКСИДОВ УРАНА ИЗ УРАНАТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СДВОЕННЫХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Д.С. Умрейко¹, А.А. Зажогин², А.И. Комяк², С.Д. Умрейко¹

¹НИИ ПФП им. А.Н. Севченко, Минск

²Белорусский государственный университет, Минск

STUDY OF THE PROCESSES OF URANIUM OXIDES FORMATION FROM URANATE COMPOUNDS UNDER THE EFFECT OF DOUBLE LASER PULSES

D.S. Umreiko¹, A.A. Zazhugin², A.I. Komyak², S.D. Umreiko¹

¹A.N. Sevchenko Institute of Applied Physics Problems, Minsk

²Belarus State University, Minsk

В статье представлены результаты спектроскопического исследования приповерхностной лазерной плазмы, образуемой при воздействии последовательных сдвоенных мощных лазерных импульсов на поверхность пористого тела, содержащего микроколичества полиуранатов натрия и аммония. Выявлено, что интенсивность линий урана в эмиссионных спектрах, пропорциональная количеству элемента в плазме, существенно зависит от физико-химических свойств соединений урана. Установлено, что интенсивность линий увеличивается в несколько раз при практически такой же кратности увеличения энтальпии образования соединений. Обсуждены механизмы влияния параметров лазера и процессов в плазме и объеме пористого тела на формирование определенного ионного, атомного и молекулярного состава плазмы и оксидов урана в пористом теле.

Ключевые слова: атомный спектральный анализ, оксиды урана, полиуранаты, интенсивность линий, пористые тела, энтальпия образования.

Spectroscopic analysis of the near-surface laser plasma emerging close to a surface of the cellular body which is affected by serial double powerful laser pulses and contains micro quantities of sodium and ammonium polyuranates has been conducted. As a result, it is shown that the intensity of uranium lines in spectra is proportional to the component amount in plasma and it depends essentially on the physicochemical properties of uranium compounds. It is revealed that the line intensity increases several times with practically the same gain of the enthalpy of compounds formation. Requirements of the influence of laser parameters and processes in plasma and cellular body volume over the formation of certain ionic, atomic and molecular structure of plasma and uranium oxides in the cellular body have been defined.

Keywords: atomic spectral analysis, uranium oxides, polyuranates, line intensity, cellular body, enthalpy of formation.

Введение

Катализаторы и каталитические технологии являются структурно-образующей основой современной химической, нефтехимической и многих других отраслей промышленности. Эффективностью катализаторов определяется уровень энергетических, материальных и капитальных затрат, экология производства, конкурентоспособность продукции. Известно, что внедрение лучших по характеристикам катализаторов на порядок, а то и два эффективнее других технических усовершенствований. Так, в работе [1] выполнены исследования ураноксидных катализаторов, нанесенных на различные материалы, их физико-химических каталитических свойств в реакциях окисления метана, бутана и хлорбензола. Показано, что с повышением температуры термообработки до 1000 °С активный компонент катализатора оксид урана, нанесенный на гранулированный Al_2O_3 , переходит в нанодисперсное состояние, что приводит к значительному увеличению его каталитической активности в реакциях окисления.

Многолетний мировой опыт изготовления таблетированного топлива для атомных станций выработал основные технологические приемы получения порошков оксидов урана. Однако, как отмечается в работе [2], производство порошков и керамических таблеток не становится проще, чем в годы его разработки. Связано это не только с тем, что свойства порошков очень сильно зависят от конструктивных особенностей используемого оборудования, но и с условиями конкурентной борьбы за рынки, требующие усовершенствования и удешевления технологий.

Как показали многочисленные исследования последних лет, установление закономерностей объединения атомов и молекул в нано-размерные кластеры, комплексы и агрегаты и умение контролировать условия такого объединения позволят сформировать большое количество новых нано- и микроструктур с заданными свойствами. Наряду с развитием фундаментальных научных теорий данного направления, огромное значение имеет разработка практических способов производства наноразмерных материалов.

Разработка методов получения таких материалов требует знания процессов, происходящих внутри отдельных наноразмерных кластеров при изменении внешних (как физических, так химических) условий.

Большое практическое значение для практики имеют физические способы получения порошков, при которых образование частиц происходит в неравновесных условиях, что приводит к формированию ультрадисперсной структуры твердой фазы [3]. Одним из перспективных способов получения нанопорошков оксидов урана может быть способ, основанный на процессе воздействия импульсов лазерного излучения на пористые тела, содержащие различные соединения уранатов (аммония, натрия). В зависимости от состава соединений в данном способе возможно получение нанопорошков как чистых оксидов урана, так и нанопорошков композиционного состава.

Целью данной работы являлось изучение влияния параметров лазерного излучения и процессов в плазме и объеме пористого тела, содержащего различные соединения полиуранатов аммония и натрия, на формирование определенного ионного, атомного и молекулярного состава плазмы и оксидов урана в пористом теле.

1 Методика эксперимента

Уранаты различного состава были получены непосредственно на поверхности и в объеме пористых тел. Для получения осадков уранатов использовались водные растворы уранилнитрата $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ и гидроокиси (NH_4OH , $NaOH$), которые наносились последовательно на фильтр. Относительные концентрации гидроокисей и уранилнитрата были выбраны в отношении 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0, при которых, в соответствии с данными из работ [4], [5], образуются следующие комплексы урана: $UO_2(OH)NO_3$, $UO_2(NO_3)_2 \cdot 3UO_2(OH)_2$; $UO_2(OH)_2$; $Na_2U_7O_{22}$; $Na_2U_4O_{13}$; $Na_2U_2O_7$ и Na_2UO_4 и аналогичные – для NH_4OH . Заметим, что количество образующихся форм соединений намного больше, чем здесь указано. Так, например, для уранатов цезия в этом ряду насчитывается более 10 форм соединений – $UO_2(OH)NO_3$, $UO_2(OH)_2$, Cs_2UO_4 , $Cs_2U_2O_7$, $Cs_2U_4O_{12}$, $Cs_2U_4O_{13}$, $Cs_2U_5O_{16}$, $Cs_2U_5O_{17}$, $Cs_2U_6O_{18}$, $Cs_2U_7O_{22}$, $Cs_2U_9O_{27}$, $Cs_2U_{15}O_{46}$ [6]. В связи с этим для более подробного изучения влияния гидроокиси натрия на образования комплексов уранатов натрия были дополнительно использованы растворы, в которых относительные концентрации гидроокисей и уранилнитрата были равны 0,5; 4,5; 5,0; 5,5.

Система «уран – кислород» представляет собой одну из самых сложных двойных систем. Три оксида урана – диоксид UO_2 , закись-окись U_3O_8 и триоксид UO_3 известны уже более ста лет. Исследования последних 40 лет показали,

что возможно существование монооксида UO , а также таких соединений урана с кислородом, как U_4O_9 , U_3O_7 , U_2O_5 , эти соединения, как и три ранее известных оксида, не являются стехиометрическими, и в действительности существует разнообразие нестехиометрических форм.

При изучении системы «уран–кислород» обнаружено несколько гомогенных областей с переменным составом урана и кислорода. Одна из таких областей лежит, например, между составами UO_2 – $UO_{2,25}$. Существование стабильной фазы монооксида урана не доказано. В системе U–O особый интерес представляет и область $UO_{2,25}$ – $UO_{2,67}$, где достоверно идентифицирован ряд фаз, часть из которых являются весьма устойчивыми – гептаоксиды триурана. Несмотря на многочисленные исследования метастабильных фаз, их структура на сегодняшний день достаточно точно не установлена [7].

Для проведения исследований использовался лазерный многоканальный атомно-эмиссионный спектрометр LSS-1. В качестве источника абляции и возбуждения приповерхностной плазмы в спектрометре используется двухимпульсный неодимовый лазер с регулируемой энергией и интервалом между импульсами (модель LS2131 DM). Лазер обладает широкими возможностями как для регулировки энергии импульсов (от 10 до 80 мДж), так и временного интервала между импульсами (от 0 до 100 мкс). Средняя длительность импульса ≈ 15 нс.

Динамика развития процессов абляции и приповерхностного плазмообразования исследовалась методом атомно-эмиссионной многоканальной спектроскопии при воздействии сдвоенных лазерных импульсов в атмосфере воздуха на поверхность пористых образцов с растворами солей уранатов различной концентрации. Энергии импульсов излучения составляли 63 и 46 мДж (соответственно первый и второй импульсы), временной интервал между сдвоенными импульсами – от 0 до 20 мкс.

В качестве модельных систем для закрепления сухого остатка растворов солей металлов нами выбраны беззольные фильтры (синяя лента) – диаметр пор в них $1 \div 2$ нм. Для проведения экспериментов кусочек фильтра размером 8×8 мм² наклеивался на поверхность держателя образцов, а затем, как описано выше, на поверхность фильтра последовательно наносилось по 20 мкл растворов солей уранилнитрата с концентрацией урана 1% и гидроокисей натрия и аммония различной концентрации.

Синтез оксидов проводился при облучении мишеней сфокусированным лазерным излучением (диаметр пятна облучения ≈ 100 мкм, средняя плотность мощности облучения 10^9 Вт/см²). Цвет пятна после облучения мишени серовато-черный. Образующий продукт по цвету ближе всего к диоксиду урана UO_2 и U_3O_8 . При

использовании растворов меньших концентраций наблюдалась менее контрастная окраска пятен.

Для оценки общей динамики развития процессов лазерной абляции и приповерхностного плазмообразования нами проведены предварительные исследования образцов с растворами солей уранатов аммония большой концентрации в атмосфере воздуха при энергии импульсов излучения 30÷67 мДж и различных временных интервалах (0÷14 мкс).

2 Основные результаты и их обсуждение

В качестве примера на рисунке 2.1 приведены результаты исследований зависимости интенсивности ионной линии U II ($\lambda=385,958$ нм) в спектре для отношения концентраций $U:NH_4=1:10$ от величины временного интервала между сдвоенными импульсами от 0 до 14 мкс при различных энергиях лазерных импульсов.

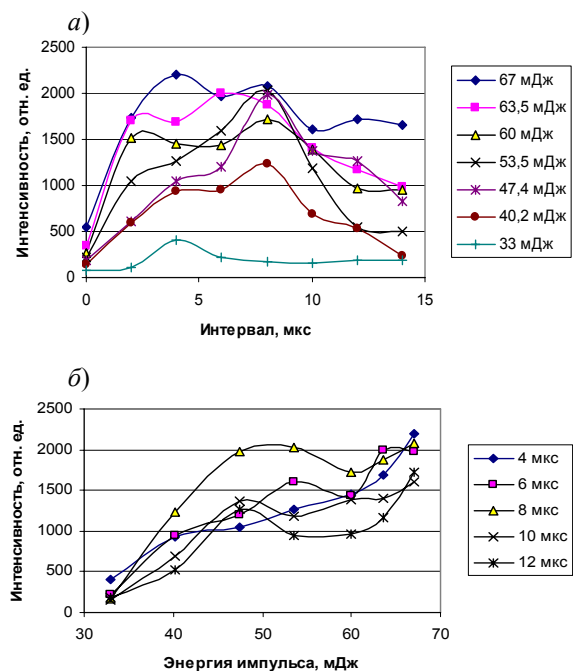


Рисунок 2.1 – Зависимость интенсивности ионной линии U II ($\lambda=385,958$ нм) в спектрах от интервала между лазерными импульсами (a) и от их энергии (б) (a – при значениях энергии импульсов, указанных в рамке; б – при указанных в рамке значениях интервала между последовательными импульсами)

Для более детального исследования влияния физико-химических свойств уранатов натрия и аммония на интенсивность линий нами проведены исследования зависимости интенсивности ионной линии U II ($\lambda=385,958$ нм) в спектрах от интервала между лазерными импульсами при энергии лазерных импульсов 60 мДж для образцов уранатов с вышеуказанными отношениями ионов натрия и аммония к урану.

На рисунке 2.2 а представлена зависимость максимальной интенсивности линии урана в спектрах солей от отношения концентраций NaOH к U. Как видно из приведенного графика, наблюдается определенная закономерность между интенсивностью линии и количеством добавленного гидроксида натрия. Следует отметить, что в зависимости от условий осаждения состав осадков изменяется, поэтому при одном и том же отношении гидроксидов к урану количество форм уранатов может сильно изменяться. Об этом, в частности, свидетельствует форма кривой, полученной по усредненным результатам пяти точек на образце.

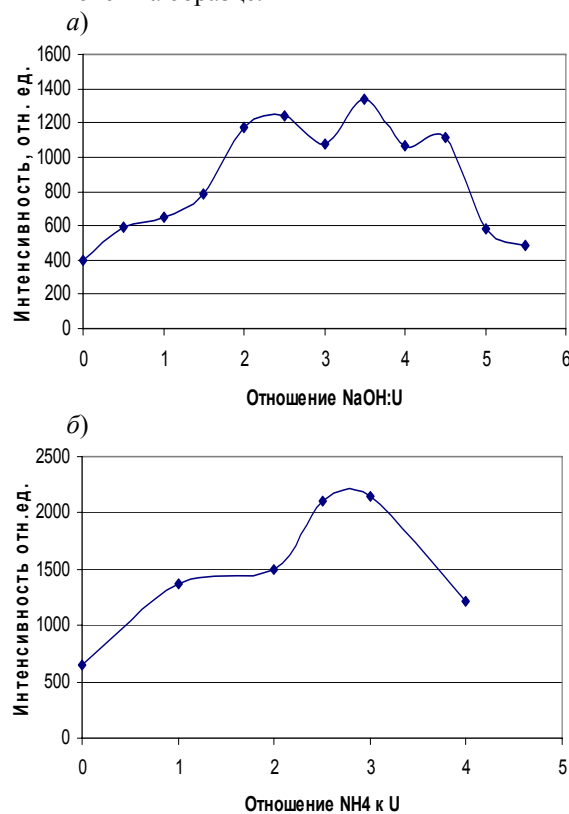


Рисунок 2.2 – Зависимость интенсивности ионной линии U II ($\lambda=385,958$ нм) в спектрах от отношения концентраций гидроокисей к урану: а – NaOH:U; б – $NH_4:U$

Аналогичные закономерности наблюдаются и для соединений уранатов аммония (рисунок 2.2 б).

Сравнивая результаты, представленные на рисунке 2.2, видим, что интенсивность аналитической линии в спектрах для исследованных солей изменяется в соответствии с рядом (в неравенствах указаны значения отношения концентрации гидроокиси натрия или аммония к концентрации урана) $3,5 > 2,5 > 2 > (3; 4; 4,5) > 1 > 0$. Сопоставляя результаты, представленные на рисунках 2 а и 2 б, с данными по энтальпиям образования для ряда родственных соединений уранатов, приведенными в таблице 2.1, видим, что с

увеличением прочности соединений уранатов интенсивность аналитической линии урана в их спектрах увеличивается. При этом интенсивность линии в спектрах наиболее прочных соединений в несколько раз выше, чем в спектрах уранилнитрата, и примерно пропорциональна количественному изменению энтальпии их образования.

Полученные результаты на качественном уровне можно объяснить следующим образом. Вблизи поверхности образца с сухим остатком солей, содержащих в качестве компонентов металлы, пробой факела эрозийных металлических атомарных паров и нанокластеров происходит при небольшом превышении интенсивности лазерного излучения над значением, необходимым для образования факела [12]. При использовании режима сдвоенных импульсов на первичные процессы плазмообразования накладываются процессы нагрева и испарения аэрозолей, нанокластеров, фракталов, образующихся при воздействии на поверхность объекта излучения первого импульса, вторым импульсом излучения и движущихся навстречу второму импульсу. Общая черта всех моделей, описывающих пробой в аэродисперсных средах, – нагрев и испарение аэрозольных частиц, ионизация образовавшихся паров. Большинство авторов рассматривают аэрозольные частицы как фактор, облегчающий повторный пробой за счет развития электронной лавины в продуктах разрушения частиц [13].

Ударные и тепловые волны, образующиеся при пробое пылевой плазмы, воздействуют на поверхность образца в месте облучения, приводя к дополнительному его нагреванию при сжатии. Об этом, в частности, свидетельствуют экспериментальные результаты, полученные при исследованиях пробивки пластинок алюминия: средняя скорость пробивки при задержке второго импульса на 10 мкс достигает величины ≈ 7 мкм/имп [14], что больше чем на порядок превышает значение, полученное при моноимпульсном воздействии [15]. Отсюда следует, что средняя температура мишени в зоне облучения значительно выше, чем при моноимпульсном воздействии. Увеличение температуры приводит к активизации диффузионных процессов. Поэтому даже при небольшом увеличении температуры (на $(100\div 200)^\circ\text{C}$) и времени воздействия легко кипящие элементы и соединения (в нашем случае – вода, аммиак, натрий) легко испаряются с поверхности и с несколько большей глубины,

чем при воздействии только оптического облучения. Так, в работе [16] сообщалось, что аммоний полностью удаляется при нагревании аммонийуранатных соединений при $(350\div 400)^\circ\text{C}$.

Температура плазмы, доходящая до нескольких десятков тысяч градусов, определяет наличие в ней ионов, электронов, радикалов и нейтральных частиц, находящихся в возбужденном состоянии. Наличие таких частиц обуславливает высокие скорости взаимодействия частиц и быстрое протекание реакций ($10^{-5}\div 10^{-8}$) с. Получение ультрадисперсных порошков в газоразрядной плазме характеризуется чрезвычайно высокой скоростью охлаждения реакционной системы, находящейся в высокотемпературном состоянии, – она существенно выше, чем в большинстве процессов химического получения ультрадисперсных порошков. Вследствие этого размер образующихся частиц уменьшается [17]. В объеме пористой среды за счет воздействия излучения и ударных волн также происходит интенсивное образование оксидов урана, так как пары урана горят на воздухе уже при $(150\div 250)^\circ\text{C}$ [18]. Выбирая энергию импульсов и интервал между ними, можно управлять процессами поступления соединений урана как в плазму, так и в объем пористого тела.

Заключение

Таким образом, в результате спектроскопических исследований приповерхностной лазерной плазмы, образующейся вблизи поверхности пористого тела, содержащего в микро- и нанокolicестве соли урана, при воздействии на нее двух последовательных импульсов (интервал между ними $(0\div 20)$ метода) мкс) показали перспективность использования лазерно-химического метода для получения нанокластеров оксидов урана из уранатов как в воздухе, так и в объеме пористого тела. Установлено, что интенсивность линий увеличивается в несколько раз при практически такой же кратности увеличения энтальпии образования соединений. Следовательно, указанные режимы работы перспективны для использования их в целях повышения чувствительности атомно-эмиссионного спектрального анализа урана.

В зависимости от состава исходных соединений использование данного метода даст возможность получения как нанопорошков чистых оксидов урана, так и нанопорошков композиционного состава, используя смешанные соединения.

Таблица 2.1 – Энтальпия образования различных соединений уранатов

| Соединение | $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$ | Rb_2UO_4 | $\text{Na}_2\text{U}_2\text{O}_7$ | $\text{Cs}_2\text{U}_4\text{O}_{12}$ | $\text{Cs}_2\text{U}_7\text{O}_{22}$ | $\text{UO}_2(\text{OH})_2$ |
|---|------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| $-\Delta H_{\text{f}, 298}^0$, кДж/моль | 1377,0 | 1920,6 | 3196,6 | 5570,0 | 9430,0 | 1539,0 |
| Источник информации | [8] | [9] | [10] | [6] | [6] | [11] |

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исследование новых катализаторов на основе оксидов урана* / З.Р. Исмагилов [и др.] // Кинет. Катал. – 2007. – Т. 48. – № 4. – С. 544–553.
2. *Жиганов, А.Н.* Технология диоксида урана для керамического ядерного топлива / А.Н. Жиганов, В.В. Гузеев, Г.Г. Андреев. – Томск : STT. – 2002. – 326 с.
3. *Курина, И.С.* Исследование свойств модифицированного диоксида урана. / И.С. Курина, В.В. Попов, В.Н. Румянцев В.Н. // Атомная энергия. – 2006. – Т.101, № 5. – С. 347–352.
4. *Шевченко, В.Б.* Технология урана / В.Б. Шевченко, Б.Н. Судариков. – М. : Госатомиздат, 1961. – С.250 – 253.
5. *Ипполитова, Е.А.* Исследования в области химии урана / Е.А. Ипполитова, Н.И. Печурова, Е.Н. Грибенник. – М. : Изд-во МГУ, 1961. – С. 96–107.
6. *The Cs-U-O phase diagram and its application to uranium-plutonium oxide fast reactor fuel pins* / D.C. Fee [et el.] // Report ANL-76-126. Illinois, 1977. – 31 p.
7. *Петрунин, В.Ф.* Стабильность ультрадисперсных порошков оксидов урана при герметичном хранении и температурной обработке / В.Ф. Петрунин, А.Ф. Федотов // Научная сессия МИФИ. – 2006. – Т. 9. – С. 198.
8. *Гороновский, И.Т.* Краткий справочник по химии / И.Т. Гороновский, Ю.П. Назаренко, Е.Ф. Некряч. – Киев : Наукова думка, 1987. – С. 300.
9. *Cordfunke, E.H.P.* The Chemical Thermodynamics of Actinide Elements and Compounds, Part 3 / E.H.P. Cordfunke, P.A.G. O'Hare. – International Atomic Energy Agency, Vienna, 1978. – 83 p.
10. *Термохимия диуранатов щелочных металлов* / Е.А. Медина [и др.] // Вестник Нижегородского госуниверситета. – 2007. – № 4. – С. 72–74.
11. *Fanrong, Chen.* The Gibbs free energies and enthalpies of formation of uranium (VI) phases: An empirical method of prediction / Chen Fanrong, R.C. Ewing, S.B. Clark // American Mineralogist. – 1999. – Vol. 84. – P.650–664.
12. *Анисимов, С.И.* Избранные задачи теории лазерной абляции / С.И. Анисимов, Б.С. Лукьянчук // УФН. – 2002. – Т. 172, № 3. – С. 301–333.
13. *Воробьев, В.С.* Плазма, возникающая при взаимодействии лазерного излучения с твердыми мишенями / В.С. Воробьев // УФН. – 1993. – Т. 163, № 12. – С. 51–83.
14. *Фадаиян, А.Р.* Эффекты низкорогового пробоя металлов одиночными и сдвоенными лазерными импульсами / А.Р. Фадаиян, А.П. Зажогин // Вестн. БГУ. Серия. 1. – 2009 – № 2. – С. 12–15.
15. *Биберман, Л.М.* Ионизационная релаксация за сильными ударными волнами в газах / Л.М. Биберман, А.Х. Миацакани, И.Т. Якубов // УФН. – 1970. – Т. 102, № 3. – С. 431–462.
16. *Серебренникова, О.В.* Применение ДТА для изучения свойств осадков полиураната аммония, порошков и таблеток UO_2 , полученных по нано- и штатной технологиям / О.В. Серебренникова, И.С. Курина // Материалы научной школы «Всероссийская научная школа для молодых ученых «Реакторы на быстрых нейтронах» (г. Обнинск, 26 – 30 октября 2009 г.) – Обнинск : ФГУП «ГНЦ РФ-ФЭИ». – С. 148–155.
17. *Смирнов, Б.М.* Кластерная плазма / Б.М. Смирнов // УФН. – 2000. – Т. 170, № 5. – С. 495–534.
18. *Химия актиноидов* ; под ред. Д.Д. Каца, Г.Т. Сиборга, Л. Морсса. – М. : Мир. – Т. 1. – 1991. – 522 с.

Поступила в редакцию 21.12.11.

УДК 539.12

ПРАВИЛО СУММ ГРОССА–ЛЛЕВЕЛЛИНА СМИТА: ВКЛАДЫ ВЫСШИХ ТВИСТОВ

В.Л. Хандрамай, О.П. Соловцова, В.Г. Тепляков

*Международный центр перспективных исследований,
Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель*

GROSS–LLEVELLYN SMITH SUM RULE: HIGHER TWIST TERMS CONTRIBUTION

V.L. Khandramai, O.P. Solovtsova, V.G. Teplyakov

*International Center for Advanced Studies,
P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel*

Выполнен четырёхпетлевой КХД анализ правила сумм Гросса–Ллевеллина Смита. Проведено выделение твиста-4 из экспериментальных данных и проведено сравнение с соответствующими результатами, полученными из анализа правила сумм Бьёркена. Показано, что в пределах погрешности значение коэффициента, соответствующего твисту-4 в правиле сумм Гросса–Ллевеллина Смита отличается от его значения, определяемого на основе правила сумм Бьёркена.

Ключевые слова: *глубоконеупругое лептон-адронное рассеяние, правило сумм Гросса–Ллевеллина Смита, теория возмущений, высшие твисты, квантовая хромодинамика (КХД).*

Four-loop QCD analysis of the Gross–Llewellyn Smith sum rule was performed. The extraction of the twist-4 term from the experimental data and comparison with the corresponding results obtained from the Bjorken sum rules was made. It is shown that within the error the value of the twist-4 term in the Gross–Llewellyn Smith sum rule differs from the corresponding value extracted from the Bjorken sum rule.

Keywords: *deep-inelastic lepton-hadron scattering, Gross–Llewellyn Smith sum rule, perturbative theory, higher twists, quantum chromodynamics (QCD).*

Введение

В пертурбативных разложениях для физических величин в квантовой хромодинамике (КХД) важно знать, по крайней мере, несколько членов ряда, чтобы понять его свойства и оценить теоретическую неопределенность вычисленной величины. Как известно [1], знание лидирующего порядка (LO) и следующего за лидирующим порядком (NLO) ряда теории возмущений (ТВ) недостаточно, так как только на трехпетлевом уровне (N^2LO) фиксируется значение масштабного параметра КХД Λ для данной схемы перенормировки. Кроме того, пертурбативные ряды в КХД являются асимптотическими, поэтому ошибка определяется первым отброшенным (или последним удержанным) членом ряда. Таким образом, знание последующих членов ТВ разложений является важным, поскольку позволяет сделать оценку теоретической неопределенности в выбранной схеме перенормировки.

После недавнего опубликования работы [2], в которой представлены результаты многопетлевых вычислений в КХД, открылась возможность для четырехпетлевого (N^3LO) анализа правил сумм глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния. Такой анализ впервые был

выполнен в работе [3] для поляризованного правила сумм Бьёркена (Bj) [4], [5], т. е. $\Gamma_1^{p,n}$, которое определяется разностью первых моментов спин-зависимых структурных функций протона и нейтрона $g_1^{p,n}$. Располагая экспериментальными данными о $\Gamma_1^{p,n}$, полученными с хорошей точностью в лаборатории им. Т. Джефферсона (JLab), можно исследовать Bj -правило сумм при малых квадратах переданного импульса ($0,05 < Q^2 < 3,0 \text{ ГэВ}^2$) [6]–[12]. При больших значениях Q^2 теоретическое описание хорошо удаётся при использовании рядов ТВ. При малых значениях Q^2 возникают проблемы, обусловленные тем, что при уменьшении Q^2 значение инвариантного заряда α_s возрастает (например, $\alpha_s(Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2) \approx 1/2$), и становится заметным влияние эффектов, связанных с непертурбативной составляющей – вкладом высших твистов (НТ). Кроме того, пертурбативная и непертурбативная компоненты оказываются тесно связаны друг с другом; при этом информация, получаемая о НТ (например, о ведущей непертурбативной $1/Q^2$ -поправке (твист-4)), зависит от используемого порядка в разложении по α_s .

Цель данной работы – выполнить четырёхпетлевой анализ правила сумм Гросса–Ллевеллина Смита (GLS) глубоконеупругого рассеяния нейтрино на нуклоне [13]. Анализ этого правила сумм на трёхпетлевом уровне можно найти, например, в работах [14], [15]. В настоящей работе проведем систематическое исследование непертурбативной поправки $1/Q^2$, извлекаемой из экспериментальных данных для GLS-правила сумм, и выполним сравнение результатов с теми, которые получены при расчетах для Vj-правила сумм. Отметим, что для GLS-правила сумм возможность высокоточного анализа отсутствует из-за недостаточной точности экспериментальных данных и их малочисленности. Поэтому оправдано использование результатов для Vj-правила сумм для предсказаний о Q^2 -эволюции GLS-правила сумм в непертурбативной области (в настоящее время такая информация отсутствует).

1 Правило сумм Гросса–Ллевеллина Смита

Правило сумм Гросса–Ллевеллина Смита определяется интегралом от структурной функции F_3 рассеяния нейтрино/антинейтрино на протоне:

$$I_{\text{GLS}}(Q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 [F_3^{\nu p}(x, Q^2) + F_3^{\bar{\nu} p}(x, Q^2)] dx. \quad (1.1)$$

Так как на партонном уровне значение функции $I_{\text{GLS}}(Q^2)$ равно трём, то выражение для интеграла в правой части выражения (1.1) обычно представляют в виде

$$I_{\text{GLS}}(Q^2) = 3 \left[C_{\text{GLS}}(\alpha_s) - \frac{A}{Q^2} \right], \quad (1.2)$$

где коэффициентная функция $C_{\text{GLS}}(\alpha_s)$ определяет пертурбативную составляющую правила сумм, а величина A – это коэффициент НТ, соответствующий непертурбативной части.

На достигнутом к настоящему времени четырёхпетлевом уровне ТВ-описания разложение для коэффициентной функции имеет вид суммы несинглетной (NS) и синглетной (SI) составляющей [2]:

$$C_{\text{GLS}} = C_{\text{NS}} + C_{\text{SI}}, \quad (1.3)$$

$$C_{\text{NS}} = 1 - \alpha_s + (-0,464 + 0,034 n_f) \alpha_s^2 + (-1,337 + 0,245 n_f - 0,0057 n_f^2) \alpha_s^3 +$$

$$+ (-4,922 + 1,267 n_f - 0,079 n_f^2 + 0,0011 n_f^3) \alpha_s^4, \\ C_{\text{SI}} = 0,013 n_f \alpha_s^3 + \alpha_s^4 n_f (0,0596 - 0,0024 n_f). \quad (1.5)$$

Инвариантный заряд α_s определяется в результате решения уравнения ренормализационной группы:

$$\frac{d\alpha_s(Q^2)}{dL} = \beta(\alpha_s); \quad \beta(\alpha_s) = \sum_{0 \leq k \leq 3} \beta_k \alpha_s^{k+2}, \quad (1.6)$$

где $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ и β_k – известные коэффициенты β -функции [16].

Как отмечено выше, надежная теоретически полученная информация о НТ, содержащихся в правиле сумм GLS, сегодня отсутствует. В то же время для Vj-правила сумм, которое определяется как интеграл от разности поляризованных структурных функций нуклона g_1^p и g_1^n и имеет вид

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) \equiv \int_0^1 [g_1^p(x, Q^2) - g_1^n(x, Q^2)] dx \equiv \frac{g_A}{6} \left[C_{\text{NS}}(\alpha_s) - \frac{B}{Q^2} \right], \quad (1.7)$$

надежные оценочные значения коэффициентов высших твистов получены в работе [3] с использованием высокоточных экспериментальных данных JLab [6]–[12]. Проводя сравнительный анализ этих двух правил сумм, можно установить соотношение между коэффициентами высших твистов A и B . Зная их, в свою очередь, можно предсказать характер Q^2 -зависимости функции I_{GLS} в области $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$.

2 Анализ вкладов высших твистов

На рисунках 2.1 и 2.2 современные экспериментальные данные о GLS- и Vj-правилах сумм представлены совместно с пертурбативными составляющими выражений (1.2) и (1.7), рассчитанными в различных порядках ТВ соответственно. На рисунке 2.1 экспериментальные точки, обозначенные кружками, соответствуют данным из Серпухова [17], направленными вниз треугольниками – данным коллаборации CHARM [18], направленными вверх треугольниками – данным из CCFR [19], а квадраты – CCFR/NuTeV [20]. Изображенные на рисунке 2.2 экспериментальные точки соответствуют данным, взятым из работ [6]–[12], [21], [22].

При построении теоретических кривых мы воспользовались универсальностью масштабного параметра Λ , состоящей в том, что значение Λ , определяемое из информации о различных физических процессах, должно быть одним и тем же. Проводя анализ с учётом универсальности Λ , мы выполняем нормировку по экспериментальному значению $R(M_Z^2) = 1,03904 \pm 0,00087$, (см., например, [16]), которое соответствует значению инвариантного заряда $\alpha_s = 0,1190 \pm 0,0026$ на масштабе M_Z . Соответствующее значение Λ для трёх активных кварков равно $\Lambda = (336 \pm 10) \text{ МэВ}$.

Далее, используя выражение (1.2) и экспериментальные данные из работ [17]–[20], находим значение коэффициента A для твиста-4. При этом низкоэнергетическая граница анализа равна $Q^2 = 1,23 \text{ ГэВ}^2$ и соответствует охвату всех экспериментальных точек и соблюдению критерия

$\chi_{d.f.}^2 < 1$. Аналогичное рассмотрение мы провели и для правила сумм Bj и извлекли значение коэффициента B.

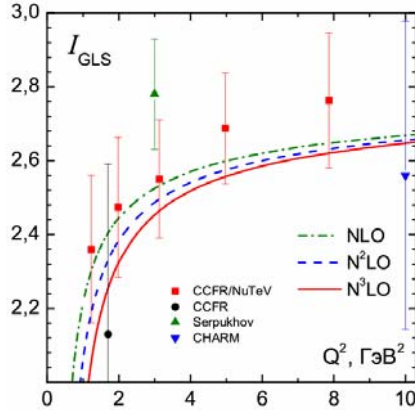


Рисунок 2.1 – Экспериментальные данные по I_{GLS} совместно с кривыми, соответствующими пертурбативной части правила сумм GLS в различных порядках ТВ

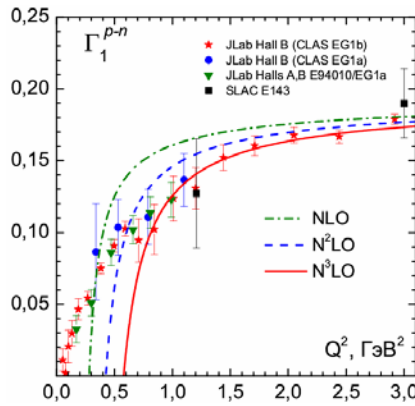


Рисунок 2.2 – Экспериментальные данные по Γ_1^{p-n} совместно с кривыми, соответствующими пертурбативной части правила сумм Bj в различных порядках ТВ

В таблице 2.1 численные значения коэффициента высшего твиста-4 в правилах сумм GLS и Bj приведены совместно со значениями из других работ. Из этой таблицы видно, что полученные нами коэффициенты твиста-4, как и в работе [3] для Bj, с ростом порядка ТВ убывают. При этом невозможно уверенно заключить, что коэффициенты A и B совпадают в пределах их

неопределенности, связанной с фитированием, и погрешностями экспериментального определения. В частности, коэффициент A отрицателен, в двухпетлевом приближении близок к нулю, и продолжает убывать с ростом порядка ТВ; коэффициент B положителен, убывает с ростом порядка исходных пертурбативных разложений, и близок к нулю в четырехпетлевом приближении.

Как это видно в таблице 2.1, полученные нами значения высшего твиста A отличаются знаком от соответствующих значений, содержащихся в других работах. Это связано с выбором нормировки параметра Lambda: нормировка проводилась по значению $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1190 \pm 0,0026$. Как показано в работе [3] для Bj, значения высших твистов, полученные в рамках ТВ, очень чувствительны к масштабному параметру Lambda. При непосредственном определении Lambda на основе информации о глубоконеупругом рассеянии этот параметр, как правило, имеет меньшее значение [15], [29]. Например, найденное в [29] значение Lambda соответствует $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1132 \pm 0,009$. Наши кривые для I_{GLS} проходят ниже экспериментальных точек, что обусловлено большим значением Lambda (рисунок 2.1). Поэтому при фитировании коэффициент высшего твиста оказывается отрицательным, вследствие чего кривые смещаются вверх.

На рисунках 2.3 и 2.4 представлено данное изменение Q^2 -эволюции правил сумм GLS и Bj, I_{GLS} и Γ_1^{p-n} , рассчитанное с учётом твиста-4 в различных порядках ТВ. Сравнивая зависимости, представленные на рисунке 2.1 (вклад твиста-4 отсутствует) и рисунке 2.3, заметим, что с учётом твиста-4 в правиле сумм GLS кривые фитирования в области $Q^2 \geq 1$ ГэВ² практически совпадают. Таким образом, при использовании NLO, N²LO и N³LO аппроксимаций получается одинаковое описание данных. Из этого следует, в частности, что при использовании четырёхпетлевой коэффициентной функции (1.3) описание экспериментальных данных не улучшается – для анализа достаточно двухпетлевого приближения.

Таблица 2.1 – Коэффициенты твиста-4 в правиле сумм Гросса–Ллевеллина Смита и Бьёркена

| Модель и источник информации | | Коэффициенты твиста-4 в правиле сумм | |
|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| | | GLS (A, ГэВ ²) | Bj (B, ГэВ ²) |
| Правила сумм КХД [23] | | 0,098 ± 0,049 | |
| Правила сумм КХД [24], [25] | | | 0,063 ± 0,031 |
| Правила сумм КХД [26] | | 0,158 ± 0,078 | 0,223 ± 0,118 |
| Правила сумм КХД [27] | | | 0,025 ± 0,012 |
| Инстантонная модель [28] | | 0,078 ± 0,039 | 0,087 ± 0,043 |
| Настоящая работа | NLO -порядок ТВ | -0,065 ± 0,044 | 0,115 ± 0,025 |
| | N ² LO -порядок ТВ | -0,114 ± 0,044 | 0,050 ± 0,026 |
| | N ³ LO -порядок ТВ | -0,164 ± 0,045 | -0,017 ± 0,029 |

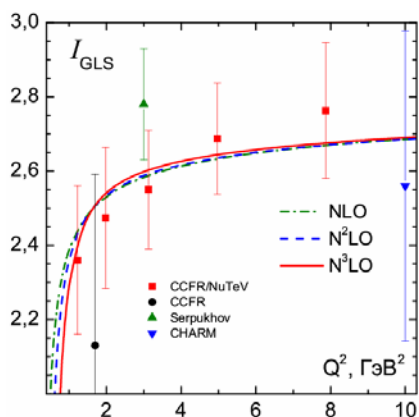


Рисунок 2.3 – Кривые однопараметрического фитирования данных по I_{GLS} в различных (NLO , N^2LO , N^3LO) порядках ТВ. Кривые фитирования практически совпадают во всех порядках

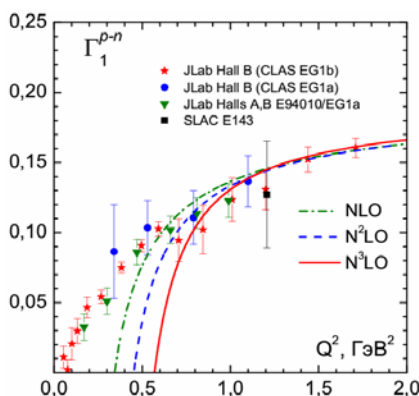


Рисунок 2.4 – Кривые однопараметрического фитирования данных по Γ_1^{p-n} в различных (NLO , N^2LO , N^3LO) порядках ТВ. С ростом числа петель в выражении (1.5) кривые фитирования «синхронно» смещаются в область более низких Q^2 по сравнению с кривыми на рисунке 2.2

Сравнивая кривые, представленные на рисунках 2.2 и 2.4, видим, что, добавляя твист-4, удаётся продвинуться в низкоэнергетической области до $Q^2 \sim 0,5 \div 0,7 \text{ ГэВ}^2$.

Однако и с применением этого правила сумм с учётом вклада от четвёртой петли в выражении (1.5) не удаётся улучшить описание экспериментальных данных по сравнению с описанием в двухпетлевом приближении. Аналогичный вывод ранее был сделан в работе [3], в которой можно найти подробное исследование этого вопроса.

Таким образом, анализируя в четырёхпетлевом приближении правила сумм Гросса–Ллевеллина Смита и Бьёркена вследствие проявления асимптотической структуры ТВ ряда и нефизических сингулярностей пертурбативного инвариантного заряда в низкоэнергетической

области КХД, не удаётся исследовать эти правила сумм в непertурбативной области при $Q^2 < 0,5 \div 0,7 \text{ ГэВ}^2$. Как показано в работе [3], применяя вместо стандартной ТВ аналитическую теорию возмущений, свободную от нефизических сингулярностей, можно описывать экспериментальные JLab-данные вплоть до значений $Q \sim \Lambda$.

Заключение

В КХД для того, чтобы понять поведение рядов и оценить надёжность извлечённой информации при сравнении с экспериментальными данными в пертурбативных разложениях физических величин, важно знать, по крайней мере, несколько членов ряда.

В данной работе ТВ-анализ для правила сумм Гросса–Ллевеллина Смита выполнен в четырёхпетлевом приближении, возможность которого появилась с выходом работы [2]. Показано, что в исследуемой области КХД для ТВ ряда вкладами высших порядков (более второго) можно пренебречь (ряд асимптотический), так как при их учёте точность описания экспериментальных данных не увеличивается. Выявлено, что при учёте высших порядков в правиле сумм GLS практически не изменяется Q^2 -зависимость величины I_{GLS} , что обусловлено соответствующим изменением коэффициента твиста-4 (коэффициент отрицателен и растёт по модулю с ростом порядка ТВ).

В результате сравнительного анализа правил сумм GLS и Bj показано, что при описании величины Γ_1^{p-n} с учётом твиста-4 удаётся глубже продвинуться в низкоэнергетическую область, чего не наблюдается при описании правила сумм GLS. Коэффициенты высшего твиста-4 в обоих правилах сумм убывают с ростом порядка ТВ. Значение коэффициента HT в правиле сумм GLS становится отрицательным уже в двухпетлевом приближении; в правиле сумм Bj коэффициент твиста-4 близок к нулю только в четырёхпетлевом приближении. Таким образом, нет оснований заключить, что коэффициенты A и B для сравниваемых правил сумм совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов, Н.Н. Квантованные поля / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – 3-е изд., доп. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
2. Baikov, P.A. Adler function, DIS sum rules and Crewther relations / P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 2010. – Vol. 205–206. – P. 237–241.
3. Four-loop QCD analysis of the Bjorken sum rule vs data / V.L. Khandramai [et al.] // Phys. Lett. B. – 2012. – Vol. 706. – P. 340–344.

4. *Bjorken, J.D.* Applications of the chiral $U(6) \times (6)$ algebra of current densities / J.D. Bjorken // *Phys. Rev.* – 1966. – Vol. 148 – P. 1467–1478.
5. *Bjorken, J.D.* Inelastic Scattering of Polarized Leptons from Polarized Nucleons / J.D. Bjorken // *Phys. Rev. D.* – 1970. – Vol. 1. – P. 1376–1379.
6. *The Q^2 evolution of the generalized Gerasimov-Drell-Hearn integral for the neutron using a He^3 target* / M. Amarian [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 89. – P. 242301.
7. *Measurement of the proton spin structure function $g_1(x, Q^2)$ for Q^2 from 0.15 GeV² to 1.6 GeV² with CLAS* / R. Fatemi [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol. 91. – P. 222002.
8. *Q^2 evolution of the neutron spin structure moments using a He^3 target* / M. Amarian [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 92. – P. 022301.
9. *Experimental determination of the evolution of the Bjorken integral at low Q^2* / A. Deur [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 93. – P. 212001.
10. *Measurement of the x - and Q^2 -dependence of the asymmetry A_1 on the nucleon* / K.V. Dharmawardane [et al.] // *Phys. Lett. B.* – 2006. – Vol. 641. – P. 11–17.
11. *Quark-hadron duality in spin structure functions g_1^p and g_1^n* / P.E. Bosted [et al.] // *Phys. Rev. C.* – 2007. – Vol. 75. – P. 035203.
12. *Moments of the spin structure functions g_1^p and g_1^n for $0.05 < Q^2 < 3.0$ GeV²* / Y. Prok [et al.] // *Phys. Lett. B.* – Vol. 672. – P. 12–16.
13. *Gross, D.J.* High-energy neutrino-nucleon scattering, current algebra and partons / D.J. Gross, C.H. Llewellyn Smith // *Nucl. Phys. B.* – 1969. – Vol. 14. – P. 337–347.
14. *Next to next-to-leading order QCD analysis of the revised CCFR data for xF_3 structure function and the higher twist contributions* / A.L. Kataev [et al.] // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 417. – P. 374–384.
15. *Tokarev, M.V.* NNLO QCD analysis of CCFR data on xF_3 structure function and Gross-Llewellyn Smith sum rule with higher twist and nuclear corrections / M.V. Tokarev, A.V. Sidorov // *Nuovo Cim. A.* – 1997. – Vol. 110. – P. 1401–1409.
16. *Review of particle physics* / K. Nakamura [et al.] [Particle Data Group] // *J. Phys. G* – 2010. – Vol. 37. – P. 075021.
17. *Measurement of xF_3 , F_2 structure functions and Gross-Llewellyn-Smith sum rule with IHEP-JINR neutrino detector* / L.S. Barabash [et al.] [IHEP-JINR Neutrino Detector Collab.] // Preprint JINR, Dubna – 1996. – E2-96-308.
18. *Experimental study of the nucleon structure functions and of the gluon distribution from charged current neutrino and anti-neutrinos interactions* / F. Bergsma [et al.] [CHARM Collab.] // *Phys. Lett. B.* – 1983. – Vol. 123 – P. 269–275.
19. *A measurement of the Gross-Llewellyn-Smith sum rule from the CCFR xF_3 structure function* / W.C. Leung [et al.] [CCFR Collab.] // *Phys. Lett. B.* – 1993. – Vol. 317. – P. 655–659.
20. *A Measurement of $\alpha_s(Q^2)$ from the Gross-Llewellyn Smith sum rule* / J.H. Kim [et al.] [CCFR/NuTeV Collab.] // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81. – P. 3595–3598.
21. *Precision determination of the neutron spin structure function g_1^n* / K. Abe [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol. 79. – P. 26–30.
22. *Measurements of the Q^2 -dependence of the proton and neutron spin structure functions g_1^p and g_1^n* / P.L. Anthony [et al.] // *Phys. Lett. B.* – 2000. – Vol. 493. – P. 19–28.
23. *Braun, V.M.* Power corrections to Bjorken and Gross-Llewellyn Smith sum rules in QCD / V.M. Braun, A.V. Kolesnichenko // *Nucl. Phys. B.* – 1987. – Vol. 283. – P. 723.
24. *Balitsky, I.I.* Power corrections $1/Q^2$ to parton sum rules for deep inelastic scattering from polarized targets / I.I. Balitsky, V.M. Braun, A.V. Kolesnichenko // *Phys. Lett. B.* – 1990. – Vol. 242. – P. 245–250.
25. *Balitsky, I.I.* Erratum: ERRATUM TO: Power corrections $1/Q^2$ to parton sum rules for deep inelastic scattering from polarized targets / I.I. Balitsky, V.M. Braun, A.V. Kolesnichenko // *Phys. Lett. B.* – 1993. – Vol. 318. – P. 648–650.
26. *Ross, G.G.* Improved QCD sum rule estimates of the higher twist contributions to polarized and unpolarized nucleon structure functions / G.G. Ross, R.G. Roberts // *Phys. Lett. B.* – 1994. – Vol. 322. – P. 425–430.
27. *QCD sum rule calculation of twist - three contributions to polarized nucleon structure functions* / E. Stein [et al.] // *Phys. Lett. B.* – 1995. – Vol. 343. – P. 369–376.
28. *Balla, J.* Nucleon matrix elements of higher twist operators from the instanton vacuum / J. Balla, M.V. Polyakov, C. Weiss // *Nucl. Phys. B.* – 1998. – Vol. 510. – P. 327–364.
29. *Blümlein, J.* QCD Analysis of polarized deep inelastic scattering data / J. Blümlein, H. Böttcher // *Nucl. Phys. B.* – 2010. – Vol. 841. – P. 205–230.

Авторы выражают благодарность академику РАН Д.В. Ширкову за поддержку, интерес к этой работе и ценные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке, оказанной в виде грантов РФФИ №11-01-00182 и БРФФИ №Ф10Д-001.

Поступила в редакцию 20.10.11.

УДК 577.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С БИОПОЛЕМ ЧЕЛОВЕКА

Е.А. Цветкова, В.А. Гольдаде

Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

INTERACTION BETWEEN ELECTROMAGNETIC FIELDS AND HUMAN BIOFIELD

Е.А. Tsvetkova, V.A. Goldade

V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of NASB, Gomel

В статье содержится обзор работ о влиянии внешних электромагнитных полей на организм человека. Возможные механизмы такого влияния объясняются на основе представлений о взаимодействии внешних электромагнитных полей с биополем человека. Внимание акцентировано на характеристиках полей, создаваемых телом человека. В частности, рассмотрены: биомагнетизм органов человека и влияние на него слабых низкочастотных и постоянных магнитных полей; биоэлектрический эффект, основным признаком которого является генерация живым органом квазипостоянного электрического поля, влияющего на биохимические и структурные процессы в клетках. Приведены примеры моделирования биофизических свойств живых тканей аналогами из синтетических полимерных материалов, применяемых в изделиях медицинской техники.

Ключевые слова: электромагнитное поле, биополе, биомагнетизм, биоэлектрический эффект, моделирование биополя.

The paper contains a review of papers on the effect of external electromagnetic fields upon the human organism. Possible mechanisms of such influence are explained on the basis of interaction between external electromagnetic field and human biofield. The attention is accented on the characteristics of the fields which are created by a human body. In particular, the following characteristics are considered: biomagnetism of man's organs and the effect of exposure to the weak low-frequency and permanent magnetic fields, as well as the bioelectric phenomenon whose main feature is generation of the quasi-constant electric field that influences both on biochemical and structural processes in the cells. Some examples of simulating biophysical properties of the living tissues using synthetic polymer materials employed in medical appliances are presented.

Keywords: electromagnetic field, biofield, biomagnetism, bioelectric effect, biofield modeling.

Введение

Практическое использование электромагнитных полей (ЭМП) в медицине основано на знании механизмов их взаимодействия с биополем живых организмов. Для области спектра ЭМП, где энергия кванта $h\nu > kT$ (kT – кинетическая энергия молекул при температурах, свойственных живым организмам), т.е. от инфракрасного диапазона до гамма-излучения, все виды биологической активности живых организмов, основанные на тепловых эффектах, обнаружены и достаточно хорошо изучены [1]–[3]. Иначе обстоит дело в отношении исследования действия на организм электромагнитных полей в области, где $h\nu < kT$, – от СВЧ до инфранизких частот вплоть до «нулевой частоты», соответствующей постоянным электрическим и магнитным полям.

Долгое время считалось, что ЭМП этого диапазона частот не оказывают какого-либо влияния на живые организмы [4], [5]. Такое заключение было сделано на основе простых физических соображений: так как в этой области $h\nu \ll kT$, то поглощения электромагнитных волн живыми тканями, связанного с преобразованием электромагнитной энергии в тепловую, можно ожидать при напряженностях электрического

поля более 100 В/м и напряженностях магнитного поля более $8 \cdot 10^3$ кА/м. Эти значения на несколько порядков превышают характерные значения напряженностей электрического и магнитного поля биосферы [6]. Поэтому физики скептически относились к появлявшимся время от времени сообщениям биологов и медиков о реакциях животных и человека на ЭМП, значительно более слабые, чем требовалось для проявления теплового эффекта.

Вопреки этим категорическим заключениям продолжались попытки обнаружить биологическое действие низкочастотных и постоянных электрических и магнитных полей при напряженностях, значительно более низких, чем теоретически оцененные. Так, было установлено, что переменные магнитные поля (МП) частотой 0,01 Гц с амплитудами порядка 10 нТл подавляют размножение некоторых видов бактерий [7], оказывают существенное воздействие на систему крови животных [8].

Относительно механизма столь высокой чувствительности биообъектов к ЭМП пока нет единого мнения, и существуют различные гипотетические модели. Например, в работе [9] предложена модель, автор которой считает, что

комбинированное с постоянным геомагнитным полем переменное низкочастотное (порядка единиц герц) МП влияет на скорость биохимических реакций, в которых участвуют ионы кальция. Эта гипотеза критикуется в работе [10], где в результате анализа уравнений теплового движения иона в макромолекуле показано, что вероятность влияния переменного МП с энергией квантов порядка 10^{-13} эВ на фоне теплового движения фононов с энергией порядка 10^{-2} эВ мала.

Учитывая большие значения диэлектрической проницаемости биотканей, можно было бы ожидать в них существенного усиления внутренних электрических полей при наложении внешнего ЭМП. Такая гипотеза рассматривается в работе [11], однако в ней не учтено влияние электропроводности, которая у биообъектов также значительна. Легко показать, что максвелловское время релаксации электропроводящей среды организма $\tau = \epsilon\epsilon_0/\sigma$ (где σ – удельная электропроводность) составляет величину порядка 10^{-6} с, поэтому внешние низкочастотные электрические поля в нём должны быть экранированы [12].

В настоящей работе предложена концепция влияния на организм человека внешних электромагнитных полей, основанная на их взаимодействии с биополем живого организма, которое имеет электромагнитную природу и обусловлено биомагнетизмом и биоэлектретным состоянием живых тканей.

1 Биомагнетизм

В электромагнитном излучении живых организмов, ограниченном со стороны коротких волн оптическим излучением, а со стороны длинных волн – радиоволнами длиной около 60 см, выделяют четыре диапазона:

- а) постоянное и низкочастотное электрическое и магнитное поле;
- б) радиоволны сверхвысоких частот;
- в) инфракрасное излучение;
- г) оптическое излучение.

В таблице 1.1 [16] представлены параметры, характерные для ЭМП, создаваемых телом человека, указаны типы приёмников, чувствительных к излучению разного вида, и способы его регистрации.

Низкочастотные поля возникают главным образом при протекании физиологических процессов, обуславливающих электрическую активность органов: кишечника (характерное время процессов ~1 мин), сердца (~1 с), мозга (~0,1 с), нервных волокон (~10 мс). Спектр излучений, соответствующих этим процессам, ограничен сверху значениями частоты, не превосходящими ~1 кГц.

Жизнедеятельность организма сопровождается протеканием в тканях слабых электрических токов – биотоков, возникающих вследствие электрической активности клеток. Биотоки порождают так называемое биомагнитное поле с индукцией $10^{-14} \div 10^{-11}$ Тл, существующее и за пределами организма (рисунок 1.1). Измерение параметров и характеристик биомагнитного поля и получение информации о генерирующих его биотоках составляет предмет возникшего в 1970-х годах научного направления, названного биомагнетизмом, в отличие от магнитобиологии, изучающей воздействие внешних МП на живые организмы [14]. На рисунке 1.1 изображена кривая чувствительности СКВИД, порог чувствительности к полю у которого на два порядка выше, чем у лучших несверхпроводящих магнетометров [13], [14].

Таблица 1.1 – Характеристики электромагнитных полей, источником которых является тело человека

| Вид ЭМП | Электрическое | Магнитное | Электромагнитное излучение СВЧ диапазона | Инфракрасное (ИК) излучение | Видимое излучение |
|--------------------|---------------------------------|---------------|--|-----------------------------------|---------------------------------|
| Частота, Гц | 0 – 10^3 | | $\sim (3 \div 30) \cdot 10^9$ | $10^{12} \div 3,75 \cdot 10^{14}$ | $(3,75 \div 7,5) \cdot 10^{14}$ |
| Длина волны | $> 10^5$ м | $> 10^5$ м | (10 ÷ 1) см | 3 мм ÷ 0,8 мкм | (0,8 ÷ 0,4) мкм |
| Датчики | Электроды | СКВИД* | Антенны-аппликаторы | Тепловизоры | ФЭУ** |
| Способ регистрации | Контактный и бесконтактный | Бесконтактный | Контактный | Дистанционный | Дистанционный |
| Источники полей | Электрически заряженные частицы | Биотоки | Ткани и органы | | Поверхность тела |

*СКВИД (от англ. Superconducting Quantum Interference Device) – сверхпроводящий квантовый магнетометр

**ФЭУ – фотоэлектронный умножитель

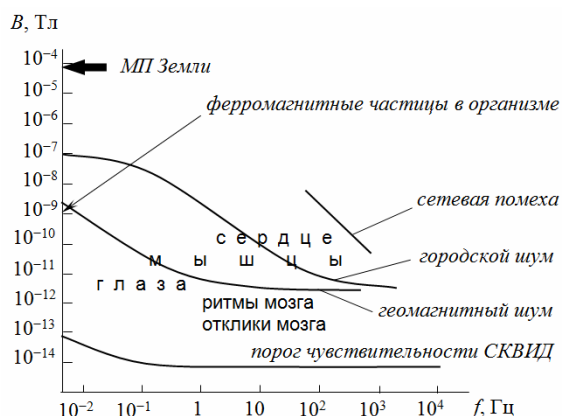


Рисунок 1.1 – Место биоманнитных сигналов человека на шкале магнитных полей [13]. Указаны характерные уровни помех и частотные диапазоны сигналов

Ткани организма практически диамагнитны и в этом отношении подобны воде. Однако в организме имеются парамагнитные вещества, молекулы и ионы. МП тела человека исключительно слабое – его индукция в $10^7 \div 10^9$ раз слабее МП Земли (таблица 1.2), его флуктуаций (геомагнитный шум) и полей технических устройств (рисунок 1.1) [16], но в некоторых случаях магнитную индукцию полей человека удастся надежно измерять и применять практически. Так, например, возможность регистрации временной зависимости индукции МП сердца (биотоков сердца) использована при создании магнитокардиографии как метода диагностики.

Таблица 1.2 – Индукция (B) магнитного поля органов человека и окружающей среды

| Объект | B , Тл |
|----------------------|------------------------|
| Сердце | 10^{-11} |
| Мозг | 10^{-13} |
| Поле Земли | $5 \cdot 10^{-5}$ |
| Магнит ЯМР томографа | $10^{-8} \div 10^{-9}$ |

Основные медицинские методы, основанные на измерении МП тела человека, – магнитокардиография (МКГ) и магнитоэнцефалография (МЭГ). Достоинством МКГ по сравнению с традиционной электрокардиографией (ЭКГ) является возможность определения местоположения источников поля с погрешностью порядка 1 см.

Кроме параметров внешнего поля, результат взаимодействия ЭМП с живыми тканями определяется их электрическими и магнитными свойствами. Параметрами при описании этих свойств являются удельная электропроводность, зависящая от концентрации и подвижности свободных носителей зарядов в биологических тканях, а также диэлектрическая и магнитная проницаемость. Учитывая их, можно рассчитать силовые

характеристики ЭМП в тканях и количественно оценить изменения, происходящие при воздействии ЭМП на ткани.

В МП происходит ориентация и диффузия молекул или ионов; на ионы, перемещающиеся вместе с биологической жидкостью, действует сила Лоренца; при распространении электрического импульса возбуждения имеет место эффект Холла и др. [4].

В настоящее время физический механизм влияния МП на биологические объекты до конца не установлен. Так как биологические системы являются слабомагнитными объектами, объяснить влияние на них используемых с лечебными целями слабых (5–50 мТл) МП, учитывая только магнитную восприимчивость, весьма затруднительно, и механизм воздействия МП на живые организмы является предметом дискуссий [17]–[19]. Информация о вероятных механизмах первичного (физико-химического) действия постоянных и переменных МП на биологические объекты представлена и систематизирована в работах [20]–[22] следующим образом:

1. Как известно, ориентационные и концентрационные эффекты, характерные для диа- и парамагнитных молекул, входящих в состав биологических объектов, незначительны, так как энергия их магнитного поля меньше энергии теплового движения. Однако в состав тканей входят макромолекулы, являющиеся крупными анизотропными диамагнитными частицами. Энергия магнитного поля такой макромолекулы может превышать энергию её теплового движения, и поэтому МП даже терапевтических доз могут индуцировать изменение ориентации и концентрационные изменения биологически активных агентов (ферментов, нуклеиновых кислот, сложных протеидов и др.). Это должно проявиться в изменении кинетики биохимических реакций и скорости биофизических процессов, в которых рассматриваемые соединения участвуют. К настоящему времени этот механизм подтвержден *in vitro* при изучении химических реакций. В МП могут ориентироваться не только биологически активные макромолекулы, но и надмолекулярные и клеточные структуры. Одним из примеров такой ориентации является выстраивание цепочек эритроцитов при действии МП [23].

2. МП влияет на химические реакции, протекающие в биологических объектах в соответствии со свободнорадикальным механизмом. Свободный радикал содержит, по крайней мере, один неспаренный валентный электрон, обладает спиновым моментом и поэтому может взаимодействовать с внешним МП. Вследствие этого изменяются скорости биохимических реакций, протекающих с участием кислорода, а также скорости большинства ферментативных реакций, определяющих наиболее важные для жизнедеятельности организма процессы.

3. В механизме первичного действия МП большое значение имеет ориентационная перестройка жидких кристаллов (ЖК), составляющих основу многих внутриклеточных структур. ЖК обладают анизотропией магнитных свойств, которая обусловлена наличием в их структуре бензольных колец. Имеются результаты теоретических расчетов и косвенные экспериментальные данные, на основании которых сделан вывод о том, что ЖК могут быть магнитно-анизотропными структурами клеток крови и синовиальной жидкости (СЖ), которые ориентируются в МП [24], [25]. Деформации жидкокристаллических мембран могут повлиять на их проницаемость, играющую большое значение в регуляции биохимических процессов и выполнении мембранами их биологических функций.

4. Биологическое действие МП можно объяснить и с учётом их влияния на некоторые физико-химические характеристики воды (поверхностное натяжение, вязкость, электропроводность, диэлектрическую проницаемость, оптическую активность и др.). Внутриклеточная (связанная, или структурированная) вода как своеобразный сегнетоэлектрик обладает особыми электрическими свойствами. Под влиянием внешних МП увеличивается устойчивость квазикристаллической структуры воды, и – как следствие – должен изменяться процесс обмена веществ в клетке. Изменение свойств и структуры воды при действии МП может влиять на физико-химические процессы в организме, например, на выполнение специфических функций молекулами белков, нуклеиновых кислот, полисахаридов и других макромолекул, образующих с водой единую систему.

5. Одним из важных факторов, влияющих на регуляцию процессов в живых системах, является активность ионов. Она определяется, прежде всего, их гидратацией и наличием связи с макромолекулами. Имеющим множество колебательных состояний системам *ион – вода, белок – ион, белок – ион – вода* свойственна магнитная анизотропия. При действии МП компоненты системы с разными магнитными и электрическими свойствами будут совершать колебательные движения, векторные параметры которых могут не совпадать по направлению. Вследствие этого для части ионов может наблюдаться разрыв их связи с макромолекулами и уменьшение гидратации, и обусловленное этим увеличение ионной активности. Увеличение под влиянием МП ионной активности в живых тканях подтверждено экспериментально и является предпосылкой стимуляции клеточного метаболизма. Следовательно, повышение ионной активности в тканях – реальный механизм первичного действия МП [26].

6. При действии МП могут возникать определённые макроскопические эффекты. Одним из

них можно считать магнитогидродинамическое уменьшение скорости циркуляции проводящих жидкостей в живом объекте [27]. Теоретически обосновано, что МП, применяемые в медицине, могут оказывать существенное влияние на течение биологических жидкостей в крупных сосудах. С уменьшением диаметра сосуда магнитогидродинамический эффект становится менее значительным.

7. В переменном МП, наряду с диамагнетизмом и парамагнетизмом биологических объектов, могут появляться индуцированные переменные ЭМП, которые возникают при любом изменении МП. Напряженность индуцированного электрического поля прямо пропорциональна скорости изменения МП. Так как в тканях имеются свободные заряды, ионы или электроны, индуцированное электрическое поле вызовет их движение, то есть электрический ток. При помещении человека в переменное МП напряженностью 10 кА/м плотность индукционного тока в его теле составляет приблизительно $(0,15 \div 1,5) \cdot 10^{-5}$ А/м². Индукционный ток оказывает многообразное биологическое действие [4].

Таким образом, постоянное МП может влиять на живые системы вследствие обусловленных им диа- и парамагнитных эффектов, а переменное – еще и вследствие генерации переменных электрических токов. Рассмотренные механизмы реализуются в организме человека с участием множества белковых структур, отличающихся на субмолекулярном, молекулярном и надмолекулярном уровне. Происходящие в них изменения трансформируются в реакции клеток, тканей и реакции организма в целом.

2 Биоэлектрический эффект

Процессы жизнедеятельности сопряжены с возникновением в клетках и тканях электродвижущих сил. Выяснение физико-химических причин и механизмов генерации электрических полей в биологических объектах очень важно для биофизики и медицины [28].

Одной из причин длительного существования электрического поля в органической ткани является *биоэлектрический эффект* – способность живых тканей находиться в состоянии неравновесной электрической поляризации [29].

Систематическое изучение биоэлектрического эффекта было начато в 1848 г. немецким физиологом Э. Дюбуа-Реймоном, который обнаружил, что между внутренним содержимым клетки и контактирующей с клеткой наружной жидкостью существует стационарная разность потенциалов (мембранный потенциал). В 1868 г. немецкий нейробиолог Ю. Бернштейн впервые проанализировал колебания потенциала, которые возникают при распространении возбуждения по нервному волокну и длятся тысячные доли секунды [30]. Для объяснения природы мембранного

потенциала были предложены различные теории. В мембранно-ионной теории принято [16], [18], что биоэлектрические потенциалы обусловлены различием в концентрациях ионов калия, натрия и хлора внутри клетки и вне ее, а также различной проницаемостью мембраны, покрывающей живые клетки, для указанных ионов. Через поры, имеющиеся в мембране, в клетку и из нее проникают молекулы воды и других веществ, а также ионы, имеющие размеры, сопоставимые с размерами пор. Если ионы фиксируются на структурных элементах мембраны, то стенки пор оказываются электрически заряженными; в зависимости от знака заряда стенок пор прохождение через них ионов затрудняется или облегчается. Наличие в мембране фосфатных и карбоксильных групп является причиной того, что её проницаемость значительно меньше для анионов, чем для катионов; для различных катионов проницаемость мембраны также неодинакова и закономерно изменяется при изменении функционального состояния ткани.

Основным признаком биоэлектрического эффекта является генерация квазипостоянного биоэлектрического поля (КПБЭП), напряженность которого в клетках достаточна для оказания влияния на биохимические и структурные процессы. Поэтому одним из важнейших следствий биоэлектрического эффекта является рост тканей, обусловленный изменениями пространственных и временных параметров живой системы под влиянием собственного биоэлектрического поля организма, на возможность которого указывается в концепции полей биологии [29].

Электрический эффект проявляется во всех важнейших биополимерах – белках (включая ферменты), полисахаридах и некоторых полинуклеотидах [31]. Явление электрической поляризации, характерное для биоэлектрических объектов, обусловлено распределением в тканях следующих электрически неравновесных объектов: диполей белковых макромолекул (а также наличием дефектов белковых структур); ионов, обуславливающих как собственную, так и примесную проводимость тканей; подвижных носителей заряда, прежде всего, электронов; структурированной воды, связанной с макромолекулами.

Представление об электрическом состоянии в ряде разделов биофизики рассматривают как основу для построения моделей мембран, причину возникновения нервного импульса, явлений биологической памяти, электрических явлений в процессах регенерации и роста тканей и т. д. [16].

Методика изучения электрического эффекта в биоматериалах и биополимерах по существу не отличается от применяемой для исследования обычных электрических объектов методом электрично-термического анализа (ЭТА), основанным на регистрации тока термостимулированной деполяризации.

Однако при исследовании биоматериалов приходится учитывать специфику приготовления образцов биологического происхождения [31].

С использованием классических методов изучения электрического эффекта выявлены, в частности, термостимулированные токи (ТСТ) при деполяризации костной ткани живых организмов. Как и в неживом веществе, механизм образования электрического состояния в биологических структурах связан с формированием поляризационного заряда в результате образования системы «замороженных» диполей и компенсирующих их зарядов. Наличие поляризационного заряда обуславливает усиление тока в тканях. Все максимумы, проявляющиеся на зависимости силы тока от температуры (рисунок 2.1) при температурах выше комнатной обусловлены пространственным зарядом; различие в их положении на температурной шкале вызвано различием в структуре ферментов, входящих в состав костной ткани животных и человека [31].

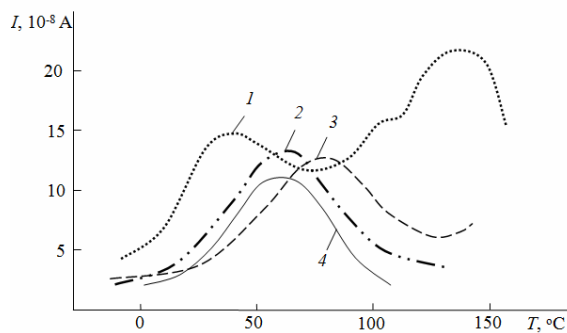


Рисунок 2.1 – Зависимость тока деполяризации в бедренных костях животных и человека от температуры [31]
(1 – крыса; 2 – собака; 3 – бык; 4 – человек)

В одной из наших работ [32] методом ЭТА исследованы пробы натуральной синовиальной жидкости (СЖ). При нагревании электрически нейтральной СЖ регистрировалась температурная зависимость ТСТ (рисунок 2.2). Пик положительных токов при (28÷31)°С на графике функции $I(T)$ для натуральной СЖ (кривая 1 на рисунке 2.2) соответствует тепловому разрушению дипольной упорядоченной структуры мезофазы ЖК компонентов СЖ. В этом же диапазоне температур происходит разрушение гидратных оболочек биополимеров, что также свидетельствует о проявлении электрического эффекта. В результате трения молекулярная структура СЖ нарушается, изменяется ее электрическое состояние, и уменьшаются пиковые значения силы тока (кривая 2 на рисунке 2.2).

Таким же методом в [33] исследовано зарядовое состояние крови человека. В экспериментах использовали кровь I–IV групп с положительным резус-фактором. Нагревание крови сопровождается разупорядочением пространственных зарядовых и дипольных структур

компонентов крови и разрушением связей в комплексных белковых соединениях, а положение высокотемпературного токового пика на спектре ТСТ характеризует группу крови. К этому можно добавить, что при анализе спектров ТСТ простейших биополимеров – коллагена и желатина – наличие низкотемпературного пика обычно связывают с разориентацией диполей, а наличие высокотемпературных пиков – с релаксацией пространственного заряда [31].

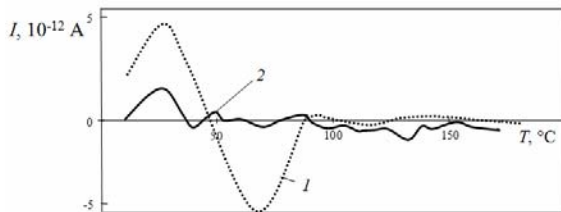


Рисунок 2.2 – Спектр термостимулированного тока синовиальной жидкости. 1 – исходная СЖ; 2 – после трения в течение 2 ч ($P = 2$ МПа, $v = 0,1$ м/с) в паре «сверхвысокомолекулярный полиэтилен – сплав СоСгМо»

Анализируя приведенные на рисунках 2.1 и 2.2 результаты, можно констатировать, что крови и синовиальной жидкости свойственен спонтанный квазиэлектретный эффект, обусловленный координационным характером связей их надмолекулярных структур. Параметры различных тканей, характеризующие этот эффект, *in vivo* зависят от природы биофизических и биохимических процессов, протекающих в организме человека.

Биоэлектретное состояние биологических систем проявляется во многих имеющих место в организме электрических явлениях. Последние оказывают энергетическое воздействие на структуру и функции системы, обуславливая ее биологически целесообразное изменение и течение основных процессов жизнедеятельности [18].

При любом хирургическом вмешательстве биополе в области операционной раны изменяется, обуславливая изменение характеристик взаимодействия внешних ЭМП с биополем человека и продолжительные посттравматические эффекты.

Практический интерес представляет методология моделирования биофизических свойств живых тканей в искусственных органах с учётом влияния внешнего ЭМП на функционирование биосистем. В этих целях используют системы на основе синтетических полимерных материалов – полимерные композиты, растворы и студни полимеров, наполненные коллоидными частицами. В качестве дисперсионных сред коллоидной основы биосовместимых полимерных материалов можно использовать биологические жидкости, лекарственные средства и физиологические растворы. Биоэлектрические потенциалы и

магнитное поле с индукцией, характерной для живых тканей, можно моделировать посредством электрической поляризации и введения в коллоидную полимерную основу дисперсных магнетиков.

Приведем примеры корректировки электрических и магнитных полей в организме человека.

Для лечения переломов, остеопороза и после удаления костных осколков конечностей применяют электрическую стимуляцию кости. Электромагнитное поле в ней создают посредством электродов, которые контактируют с кожей или введены в тело пациента хирургическим путем [34], а также катушек индуктивности, в которые помещают больную конечность [35].

Поле электретных имплантатов способствует компенсации повреждений костной и хрящевой тканей [36]. Электреты в искусственных органах, изготовленных из материалов на основе оксида тантала (Ta_2O_5) и политетрафторэтилена (ПТФЭ), формируют из высокочистого тантала в виде покрытий на имплантатах. Покрытия из Ta_2O_5 толщиной $0,15 \div 0,45$ мкм получают методом электролитического анодирования, а полимерные покрытия толщиной 30–40 мкм наносят из водной суспензии ПТФЭ с последующей сушкой и оплавлением. Электризацию покрытий осуществляют, используя коронный разряд или вспомогательные жидкие электроды.

В [37] сообщалось о разработке эластичного магнитного материала, предназначенного для имплантации в тенонное пространство глаза и обеспечивающего функционирование зрительного нерва.

На основе сверхвысокомолекулярного полиэтилена – базового полимерного материала для узлов трения эндопротезов суставов – создан искусственный хрящ. Микропористый слой, напоминающий хрящ, сформирован на поверхности трения головки эндопротеза тазобедренного сустава. Электретный заряд этого слоя способствует улучшению смазочных свойств синовиальной жидкости и биосовместимости эндопротеза; поры слоя служат емкостью для лекарств, обеспечивая их пролонгированное выделение в послеоперационную рану [38].

Заключение

Таким образом, логично предположить, что биополе человека, формируемое вследствие биомагнетизма и биоэлектретного состояния органических сред, является первичным объектом, с которым взаимодействует внешнее ЭМП. Придерживаясь этой гипотезы, можно понять вероятные механизмы воздействия слабых электрических и магнитных полей на биологические объекты, следствием которого являются ориентационные и концентрационные эффекты, изменение активности ионов и структуры связанной в клетках воды, диамагнитные и парамагнитные

свойства макромолекул и их проявление. С применением электретных и магнитных имплантатов органов и тканей возможна компенсация дефектов биоэлектрического поля в организме человека.

Продолжение исследований биоэлектрического состояния необходимо для выявления биохимических звеньев, участвующих в генерации некомпенсированного электрического заряда в биоструктурах, находящихся в электретном состоянии, для расширения представлений о физико-химических процессах метаболизма и обоснования новых способов моделирования живых тканей в целях совершенствования методик лечения пациентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Электромагнитные поля в биосфере*: в 2-х томах. Том 2. Биологическое действие электромагнитных полей; под ред. Н.В. Красногорской. – М.: Наука, 1984. – 328 с.
2. *Becker, R.O.* The Body Electric: Electromagnetism and the Foundation of Life / R.O. Becker, G. Selden. – New York, NY: Quill, Williams Morrow, 1985. – 370 p.
3. *Dubrov, A.P.* The Geomagnetic Field and Life: Geomagnetobiology / A.P. Dubrov. – New York, NY: Plenum Press, 1978. – 362 p.
4. *Влияние ЭМП на живые организмы* // [Электронный ресурс]. – 2005. – Режим доступа: <http://www.medicreferat.com.ru/pageid-183-1.html>. – Дата доступа: 12.10.2011.
5. *Мартынюк, В.С.* У природы нет плохой погоды: космическая погода в нашей жизни / В.С. Мартынюк, Н.А. Темуриянц. – Киев: Нац. ун-т, 2008. – 179 с.
6. *Яновский, Б.М.* Земной магнетизм / Б.М. Яновский. – Л.: Изд. Лен. ун-та, 1978. – 592 с.
7. *Ачкасова, Ю.Н.* Избирательная чувствительность бактерий к инфранизкочастотным магнитным полям / Ю.Н. Ачкасова // В кн.: Электромагнитные поля в биосфере. Т. 2. – М.: Наука, 1984. – С. 72–78.
8. *Физиологически активные инфранизкочастотные магнитные поля* / В.Б. Макеев [и др.] // В кн.: Электромагнитные поля в биосфере. Т. 2. – М.: Наука, 1984. – С. 62–72.
9. *Леднев, В.В.* Биоэффекты слабых комбинированных постоянных и переменных магнитных полей / В.В. Леднев // Биофизика. – 1996. – Т. 41, вып. 1. – С. 224–231.
10. *Жадин, М.Н.* Действие магнитных полей на движение иона в макромолекуле. Теоретический анализ / М.Н. Жадин // Биофизика. – 1996. – Т. 41, вып. 4. – С. 832–849.
11. *Сидоренко, В.М.* Механизм влияния слабых электромагнитных полей на живой организм / В.М. Сидоренко // Биофизика. – 2001. – Т. 46, вып. 3. – С. 500–504.

12. *Гвоздарев, А.Ю.* Механизм воздействия электромагнитных полей на биологические объекты с позиций модели неоднородного модифицированного физического вакуума / А.Ю. Гвоздарев // [Электронный ресурс]. – 2004. – Режим доступа: <http://pulse.vsbervis.ru/Ether/Bio/>. – Дата доступа: 12.10.2011.

13. *Ожогин, В.И.* Магнитные поля биологических объектов / В.И. Ожогин // Физическая энциклопедия. Т. 2.; под общ. ред. А.М. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1990. – С. 680–681.

14. *Холодов, Ю.А.* Магнитные поля биологических объектов / Ю.А. Холодов, А.Н. Козлов, А.М. Горбач. – М.: Наука, 1990. – 144 с.

15. *Romalis, M.V.* Atomic magnetometers for materials characterization / M.V. Romalis, H.B. Dang // Materials today. – 2011. – Vol. 14, № 6. – P. 258–262.

16. *Биофизика*: учеб. для студ. высш. учеб. заведений / В.А. Антонов [и др.]; под ред. проф. В.Ф. Антонова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Гуманит. изд. центр «ВЛАДОС», 2003. – 288 с.

17. *Белановский, А.С.* Основы биофизики в ветеринарии / А.С. Белановский. – М.: Агропромиздат, 1989. – 271 с.

18. *Ремизов, А.Н.* Медицинская и биологическая физика: учеб. для вузов / А.Н. Ремизов, А.Г. Максина, А.Я. Потапенко. – 4-е изд., перераб. и дополн. – М.: Дрофа, 2003. – 560 с.

19. *Викторов, В.А.* К механизму лечебного действия низкочастотного ЭМП. Часть 2. ЭМП – лечебный фактор прямого действия / В.А. Виктор, Ю.В. Малков // Магнитология. Вестник межд. медико-биолого-технической ассоциации магнитологов. – 1993. – № 1 (5). – С. 3–7.

20. *Медицинская магнитология и нанотехнологии* / А.М. Демецкий [и др.]. – СПб.: АСПИН, 2004. – 239 с.

21. *Улащик, В.С.* Новые методы и методики физической терапии / В.С. Улащик. – Минск: Беларусь, 1986. – 175 с.

22. *Улащик, В.С.* Общая физиотерапия: учебник / В.С. Улащик, И.В. Лукомский. – Минск: Книжный дом, 2004. – 512 с.

23. *Монич, В.А.* Воздействие электромагнитных полей низкой интенсивности на мембраны эритроцитов / В.А. Монич, С.Л. Малиновская // Механизмы действия магнитных и электромагнитных полей на биологические системы: тезисы докладов I Всесоюзной конф., Ростов-на-Дону, 1989. – С. 68–69.

24. *Жидкие кристаллы: дискотические мезогены* / Н.В. Усольцева [и др.]. – Иваново: Ивановский гос. ун-т, 2004. – 546 с.

25. *Браун, Г.* Жидкие кристаллы и биологические структуры / Г. Браун, Д. Уолкен; пер. с англ. под ред. Я.М. Варшавского. – М.: Мир, 1982. – 420 с.

26. Улащик, В.С. Введение в теоретические основы физической терапии / В.С. Улащик. – Минск : Наука и техника, 1981. – 238 с.
27. Дорфман, Я.Г. Физические явления, происходящие в живых объектах под действием постоянных магнитных полей / Я.Г. Дорфман // В кн. : Влияние магнитных полей на биологические объекты. – М. : Наука, 1971. – С. 15–23.
28. Макаревич, А.В. Электрические поля и электроактивные материалы в биотехнологии и медицине / А.В. Макаревич, Л.С. Пинчук, В.А. Гольдаде. – Гомель : ИММС НАНБ, 1998. – 106 с.
29. Кулин, Е.Т. Биоэлектретный эффект / Е.Т. Кулин. – Минск : Наука и техника, 1980. – 216 с.
30. Seyfarth, E.-A. Julius Bernstein (1939-1917) : pioneer neurobiologist and biophysicist / E.-A. Seyfarth // *Biological Cybernetics*. – 2006. – Vol. 94. – P. 2–8.
31. Mascarenhas, S. Bioelectrets: Electrets in biomaterials and biopolymers / S. Mascarenhas // In : *Electrets* / Ed. by G.M. Sessler, Berlin: Springer Verlag. – 1987. – P. 321–346.
32. Tsvetkova, E.A. Physical Properties of Synovial Fluid as a Joint Lubricating Medium / E.A. Tsvetkova // *Biophysics*. – 2005. – Vol. 50, № 2. – P. 320–325.
33. *Electret-thermal analysis of blood* / L.S. Pinchuk [et al.] // *Medical Engineering and Physics*. – 2002. – Vol. 24. – P. 361–364.
34. Revell, P.A. Pathology of Bone / P.A. Revell. – Berlin : Springer-Verlag, 1986. – 390 p.
35. Black, J. Tissue response to exogenous electromagnetic signals / J. Black // *Orthop. Clin. North Am.* – 1994. – Vol. 15. – P. 15–31.
36. Morgunov, M.S. Application of electrets in traumatology and orthopedy / M.S. Morgunov, V.P. Homutov, I.M. Sokolova // *Proc. 8th Int. Symp. on Electrets*. – Paris, 1994. – P. 863–868.
37. Цветкова, Е.А. Разработка материалов на основе полимеров для постоянных магнитов медицинской техники : дис. ...канд. техн. наук : 02.05.01 / Е.А. Цветкова. – Гомель, 1993. – 121 с.
38. *Tribology and Biophysics of Artificial Joints* / L.S. Pinchuk [et al.]. – Kidlington, Oxford Joints: Elsevier Ltd., 2006. – 350 p.

Поступила в редакцию 27.10.11.

УДК 621.385.632

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЛАМП БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ О-ТИПА С УЧЕТОМ РАССЛОЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ

И.Н. Цырельчук, Д.Н. Михайловский, В.Б. Булычёва

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

IRREGULAR TRAVELLING WAVE TUBES OPTIMIZATION BASED ON BUNDLE AND VELOCITY DISPERSION IN ELECTRON BEAM

I.N. Tsyrelchuk, D.N. Mikhailovsky, V.B. Bulycheva

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Выполнены расчеты неоднородной релятивистской лампы бегущей волны О-типа с замедляющей системой типа круглого гребенчатого волновода с плавно изменяющейся глубиной канавки.

Ключевые слова: лампа бегущей волны О-типа (ЛБВ-О), замедляющая система, СВЧ, оптимизация, коэффициент полезного действия (КПД).

The calculations of the inhomogeneous relativistic traveling-wave tube with O-type slow-wave system such as a circular waveguide with a comb smoothly varying depth grooves were performed.

Keywords: traveling wave tube (TWT), slow-wave structure, microwave, optimization, efficiency.

Введение

Использование метода синхронного электрона позволяет достаточно просто найти близкий к оптимальному закон изменения замедления волны в нерегулярной лампе бегущей волны О-типа (ЛБВ-О) [1]–[3]. Однако, применяя этот метод для оптимизации по КПД релятивистской нерегулярной ЛБВ-О, необходимо учитывать факторы, существенные для высокоточных релятивистских устройств такого типа: конечную толщину пучка, определяющую его динамическое расслоение и распределение статических скоростей электронов по толщине, связанное с уменьшением потенциала по сечению пучка.

В статье используется модель ЛБВ-О с замедляющей системой (ЗС) типа круглого гребенчатого волновода с плавно изменяющейся глубиной канавки. В такой системе радиальная зависимость сопротивления связи и осевой составляющей напряжённости электрического поля волны оказываются функциями продольной координаты как дополнительного фактора, обуславливающего различие условий взаимодействия разных слоёв пучка. Предполагается, что диаметр поперечного сечения электронного пучка трубчатой формы намного превосходит его толщину, так что можно использовать квазиплоское приближение при вычислении сил пространственного заряда. Принимается также широко используемое одномерное по слоям пучка приближение, т. е. поперечное движение электронов и соответственно поперечные силы ВЧ-поля ЗС и пространственного заряда не

учитываются [4]. Расчеты выполнялись по трёхслойной модели электронного пучка.

1 Математическая модель нерегулярной релятивистской лампы бегущей волны О-типа

При оптимизации ЛБВ-О использовались заимствованные из [1] нелинейные уравнения, которые для многослойной модели можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{ki}}{dT} &= \frac{\varepsilon \theta_0}{V_{ki} \gamma_k^3} \left[e_k(T) \sqrt{\rho_s(T)} A \cos \psi_{ki} - S_q F_{ki} \right], \\ \frac{du_{ki}}{dT} &= \frac{\theta_0}{\varepsilon} \left(\frac{1}{V_{ki}} - 1 \right), \\ \frac{dA}{dT} &= \frac{2\theta_0 \sqrt{\rho_s(T)}}{n} \sum_{k=1}^m \left[i_k e_k(T) \sum_{i=1}^n \cos \psi_{ki} \right], \\ \frac{d\mathcal{G}}{dT} &= \frac{2\theta_0 \sqrt{\rho_s(T)}}{An} \sum_{k=1}^m \left[i_k e_k(T) \sum_{i=1}^n \sin \psi_{ki} \right], \\ \psi_{ki} &= u_{ki} - \Phi(T) + \mathcal{G}, \\ \gamma_{ki} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2 V_{ki}^2}}, \quad i = 1, n, \quad k = 1, m, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $T = z/L$, z – продольная координата, L – длина области взаимодействия;

$$V_{0k} = \frac{v_{0k}}{v_0}, \quad V_{ki} = \frac{v_{ki}}{v_0}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c};$$

v_{0k} , v_{ki} – соответственно начальная и текущая скорость i -го электрона из k -го слоя; v_0 – средняя начальная скорость электронов; $u_{ki} = \omega t(T, t_{ki}) - h_e z + \omega t_{ki}$ – относительная фаза электрона; t_{ki} –

момент попадания электрона в область взаимодействия; $t(T, t_{ki})$ – момент прохождения сечения z i -электроном из k -го слоя; $h_e = \omega/v_0$; ω – рабочая частота; $\theta_0 = \varepsilon h_e L$, $\varepsilon = (K_s(0)I_0 e)/(m_0 2v_0^2)$ – параметр усиления, определённый во входном сечении; $K_s(T)$ – сопротивление связи; I_0 – полный ток пучка; e , m_0 – соответственно заряд и масса покоя электрона;

$$p_s(T) = \frac{K_s(T)h_s^2(T)}{K_s(0)h_s^2(0)}, \quad h_s(T) = \frac{\omega}{v_\phi(T)};$$

$v_\phi(T)$ – фазовая скорость холодной волны;

$$A(T) = \frac{eE_m(T)}{m_0\omega v_0 \varepsilon^2 \sqrt{\rho_s(T)}},$$

$E_m(T)$ – усредненная по сечению пучка амплитуда z -составляющей напряженности электрического поля волны, возбуждённой в ЗС попутной волны, ω – ее фаза;

$$\Phi(T) = \frac{\theta_0}{\varepsilon} \int_0^T \frac{1 - V_\phi(T)}{V_\phi(T)} dT$$

– набег фазы холодной волны; $V_\phi(T) = v_\phi(T)/v_0$ – относительная холодная фазовая скорость (холодная скорость – скорость, которая нормирована к потоку электронов); $S_q = \varepsilon/(v_0 \varepsilon_0 K_s(0))$ – параметр пространственного заряда;

$$F_{ki} = \frac{4}{\pi n} \sum_{i=1}^m \frac{i_l}{r'_l} \times \frac{d_k d_l (u_{ij} - u_{ki}) \gamma_{lj}}{\sum_{j=1}^n [(d_l + d_k)^2 + (u_{li} - u_{ki})^2 \gamma_{ij}^2] [(d_l - d_k)^2 + (u_{li} - u_{ki})^2 \gamma_{ij}^2]}$$

– силовая составляющая поля пространственного заряда с учетом релятивистской скорости, $u_{ki} - \pi < u_{ij} \leq u_{ki} + \pi$, $lj \neq ki$; $r'_l = r_l h_e$, $d_l = (R_0 - r_l) h_e$, $d_k = (R_0 - r_k) h_e$, r_l и r_k – соответственно радиусы l -го и k -го электронных слоев; R_0 – радиус ЗС; i_k , e_k – соответственно весовые коэффициенты тока и поля, относящиеся к k -му слою; $i_k = I_{0k}/I_0$, $\sum_{k=1}^m i_k = 1$ – полный ток на входе в k -ый слой; I_0 – общий ток электронного пучка;

$$e_k(T) = \frac{1}{S_k} \int_{S_k} E_z^0(r, T) dS_k, \quad \frac{1}{S_e} \int_{S_e} E_z^0(r, T) dS_e,$$

S_e – полное сечение пучка, S_k – площадь поперечного сечения k -го слоя пучка; $E_z^0(r, T)$ – зависящая от радиуса осевая составляющая напряженности электрического поля синхронной гармоника собственной волны ЗС.

Граничные условия для значений величин V и A системы (1.1) по обе стороны границы раздела i -го и k -го слоёв имеют вид:

$$V_{ki}(0) = V_{0k}, \quad u_{ki}(0) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{i-0,5}{n}, \quad (1.2)$$

$$A(0) = A_0, \quad \mathcal{G}(0) = 0.$$

Электронный КПД (КПД отдачи энергии электронами волне, т.е. отношение отданной электронами энергии к их начальной энергии) и электронный КПД k -го слоя в рассматриваемой модели определяются следующим образом:

$$\eta_e = \sum_{k=1}^m i_k \eta_{ek}, \quad \eta_{ek} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{jk} - \gamma_{0k}}{1 - \gamma_{0k}}. \quad (1.3)$$

Волновой КПД η_v (отношение полученной энергии волны, к затраченной – начальной энергии электронов) может быть представлен в форме:

$$\eta_v = 0,25\varepsilon[A^2(T) - A_0^2](\gamma_0 + 1)/\gamma_0^2. \quad (1.4)$$

Группировку электронов удобно характеризовать функцией вида:

$$G_r(T) = \left[\left(\frac{1}{nm} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \cos \psi_{ki} \right)^2 + \left(\frac{1}{nm} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sin \psi_{ki} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Нулевое значение G_r соответствует отсутствию группировки, $G_r=1$ – соответствует полной группировке.

Приближённая оптимизация фазы $\Phi(T)$, определяющей распределение $V_\phi(T)$, выполнялась методом синхронного электрона, как это сделано в [1]–[3]. Полная относительная фаза синхронного электрона среднего слоя задана в виде:

$$\psi_s(T) = u_s(T) + \mathcal{G}(T) - \Phi(T) = \frac{\pi}{2} - \delta_0 - \delta_1 T^{\delta_2}. \quad (1.6)$$

Проводя оптимизацию параметров δ_0 , δ_1 с соблюдением требования максимальности величины η_v при рассчитываемых на каждом шаге самосогласованных значениях $u_s(T)$ и $\mathcal{G}(T)$, можно с использованием выражения (1.6) определить оптимальную функцию $\Phi(T)$ и, следовательно, $V_\phi(T)$ [2]:

$$V_\phi(T) = \frac{1}{\varepsilon \frac{d\Phi}{dT} + \frac{\theta_0}{T}}. \quad (1.7)$$

2 Характеристики замедляющей системы

При расчете дисперсионных характеристик ЗС, а также входящих в уравнение (1.1) переменных p_s , e_k , являющихся функциями от $V_\phi(T)$ и $r(p_s = p_s[V_\phi(T), r])$, $e_k = e_k[V_\phi(T), r]$, описанная в [4] методика и, в частности, заимствованная из этой монографии формула (4.50) использованы для ЗС типа гребенчатого волновода с постоянным радиусом зуба (конечной толщины) и изменяющейся глубиной канавки (эскиз профиля волновода изображен на рисунке 2.2 пунктирной линией).

В расчетах были использованы следующие нормированные к $\lambda/(2\pi)$ размеры ЗС: заданный внутренний радиус гребенки $R_0 = 2,6$; ширина канавки $a = 0,9$; ширина зуба $b = 0,5$. Глубина

канавки $R - R_0$ определяется внешним радиусом R гребенки, который варьировался в пределах $R_0 < R < 3,5$ ($R_0 = \text{const}$). На рисунке 2.1 представлена рассчитанная при указанных размерах зависимость $\beta_\phi(R) = v_\phi(R)/c$. Кривой 2 изображена зависимость $\beta_\phi(R)$ для собственной волны E_{01} в гладком волноводе радиуса R (при $R = R_0$ значения $\beta_\phi(R)$ одинаковы для обеих кривых).

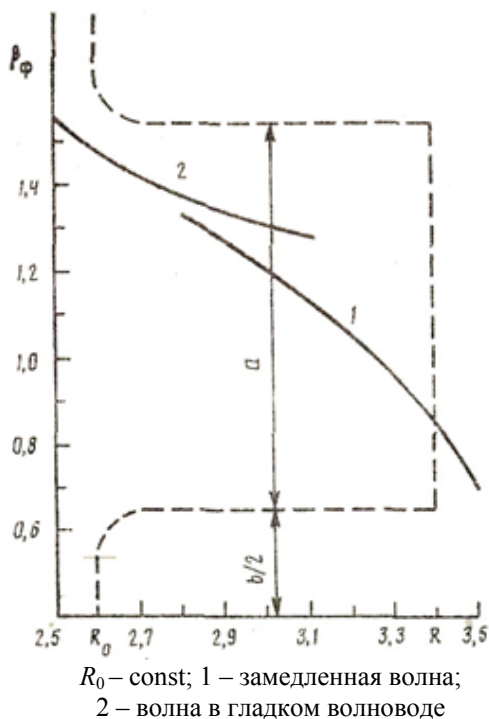


Рисунок 2.1 – Зависимость холодной фазовой скорости основной гармоники E_{01} – волны круглого гребчатого волновода от внешнего радиуса канавки R

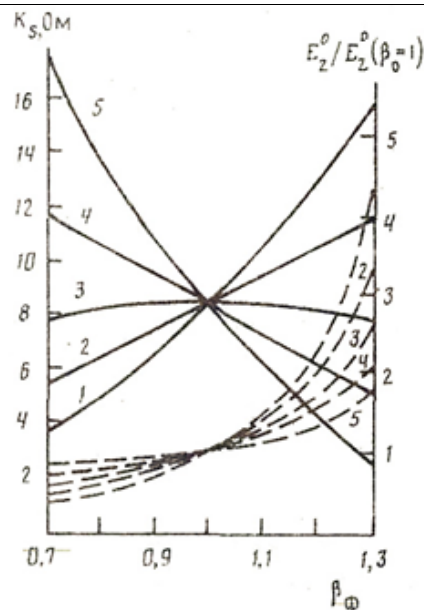
На рисунке 2.2 представлены зависимости сопротивления связи $K_s(\beta_\phi, r)$ «тонкого» трубчатого электронного пучка радиуса r и зависимости $E_0(\beta_\phi, r)$, которые определяют p_s и e_k в системе уравнений (1.1) при заданных R_0, a, b , приведенных выше, и разных r . Такие зависимости должны учитываться в табличном или аналитико-числовом виде.

После обработки системы уравнений (1.1) с использованием метода наименьших квадратов были получены следующие, удобные для применения формулы:

$$K_s(\beta_\phi, r) h_s^2(\beta_\phi) \cong 8,377 \beta_\phi^{9,47-5,66r};$$

$$E_z^0(\beta_\phi, r) / E_z^0(1, r) \cong \beta_\phi^{6,59-0,95r^2}.$$

Приведенные зависимости могут быть использованы для воспроизведения геометрических размеров оптимизируемой ЗС, а также в целях учёта влияния параметров этих зависимостей в уравнениях системы (1.1) при конкретных условиях.



1 – $R = 1,6$; 2 – $R = 1,8$; 3 – $R = 2,0$;
4 – $R = 2,2$; 5 – $R = 2,4$

Рисунок 2.2 – Зависимости сопротивления связи K_s (сплошная линия) и относительной напряженности поля основной гармоники E_z^0 (штриховая линия) от фазовой скорости волны

3 Оптимальные параметры

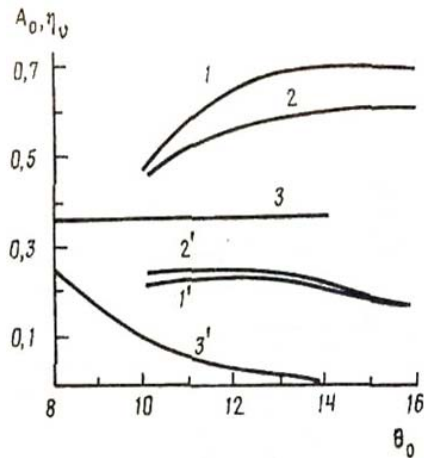
При оптимизации использовался специально организованный метод Нелдера–Мида и отбрасывались варианты условий, в которых скорость хотя бы одной из крупных частиц, используемых для моделирования электронного пучка, уменьшалась до нуля. Кроме того, при расчетах, выполненных на основе метода синхронного электрона, для холодной фазовой скорости волны было введено ограничение снизу: если расчетная V_ϕ оказывалась меньше $V_{\text{фмин}}$, определяемой возможностями ЗС ($R = 3,5$), то далее в ходе исследования V_ϕ оставалась на уровне $V_{\text{фмин}}$.

Ниже приведены результаты расчетов, выполненных для типичного трубчатого пучка, получаемого в электронной пушке с катодом со взрывной эмиссией, при следующих значениях параметров: относительный радиус пучка $r_{\text{мин}} = 1,75$; $r_{\text{макс}} = 2,25$; $\beta_0 = 0,85$; $I_0 = 2000\text{A}$; $\varepsilon = 0,22$; $K_s(0) = 8,3 \text{ Ом}$.

При расчетах значения геометрического параметра варьировались в диапазоне $\theta_0 = 8 \dots 16$. Для нерегулярной или для регулярной ($V_\phi = V_{\phi 0} = \text{const}$) ЗС оптимизировались амплитуды сигнала A_0 и параметры δ_0, δ_1 и δ_2 .

Регулярная замедляющая система. Для однослойной модели регулярной ЛБВ-О показано, что при заданных параметрах максимально достигаемый волновой КПД равен $\eta_v = 0,34$. При возрастании θ_0 в диапазоне $8 \dots 14$ оптимальное значение величины τ_v остается на

одном уровне, оптимальное значение $V_{\phi 0}$ медленно меняется вблизи значения $V_{\phi 0} = 0,92$ – в диапазоне $0,917...0,925$, а амплитуда сигнала A_0 уменьшается почти на порядок – от $A_0 = 0,249$ до $0,018$ (рисунок 3.1, кривые 3 и 3').



1 – η_v ; 1' – A_0 при $V_{\phi \text{ мин}} = 0,82$; 2, 2' – $V_{\phi \text{ мин}} = 0,925$; 3, 3' – регулярная ЛБВ-О, $V_{\phi 0} = 0,925$

Рисунок 3.1 – Зависимость волнового КПД и амплитуды сигнала от параметра θ_0

В результате расчета, выполненного с использованием трехслойной модели с однородным распределением тока и начальной скорости в слоях при $\beta_0 = 10$, показано, что радиальное распределение поля волны практически не сказывается на величине η_v (уменьшение на 1%).

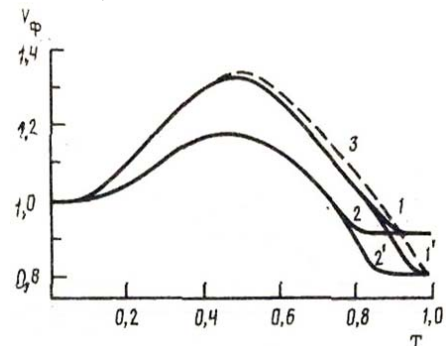
Нерегулярная ЛБВ-О, однослойная модель. Для выяснения характера влияния различных параметров на условия реализации оптимальных режимов вначале были выполнены расчеты на основе однослойной модели с использованием двух различных нижних предельных значений фазовой скорости – $K_{\phi \text{ мин}} = 0,925$ (его выбор обусловлен желанием сравнить полученные результаты с теми, которые получены для регулярной ЛБВ-О; для неё данное значение $V_{\phi 0}$ было оптимальным) и $V_{\phi \text{ мин}} = 0,83$ (это значение было предельно возможным для ЗС, геометрические параметры которой указаны выше).

Результаты расчетов приведены на рисунках 3.1 и 3.2. Анализируя эти результаты, видим, что наличие нерегулярности задерживающей системы только на участке группирования ($V_{\phi \text{ мин}} = 0,925$) обуславливает значительное увеличение η_v по сравнению со значением этой величины для регулярной ЛБВ-О. При увеличении θ_0 это различие в значениях η_v усиливается, что обусловлено существенным увеличением степени группировки и качества получаемого сгустка (рисунок 3.1). Заметим, что при $\theta_0 < 10$ при использованных значениях параметров оптимизация неоднородности задерживающей системы методом синхронного электрона не обеспечивает существенного выигрыша в КПД по сравнению с КПД регулярной ЗС. При превышении величиной θ_0 значения

$\theta_0 = 13$ величина η_v увеличивается очень медленно; при этом амплитуда A_0 начинает уменьшаться. Поэтому можно считать, что $\theta_0 = 13$ является достаточным значением параметра θ_0 , и изготовление более длинной задерживающей системы нецелесообразно [3].

Явный вид зависимости $V_{\phi}(T)$ представлен на рисунке 3.2 для двух значений θ_0 . С ростом θ_0 возрастает величина необходимого превышения величиной V_{ϕ} её синхронного значения $V = 1$. Заметим, что при наложении ограничения $V_{\phi} \geq V_{\phi \text{ мин}}$ на конечном участке ЛБВ-О существенного изменения хода кривой $V_{\phi}(T)$ в области группирования не происходит. Кривые $V_{\phi}(T)$, соответствующие $V_{\phi \text{ мин}} = 0,925$ и $V_{\phi \text{ мин}} = 0,82$, совпадают до тех пор, пока $V_{\phi} > V_{\phi \text{ мин}}$; с нарушением этого условия поведение указанных кривых различно.

Варианты нерегулярных ЛБВ, полученные с использованием трехслойной модели. При отклонении значений V_{ϕ} в том или ином направлении от значения 1,176, которому соответствует $\beta_{\phi} = 1$, влияние радиальной неоднородности поля проявляется в соответствии с зависимостью, графически представленной на рисунке 2.2. Поэтому можно ожидать, что зависимость $V_{\phi}(T)$, полученная с использованием однослойной модели, не окажется оптимальной, если брать в расчёт число слоёв больше одного. Для выяснения влияния расслоения был выбран вариант задерживающей системы с параметрами $\theta_0 = 13$, $V_{\phi \text{ мин}} = 0,82$, и с использованием распределения $V_{\phi \text{ мин}}(T)$, полученного при таких значениях параметров θ_0 и $V_{\phi \text{ мин}}$ для однослойной модели, проведен расчет η_v для трёхслойной модели. Оказалось, что из-за радиальной неоднородности значение η_v уменьшилось от 0,68 до 0,55. Несмотря на это обстоятельство эффективность нерегулярной задерживающей системы заметно выше, чем эффективность регулярной задерживающей системы.

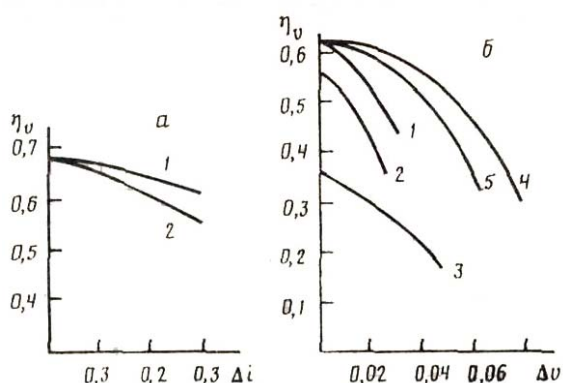


1 и 1' – $\theta_0 = 13$ при $V_{\phi \text{ мин}} = 0,925$ и $0,820$ соответственно, однослойная модель;
2 и 2' – $\theta_0 = 10$ при $V_{\phi \text{ мин}} = 0,925$ и $0,820$ соответственно, однослойная модель;
3 – $\theta_0 = 13$, $V_{\phi \text{ мин}} = 0,820$, трёхслойная модель

Рисунок 3.2 – Изменение холодной фазовой скорости вдоль ЛБВ-О

Для уточнения зависимости $V_{\phi}(T)$ для трёхслойной модели расчёты КПД ЛБВ-О были выполнены методом синхронного электрона. На рисунке 3.2 кривая 3 изображает зависимость $V_{\phi}(T)$, полученную в предположении равномерного распределения тока и начальных скоростей в поперечном сечении пучка ($i_1 = i_2 = i_3 = 1/3$, $V_{ok} = 1$). Видно, что при указанных значениях параметров и $A_0 = 0,28$ КПД задерживающей системы достигает значения $\eta_v = 0,61$, которое на 6% превышает значение η_v , вычисленное с использованием однослойной модели.

Для изучения зависимости КПД от функции распределения тока по сечению пучка расчёты были выполнены в предположении равномерного распределения начальной скорости $V_{oi} = 1$ и следующих значений силы тока в слоях: $i_1 = \Delta i$, $i_2 = 1 - \Delta i$, $i_3 = \Delta i$. На рисунке 3.3, а представлена зависимость η_v от Δi ($\Delta i = 0$ соответствует однослойной модели). Видно, что расщепление исходного моноскоростного пучка, обусловленное поперечной неоднородностью амплитуды волны, незначительно сказывается на результирующем КПД, если амплитуду входного сигнала A_0 увеличить с 0,23 до 0,28 (уменьшение η_v приблизительно на 7% при определении $V_{\phi}(T)$ на основе трёхслойной модели, и приблизительно на 12% – при использовании однослойной модели).



- 1 – $V_{\phi}(T)$ получена на основе трёхслойной модели с оптимизацией при каждом значении Δi , Δv ;
- 2 – $V_{\phi}(T)$ получена с использованием однослойной модели;
- 3 – регулярная задерживающая система, $V_{\phi 0} = 0,925$;
- 4 и 5 – $V_{ok} = 1 - \Delta v$ и $V_{ok} = 1 + \Delta v$ соответственно; $V_{\phi}(T)$ получена на основе трёхслойной модели при $V_{ok} = 1$, $\Delta i = 0,3$

Рисунок 3.3 – Зависимость волнового КПД от величин, характеризующих поперечную неоднородность пучка, при $\theta_0 = 13$, $V_{\phi \text{ мин}} = 0,82$

О влиянии разброса скоростей в пучке на КПД ЛБВ-О можно судить на основе кривых 1 – 3, изображённых на рисунке 3.3, б и рассчитанных при следующих значениях начальных скоростей в слоях (первый слой – внутренний): $V_{01} = 1 - \Delta v$, $V_{02} = 1$, $V_{03} = 1 + \Delta v$. Кривые 4, 5 на рисунке 5, б соответствуют моноскоростному пучку – со средней начальной скоростью, отличающейся от синхронной скорости на Δv . При расчёте использовано распределение тока, соответствующее $\Delta i = 0,3$. Анализируя полученные результаты, приходим к выводу о том, что неоднородная ЛБВ-О более чувствительна к разбросу скоростей в пучке, чем однородная. При перепаде скоростей в пучке более 12% как неоднородная, так и однородная ЛБВ-О имеют одинаково низкий КПД $\eta_v = 10\%$. Кроме того, анализируя кривые 4 и 5 можно заключить, что моноскоростной на входе пучок не критично чувствителен к отклонению его средней скорости от её синхронного значения.

Заключение

В статье описана задача оптимизации параметров лампы бегущей волны О-типа. Рассмотрены различные варианты оптимизации: с использованием регулярной ЗС; нерегулярной ЗС – для однослойной модели пучка электронов; с использованием нерегулярной ЗС – для трёхслойной модели. Выполнено сравнение полученных результатов, на основе которого предложена оптимальная конфигурация нерегулярной ЗС для рассмотренных моделей ЛБВ-О.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кураев, А.А. Оптимизация по КПД нерегулярных релятивистских ламп бегущей волны О-типа / А.А. Кураев, А.К. Сеницын // Радиоэлектроника. – 1989. – Т. 34, № 6. – С. 1264.
2. Кураев, А.А. Оптимизация нерегулярной лампы бегущей волны О-типа на цепочке связанных резонаторов / А.А. Кураев, А.К. Сеницын // Радиоэлектроника. – 1989. – Т. 34, № 10. – С. 2166.
3. Кураев, А.А. Лампы с бегущей волной О-типа / А.А. Кураев, А.К. Сеницын, А.Б. Тимохин // Докл. АН БССР. – 1989. – Т. 33, № 11. – С. 989.
4. Абрамова, Н.Я. Применение неоднородных замедляющих систем для повышения электронного КПД ЛБВ О-типа / Н.Я. Абрамова, Л.Ф. Белякова, Г.Ф. Филимонов // Радиоэлектроника. – 1988. – Т. 33, № 4. – С. 778.

Поступила в редакцию 15.11.11.

УДК 535.33:621.374.825

ДИНАМИКА ИЗЛУЧЕНИЯ В КВАНТОВОРАЗМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ ПРИ УЧЕТЕ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В.А. Юревич¹, Е.В. Тимошенко², Ю.В. Юревич¹

¹Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

²Могилёвский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилёв

RADIATION DYNAMICS ON QUANTUM-WELL STRUCTURES UNDER THE CONDITION OF DIPOLE-DIPOLE INTERACTIONS

V.A. Yurevich¹, E.V. Timoschenko², Yu.V. Yurevich¹

¹Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

²Mogilev State A. Kuleshov University, Mogilev

В рамках кинетической модели взаимодействия когерентного излучения с плотной резонансной средой проведено моделирование процессов излучения в полупроводниковых квантоворазмерных структурах в условиях неоднородного уширения линий межзонного поглощения. В результате линейного анализа устойчивости равновесных состояний модели определены условия существования автоколебательного режима излучения.

Ключевые слова: резонансное взаимодействие, автомодуляционное спектральное уширение поля излучения, автоколебания интенсивности.

Within the frames of the nonlinear resonant model the analysis of radiation processes stability in semiconductor laser quantum-well structures has been conducted. At the account of light field spectrum linewidth broadening and near dipole interaction factor in condition of inhomogeneous broadening of gain resonance the possibility of the arising of output self-oscillatory mode is theoretically predicted.

Keywords: resonance interaction, light field spectrum linewidth broadening, self-sustained pulses of light intensity.

Введение

Полупроводниковым системам, которые используются в лазерной оптике в качестве объектов, генерирующих когерентное излучение, свойственно наличие экситонных энергетических зон. Структурные элементы этих систем характеризуются относительно большими значениями дипольных моментов, определяющих вероятность экситонных переходов [1]. Поэтому полупроводниковые квантоворазмерные структуры можно рассматривать как тонкие слои плотных резонансных сред [2] (сред с сильно выраженной нелинейной реакцией на поле распространяющегося в них резонансного излучения). Для слоёв на основе таких сред даже субмикронной и нанометровой толщины характерна резонансная нелинейность. При этом предсказывается возможность наблюдения оптических эффектов, в которых значима когерентность светового поля и поляризационного отклика среды (кооперативных эффектов) [1], [3]. Корреляция атомных диполей устанавливается за счёт переизлучаемого ими поля. В этом процессе, как предполагается в [4], ближние (локальные) поля диполей оказывают существенное влияние на поляризуемость активных частиц и на динамику излучения в квантоворазмерной структуре.

Различие поляризуемостей активных частиц в основном и возбуждённом состояниях при условии относительно больших по величине дипольных моментов может иметь существенное значение. Эффект нелинейного смещения фазы действующего на активные частицы светового поля, обусловленного резонансной составляющей локального поля, при этом усиливается. Поэтому анализ влияния локального атомного поля на устойчивость энергообмена в ходе генерации излучения внутри полупроводниковых структур в условиях различия поляризуемостей частиц в основном и возбуждённом состояниях и связанной с этим нелинейностью рефракции являлся одной из задач представленного ниже исследования. Учёт неоднородного уширения оптического перехода, которое характерно для генерирующих полупроводниковых структур на основе квантовых точек [5], представляет другой аспект оригинальности подхода, использованного ниже при изучении динамики резонансного излучения.

1 Основные уравнения

Динамическая модель полупроводникового лазера, в рамках которой изучался энергообмен между излучаемым световым полем $E(t)$ несущей частоты ω и средой, построена нами на основе традиционно используемой так называемой сосредоточенной балансной схемы. Среда при этом

представляет структуру из нескольких страт, образованных квантовыми точками. В этой модели в амплитуду плосковолнового поля $E'(t)$, действующего на активные центры и определяющего нелинейный отклик, включается характерная при учёте влияния диполь-дипольного взаимодействия локальная поправка:

$$E'(t) = E(t) + \frac{i}{3\varepsilon_0} P(t). \quad (1.1)$$

Амплитуды полей и величина резонансной поверхностной поляризованности $P(t)$ усреднены по длине усиливающего элемента и квазистационарны (за время, сравнимое с периодом светового колебания, изменения амплитуд поля и поляризованности относительно малы). В выражении для резонансной поляризованности (1.1), кроме прямой резонансной составляющей, содержится также квазирезонансная:

$$P(t) = |\mu_{12}| N \langle \rho(t, \omega) \rangle + i 2\pi\varepsilon_0 \Delta \alpha N (\langle n(t, \omega) \rangle - n_0) E'(t). \quad (1.2)$$

В ней учтено характеризующее величиной $\Delta\alpha$ различие поляризуемости в состояниях атома, соответствующих основному и возбуждённому уровням перехода, в связи с чем возможно рассмотрение следствий резонансной нелинейной рефракции. В выражении (1.2) содержатся: модуль матричного элемента дипольного момента $|\mu_{12}|$, объёмная плотность резонансных частиц N , вероятностная переменная $\rho(t, \omega)$ спектральной составляющей поляризованности и разность инверсии заселённости уровней резонансного перехода $n(t, \omega)$ – в момент времени t и n_0 – в начальный момент времени. Динамика величин $\rho(t, \omega)$ и $(n(t, \omega) - n_0)$ определяется на основе квантовомеханических уравнений матрицы плотности. Угловые скобки в обозначении материальных переменных означают усреднение по диапазону частот, соответствующему области неоднородного уширения. В результате адиабатического исключения частотных компонент поляризованности ρ скоростные уравнения формулируются для переменных нормированной комплексной амплитуды действующего поля $A(\tau)$ и спектральных компонент инверсной заселённости $n(\tau, \delta)$, которая в поставленной нами задаче рассматривается как концентрация экситонов:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= \frac{1}{\tau_\phi} \left\{ \langle n \rangle + \frac{R}{3\sigma} \langle \delta n \rangle - 1 + \right. \\ &+ i \left[\langle \delta n \rangle + \beta (\langle n \rangle - n_0) \right] \left. \right\} A - \frac{\beta R}{3\sigma} \frac{d\langle n \rangle}{d\tau} A, \\ \frac{dn}{d\tau} &= \alpha - n - \frac{n |A|^2}{1 + (\delta + \Delta)^2}, \\ \langle n \rangle &= \int \frac{g(\Delta) n}{1 + (\delta + \Delta)^2} d\Delta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\langle \delta n \rangle = \int \frac{(\delta + \Delta) g(\Delta) n}{1 + (\delta + \Delta)^2} d\Delta,$$

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma}, \quad \Delta = \frac{\omega_0 - \omega_{12}}{\gamma}.$$

В системе (1.3) амплитуда $A(\tau)$ нормирована по амплитуде действующего поля, соответствующей насыщению:

$$A = |\mu_{12}| E' \sqrt{\tau_s / \gamma} / \hbar,$$

время τ – по времени жизни экситонов: $\tau = t / \tau_s$; аналогично нормированы остальные временные параметры. Величина одного из таких основных параметров τ_ϕ – времени жизни фотона в резонаторе, содержащем генерирующую структуру – кроме потерь на излучение и поглощение, зависит от значений коэффициента заполнения резонатора и параметра оптического ограничения σ . В системе (1.3) содержатся также: $g(\Delta)$ – функция гауссова распределения по частоте ω_{12} с дисперсией $1/\tau'$, характеризующей неоднородное уширение вблизи центральной частоты резонанса ω_0 ; γ – однородная ширина резонансной линии

поглощения; $\beta = \frac{2\pi\Delta\alpha\hbar\gamma\varepsilon_0}{|\mu_{12}|^2}$ – параметр амплитудно-фазовой связи; $R = \lambda/2\pi l$ – нормирующий коэффициент (l – длина усиливающего элемента, λ – длина волны излучения), определяемый

током накачки; α – скоростной параметр, его величина характеризует превышение током накачки порогового уровня; пороговый уровень усиления определяется в предположении о равенстве показателя усиления в центре линии

$\kappa = \frac{|\mu_{12}|^2 \omega_0 N l}{\gamma \hbar \varepsilon_0 c}$ суммарным потерям излучения в лазерном устройстве.

Мнимая часть уравнения для амплитуды содержит две составляющие, также описывающие нелинейные фазовые эффекты:

– дисперсионная компонента, пропорциональная $\langle \delta n \rangle$, обуславливает возможность смещения частоты генерации к центру линии по мере увеличения интенсивности;

– нелинейно-рефрактивная компонента, пропорциональная резонансной вариации инверсии; в ней, в сущности, учтено известное явление уширения спектральной линии, значимость которого для систем квантовых точек оценена, например, в [6].

Параметр амплитудно-фазовой связи β пропорционален известному фактору Хенри [7]. В условиях значимости спектрального уширения линии усилению в квантоворазмерной структуре свойственна динамическая модуляционная составляющая, которая линейно – с коэффициентом, пропорциональным параметру β – зависит от скорости изменения концентрации экситонов.

2 Результаты численного моделирования

Анализ процессов излучения выполнен посредством численного интегрирования кинетической системы (1.3) методом Рунге-Кутты, в результате которого были определены зависимости интенсивности действующего поля $S = |A(\tau)|^2$, то есть величины, релаксационная динамика которой отчётливо проявляется в реальных экспериментах. Начальные условия соответствовали выполнению амплитудного условия генерации – принято, что $\langle n(\tau=0) \rangle = 1$ и начальное значение величины $A(\tau=0)$ на несколько порядков меньше равновесного значения. Таким образом, на начальном этапе, в сущности, решалась задача усиления слабого сигнала. Непосредственно рассчитывалась величина интенсивности излучаемого поля

$$S_0(\tau) = S[(1 - \kappa R \langle \delta n \rangle)^2 + (\kappa R \langle n \rangle)^2].$$

Выявлено, что ход кривых, иллюстрирующих решения системы (1.3) для интенсивности в соответствующем этим условиям диапазоне начальных значений S , не зависел от выбора начальных значений A . На рисунке 2.1 проиллюстрированы два основных варианта возможных решений нелинейной системы (1.3): соответствующий режиму, переходному к установившемуся режиму с непрерывной генерацией (фрагмент *a* на рисунке 2.1), и автоколебательному режиму с генерацией регулярной периодической последовательности незатухающих импульсов (фрагменты *б* и *в* на рисунке 2.1).

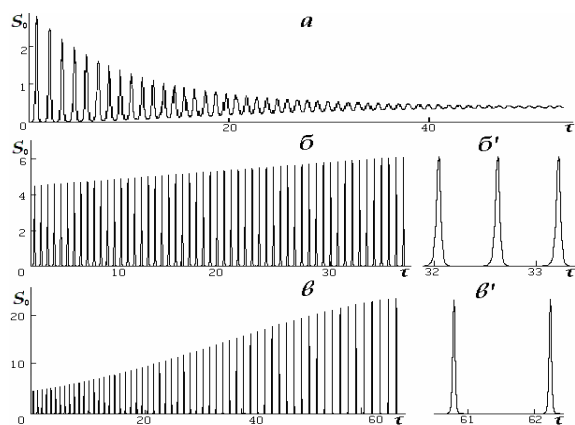


Рисунок 2.1 – Временная развёртка интенсивности излучаемого поля

($a - \alpha = 1,6; \delta = 0,5; б - \alpha = 1,72; \delta = 0,4;$
 $в - \alpha = 1,7; \delta = 0,33; \beta = 2, \tau_\Phi = 5$ пс, $\tau_s = 1$ нс,
 $\gamma = 1 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}; \kappa = 0,13, \sigma = 0,04; \gamma\tau' = 0,3;$
 $\lambda = 1,25 \cdot 10^{-6}$ м).

На фрагментах *б'* и *в'* приведены зависимости, полученные с большим разрешением; единица измерения по временной шкале – наносекунда

При численном моделировании временной динамики на основе уравнений (1.3) выбор

параметров проводился с учетом заимствованных в работах [1], [5], [6] данных о структурных характеристиках квантовых точек в системах *InAs/(Al)GaAs* и *InAs/InGaAs*, расположенных на подложках из *GaAs*, и излучающих в диапазоне длин волн 1,25–1,29 мкм.

Основным фактором, определяющим развитие автоколебательного режима в условиях влияния дополнительных нелинейных эффектов, характерных для резонансного взаимодействия и изменяющих условия устойчивого энергообмена в лазерных системах, следует считать различие времён релаксации в каналах накачки и генерации. Частота следования, длительность и скважность импульсов в сериях релаксационных автоколебаний в проведенных модельных расчётах зависела от соотношения параметров, определяющих коэффициенты в уравнениях (1.3). Отметим, что длительность серии импульсов может достигать долей пикосекунды; период следования импульсов соответствует субнаносекундному диапазону.

3 Устойчивость решений и режим автоколебаний

Таким образом, посредством скоростных уравнений (1.3) описывается ряд нелинейных эффектов, которые могут проявиться при изучении динамики генерации в структурах из квантовых точек и, так или иначе, связаны с вкладом локальных атомных полей в действующее поле. Охарактеризуем далее некоторые из основных динамических закономерностей исследуемой модели на основе элементарного анализа решений системы (1.3) для интенсивности. Для этого в системе (1.3) удобно перейти к соответствующей нормированной переменной $S = |A(\tau)|^2$. В целях упрощения анализа пренебрежём также влиянием неоднородного уширения и запишем систему уравнений для переменных $S(\tau)$ и $n(\tau)$ в виде:

$$\frac{dS}{d\tau} = \left[\frac{1}{\tau_\Phi} \left(\frac{1 + R\Delta/3}{1 + \Delta^2} n - 1 \right) - \frac{\beta R}{3\sigma} \frac{dn}{d\tau} \right] S, \quad (3.1)$$

$$\frac{dn}{d\tau} = \alpha - n \left(1 + \frac{S}{1 + \Delta^2} \right), \quad \Delta = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma}.$$

В получаемых результатах численного интегрирования системы (3.1) в целом воспроизводятся основные закономерности динамики. В частности, предсказанная в [8] возможность перехода от установившегося режима к режиму автоколебаний при изменении уровня тока накачки обнаруживается в вариациях численных решений более точной системы (1.3) для нарастающих значений параметра скорости накачки α . Неоднородное уширение рабочего перехода в среде обуславливает существенное увеличение скважности и уменьшение длительности импульсов по сравнению с генерацией в условиях однородного уширения.

Качественно анализируя поведение функций $S(\tau)$ вблизи равновесного состояния с ненулевой интенсивностью S_s , прежде всего можно оценить диапазон параметров системы (3.1), в котором это состояние устойчиво [9] – с течением времени функции, которые описывают динамику обеих переменных, после ряда осцилляций затухают, приближаясь к равновесным значениям. Выражения для вычисления равновесных значений S_s и n_s получаем при определении сингулярных пределов системы (3.1):

$$S_s = \alpha(1 + R\Delta/3) - 1 - \Delta^2, \quad n_s = \frac{1 + \Delta^2}{1 + R\Delta/3}. \quad (3.2)$$

Проводя линеаризацию системы (3.1) в окрестности точек равновесия (3.2), можно получить характеристический полином относительно θ – комплексного коэффициента затухания, содержащегося в показателе экспоненциальной функции $\exp(\theta\tau)$ в решении линеаризованного аналога системы (3.1). Если осцилляции определенно релаксирующие (то есть затухают с приближением к равновесным значениям интенсивности), то решения системы (3.1) соответствуют переходу лазера к стационарному режиму генерации. В этих условиях точка равновесия с координатами (S_s, n_s) на фазовой плоскости системы (3.1) – устойчивый фокус и является аттрактором фазовых кривых. При этом характеристический полином, выраженный квадратным уравнением, должен иметь комплексно-сопряженные корни

$$\theta_{1,2} = \chi/2 \pm i\sqrt{-D}.$$

Выражения для вещественной части корней и дискриминанта характеристического уравнения имеют вид:

$$\chi = -\left(\frac{\alpha}{n_s} - \frac{1}{\sigma} \frac{\beta R S_s}{3 + R\Delta}\right), \quad (3.3)$$

$$D = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{n_s} - \frac{1}{\sigma} \frac{\beta R S_s}{3 + R\Delta}\right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_\phi} + \frac{\alpha\beta R}{3\sigma}\right) \left(\frac{\alpha}{n_s} - 1\right),$$

и совместно с соотношениями (3.2) могут быть положены в основу критерия для оценки поведения фазовых траекторий на плоскости (S, n) в окрестности равновесного состояния (S_s, n_s) .

Устойчивость фокуса (S_s, n_s) может быть реализована при условии $\chi < 0$.

При определении условия существования автоколебаний следует выделить зоны параметров, в которых точка равновесия (S_s, n_s) неустойчива и соответствует неустойчивому фокусу. При смещении траекторий, соответствующих осцилляторным решениям (3.1), из окрестности точки равновесия их аттрактором окажется предельный цикл. Это обусловлено неизбежным насыщением роста $n(\tau)$ при увеличении $S(\tau)$ и последующим снижением (сбросом) инверсии, происходящими периодически. Точка равновесия оказывается неустойчивым фокусом, если $\chi > 0$. Такого рода неустойчивость соответствует существованию периодического решения линеаризованных уравнений в виде волн с «разгорающейся» амплитудой и частотой $\Omega = \sqrt{-D}$. Исходной же нелинейной системе (3.1) соответствуют осцилляторные решения для интенсивности $S(\tau)$ и инверсии $n(\tau)$, амплитуда и контраст которых с выходом на предельный цикл стабилизируются. Таким образом, на основе использованной здесь модели описывается процесс регулярных незатухающих пульсаций. Такой режим излучения, реализуемый при постоянном уровне накачки, интересен в практическом отношении, поэтому, учитывая условие неустойчивости фокуса, сформулируем основное условие его реализации:

$$\alpha > \frac{\beta R}{\sigma} \frac{1 + \Delta^2}{3 + R\Delta} \left(\frac{\beta R}{3\sigma} - \frac{1 + R\Delta/3}{1 + \Delta^2}\right)^{-1}. \quad (3.4)$$

При графической иллюстрации зависимости $\chi(\alpha)$ положением точек пересечения кривых $\chi(\alpha)$ со шкалой параметра тока накачки при разных значениях отстройки частоты (рисунок 3.1) определяется так называемый второй порог генерации – уровень накачки α , начиная с которого возможна самопроизвольная неустойчивость выходного излучения. Отметим, что величина этого порогового значения увеличивается при увеличении отстройки Δ , тогда переход в режим автоколебаний для излучения с частотой, близкой к резонансной, достигим при меньшем уровне накачки.

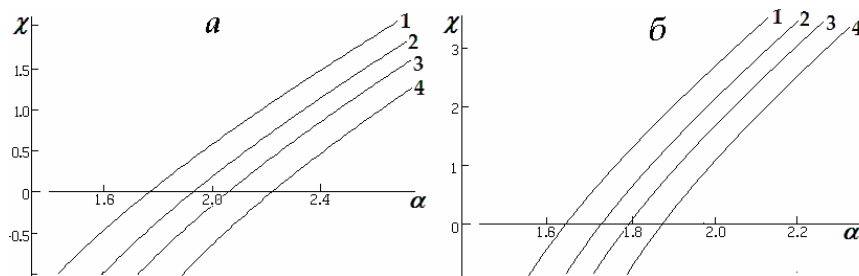


Рисунок 3.1 – Зависимость действительной части корня характеристического уравнения от тока накачки при разных значениях частотной отстройки и параметра амплитудно-фазовой связи ($\beta = 1,0$ (а); $1,6$ (б); $\Delta = 0$ (кривая 1); $0,4$ (2); $0,5$ (3); $0,6$ (4); $\kappa = 1,3$; $R = 0,05$; $\sigma = 0,04$)

При расчёте пороговых характеристик по соотношениям (3.2) и (3.4) использованы те же числовые значения параметров систем, что и при численном моделировании временной динамики на основе уравнений (1.3).

Заключение

Результаты исследования могут быть полезны при разработке компактных лазерных устройств, генерирующих серии коротких контрастных импульсов. Представляется важным, что в определённых условиях при постоянном токе накачки можно реализовать режим излучения, который обычно достигается с использованием модулирующих устройств, синхронизированных с системой накачки, которые усложняют схему прибора.

Работа проведена в рамках выполнения задания *Фотоника 2.2.08* в русле ГПНИ «Электроника и фотоника».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rabi oscillations in the excitonic ground-state transition of InGaAs quantum dots* / P. Borri [et al.] // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 66, № 8. – P. 081306-1–081306-4.
2. *Каплан, А.Е.* Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, «магические» числа и оптическая бистабильность / А.Е. Каплан, С.Н. Волков // УФН. – 2009. – Т. 179, № 5. – С. 539–547.
3. *Optical Stark effect in a quantum dot: Ultrafast control of single exciton polarizations* / T. Unold [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92, № 15. – P. 157401–(1–4)
4. *Local-field effects in a dense ensemble of resonant atoms: Model of a generalized two-level system* / А.А. Афанас'ев [et al.] // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60, № 2. – P. 1523–1529.
5. *Жуков, А.Е.* Полупроводниковые лазеры на основе квантовых точек для систем оптической связи / А.Е. Жуков, А.Р. Ковш // Квантовая электроника. – 2008. – Т. 38, № 5. – С. 409–422.
6. *Гетероструктуры с квантовыми точками: получение, свойства, лазеры* / Ж.И. Алфёров [и др.] // ФТП. – 1998. – Т. 32, № 4. – С. 385–410.
7. *Henry, С.Н.* Theory of the linewidth of semiconductor lasers / С.Н. Henry // IEEE J. Quant. Electron. – 1982. – Vol. 18, № 2. – P. 259–264.
8. *Тимощенко, Е.В.* Динамика излучения в структурах из квантовых точек при учете ближних дипольных взаимодействий / Е.В. Тимощенко, В.А. Юревич, Ю.В. Юревич // Полупроводниковые лазеры и системы на их основе : Сборник статей 8-го Белорусско-Российского семинара, Минск, 17 – 20 мая 2011 г. / Институт физики НАН Беларуси. Минск, 2011. – С. 81–82.
9. *Самсон, А.М.* Автоколебания в лазерах / А.М. Самсон, Л.А. Котомцева, Н.А. Лойко. – Мн. : Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.

Поступила в редакцию 12.12.11.

УДК 512.542

О НАИМЕНЬШИХ И НАИБОЛЬШИХ ЭЛЕМЕНТАХ СЕКЦИИ ЛОКЕТТА ФИТТИНГОВА ФУНКТОРА

Е.А. Витько

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

ON THE SMALLEST AND THE LARGEST ELEMENTS OF THE LOCKETT SECTION OF A FITTING FUNCTOR

E.A. Vitko

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

В работе определяются аналоги известных в теории классов Фиттинга операторов «*», «*» и секций Локетта на множестве фиттинговых \mathfrak{X} -функторов (\mathfrak{X} – некоторый непустой класс Фиттинга). При этом секцией Локетта сопряженного фиттингова \mathfrak{X} -функтора f называем множество $\text{Locksec}(f) = \{g: g \text{ – сопряженный фиттингов } \mathfrak{X}\text{-функтор и } f^* = g^*\}$. Доказано, что для любого сопряженного фиттингова \mathfrak{X} -функтора f секция Локетта содержит наибольший элемент. Кроме того, определены условия, при которых секция Локетта содержит наименьший элемент.

Ключевые слова: оператор Локетта, секция Локетта, фиттингов \mathfrak{X} -функтор.

In the paper analogues of the known in the theory of Fitting classes operators «*», «*» and the Lockett sections on the set of Fitting \mathfrak{X} -functors (\mathfrak{X} is some non-empty Fitting class) are defined. By the Lockett section of a conjugate Fitting \mathfrak{X} -functor f we mean the set $\text{Locksec}(f) = \{g: g \text{ is a conjugate Fitting } \mathfrak{X}\text{-functor and } f^* = g^*\}$. It is proved that the Lockett section of a conjugate Fitting \mathfrak{X} -functor contains the largest element. Besides we describe conditions under which the Lockett section contains the smallest element.

Keywords: Lockett's operation, Lockett section, Fitting \mathfrak{X} -functor.

Введение

Хорошо известны своими приложениями для исследования классов конечных групп и их характеристики операторы «*» и «*», которые были определены Локеттом [1]. Напомним, что каждому непустому классу Фиттинга \mathfrak{F} операторы «*» и «*» сопоставляют соответственно класс \mathfrak{F}^* – наименьший из классов Фиттинга, содержащих \mathfrak{F} , такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс \mathfrak{F}_* – пересечение всех таких классов Фиттинга \mathfrak{X} , для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. В последующем классы Фиттинга стали называть классами Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Примечателен тот факт, что семейство классов Локетта обширно: каждый класс Фиттинга, замкнутый относительно хотя бы одной из операций Q , R_0 , S_F (см., например, [2, предложение X.1.25]), в частности, все формации Фиттинга являются классами Локетта. Более того, посредством таких классов оказались возможными изящные характеристики нормальных классов Фиттинга, радикалов и инъекторов.

Базируясь на синтезе понятий радикала и инъектора, в серии крупных работ Бейдельмана, Брюстера и Хаука [3], [4], Бейдельмана, Галледжи [5], Бейдельмана, Хаука [6] были заложены основы теории фиттинговых функторов в классе

\mathfrak{E} всех конечных разрешимых групп. Напомним, что отображение f , которое сопоставляет каждой группе G из класса \mathfrak{E} некоторую непустую систему ее подгрупп $f(G)$, называют фиттинговым функтором [3], если выполняется следующее условие:

$$\{\alpha(X): X \in f(G)\} = \{\alpha(G) \cap Y: Y \in f(H)\}$$

для любого мономорфизма $\alpha: G \rightarrow H$ такого, что $\alpha(G)$ – нормальная подгруппа группы H . Заметим, что если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то отображения $f = \text{Inj}_{\mathfrak{F}}$ и $g = \text{Rad}_{\mathfrak{F}}$, сопоставляющие каждой группе $G \in \mathfrak{E}$ множества $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ ее \mathfrak{F} -инъекторов и $\text{Rad}_{\mathfrak{F}}(G)$ ее \mathfrak{F} -радикалов, являются фиттинговыми функторами (см., например, [2, лемма IX.1.1] и [2, замечание IX.1.3]).

Значительный интерес с точки зрения приложений в теории классов представляет поиск функторных аналогов операторов Локетта. Впервые в разрешимом случае так называемые функторы Локетта и секции Локетта были построены в [4]. Напомним, что в теории классов Фиттинга множество всех таких классов Фиттинга \mathfrak{X} , что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}$, называют [2] секцией Локетта класса Фиттинга \mathfrak{F} и обозначают $\text{Locksec}(\mathfrak{F})$. Ключевым моментом для исследований структуры классов Фиттинга явился тот факт, что каждая секция Локетта класса Фиттинга \mathfrak{F} содержит наименьший и наибольший по включению и по сильному

вложению элементы, которыми являются классы Фиттинга \mathfrak{F}_* и \mathfrak{F}^* соответственно (см., например, [2, теорема X.1.17]). Однако, как установлено в [4], в универсуме \mathfrak{S} решение задачи построения секции Локетта и существования наименьшего и наибольшего по включению элементов этой секции для произвольных фиттинговых функторов в общем случае невозможно. Вместе с тем, Бейдельманом, Брюстером и Хауком доказано существование наибольшего элемента секции Локетта для любого сопряженного фиттингова функтора [4, теорема 6.1] и наименьшего элемента для сопряженного фиттингова функтора с заданными свойствами [4, теорема 7.9].

В настоящей работе мы развиваем указанные выше результаты [4] в двух направлениях. Во-первых, следуя [7], мы определяем функтор в некотором непустом классе Фиттинга \mathfrak{X} . Во-вторых, мы не требуем разрешимости групп из класса \mathfrak{X} . Нами определяется секция Локетта для любого сопряженного фиттингова \mathfrak{X} -функтора и показано, что такая секция всегда содержит наибольший элемент, а также определяются те условия, при которых она содержит наименьший элемент.

В определениях и обозначениях мы следуем [2]. В работе рассматриваются только конечные группы.

1 Предварительные сведения

Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп \mathfrak{F} , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется ее \mathfrak{F} -радикалом, если она является наибольшей из нормальных \mathfrak{F} -подгрупп группы G .

Если \mathfrak{X} – некоторый непустой класс Фиттинга, то отображение f , которое каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп $f(G)$, называют фиттинговым \mathfrak{X} -функтором [7], если выполняются следующие условия:

(i) если $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$ – изоморфизм, то $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$;

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G , то

$$f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}.$$

Коротко множество $\{\alpha(X): X \in f(G)\}$ будем обозначать через $\alpha(f(G))$, а множество $\{X \cap N: X \in f(G)\}$ – через $f(G) \cap N$.

Фиттингов \mathfrak{X} -функтор называется сопряженным, если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G .

Напомним, что подгруппу X группы G называют p -нормально вложенной, если силовская p -подгруппа группы X является силовской

p -подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы G . Фиттингов \mathfrak{X} -функтор f назовем p -нормально вложенным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является p -нормально вложенной подгруппой группы G . Если f является p -нормально вложенным для всех $p \in \mathbb{P}$, то такой фиттингов \mathfrak{X} -функтор будем называть нормально вложенным.

Подгруппа H группы G называется пронормальной в G , если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$. Функтор f назовем пронормальным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе G .

Введем на множестве сопряженных фиттинговых \mathfrak{X} -функторов отношение “ \ll ” следующим образом. Если f и g – сопряженные фиттинговы \mathfrak{X} -функторы, то функтор f назовем сильно вложенным в g и обозначим $f \ll g$, в том и только в том случае, когда для любой подгруппы $X \in f(G)$ существует такая подгруппа $Y \in g(G)$, что $X \leq Y$.

Пусть G – группа, $m \geq 2$ – натуральное число и $G^m = \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_m$. Тогда отображение $\pi_i:$

$G^m \rightarrow G$ такое, что $\pi_i(g_1, g_2, \dots, g_m) = g_i$ для $(g_1, g_2, \dots, g_m) \in G^m$, называют проекцией группы G^m на i -ую компоненту для $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Следуя [4], введем

Определение 1.1.

(1) Пусть группа $G \in \mathfrak{X}$, f – фиттингов \mathfrak{X} -функтор, $m \geq 2$ – натуральное число. Группу $T \in f(G^m)$ назовем удовлетворяющей условию (α_m) , если из того, что $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T$ следует

$$\left(x_1, 1, \dots, 1, x_1^{j-1}, 1, \dots, 1 \right) \in T \text{ для всех } j \in \{2, 3, \dots, m\}.$$

(2) Фиттингов \mathfrak{X} -функтор f назовем удовлетворяющим условию (α_m) , если для любой группы G в каждом сопряженном классе из $f(G^m)$ существует подгруппа T , удовлетворяющая условию (α_m) .

Следуя доказательству утверждений 3.6, 3.9, 3.12, 3.13 [4] для \mathfrak{S} -функторов, легко убедиться в их справедливости для фиттинговых \mathfrak{X} -функторов в общем случае. Указанные утверждения [4] мы сформулируем в виде четырех лемм, которые мы будем использовать для построения секции Локетта фиттингова \mathfrak{X} -функтора и изучения ее структуры.

Лемма 1.2. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор, группа $G \in \mathfrak{X}$, $m \geq 2$ – натуральное число и подгруппа T из $f(G^m)$ удовлетворяет условию (α_m) . Тогда $\pi_i(T) = \pi_i(T)$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Лемма 1.3. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор, $G \in \mathfrak{X}$ и подгруппа $T \in f(G^m)$. Тогда существует подгруппа $S \in f(G^2)$ такая,

что $(g, g^{-1}) \in S$ для всех $g \in \pi_1(T)$ и справедливо равенство $\pi_1(S) = \pi_1(T)$.

Лемма 1.4. Пусть f – фиттингов \mathfrak{X} -функтор. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) f удовлетворяет условию (α_m) для некоторого $m \geq 2$;
- 2) f удовлетворяет условию (α_m) для всех $m \geq 2$;
- 3) f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор.

Лемма 1.5. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор, $G \in \mathfrak{X}$ и подгруппа $T \in f(G^2)$ удовлетворяет условию (α_2) . Тогда подгруппа T может быть представлена в виде

$$T = (V \times V) \left\langle (x, x^{-1}) : x \in \pi_1(T) \right\rangle,$$

где $V = \pi_1(T \cap (G \times 1)) = \pi_2(T \cap (1 \times G))$.

2 \mathfrak{X} -функторы Локетта

Вначале определим на множестве фиттинговых \mathfrak{X} -функторов оператор “*” – аналог оператора Локетта на множестве классов Фиттинга. Заметим, что [2, теорема X.1.8] для любого класса Фиттинга \mathfrak{F} конечных разрешимых групп справедливо включение $\mathfrak{F} \ll \mathfrak{F}^*$. Вместе с тем, установлено [4], что для несопряженного фиттингова \mathfrak{S} -функтора f_s такого, что $f_s(G) = \{U : U \leq G\}$, не существует функтора f^* , для которого $f \ll f^*$. Хотя, как установлено в [4], для сопряженных фиттинговых \mathfrak{S} -функторов можно определить \mathfrak{S} -функтор f^* такой, что указанное свойство выполняется.

Следуя [4], для фиттингова \mathfrak{X} -функтора f введем определение \mathfrak{X} -функтора f^* в общем случае, когда \mathfrak{X} – некоторый непустой класс Фиттинга.

Определение 2.1. Пусть f – фиттингов \mathfrak{X} -функтор. Определим функтор f^* следующим образом:

$$f^*(G) = \{\pi_1(T) : T \in f(G \times G)\}$$

для любой группы $G \in \mathfrak{X}$, где π_1 – проекция первой компоненты $G \times G$ на G .

Лемма 2.2. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если подгруппы $U \in f(G^m)$, $V \in f(G^n)$, то $\pi_i(U)$ и $\pi_j(V)$ являются сопряженными подгруппами группы G для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{1, \dots, n\}$;
- (2) множество $f^*(G)$ является характеристическим классом сопряженных подгрупп.

Доказательство. (1) Так как фиттингов \mathfrak{X} -функтор f сопряженный, то по лемме 1.4 подгруппа U удовлетворяет условию (α_m) , а подгруппа V удовлетворяет условию (α_n) . Но тогда по лемме 1.2 $\pi_i(U) = \pi_i(U)$ и $\pi_i(V) = \pi_i(V)$. Кроме того, по лемме 1.3 существуют такие подгруппы S и T из $f(G^2)$, что $\pi_1(U) = \pi_1(S)$ и $\pi_1(V) = \pi_1(T)$. Ввиду сопряженности функтора f существует

элемент $(g_1, g_2) \in G^2$ такой, что $T^{(g_1, g_2)} = S$. Таким образом,

$$\pi_1(V)^{g_1} = \pi_1(T)^{g_1} = \pi_1(S) = \pi_1(U).$$

(2) Ввиду утверждения (1) множество $f^*(G)$ является классом сопряженных подгрупп. Покажем, что этот класс является характеристическим. Действительно, пусть $\alpha \in \text{Aut}(G)$. Определим автоморфизм $\theta \in \text{Aut}(G^2)$ следующим образом: $\theta(g_1, g_2) = (\alpha(g_1), g_2)$, где $(g_1, g_2) \in G^2$. Пусть $T \in f(G^2)$. Тогда $\theta(T) \in f(G^2)$ и $\pi_1(\theta(T)) \in f^*(G)$. Но $\pi_1(\theta(T)) = \alpha(\pi_1(T))$. Следовательно, $\alpha(\pi_1(T)) \in f^*(G)$. Лемма доказана.

Следующая теорема является аналогом известных свойств операторов Локетта [1] в теории классов Фиттинга (см. также [2, теорема X.1.8]).

Теорема 2.3. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор. Тогда

- (1) f^* – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор;
- (2) пусть $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, тогда

$$f^*(G) = \{\pi_i(T) : T \in f(G^m)\};$$

- (3) $(f^*)^* = f^*$.

Доказательство. (1) Пусть группы $G, H \in \mathfrak{X}$, α – изоморфизм G на H . Определим изоморфизм α_1 группы G^2 на группу H^2 следующим образом: $\alpha_1(g_1, g_2) = (\alpha(g_1), \alpha(g_2))$, где $(g_1, g_2) \in G^2$.

Пусть $R \in f(G^2)$, тогда с учетом условия (i) определения фиттингова \mathfrak{X} -функтора получим

$$\alpha_1(R) \in \alpha_1(f(G^2)) = f(\alpha_1(G^2)) = f(H^2).$$

Следовательно, ввиду определения изоморфизма α_1

$$\alpha(\pi_1(R)) = \pi_1(\alpha_1(R)) \in f^*(H) = f^*(\alpha(G)).$$

Таким образом,

$$\alpha(f^*(G)) \subseteq f^*(\alpha(G)).$$

Докажем обратное включение. Пусть $\pi_1(S) \in f^*(H) = f^*(\alpha(G))$, где $S \in f(H^2)$. Тогда ввиду определения фиттингова \mathfrak{X} -функтора

$$\alpha_1^{-1}(S) \in \alpha_1^{-1}(f(H^2)) = f(\alpha_1^{-1}(H^2)) = f(G^2).$$

Следовательно, $\pi_1(\alpha_1^{-1}(S)) \in f^*(G)$. Но так как $\pi_1(\alpha_1^{-1}(S)) = \alpha^{-1}(\pi_1(S))$, то $\pi_1(S) \in \alpha(f^*(G))$. Получим

$$f^*(\alpha(G)) \subseteq \alpha(f^*(G))$$

и условие (i) определения фиттингова \mathfrak{X} -функтора выполняется.

Проверим для f^* выполнимость условия (ii) определения фиттингова \mathfrak{X} -функтора.

Пусть $G \in \mathfrak{X}$, N – нормальная подгруппа группы G и $T \in f(G^2)$. С учетом леммы 1.4 существует элемент $(g_1, g_2) \in G^2$ такой, что подгруппа $T^{(g_1, g_2)}$ удовлетворяет условию (α_2) . Тогда, если $n \in N \cap \pi_1(T^{(g_1, g_2)})$, то $(n, n^{-1}) \in N^2 \cap T^{(g_1, g_2)} \in f(N^2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} N \cap \pi_1(T)^{g_1} &= N \cap \pi_1(T^{(g_1, g_2)}) = \\ &= \pi_1(N^2 \cap T^{(g_1, g_2)}) \in f^*(N). \end{aligned}$$

Таким образом, $f^*(G) \cap N \subseteq f^*(N)$. Кроме того, по лемме 2.2 $f^*(G) \cap N$ и $f^*(N)$ – классы сопряженных подгрупп группы N .

Следовательно, $f^*(G) \cap N = f^*(N)$.

Утверждение (2) следует непосредственно из утверждения (1) и леммы 2.2.

Докажем утверждение (3). Пусть группа $G \in \mathfrak{X}$ и $\pi_{4,2}$ – проекция подгруппы из G^4 на первые две компоненты, $\pi_{2,1}$ – проекция подгруппы из G^2 на первую компоненту и $\pi_{4,1}$ – проекция подгруппы из G^4 на первую компоненту. Так как $\pi_{4,1} = \pi_{2,1} \circ \pi_{4,2}$, то

$$\begin{aligned} (f^*)^*(G) &= \{\pi_{2,1}(W) : W \in f^*(G^2)\} = \\ &= \{\pi_{2,1}(W) : W = \pi_{4,2}(X), X \in f(G^4)\} = \\ &= \{\pi_{4,1}(X) : X \in f(G^4)\}. \end{aligned}$$

Тогда ввиду утверждения (2) получим $f^*(G) = \{\pi_1(X) : X \in f(G^4)\}$. Таким образом, $(f^*)^* = f^*$.

Лемма доказана.

Конкретные случаи фиттингова \mathfrak{X} -функтора f^* можно определить, используя основные объекты теории классов Фиттинга – радикалы и инъекторы. Это подтверждает следующий

Пример 2.4. Пусть f – фиттингов \mathfrak{X} -функтор.

(а) Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $f(G) = \text{Rad}_{\mathfrak{F}}(G) = \{G_{\mathfrak{F}}\}$. Тогда $f^* = \text{Rad}_{\mathfrak{F}}$. Действительно, если $f(G \times G) = \{(G \times G)_{\mathfrak{F}}\}$, то по теореме X.1.4 [2] получим $f^*(G) = \{G_{\mathfrak{F}}\}$.

(б) Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}^{\pi}$. Если $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) = \{X : X - \mathfrak{F}\text{-инъектор группы } G\}$, то с учетом теорем II.2.5.3 [8], X.1.5 [2] и X.1.33 [2] получим $f^* = \text{Inj}_{\mathfrak{F}}$.

3 Секция Локетта фиттингова \mathfrak{X} -функтора

Следуя [1], [4], определим для сопряженных фиттинговых \mathfrak{X} -функторов понятие секции Локетта.

Определение 3.1. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор. Тогда секцией Локетта назовем множество

$$\text{Locksec}(f) = \{g : g - \text{сопряженный фиттингов } \mathfrak{X}\text{-функтор и } f^* = g^*\}.$$

Некоторые простейшие свойства секций Локетта фиттинговых \mathfrak{X} -функторов представляет

Замечание 3.2. Напомним, что если f и g – наследственные фиттингов \mathfrak{X} -функторы, то произведением \mathfrak{X} -функторов $f \circ g$ называется [7] множество

$$\{X : X \in f(Y) \text{ для некоторой подгруппы } Y \in g(G)\}.$$

Если f – фиттингов \mathfrak{X} -функтор, π – множество простых чисел, то непосредственной проверкой можно показать, что класс групп

$$L_{\pi}(f) = \{G \in \mathfrak{X} : |G : X| - \pi\text{-число для всех } X \in f(G)\}$$

является классом Фиттинга.

Если $\pi = \mathbb{P}$, то класс $L_{\pi}(f)$ обозначают $L(f)$.

Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}^{\pi}$ ($\pi = \pi(\mathfrak{F})$) и фиттингов \mathfrak{X} -функтор $f = \text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда ввиду теоремы II.2.5.3 [8] f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор, и поэтому, используя пример 2.4 (б), получаем:

(а) Если $g, h \in \text{Locksec}(f)$, то $g \circ h \in \text{Locksec}(f)$.

(б) Если $g \in \text{Locksec}(f)$, то $L(g) \in \text{Locksec}(\mathfrak{F})$.

(в) Пусть $g \in \text{Locksec}(f)$. Тогда существует класс Фиттинга $\mathfrak{H} \in \text{Locksec}(\mathfrak{F})$ такой, что $g = \text{Inj}_{\mathfrak{H}}(G)$ в том и только в том случае, когда $g \circ f^* = g$.

(г) Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ и $g \in \text{Locksec}(f)$, то $g \circ \text{Rad}_{\mathfrak{E}} \in \text{Locksec}(f)$.

Следующая теорема устанавливает существование наибольшего по сильному вложению элемента секции Локетта для сопряженного фиттингова \mathfrak{X} -функтора.

Теорема 3.3. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор. Тогда $g \ll f^*$ для всех $g \in \text{Locksec}(f)$.

Доказательство. Покажем вначале, что произвольный фиттингов \mathfrak{X} -функтор g сильно вложен в функтор g^* . Пусть X – подгруппа из $g(G)$. Так как группы G и $G \times 1$ изоморфны, то

$$X \times 1 \in g(G \times 1).$$

Кроме того, $G \times 1$ – нормальная подгруппа группы $G \times G$. Следовательно, существует подгруппа T из $f(G \times G)$ такая, что

$$X \times 1 = T \cap (G \times 1).$$

Таким образом, $X \leq \pi_1(T) \in g^*(G)$ и $g \ll g^*$.

Пусть теперь функтор $g \in \text{Locksec}(f)$. Тогда с учетом определения секции Локетта получим $g \ll g^* = f^*$. Теорема доказана.

Для того, чтобы определить условия, при которых секция Локетта фиттингова \mathfrak{X} -функтора имеет наименьший элемент, введем

Определение 3.4. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор

(1) функтор f назовем удовлетворяющим нормализаторному условию, если $V \trianglelefteq N_G(\pi_1(T))$ для всех групп $G \in \mathfrak{X}$, $T \in f(G \times G)$ таких, что $T \cap (G \times 1) = V \times 1$ и $V \in f(G)$;

(2) секцию Локетта $\text{Locksec}(f)$ назовем удовлетворяющей нормализаторному условию или просто N -секцией, если каждый функтор $g \in \text{Locksec}(f)$ удовлетворяет нормализаторному условию.

Пример 3.5. Пусть f – сопряженный нормально вложенный фиттингов \mathfrak{E} -функтор. Тогда f удовлетворяет нормализаторному условию. Действительно, если $T \in f(G \times G)$ и V – подгруппа из $f(G)$ такая, что $T \cap (G \times 1) = V \times 1$, то ввиду теоремы 6.1 [3] V является пронормальной и субнормальной подгруппой группы $N_G(\pi_1(T))$.

Следовательно, $V \trianglelefteq N_G(\pi_1(T))$. Кроме того, по теореме 6.5 [4] фиттингов \mathfrak{E} -функтор f^* также является нормально вложенным. Следовательно, секция Локетта $\text{Locksec}(f)$ является N -секцией.

Лемма 3.6. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор и группа $G \in \mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если T и R – подгруппы из $f(G \times G)$ и T удовлетворяет условию (α_2) , то подгруппа R удовлетворяет условию (α_2) , если и только если существует элемент $x \in G$ такой, что $R = T^{(x,x)}$.

(2) Если подгруппа $L \in f^*(G)$, то существует подгруппа $T \in f(G \times G)$, удовлетворяющая условию (α_2) и $\pi_1(T) = L$.

(3) Если f удовлетворяет нормализаторному условию, T и R – подгруппы из $f(G \times G)$ такие, что $\pi_1(T) = \pi_1(R)$ и $T \cap (G \times 1) = V \times 1$, $R \cap (G \times 1) = U \times 1$, где V, U – подгруппы из $f(G)$, то $V = U$. Более того, если T и R удовлетворяют условию (α_2) , то $T = R$.

Доказательство. (1) Пусть подгруппа $T \in f(G \times G)$ и удовлетворяет условию (α_2) . Покажем, что для любого элемента $x \in G$ подгруппа $T^{(x,x)}$ также удовлетворяет условию (α_2) . Если $t^{(x,x)} = (t_1^x, t_2^x) \in T^{(x,x)}$, то $t = (t_1, t_2) \in T$. Так как подгруппа T удовлетворяет условию (α_2) , то $(t_1, t_1^{-1}) \in T$. Тогда $(t_1^x, (t_1^{-1})^x) = (t_1^x, (t_1^x)^{-1}) \in T^{(x,x)}$ и определение 1.1 выполняется для $m = 2$.

С другой стороны, если R – подгруппа из $f(G \times G)$, удовлетворяющая условию (α_2) , то ввиду сопряженности фиттингова \mathfrak{X} -функтора f существует элемент $(g,h) \in G \times G$ такой, что $T^{(g,h)} = R$. Тогда

$$\pi_1(R) = \pi_1(T^{(g,h)}) = \pi_1(T)^g.$$

Пусть V и U – подгруппы из $f(G)$ такие, что

$$T \cap (G \times 1) = V \times 1, \quad (3.1)$$

$$R \cap (G \times 1) = U \times 1. \quad (3.2)$$

Тогда из равенства (3.1) получим $(T \cap (G \times 1))^{(g,h)} = (V \times 1)^{(g,h)}$ и $T^{(g,h)} \cap (G \times 1) = V^g \times 1$. Следовательно, $R \cap (G \times 1) = V^g \times 1$ и ввиду равенства (3.2) $V^g = U$.

Пусть $(t_1, t_2) \in T$, тогда $(t_1, t_2)^{(g,g)} \in T^{(g,g)}$. Покажем, что $(t_1, t_2)^{(g,g)} \in R$. По лемме 1.2 $\pi_2(T) = \pi_1(T)$. Тогда $t_2 \in \pi_1(T)$ и по определению группы, удовлетворяющей условию (α_2) , получим $(t_2, t_2^{-1}) \in T$. Но тогда $(t_1 t_2, 1) = (t_1, t_2)(t_2, t_2^{-1})$ также принадлежит группе T . Кроме того, ввиду равенства (3.1) элемент $t_1 t_2 \in V$. Но тогда $(t_1 t_2)^g \in V^g = U$. Ввиду равенства (3.2) получаем $((t_1 t_2)^g, 1) \in R$. Кроме того, $t_2^g \in \pi_2(T)^g = \pi_1(T)^g = \pi_1(R)$. Но так как группа R удовлетворяет условию (α_2) , то $(t_2^g, (t_2^g)^{-1}) = (t_2^g, (t_2^{-1})^g) \in R$. Следовательно, обратный элемент $(t_2^g, (t_2^g)^{-1})^{-1} = ((t_2^g)^{-1}, t_2^g) \in R$. Тогда из равенства $(t_1^g, t_2^g) = ((t_1 t_2)^g, 1)((t_2^g)^{-1}, t_2^g)$ следует, что $(t_1, t_2)^{(g,g)} \in R$ и $T^{(g,g)} \leq R$. Но $R = T^{(g,h)}$. Следовательно, $T^{(g,g)} = R$.

(2) Пусть L – подгруппа из $f^*(G)$. Тогда по определению 2.2 существует подгруппа $R \in f(G \times G)$ такая, что $\pi_1(R) = L$. Так как f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор, то по лемме 1.4 существует подгруппа $S \in f(G \times G)$, которая удовлетворяет условию (α_2) . Кроме того, ввиду сопряженности функтора $S^{(g,h)} = R$ для некоторого $(g,h) \in G \times G$. По утверждению (1) подгруппа

$T = S^{(g,g)}$ также удовлетворяет условию (α_2) . Но тогда

$$\pi_1(T) = \pi_1(S^{(g,g)}) = \pi_1(S^{(g,h)}) = \pi_1(R) = L.$$

(3) Пусть T и R – подгруппы из $f(G \times G)$. Тогда ввиду сопряженности фиттингова \mathfrak{X} -функтора f существует элемент $(g,h) \in G \times G$ такой, что $T^{(g,h)} = R$. Ввиду того, что $T \cap (G \times 1) = V \times 1$, где $V \in f(G)$, получаем

$$T^{(g,h)} \cap (G \times 1) = V^g \times 1.$$

Но тогда $R \cap (G \times 1) = V^g \times 1$. Кроме того, по условию $R \cap (G \times 1) = U \times 1$, где $U \in f(G)$. Следовательно, $V^g = U$.

С другой стороны, так как \mathfrak{X} -функтор f удовлетворяет нормализаторному условию, то $V \leq N_G(\pi_1(T))$. Кроме того, ввиду равенства $T^{(g,h)} = R$ следует $\pi_1(T)^g = \pi_1(R) = \pi_1(T)$. Таким образом, $g \in N_G(\pi_1(T))$. Следовательно, $V = V^g = U$.

Пусть теперь подгруппы T и R удовлетворяют условию (α_2) . Тогда ввиду леммы 1.5

$$T = (V \times V) \langle (x, x^{-1}) : x \in \pi_1(T) \rangle.$$

Но так как по условию $\pi_1(T) = \pi_1(R)$ и по доказанному $V = U$, то

$$T = (U \times U) \langle (x, x^{-1}) : x \in \pi_1(R) \rangle = R.$$

Лемма доказана.

Следующая теорема доказывает существование наименьшего элемента по сильному вложению для N -секции Локетта сопряженного фиттингова \mathfrak{X} -функтора.

Теорема 3.7. Пусть f – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор и $\text{Locksec}(f)$ является N -секцией. Тогда $\text{Locksec}(f)$ содержит наименьший по сильному вложению элемент f^* .

Доказательство. Построим фиттингов \mathfrak{X} -функтор h такой, что $h \in \text{Locksec}(f)$ и $h \ll g$ для всех $g \in \text{Locksec}(f)$.

Так как по лемме 2.3 $(f^*)^* = f^*$, то $\text{Locksec}(f^*) = \text{Locksec}(f)$ и $\text{Locksec}(f^*)$ также является N -секцией. Пусть Λ – множество индексов такое, что $\text{Locksec}(f^*) = \{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Пусть группа $G \in \mathfrak{X}$ и $L \in f^*(G)$. Тогда вследствие утверждений 2 и 3 леммы 3.6 существует единственная подгруппа $T_\lambda \in g_\lambda(G \times G)$, удовлетворяющая условию (α_2) такая, что $\pi_1(T_\lambda) = L$. Пусть V_λ – подгруппа из $g_\lambda(G)$ такая, что

$$T_\lambda \cap (G \times 1) = V_\lambda \times 1. \quad (3.3)$$

Ввиду утверждения 3 леммы 3.6 заключаем, что если $R_\lambda \in g_\lambda(G \times G)$, $\pi_1(R_\lambda) = L$ и $R_\lambda \cap (G \times 1) = U_\lambda \times 1$ для некоторой подгруппы U_λ из $g_\lambda(G)$, то $U_\lambda = V_\lambda$. Так как f^* – сопряженный фиттингов \mathfrak{X} -функтор, то существуют элементы x_1, \dots, x_n группы G такие, что

$$f^*(G) = \{L^{x_i} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Тогда по лемме 3.6 получим, что $T_\lambda^{(x_i, x_i)}$ – единственная подгруппа из $g_\lambda(G \times G)$, удовлетворяющая условию (α_2) такая, что $\pi_1(T_\lambda^{(x_i, x_i)}) = L^{x_i}$ ($1 \leq i \leq n$). Теперь, следуя [4], построим отображение h

группы G в множество её подгрупп $h(G)$ следующим образом:

$$h(G) = \{(\cap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda)^{x_i} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Тогда множество $h(G)$ является классом сопряженных подгрупп группы G .

Покажем, что h – сопряженный фиттингов \mathfrak{F} -функтор.

Пусть α – изоморфизм группы G на группу K . Определим изоморфизм α_1 группы $G \times G$ на группу $K \times K$ следующим образом:

$$\alpha_1(g_1, g_2) = (\alpha(g_1), \alpha(g_2)), \text{ где } (g_1, g_2) \in G \times G.$$

Так как $\alpha(f^*(G)) = f^*(\alpha(G)) = f^*(K)$ и $L \in f^*(G)$, то $\alpha(L) \in f^*(K)$. Ввиду определения изоморфизма α_1 получим $\pi_1(\alpha_1(T_\lambda)) = \alpha(\pi_1(T_\lambda)) = \alpha(L)$. Пусть $(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) \in \alpha_1(T_\lambda)$. Тогда $(t_1, t_2) \in T_\lambda$, и по определению 1.1 элемент $(t_1, t_1^{-1}) \in T_\lambda$. Но тогда

$$(\alpha(t_1), \alpha(t_1^{-1})) = (\alpha(t_1), \alpha(t_1)^{-1}) \in \alpha_1(T_\lambda).$$

Следовательно, подгруппа $\alpha_1(T_\lambda)$ удовлетворяет условию (α_2) . Так как $T_\lambda \cap (G \times 1) = V_\lambda \times 1$ для некоторой подгруппы V_λ из $g_\lambda(G)$, то $\alpha_1(T_\lambda) \cap (K \times 1) = \alpha(V_\lambda) \times 1$, где $\alpha(V_\lambda) \in \alpha(g_\lambda(G)) = g_\lambda(\alpha(G)) = g_\lambda(K)$. Кроме того, $f^*(G) = \{L^{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$.

Следовательно,

$$f^*(K) = \{\alpha(L^{x_i}) : 1 \leq i \leq n\} = \{\alpha(L)^{\alpha(x_i)} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Тогда по определению отображения h получим

$$\begin{aligned} h(\alpha(G)) &= h(K) = \{(\cap_{\lambda \in \Lambda} \alpha(V_\lambda))^{\alpha(x_i)} : 1 \leq i \leq n\} = \\ &= \{\alpha(\cap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda^{x_i}) : 1 \leq i \leq n\} = \alpha(h(G)). \end{aligned}$$

Пусть $N \trianglelefteq G$. Тогда $N \times N \trianglelefteq G \times G$ и $T_\lambda \cap (N \times N) \in g_\lambda(N \times N)$. Кроме того, с учетом равенства (3.3) получим

$$T_\lambda \cap (N \times 1) = (V_\lambda \cap N) \times 1.$$

Пусть $(x_1, x_2) \in T_\lambda \cap (N \times N)$. Тогда $(x_1, x_2) \in T_\lambda$, и так как T_λ удовлетворяет условию (α_2) , то $(x_1, x_1^{-1}) \in T_\lambda$. Кроме того, $(x_1, x_2) \in N \times N$. Следовательно, $x_1 \in N$. Но тогда $x_1^{-1} \in N$ и $(x_1, x_1^{-1}) \in N \times N$. Таким образом, $(x_1, x_1^{-1}) \in T_\lambda \cap (N \times N)$ и подгруппа $T_\lambda \cap (N \times N)$ удовлетворяет условию (α_2) . Кроме того,

$$\pi_1(T_\lambda \cap (N \times N)) = \pi_1(T_\lambda) \cap N = L \cap N \in f^*(N).$$

Следовательно,

$$(\cap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) \cap N = \cap_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda \cap N) \in h(N)$$

и $h(G) \cap N \subseteq h(N)$. Но так как $h(N)$ – класс сопряженных подгрупп группы N , то $h(G) \cap N = h(N)$. Таким образом, h – сопряженный фиттингов \mathfrak{F} -функтор.

Покажем, что $h \in \text{Locksec}(f^*)$. Так как по доказанному h – сопряженный фиттингов \mathfrak{F} -функтор, то h удовлетворяет условию (α_2) по лемме 1.4. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и W – подгруппа из $f^*(G \times G)$, удовлетворяющая условию (α_2) . Тогда $\pi_1(W) = \pi_2(W)$ по лемме 1.2. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и Z_λ – подгруппа из $g_\lambda(G^4)$, удовлетворяющая условию (α_4) , такая, что $\pi_{4,2}(Z_\lambda) = W$, где $\pi_{4,2}$ – проекция подгруппы из G^4 на первые две компоненты. Положим

$$Z_\lambda \cap (G \times G \times 1 \times 1) = T_\lambda \times 1 \times 1. \quad (3.4)$$

Тогда $T_\lambda \in g_\lambda(G \times G)$. Если $(t_1, t_2) \in T_\lambda$, то $(t_1, t_2, 1, 1) \in T_\lambda \times 1 \times 1$. Из равенства (3.4) получаем, что $(t_1, t_2, 1, 1) \in Z_\lambda$. Но группа Z_λ удовлетворяет условию (α_4) . Следовательно, $(t_1, t_1^{-1}, 1, 1) \in Z_\lambda$. Кроме того, из равенства (3.4) следует, что $(t_1, t_2, 1, 1) \in G \times G \times 1 \times 1$. Значит, $t_1 \in G$. Но тогда $t_1^{-1} \in G$ и $(t_1, t_1^{-1}, 1, 1) \in G \times G \times 1 \times 1$. Отсюда следует $(t_1, t_1^{-1}, 1, 1) \in Z_\lambda \cap (G \times G \times 1 \times 1)$ и $(t_1, t_1^{-1}) \in T_\lambda$. Таким образом, группа T_λ удовлетворяет условию (α_2) . Следовательно, $\cap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda \in h(G \times G)$. Пусть $\pi_{4,1}$ – проекция подгруппы из G^4 на первую компоненту. Тогда ввиду леммы 2.2 получаем $\pi_{4,1}(Z_\lambda) = \pi_1(T_\lambda)$. Но так как $\pi_{4,1} = \pi_1 \circ \pi_{4,2}$, то $\pi_1(T_\lambda) = \pi_1(W)$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Положим $T_\lambda \cap (G \times 1) = V_\lambda \times 1$, где $V_\lambda \in g_\lambda(G)$. Тогда по лемме 1.5 следует, что $T_\lambda = (V_\lambda \times V_\lambda) \langle (x, x^{-1}) : x \in \pi_1(W) \rangle$. Так как $T_\lambda \leq W$

для всех $\lambda \in \Lambda$, то $\pi_1(\cap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda) = \pi_1(T_\lambda)$. Значит, $\pi_1(\cap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda) \in f^*(G)$ и $h \in \text{Locksec}(f^*) = \text{Locksec}(f)$.

Кроме того, из построения фиттингова \mathfrak{F} -функтора h следует, что $h \ll g_\lambda$ для всех $g_\lambda \in \text{Locksec}(f^*) = \text{Locksec}(f)$.

Это означает, что N -секция Локетта $\text{Locksec}(f)$ сопряженного фиттингова \mathfrak{F} -функтора f содержит наименьший по сильному вложению элемент $f^* = h$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lockett, F.P. The Fitting class \mathfrak{F}^* / F.P. Lockett // Math.Z. – 1974. – Bd.137, № 2. – S. 131–136.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Beidleman, J.C. Fittingfunktionen in endlichen auflösbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Bd. 182. – S. 359–384.
4. Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.
5. Beidleman, J.C. Conjugate π -normally embedded fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1988. – Vol. 80. – P. 65–82.
6. Beidleman, J.C. Closure Properties for Fitting Functors / J.C. Beidleman, P. Hauck // Mh. Math. – 1989. – Vol. 108. – P. 1–22.
7. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларус. навука, 2003. – 254 с.
8. Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London : Sci. Press–Kluwer Acad. Publ, 2000. – 258 p.

Поступила в редакцию 03.10.11.

УДК 512.548

О ВЕКТОР-МАТРИЦАХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦАХ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

ON VECTOR-MATRICES AND SPACEMATRICES

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье изучаются свойства вектор-матриц и пространственных матриц.

Ключевые слова: матрица, вектор-матрица, пространственная матрица, полугруппа, группа, кольцо, n -арная группа.

The properties of vector-matrices and spacematrices are studied in this paper.

Keywords: matrice, vector-matrice, spacematrice, semigroup, group, ring, n -ary group.

Введение

Одним из обобщений двумерных, то есть обычных матриц, являются многомерные матрицы, которым посвящена обширная литература, в том числе две книги Н.П. Соколова на русском языке [1], [2]. Еще одним обобщением обычных матриц являются m -арные матрицы Э. Поста [3] и вектор-матрицы [4]–[9]. При этом m -арные матрицы Э. Поста – это вектор-матрицы, у которых все компоненты являются обычными квадратными матрицами одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

Термин «пространственные матрицы» употребляют как в широком смысле – для многомерных матриц любого размера, так и в узком смысле – для трехмерных матриц. В данной работе пространственные матрицы – это всегда трехмерные матрицы.

Между пространственными матрицами и вектор-матрицами можно естественным образом установить связь, если в каждой пространственной матрице вначале зафиксировать ориентацию, а затем каждое сечение этой ориентации отождествить с соответствующей компонентой некоторой вектор-матрицы. Таким образом, каждой пространственной матрице ставится в соответствие вектор-матрица, у которой все компоненты имеют один и тот же размер, совпадающий с размером сечений зафиксированной ориентации, а число компонент равно одному из размеров пространственной матрицы, а именно – числу сечений выбранной ориентации. Разумеется, такое соответствие не является единственным, так как, зафиксировав другую ориентацию, мы получим новую вектор-матрицу. Каждому сечению пространственной матрицы отвечает свое соответствие.

Взгляд на пространственные матрицы как на вектор-матрицы определенного вида позволяет

распространить на пространственные матрицы идеи и методы, которые используются при изучении вектор-матриц. В качестве примера такого подхода можно указать работу [10], в которой на множестве пространственных матриц были определены и изучались многоместные операции, аналогичные l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, определенной на множестве вектор-матриц.

В данной работе для каждой пространственной матрицы, у которой имеется ориентация (r) , где $r \in \{i, j, k\}$, с квадратными сечениями, определяется определитель ориентации (r) . Указанный определитель ориентации (r) совпадает с определителем соответствующей вектор-матрицы, у которой все компоненты являются сечениями ориентации (r) . Для кубической матрицы помимо определителей ориентаций (i) , (j) и (k) вводится также понятие полного определителя. Все четыре указанных определителя кубической матрицы отличаются от детерминантов кубической матрицы из [1], [2]. Устанавливаются свойства определителя ориентации (r) и полного определителя.

Информацию об n -арных полугруппах, n -арных группах и других универсальных алгебрах, встречающихся в данной работе, можно найти в статье Э. Поста [3], книге С.А. Русакова [11], а также в книгах [12]–[14].

1 Вектор-матрицы

Вектор-матрицей размера

$$(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$$

над кольцом P называется [4, определение 1] всякий упорядоченный набор $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ матриц A_1, \dots, A_k размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ с элементами из P .

Замечание 1.1. Множество $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ всех k -компонентных вектор-матриц размера

$(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над полем P является линейным пространством над P с операциями покомпонентного сложения вектор-матриц и умножения вектор-матриц на скаляры из P [4, предложение 1].

Определение вектор-матрицы обобщает понятие m -адической (m -арной) матрицы Э. Поста [3], которую он определил как упорядоченный набор $m - 1$ квадратных матриц одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

Вектор-матрица, у которой все компоненты имеют один и тот же размер $m \times n$, называется вектор-матрицей размера $m \times n$. Множество всех k -компонентных вектор-матриц над P размера $m \times n$ обозначается символом $\mathbf{M}_{m \times n}(k, P)$.

Вектор-матрица, у которой все компоненты являются квадратными матрицами одного и того же порядка n , называется *квадратной* вектор-матрицей порядка n . Для обозначения множества всех квадратных k -компонентных вектор-матриц над P порядка n используется символ $\mathbf{M}_n(k, P)$.

В [4, определение 4] для всех $k \geq 2, l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P определена частичная l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ следующим образом: если

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

– k -компонентные вектор-матрицы над P такие, что для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ определено произведение

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad (1.1)$$

то полагают

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}. \quad (1.2)$$

Аналогично бинарному случаю, левая часть в (1.2) определена не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (1.1) число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

Имеет место

Теорема 1.1 [4, предложение 4; 8, предложение 1.3]. *Если P – ассоциативное кольцо, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{M}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа. Если P обладает единицей, то эта l -арная полугруппа не является полуабелевой, в частности, абелевой. В ней нет единиц, если σ – нетождественная подстановка.*

Для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над ассоциативным кольцом с единицей *транспонированной* называется вектор-матрица $\mathbf{A}' = (A'_1, \dots, A'_k)$, у которой каждая компонента A'_j является транспонированной матрицей для компоненты A_j вектор-матрицы \mathbf{A} [5, определение 1.3].

Теорема 1.2 [5, следствие 3.2]. *Пусть σ – подстановка из S_m , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – m -компонентные квадратные*

вектор-матрицы одного и того же порядка n . Тогда верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m} = [\mathbf{A}'_l \mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l, \sigma^{-1}, m}.$$

В [6] для каждой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, определены вектор-определитель

$$\mathbf{det} \mathbf{A} = (\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_k) \in P^k$$

и определитель

$$\det \mathbf{A} = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_k \in P.$$

Подчеркнем, что в определениях вектор-определителя $\mathbf{det} \mathbf{A}$, определителя $\det \mathbf{A}$ и транспонированной вектор-матрицы \mathbf{A}' компоненты A_1, \dots, A_k могут быть матрицами различных размеров.

Вектор-определители и определители вектор-матриц обладают рядом свойств, аналогичных свойствам определителей обычных матриц. Приведем некоторые из таких свойств.

Следующая теорема является полиадическим аналогом теоремы об определителе произведения матриц.

Теорема 1.3 [6, теорема 3.1]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{det} \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{det} \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k},$$

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_l.$$

Следующие свойства вектор-определителей и определителей вектор-матриц связаны с операцией транспонирования.

Предложение 1.1 [6, предложение 1.2]. *Если \mathbf{A}' – транспонированная вектор-матрица для квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} , то*

$$\mathbf{det} \mathbf{A}' = \mathbf{det} \mathbf{A}, \det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}.$$

Из предложения 1.1 и теоремы 1.3 вытекает

Предложение 1.2. *Пусть*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда вектор-определитель

$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}$ *и определитель $\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}$ не изменятся, если в них любые s вектор-матриц, где $s = 1, \dots, l$, заменить транспонированными вектор-матрицами. В частности, для*

$l = 3, k = 2, \sigma = (12)$ *имеем*

$$\mathbf{det}[\mathbf{ABC}]_{3, (12), 2} = \mathbf{det}[\mathbf{A'BC}]_{3, (12), 2} =$$

$$= \mathbf{det}[\mathbf{AB'C}]_{3, (12), 2} = \mathbf{det}[\mathbf{ABC}]_{3, (12), 2} =$$

$$= \det[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}]_{3, (12), 2} = \det[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}]_{3, (12), 2} = \det[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}]_{3, (12), 2}$$

Аналогичные равенства справедливы для определителя $\det[\mathbf{ABC}]_{3, (12), 2}$.

Следствие 1.1. Если $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l \in \mathbf{M}_n(k, P)$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, то вектор-определитель $\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}$ и определитель $\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}$ не изменяются, если в них любые s вектор-матриц, где $s = 1, \dots, l$, заменить транспонированными вектор-матрицами. В частности, для $l = 3, k = 2, \sigma = (12)$ верны равенства из предложения 1.2. Аналогичные равенства справедливы для определителя $\det[\mathbf{ABC}]_{3, (12), 2}$.

2 Пространственные матрицы

Пространственную матрицу размера $m \times n \times p$ над кольцом P можно определить [1], [2] как пространственную таблицу из mnp чисел a_{ijk} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$), имеющую форму параллелепипеда с линейными размерами m, n и p . Пространственную матрицу размера $m \times n \times p$ с общим элементом a_{ijk} обозначают символом $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$. Элементы этой матрицы можно считать расположенными в точках (i, j, k) трехмерного пространства, где i, j, k изменяются, как указано выше.

Пространственную матрицу размера $n \times n \times n$ называют кубической.

Если в пространственной матрице зафиксировать значение индекса i , то получим m обычных матриц размера $n \times p$

$$(a_{1jk}), (a_{2jk}), \dots, (a_{mjk}),$$

которые называются сечениями ориентации (i) . Аналогично n матриц размера $m \times p$

$$(a_{i1k}), (a_{i2k}), \dots, (a_{ink})$$

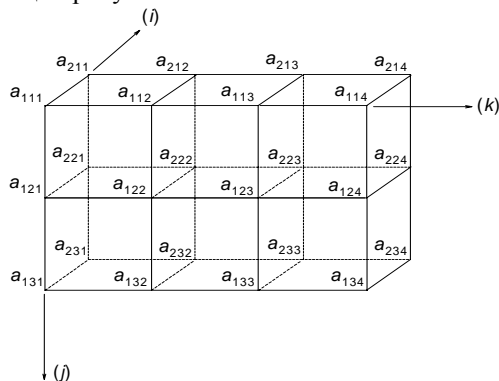
называются сечениями ориентации (j) , а p матриц размера $m \times n$

$$(a_{ij1}), (a_{ij2}), \dots, (a_{ijp})$$

называются сечениями ориентации (k) .

Понятно, что трехмерная матрица полностью определяется заданием всех своих сечений какой-либо фиксированной ориентации (i) , (j) или (k) .

Пример 2.1. Рассмотрим трехмерную матрицу размера $2 \times 3 \times 4$, изображенную на следующем рисунке:



Две матрицы

$$U_1 = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{134} \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} & a_{234} \end{pmatrix}$$

размера 3×4 являются сечениями ориентации (i) ; три матрицы

$$V_1 = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} \end{pmatrix},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{134} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} & a_{234} \end{pmatrix}$$

размера 2×4 являются сечениями ориентации (j) ; четыре матрицы

$$W_1 = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} a_{112} & a_{122} & a_{132} \\ a_{212} & a_{222} & a_{232} \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{213} & a_{223} & a_{233} \end{pmatrix}, W_4 = \begin{pmatrix} a_{114} & a_{124} & a_{134} \\ a_{214} & a_{224} & a_{234} \end{pmatrix}$$

размера 2×3 являются сечениями ориентации (k) .

Если в пространственной матрице $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$ зафиксировать значения \bar{j} и \bar{k} индексов j и k , то получим строку

$$a_{1\bar{j}\bar{k}}, a_{2\bar{j}\bar{k}}, \dots, a_{m\bar{j}\bar{k}},$$

перпендикулярную сечениям ориентации (i) , которая называется строкой направления (i) .

Если в пространственной матрице $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$ зафиксировать значения \bar{i} и \bar{k} индексов i и k , то получим строку

$$a_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}, a_{\bar{j}2\bar{k}}, \dots, a_{\bar{i}n\bar{k}},$$

перпендикулярную сечениям ориентации (j) , которая называется строкой направления (j) .

Если в пространственной матрице $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$ зафиксировать значения \bar{i} и \bar{j} индексов i и j , то получим строку

$$a_{\bar{i}\bar{j}1}, a_{\bar{i}\bar{j}2}, \dots, a_{\bar{i}\bar{j}p},$$

перпендикулярную сечениям ориентации (k) , которая называется строкой направления (k) .

Всего имеется np строк направления (i) , mp строк направления (j) и mn строк направления (k) .

Например, элементы a_{123} и a_{223} образуют одну из двенадцати строк направления (i) пространственной матрицы из примера 2.1. У этой же пространственной матрицы имеется восемь строк направления (j) и шесть строк направления (k) .

3 Линейные пространства вектор-матриц и пространственных матриц

Всякой пространственной матрице $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$ можно поставить в соответствие три различные вектор-матрицы:

- 1) m -компонентную вектор-матрицу $((a_{1jk}), (a_{2jk}), \dots, (a_{mjk}))$, компонентами которой являются сечения ориентации (i) ;
- 2) n -компонентную вектор-матрицу $((a_{i1k}), (a_{i2k}), \dots, (a_{ink}))$, компонентами которой являются сечения ориентации (j) ;
- 3) p -компонентную вектор-матрицу $((a_{ij1}), (a_{ij2}), \dots, (a_{ijp}))$, компонентами которой являются сечения ориентации (k) .

Например, пространственной матрице $(a_{ijk})_{2 \times 3 \times 4}$ из примера 2.1 соответствуют: двухкомпонентная вектор-матрица (U_1, U_2) , трехкомпонентная вектор-матрица (V_1, V_2, V_3) , а также четырехкомпонентная вектор-матрица (W_1, W_2, W_3, W_4) .

Пусть теперь (A_1, A_2, \dots, A_m) – произвольная m -компонентная вектор-матрица, у которой все компоненты – матрицы размера $n \times p$. Рассматривая эти компоненты как соответствующие сечения ориентации (i) , можно построить пространственную матрицу размера $m \times n \times p$. Аналогично: n -компонентной вектор-матрице (B_1, B_2, \dots, B_n) , у которой все компоненты – матрицы размера $m \times p$, ставится в соответствие пространственная матрица размера $m \times n \times p$; p -компонентной вектор-матрице (C_1, C_2, \dots, C_p) , у которой все компоненты – матрицы размера $m \times n$, ставится в соответствие пространственная матрица размера $m \times n \times p$.

Понятно, что вектор-матрице, у которой по крайней мере две компоненты имеют разные размеры, нельзя поставить в соответствие ни одну пространственную матрицу.

Пространственные матрицы $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$ и $(b_{ijk})_{m \times n \times p}$ одного и того же размера можно складывать по правилу

$$(a_{ijk})_{m \times n \times p} + (b_{ijk})_{m \times n \times p} = (c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk})_{m \times n \times p}.$$

Ясно, что для любого $r = 1, \dots, m$ r -ое сечение ориентации (i) суммы пространственных матриц равно сумме r -ых сечений ориентации (i) пространственных матриц слагаемых, то есть, если

$$(a_{ijk})_{m \times n \times p} + (b_{ijk})_{m \times n \times p} = (c_{ijk})_{m \times n \times p},$$

то

$$(a_{rjk}) + (b_{rjk}) = (c_{rjk}), r = 1, \dots, m.$$

Аналогичные утверждения справедливы для сечений ориентаций (j) и (k) .

Всякую пространственную матрицу $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$ можно умножить на любой элемент λ из P по правилу

$$\lambda(a_{ijk})_{m \times n \times p} = (d_{ijk} = \lambda a_{ijk})_{m \times n \times p}.$$

Ясно, что для любого $r = 1, \dots, m$ r -ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы $\lambda(a_{ijk})_{m \times n \times p}$, где $\lambda \in P$, равно произведению λ на r -ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$, то есть, если

$$\lambda(a_{ijk})_{m \times n \times p} = (d_{ijk})_{m \times n \times p},$$

$$\text{то } (d_{rjk}) = \lambda(a_{rjk}), r = 1, \dots, m.$$

Замечание 3.1. Если P – поле, то множество $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$ всех пространственных матриц размера $m \times n \times p$ над P относительно операций сложения пространственных матриц и умножения пространственных матриц на скаляры из P является линейным пространством над P , размерность которого равна mnp .

Согласно замечанию 1.1, множество $\mathbf{M}_{n \times p}(m, P)$ всех m -компонентных вектор-матриц размера $n \times p$, множество $\mathbf{M}_{m \times p}(n, P)$ всех n -компонентных вектор-матриц размера $m \times p$ и множество $\mathbf{M}_{m \times n}(p, P)$ всех p -компонентных вектор-матриц размера $m \times n$ также являются линейными пространствами над P . Размерности этих трех пространств равны mnp . Все четыре пространства $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$, $\mathbf{M}_{n \times p}(m, P)$, $\mathbf{M}_{m \times p}(n, P)$, $\mathbf{M}_{m \times n}(p, P)$ изоморфны, так как имеют одинаковую размерность.

Для каждой m -компонентной вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m) \in \mathbf{M}_{n \times p}(m, P) \quad (3.1)$$

положим

$$A_1 = (a_{1jk}), \dots, A_m = (a_{mjk}),$$

то есть отождествим компоненты вектор-матрицы (3.1) с соответствующими сечениями ориентации (i) пространственной матрицы

$$(a_{ijk})_{m \times n \times p} \in \mathbf{M}_{m \times n \times p}(P). \quad (3.2)$$

В этом случае отображение

$$\Phi_{(i)}: ((a_{1jk}), \dots, (a_{mjk})) \rightarrow (a_{ijk})_{m \times n \times p}$$

является биекцией линейного пространства $\mathbf{M}_{n \times p}(m, P)$ на линейное пространство $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$.

Если каждую компоненту n -компонентной вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbf{M}_{m \times p}(n, P)$$

отождествить с соответствующим сечением ориентации (j) пространственной матрицы (3.2):

$$A_1 = (a_{i1k}), \dots, A_n = (a_{ink}),$$

то отображение

$$\Phi_{(j)}: ((a_{i1k}), \dots, (a_{ink})) \rightarrow (a_{ijk})_{m \times n \times p}$$

является биекцией линейного пространства $\mathbf{M}_{m \times p}(n, P)$ на линейное пространство $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$.

Если каждую компоненту p -компонентной вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_p) \in \mathbf{M}_{m \times n}(p, P)$$

отождествить с соответствующим сечением ориентации (k) пространственной матрицы (3.2):

$$A_1 = (a_{ij1}), \dots, A_p = (a_{ijp}),$$

то отображение

$$\Phi_{(k)}: ((a_{ij1}), \dots, (a_{ijp})) \rightarrow (a_{ijk})_{m \times n \times p}$$

является биекцией линейного пространства $\mathbf{M}_{m \times n}(p, P)$ на линейное пространство $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$.

Справедливость следующего предложения устанавливается простой проверкой.

Предложение 3.1. *Отображения $\Phi_{(i)}$, $\Phi_{(j)}$ и $\Phi_{(k)}$ являются изоморфизмами соответствующих линейных пространств.*

4 Многоместные алгебры пространственных матриц

Для сокращения записей, в случаях, когда не возникает разночтений, будем в обозначении трехмерной матрицы $(a_{ijk})_{m \times n \times p}$ опускать ее размеры $m \times n \times p$, то есть полагать $(a_{ijk})_{m \times n \times p} = (a_{ijk})$.

Зафиксировав целое $l \geq 2$, подстановку $\sigma \in S_m$ и ориентацию (i) , определим на множестве $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ всех трехмерных матриц размера $m \times n \times n$ над ассоциативным кольцом P l -арную операцию $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ по следующему правилу: если

$$(a_{ijk})_1, \dots, (a_{ijk})_l \quad (4.1)$$

– произвольные трехмерные матрицы из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, то

$$[(a_{ijk})_1 \dots (a_{ijk})_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} = (a_{ijk}), \quad (4.2)$$

где сечения $(a_{1jk}), \dots, (a_{mjk})$ ориентации (i) трехмерной матрицы (a_{ijk}) из правой части (4.2) находятся с помощью сечений ориентации (i) матриц (4.1) по правилу

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1 (a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l, \quad (4.3)$$

где $(a_{rjk})_s$ – r -ое сечение ориентации (i) трехмерной матрицы $(a_{ijk})_s$, $r = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, l$.

Если в определении операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (j) , а множество $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ множеством $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$, то получим определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(j)}$.

Если в определении операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (k) , а множество $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ множеством $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$, то получим определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(k)}$.

Многоместные операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$, $[\]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ и $[\]_{l, \sigma, m}^{(k)}$ впервые были определены в [10].

Лемма 4.1. *Отображения $\Phi_{(i)}$, $\Phi_{(j)}$ и $\Phi_{(k)}$ являются изоморфизмами универсальной алгебры $\langle \mathbf{M}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$ соответственно на универсальные алгебры $\langle \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$, $\langle \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$, $\langle \mathbf{M}_{n \times n \times m}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$.*

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, \dots, A_{1m}), \dots, \mathbf{A}_l = (A_{l1}, \dots, A_{lm})$$

– произвольные m -компонентные вектор-матрицы из $\mathbf{M}_n(m, P)$. Отождествим, как в определении отображения $\Phi_{(i)}$, компоненты вектор-матриц $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ с соответствующими сечениями ориентации (i) пространственных матриц $(a_{ijk})_1, \dots, (a_{ijk})_l$ из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ соответственно:

$$A_{11} = (a_{1jk})_1, \dots, A_{1m} = (a_{mjk})_1 \\ \dots \dots \dots \\ A_{l1} = (a_{1jk})_l, \dots, A_{lm} = (a_{mjk})_l. \quad (4.4)$$

Тогда

$$\Phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) = (a_{ijk})_1, \dots, \Phi_{(i)}(\mathbf{A}_l) = (a_{ijk})_l. \quad (4.5)$$

Согласно (4.5),

$$[\Phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \dots \Phi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(i)} = [(a_{ijk})_1 \dots (a_{ijk})_l]_{l, \sigma, m}^{(i)},$$

откуда и из (4.3) вытекает, что сечения ориентации (i) пространственной матрицы

$$[\Phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \dots \Phi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(i)}$$

имеют вид

$$(a_{1jk})_1 (a_{\sigma(1)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l, \\ \dots \dots \dots \\ (a_{mjk})_1 (a_{\sigma(m)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l.$$

С использованием (4.4) эти же сечения переписываются в виде

$$A_{11} A_{2\sigma(1)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, A_{1m} A_{2\sigma(m)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(m)}. \quad (4.6)$$

Так как, согласно определению операции $[\]_{l, \sigma, m}$,

$$\Phi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}) =$$

$$= \Phi_{(i)}((A_{11} A_{2\sigma(1)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, A_{1m} A_{2\sigma(m)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(m)})),$$

то, ввиду определения отображения $\Phi_{(i)}$, соответствующие сечения ориентации (i) пространственной матрицы $\Phi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m})$ имеют вид (4.6). Так как соответствующие сечения ориентации (i) пространственных матриц

$$\Phi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}) \text{ и } [\Phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \dots \Phi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(i)}$$

совпадают, то

$$\Phi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}) = [\Phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \dots \Phi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(i)},$$

то есть $\Phi_{(i)}$ – изоморфизм.

Для $\Phi_{(j)}$ и $\Phi_{(k)}$ доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

Теорема 1.1 и лемма 4.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1 [10]. *Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальные алгебры $\langle \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$, $\langle \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$ и $\langle \mathbf{M}_{n \times n \times m}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$ являются изоморфными l -арными полугруппами. Если кольцо P обладает единицей, то указанные l -арные полугруппы не являются полубелевскими, в частности, абелевыми. В них нет единиц, если σ – нетождественная подстановка.*

Первое утверждение теоремы 4.1 было анонсировано в [10, теорема 3.1].

Лемма 4.2 [10, леммы 3.2–3.4]. *Для всех $\lambda \in P$, $s = 1, \dots, l$ в l -арных полугруппах из теоремы 4.1 верны соответственно тождества:*

$$[A_1 \dots A_{s-1} (\lambda A_s) A_{s+1} \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} = \lambda [A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)};$$

$$[A_1 \dots A_{s-1} (\lambda A_s) A_{s+1} \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(j)} = \lambda [A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(j)};$$

$$[A_1 \dots A_{s-1} (\lambda A_s) A_{s+1} \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(k)} = \lambda [A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(k)}.$$

Лемма 4.3 [10, леммы 3.5–3.7]. *l -Арные операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$, $[\]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ и $[\]_{l, \sigma, m}^{(k)}$, определенные соответственно на множествах $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$, являются дистрибутивными относительно сложения пространственных матриц.*

Напомним определения $(2, l)$ -алгебры и $(2, l)$ -кольца.

Линейное пространство A над полем P с определенной на нем l -арной операцией $[\]$

называется $(2, l)$ -алгеброй над P , если выполняются следующие условия:

1) для любого $\lambda \in P$ и любых $a_1, \dots, a_l \in A$ верно $\lambda[a_1 \dots a_l] = [(\lambda a_1)a_2 \dots a_l] = [a_1(\lambda a_2)a_3 \dots a_l] = \dots = [a_1 \dots a_{l-1}(\lambda a_l)]$;

2) l -арная операция $[]$ дистрибутивна относительно операции $+$ сложения векторов, то есть в A для любого $i = 1, \dots, l$ выполняется тождество дистрибутивности

$$[a_1 \dots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \dots a_l] = [a_1 \dots a_{i-1}b_1a_{i+1} \dots a_l] + [a_1 \dots a_{i-1}b_2a_{i+1} \dots a_l].$$

Если l -арная операция $[]$ ассоциативна, то соответствующую $(2, l)$ -алгебру $\langle A, +, [] \rangle$ называют ассоциативной.

Отображение φ $(2, l)$ -алгебры $\langle A, +, [] \rangle$ в $(2, l)$ -алгебру $\langle B, +, [] \rangle$ называют гомоморфизмом, если:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x), \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \varphi([x_1 \dots x_l]) = [\varphi(x_1) \dots \varphi(x_l)]$$

для любых $x, y, x_1, \dots, x_l \in A$; $\lambda \in P$. Гомоморфизм φ $(2, l)$ -алгебр, являющийся взаимнооднозначным отображением, называют изоморфизмом.

Универсальную алгебру $\langle A, +, [] \rangle$ с бинарной и l -арной операциями $+$ и $[]$ называют $(2, l)$ -кольцом, если $\langle A, + \rangle$ – абелева группа и в A выполняется тождество дистрибутивности. Если при этом l -арная операция $[]$ ассоциативна, то $(2, l)$ -кольцо $\langle A, +, [] \rangle$ называют ассоциативным.

С помощью второго и третьего равенств из определения гомоморфизма $(2, l)$ -алгебр определяются гомоморфизм и изоморфизм $(2, l)$ -колец.

Согласно замечанию 3.1, множества $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ являются линейными пространствами относительно сложения пространственных матриц и умножения пространственных матриц на скаляры из поля P . Эти линейные пространства, рассматриваемые вместе с l -арными операциями $[]_{l, \sigma, m}^{(i)}$, $[]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ и $[]_{l, \sigma, m}^{(k)}$ соответственно, ввиду лемм 4.2 и 4.3, являются $(2, l)$ -алгебрами над P . Более того, ввиду теоремы 4.1, имеет место

Теорема 4.2 [10, предложение 3.8]. Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальные алгебры $\langle \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), +, []_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$, $\langle \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P), +, []_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$ и $\langle \mathbf{M}_{n \times n \times m}(P), +, []_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$, где P – поле, являются изоморфными ассоциативными $(2, l)$ -алгебрами. В частности, указанные универсальные алгебры являются изоморфными $(2, l)$ -кольцами.

В [10] установлен ряд свойств $(2, l)$ -алгебр из теоремы 4.2.

5 Определители пространственных матриц

В следующих определениях и далее P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Определение 5.1. Определителем ориентации (i) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации (i) , обозначаемое символом $\det^{(i)}A$; определителем ориентации (j) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации (j) , обозначаемое символом $\det^{(j)}A$; определителем ориентации (k) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации (k) , обозначаемое символом $\det^{(k)}A$.

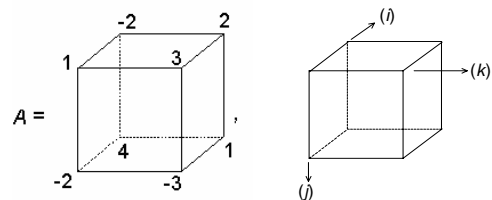
$$\begin{aligned} \det^{(i)}(a_{ijk})_{m \times n \times n} &= \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) \dots \det(a_{mjk}), \\ \det^{(j)}(a_{ijk})_{n \times m \times n} &= \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) \dots \det(a_{imk}), \\ \det^{(k)}(a_{ijk})_{n \times n \times m} &= \det(a_{ij1})\det(a_{ij2}) \dots \det(a_{ijm}). \end{aligned}$$

Понятно, что для кубической матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ определены все три определителя $\det^{(i)}A$, $\det^{(j)}A$ и $\det^{(k)}A$. Поэтому естественно следующее

Определение 5.2. Полным определителем кубической матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ называется произведение ее определителей ориентаций (i) , (j) и (k) , обозначаемое символом $\det A$, то есть $\det A = \det^{(i)}A \cdot \det^{(j)}A \cdot \det^{(k)}A$.

Сравнивая определения 5.1 и 5.2 с определением кубических детерминантов из [1], [2], видим, что определители из определений 5.1 и 5.2 и кубические детерминанты из [1], [2] – это совершенно разные понятия.

Пример 5.1. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $l = 3$, $m = n = p = 2$, $P = \mathbb{Z}$,



Найдем все определители пространственной матрицы A :

$$\det^{(i)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-10) = -30;$$

$$\det^{(j)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 10 = 80;$$

$$\det^{(k)}A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 = 0;$$

$$\det A = 30 \cdot 80 \cdot 0 = 0.$$

Отметим, что для кубической матрицы A из примера 5.1 кубический детерминант сигнатуры $[^+]$ равен -1 .

Определение 5.1 и определение определителя вектор-матрицы позволяют сформулировать следующее предложение, устанавливающее связь между определителями пространственных матриц и определителями вектор-матриц.

Предложение 5.1. Пусть $A = (a_{ijk})$, $B = (b_{ijk})$, $C = (c_{ijk})$ – пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ соответственно,

$$\mathbf{A} = ((a_{1jk}), \dots, (a_{mjk})), \mathbf{B} = ((b_{1lk}), \dots, (b_{imk})), \\ \mathbf{C} = ((c_{ij1}), \dots, (c_{ijm}))$$

– вектор-матрицы из $\mathbf{M}_n(m, P)$. Тогда

$$\det^{(i)}A = \det\mathbf{A}, \det^{(j)}B = \det\mathbf{B}, \det^{(k)}C = \det\mathbf{C}.$$

Предложение 5.2. Справедливы следующие утверждения:

1) если у пространственной матрицы A имеется строка направления (j) или (k) , состоящая целиком из нулей кольца P , то $\det^{(i)}A = 0$;

2) если у пространственной матрицы A имеется строка направления (i) или (k) , состоящая целиком из нулей кольца P , то $\det^{(j)}A = 0$;

3) если у пространственной матрицы A имеется строка направления (i) или (j) , состоящая целиком из нулей кольца P , то $\det^{(k)}A = 0$;

4) если у кубической матрицы A имеется строка, состоящая целиком из нулей кольца P , то $\det A = 0$.

Доказательство. 1) Любая строка направления (j) или (k) лежит в некотором сечении ориентации (i) , которое является квадратной матрицей порядка n . Определитель этой матрицы, содержащей строку или столбец, состоящие целиком из нулей, равен нулю. Так как определитель одного из сечений ориентации (i) равен нулю, то $\det^{(i)}(a_{ijk})_{m \times n \times n} = 0$.

2) и 3) доказываются аналогично.

4) Если у кубической матрицы одна из строк состоит целиком из нулей, то один из определителей из 1) – 3) равен нулю, но тогда $\det A = 0$. Предложение доказано.

Предложение 5.3. Для любого $\lambda \in P$ справедливы следующие утверждения:

$$1) \det^{(i)}(\lambda(a_{ijk})_{m \times n \times n}) = \lambda^{mn} \det^{(i)}(a_{ijk})_{m \times n \times n};$$

$$2) \det^{(j)}(\lambda(a_{ijk})_{n \times m \times n}) = \lambda^{mn} \det^{(j)}(a_{ijk})_{n \times m \times n};$$

$$3) \det^{(k)}(\lambda(a_{ijk})_{n \times n \times m}) = \lambda^{mn} \det^{(k)}(a_{ijk})_{n \times n \times m};$$

$$4) \det(\lambda(a_{ijk})_{n \times n \times n}) = \lambda^{3n^2} \det(a_{ijk})_{n \times n \times n}.$$

Доказательство. 1) Действительно,

$$\det^{(i)}(\lambda(a_{ijk})_{m \times n \times n}) = \det^{(i)}(\lambda a_{ijk})_{m \times n \times n} = \\ = \det(\lambda a_{1jk}) \det(\lambda a_{2jk}) \dots \det(\lambda a_{mjk}) = \\ = \lambda^n \det(a_{1jk}) \lambda^n \det(a_{2jk}) \dots \lambda^n \det(a_{mjk}) = \\ = \lambda^{mn} \det(a_{1jk}) \det(a_{2jk}) \dots \det(a_{mjk}) = \lambda^{mn} \det^{(i)}(a_{ijk})_{m \times n \times n}.$$

2) и 3) доказываются аналогично.

4) Полагая для сокращения записей $(a_{ijk})_{n \times n \times n} = (a_{ijk})$ и используя 1) – 3), получим

$$\det(\lambda(a_{ijk})) = \\ = \det^{(i)}(\lambda(a_{ijk})) \det^{(j)}(\lambda(a_{ijk})) \det^{(k)}(\lambda(a_{ijk})) = \\ = \lambda^{n^2} \det^{(i)}(a_{ijk}) \lambda^{n^2} \det^{(j)}(a_{ijk}) \lambda^{n^2} \det^{(k)}(a_{ijk}) = \\ = \lambda^{3n^2} \det(a_{ijk}).$$

Предложение доказано.

Сформулируем ряд свойств определителей пространственных матриц, которые являются простыми следствиями соответствующих свойств определителей обычных матриц.

Предложение 5.4. Если в пространственной матрице A из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ зафиксировать s сечений ориентации (i) , а затем в каждом из этих сечений переставить любые две строки или два столбца, то определитель ориентации (i) полученной пространственной матрицы B равен: определителю ориентации (i) пространственной матрицы A , если s – четное; определителю ориентации (i) пространственной матрицы A , взятому со знаком минус, если s – нечетное, то есть

$$\det^{(i)}B = \det^{(i)}A, s - \text{четное}, \\ \det^{(i)}B = -\det^{(i)}A, s - \text{нечетное}.$$

Следствие 5.1. Если в каждом сечении ориентации (i) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ переставить любые две строки или два столбца, то определитель ориентации (i) полученной пространственной матрицы B равен: определителю ориентации (i) пространственной матрицы A , если t – четное; определителю ориентации (i) пространственной матрицы A , взятому со знаком минус, если t – нечетное, то есть

$$\det^{(i)}B = \det^{(i)}A, t - \text{четное}, \\ \det^{(i)}B = -\det^{(i)}A, t - \text{нечетное}.$$

Замечание 5.1. Для определителей ориентации (j) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и определителей ориентации (k) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ верны утверждения, аналогичные предложению 5.4 и следствию 5.1.

Для полного определителя кубической матрицы справедливо следующее

Предложение 5.5. Если в кубической матрице A из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ зафиксировать s сечений ориентации (i) , r сечений ориентации (j) и t сечений ориентации (k) , а затем в каждом из этих сечений переставить любые две строки или два столбца, то для полных определителей полученной кубической матрицы B и исходной кубической матрицы A верны следующие равенства:

$$\det B = \det A, s + r + t - \text{четное}, \\ \det B = -\det A, s + r + t - \text{нечетное}.$$

Следствие 5.2. Если в каждом сечении ориентаций (i) , (j) и (k) кубической матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ переставить любые две строки или два столбца, то для полных определителей полученной кубической матрицы B и исходной кубической матрицы A верны следующие равенства:

$$\det B = \det A, n - \text{четное}, \\ \det B = -\det A, n - \text{нечетное}.$$

Предложение 5.6. Если в некотором сечении ориентации (i) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ имеется две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то определитель ориентации (i) этой пространственной матрицы равен нулю: $\det^{(i)}A = 0$. Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации (j) пространственных матриц из

$M_{n \times n}(P)$ и определителей ориентации (k) пространственных матриц из $M_{n \times n}(P)$.

Следствие 5.3. Если среди всех сечений ориентаций (i), (j) и (k) кубической матрицы A из $M_{n \times n}(P)$ имеется сечение, у которого две строки или два столбца одинаковы, то полный определитель этой кубической матрицы равен нулю: $\det A = 0$.

Предложение 5.7. Пусть A – пространственная матрица из $M_{m \times n \times l}(P)$,

$$r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0, r + s + t = m.$$

Если из всех сечений ориентации (i) этой пространственной матрицы r сечений оставить неизменными, в каждом из s сечений к некоторой строке прибавить соответственные элементы любой другой строки этого же сечения, умноженные на произвольный элемент из P , в каждом из оставшихся t сечениях к некоторому столбцу прибавить соответственные элементы любого другого столбца этого же сечения, умноженные на произвольный элемент из P , то определитель ориентации (i) полученной пространственной матрицы B будет равен определителю ориентации (i) пространственной матрицы A . Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации (j) пространственных матриц из $M_{m \times n \times l}(P)$ и определителей ориентации (k) пространственных матриц из $M_{n \times m \times l}(P)$.

Замечание 5.2. В предыдущем предложении суммируемые строки (столбцы) должны быть разными. Кроме того, номера суммируемых строк (столбцов) в различных сечениях не обязаны совпадать.

Из определения 5.1, ввиду коммутативности кольца P , вытекает

Предложение 5.8. Если пространственная матрица B получена из пространственной матрицы $A \in M_{m \times n \times l}(P)$ в результате произвольной перестановки её сечений ориентации (i), то определители ориентации (i) обеих пространственных матриц совпадают:

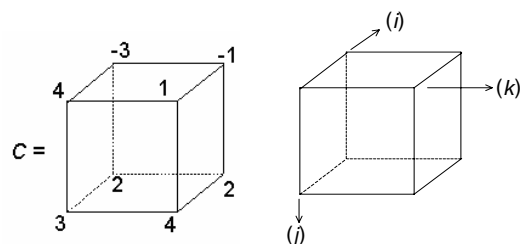
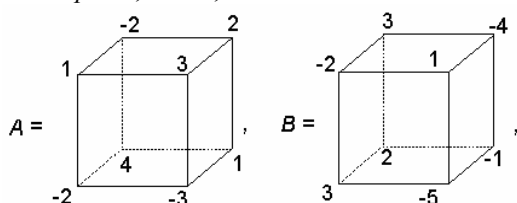
$$\det^{(i)} A = \det^{(i)} B.$$

Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации (j) пространственных матриц из $M_{m \times n \times l}(P)$ и определителей ориентации (k) пространственных матриц из $M_{n \times m \times l}(P)$.

6 Произведения определителей пространственных матриц

Начнем с примера.

Пример 6.1. Пусть $\sigma = (12) \in S_2, l = 3, m = n = p = 2, P = Z$,

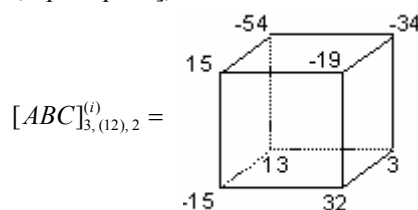


Так как $\det^{(i)} A = -30$,

$$\det^{(i)} B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 = 35,$$

$$\det^{(i)} C = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13 \cdot (-4) = -52,$$

то $\det^{(i)} A \cdot \det^{(i)} B \cdot \det^{(i)} C = 54600$. А так как, согласно [10, пример 2.1],



то

$$\det^{(i)} [ABC]_{3,(12),2}^{(i)} = \begin{vmatrix} 15 & -19 & -54 & -34 \\ -15 & 32 & 13 & 3 \end{vmatrix} = 195 \cdot 280 = 54600.$$

Следовательно,

$$\det^{(i)} [ABC]_{3,(12),2}^{(i)} = \det^{(i)} A \cdot \det^{(i)} B \cdot \det^{(i)} C. \quad (6.1)$$

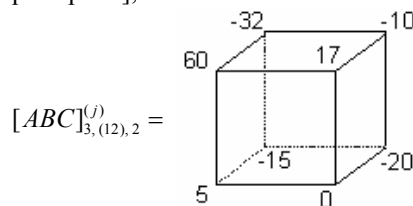
Так как

$$\det^{(j)} A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 10 = 80,$$

$$\det^{(j)} B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 = 35,$$

$$\det^{(j)} C = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) = 2,$$

то $\det^{(j)} A \cdot \det^{(j)} B \cdot \det^{(j)} C = 5600$. А так как, согласно [10, пример 2.1],



то

$$\det^{(j)} [ABC]_{3,(12),2}^{(j)} = \begin{vmatrix} 60 & 17 & 5 & 0 \\ -32 & -10 & -15 & -20 \end{vmatrix} = -56 \cdot (-100) = 5600.$$

Следовательно,

$$\det^{(j)} [ABC]_{3,(12),2}^{(j)} = \det^{(j)} A \cdot \det^{(j)} B \cdot \det^{(j)} C. \quad (6.2)$$

Так как

$$\det^{(k)} A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 = 0,$$

$$\det^{(k)}B = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -13 \cdot (-21) = 273,$$

$$\det^{(k)}C = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 17 \cdot 6 = 102,$$

то $\det^{(k)}A \cdot \det^{(k)}B \cdot \det^{(k)}C = 0$. А так как, согласно [10, пример 2.1],

$$[ABC]_{3,(12),2}^{(k)} =$$

то

$$\det^{(k)}[ABC]_{3,(12),2}^{(k)} = \begin{vmatrix} 45 & 21 \\ -90 & -42 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -18 & -54 \\ -9 & 12 \end{vmatrix} = 0 \cdot 702 = 0.$$

Следовательно,

$$\det^{(k)}[ABC]_{3,(12),2}^{(k)} = \det^{(k)}A \cdot \det^{(k)}B \cdot \det^{(k)}C. \quad (6.3)$$

Равенства (6.1)–(6.3) наводят на мысль о справедливости более общего утверждения, частными случаями которого они являются. Следующая теорема показывает, что это действительно так.

Теорема 6.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_l из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ верно

$$\det^{(i)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(i)} = \det^{(i)}A_1 \dots \det^{(i)}A_l;$$

2) для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_l из $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ верно

$$\det^{(j)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(j)} = \det^{(j)}A_1 \dots \det^{(j)}A_l;$$

3) для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_l из $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ верно

$$\det^{(k)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(k)} = \det^{(k)}A_1 \dots \det^{(k)}A_l;$$

4) для любых кубических матриц A_1, \dots, A_l из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ верно

$$\det[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m} = \det A_1 \dots \det A_l.$$

Доказательство. 1) Обозначим через $(a_{ijk})_s$ r -ое сечение ориентации (i) трехмерной матрицы $A_s = (a_{ijk})_s$, где $r = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, l$, а через $(a_{ijk})_r$ – r -ое сечение ориентации (i) трехмерной матрицы $A = [A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,k}^{(i)}$.

$$\begin{aligned} \text{Так как, согласно определению 5.1,} \\ \det^{(i)}A_1 = \det(a_{1jk})_1 \dots \det(a_{mjk})_1, \dots \\ \dots, \det^{(i)}A_l = \det(a_{1jk})_l \dots \det(a_{mjk})_l, \end{aligned}$$

то

$$\det^{(i)}A_1 \dots \det^{(i)}A_l = \det(a_{1jk})_1 \dots \det(a_{mjk})_1 \dots \det(a_{1jk})_l \dots \det(a_{mjk})_l. \quad (6.4)$$

Согласно тому же определению 5.1,

$$\begin{aligned} \det^{(i)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(i)} &= \det^{(i)}A = \\ &= \det(a_{1jk}) \dots \det(a_{mjk}), \end{aligned}$$

откуда, ввиду (4.3), получаем

$$\det^{(i)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(i)} =$$

$$\begin{aligned} &= \det((a_{1jk})_1(a_{\sigma(1)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l) \dots \\ &\dots \det((a_{mjk})_1(a_{\sigma(m)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l) = \\ &= \det(a_{1jk})_1 \det(a_{\sigma(1)jk})_2 \dots \det(a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l \dots \\ &\dots \det(a_{mjk})_1 \det(a_{\sigma(m)jk})_2 \dots \det(a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Правые части в (6.4) и (6.5) состоят из ml сомножителей. Так как $\sigma \in S_m$, то для любого $t = 1, \dots, l-1$ множество $\{\sigma^t(1), \dots, \sigma^t(m)\}$ совпадает с множеством $\{1, \dots, m\}$. Поэтому в правой части (6.5) для любого $s = 1, \dots, l$ присутствуют в качестве сомножителей определители $\det(a_{1jk})_s, \dots, \det(a_{mjk})_s$. Это означает, что правые части в (6.4) и (6.5) состоят из одних и тех же сомножителей. А так как P – коммутативное кольцо, то правые части в (6.4) и (6.5) совпадают. Следовательно, равны и левые части в (6.4) и (6.5), то есть верно равенство из 1).

2) и 3) доказываются аналогично 1).

4) Используя 1)–3) и коммутативность кольца P , получим

$$\begin{aligned} &\det[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m} = \\ &= \det^{(i)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(i)} \det^{(j)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(j)} \det^{(k)}[A_1 \dots A_l]_{l,\sigma,m}^{(k)} = \\ &= \det^{(i)}A_1 \dots \det^{(i)}A_l \det^{(j)}A_1 \dots \det^{(j)}A_l \det^{(k)}A_1 \dots \det^{(k)}A_l = \\ &= \det^{(i)}A_1 \det^{(j)}A_1 \det^{(k)}A_1 \dots \det^{(i)}A_l \det^{(j)}A_l \det^{(k)}A_l = \\ &= \det A_1 \dots \det A_l, \end{aligned}$$

то есть верно равенство из 4). Теорема доказана.

7 Транспонирование пространственных матриц

Определение 7.1. Пространственная матрица $B = (b_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times p \times n}(P)$ называется (i) -транспонированной для пространственной матрицы $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$, если все ее сечения ориентации (i) являются транспонированными матрицами для соответствующих сечений ориентации (i) пространственной матрицы A , то есть

$$(b_{ijk}) = (a_{ijk})^t, \quad t = 1, \dots, m.$$

Аналогично определяются (j) -транспонированные пространственные матрицы и (k) -транспонированные пространственные матрицы.

Для обозначения (r) -транспонированной пространственной матрицы для пространственной матрицы A , где $r \in \{i, j, k\}$, будем употреблять следующее обозначение: $A^{(r,r)} = (a_{ijk})^{(r,r)}$.

Можно заметить, что для кубических матриц понятие (i) -транспонированности совпадает с понятием транспонированности по индексам j и k [1], [2]. Аналогично, (j) -транспонированность совпадает с транспонированностью по индексам i и k , а (k) -транспонированность совпадает с транспонированностью по индексам i и j . Поэтому, следуя [1], [2], для транспонированных кубических матриц $A^{(r,i)}$, $A^{(r,j)}$ и $A^{(r,k)}$ можно использовать также соответственно обозначения $A^{(j,k)}$, $A^{(i,k)}$ и $A^{(i,j)}$.

Следующее предложение является аналогом соответствующего утверждения для обычных матриц.

Предложение 7.1. Пусть $A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}), C = (c_{ijk})$ – пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ соответственно. Тогда

$$\det^{(i)} A = \det^{(i)} A^{(\epsilon, i)}, \det^{(j)} A = \det^{(j)} A^{(\epsilon, j)}, \\ \det^{(k)} A = \det^{(k)} A^{(\epsilon, k)}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между операциями транспонирования вектор-матриц и пространственных матриц.

Лемма 7.1. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – вектор-матрицы из $\mathbf{M}_{n \times p}(m, P), \mathbf{M}_{m \times p}(n, P)$ и $\mathbf{M}_{m \times n}(p, P)$ соответственно, где P – ассоциативное кольцо с единицей. Тогда:

- 1) $(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}))^{(\epsilon, i)} = \varphi_{(i)}(\mathbf{A}')$;
- 2) $(\varphi_{(j)}(\mathbf{B}))^{(\epsilon, j)} = \varphi_{(j)}(\mathbf{B}')$;
- 3) $(\varphi_{(k)}(\mathbf{C}))^{(\epsilon, k)} = \varphi_{(k)}(\mathbf{C}')$.

Доказательство. 1) Пусть для определённости

$$\mathbf{A} = (A_1 = (a_{1jk}), \dots, A_m = (a_{mjk})).$$

Тогда $\varphi_{(i)}(\mathbf{A}) = A = (a_{ijk})$. Если

$$(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}))^{(\epsilon, i)} = B = (b_{ijk}), \quad (7.1)$$

то, согласно определению транспонированной пространственной матрицы,

$$(b_{ijk}) = (a_{1jk})', \dots, (b_{mjk}) = (a_{mjk})'. \quad (7.2)$$

Так как, согласно определению транспонированной вектор-матрицы,

$$\mathbf{A}' = (A'_1 = (a_{1jk})', \dots, A'_m = (a_{mjk})'),$$

то, полагая

$$\varphi_{(i)}(\mathbf{A}') = C = (c_{ijk}), \quad (7.3)$$

получим

$$(c_{ijk}) = (a_{1jk})', \dots, (c_{mjk}) = (a_{mjk})'. \quad (7.4)$$

Из (7.2) и (7.4) вытекает $B = C$, откуда, а также из (7.1) и (7.3) следует равенство из 1).

Равенства из 2) и 3) доказываются аналогично. Лемма доказана.

Теорема 7.1. Пусть σ – подстановка из S_m , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$,

$$A_1 = (a_{ijk})_1, \dots, A_l = (a_{ijk})_l$$

– произвольные пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, где P – ассоциативное кольцо с единицей. Тогда

$$([A_1 A_2 \dots A_{l-1} A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_l^{(\epsilon, i)} A_{l-1}^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)}.$$

Доказательство. Поставим в соответствие каждой пространственной матрице A_t вектор-матрицу

$$\mathbf{A}_t = ((a_{1jk})_t, \dots, (a_{mjk})_t), t = 1, \dots, l$$

из $\mathbf{M}_n(m, P)$. Ясно, что $\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_t) = A_t$. Так как по лемме 4.1 $\varphi_{(i)}$ – изоморфизм соответствующих l -арных полугрупп, то, применяя теорему 1.2 и лемму 7.1, получим

$$([A_1 A_2 \dots A_{l-1} A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = ((\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_2) \dots \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_{l-1}) \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l))_{l, \sigma, m}^{(i)} = \\ = (\varphi_{(i)}[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m})^{(\epsilon, i)} = \\ = \varphi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}) =$$

$$= \varphi_{(i)}([A'_1 A'_{l-1} \dots A'_2 A'_1]_{l, \sigma^{-1}, m}) = \\ = [\varphi_{(i)}(A'_1) \varphi_{(i)}(A'_{l-1}) \dots \varphi_{(i)}(A'_2) \varphi_{(i)}(A'_1)]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)} = \\ = [(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l))^{(\epsilon, i)} (\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_{l-1}))^{(\epsilon, i)} \dots \\ \dots (\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_2))^{(\epsilon, i)} (\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1))^{(\epsilon, i)}]_{l, \sigma^{-1}, m} = \\ = [A_l^{(\epsilon, i)} A_{l-1}^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{l, \sigma^{-1}, m},$$

то есть верно равенство из формулировки теоремы. Теорема доказана.

Далее во всех следствиях P – ассоциативное кольцо с единицей.

Если σ – цикл длины t из $S_m, s \geq 1, l = st + 1$, то $\sigma^l = \sigma$. Поэтому имеет место

Следствие 7.1. Если σ – цикл длины t из $S_m, s \geq 1$, то для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_{st+1} из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ верно равенство

$$([A_1 A_2 \dots A_{st} A_{st+1}]_{st+1, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_{st+1}^{(\epsilon, i)} A_{st}^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{st+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$([A_1 A_2 \dots A_t A_{t+1}]_{t+1, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_{t+1}^{(\epsilon, i)} A_t^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{t+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}.$$

Полагая в следствии 7.1 $t = m$, получим

Следствие 7.2. Если σ – цикл длины m из $S_m, s \geq 1$, то для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_{sm+1} из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ верно равенство

$$([A_1 A_2 \dots A_{sm} A_{sm+1}]_{sm+1, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_{sm+1}^{(\epsilon, i)} A_{sm}^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{sm+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$([A_1 A_2 \dots A_m A_{m+1}]_{m+1, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_{m+1}^{(\epsilon, i)} A_m^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{m+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}.$$

Полагая в следствии 7.2 $\sigma = (12 \dots m)$, получим

Следствие 7.3. Для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_{sm+1} из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, где $s \geq 1$, верно равенство

$$([A_1 A_2 \dots A_{sm} A_{sm+1}]_{sm+1, (12 \dots m)_m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_{sm+1}^{(\epsilon, i)} A_{sm}^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{sm+1, (m \dots 21)_m}^{(i)}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$([A_1 A_2 \dots A_m A_{m+1}]_{m+1, (12 \dots m)_m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_{m+1}^{(\epsilon, i)} A_m^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{m+1, (m \dots 21)_m}^{(i)}.$$

Так как для любой транспозиции $\sigma \in S_m$ верно $\sigma = \sigma^{-1}, \sigma^{2m+1} = \sigma$, то, полагая в следствии 7.1 $t = 2$, получим

Следствие 7.4. Если σ – транспозиция из $S_m, s \geq 1$, то для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_{2s+1} из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ верно равенство

$$([A_1 A_2 \dots A_{2s} A_{2s+1}]_{2s+1, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = \\ = [A_{2s+1}^{(\epsilon, i)} A_{2s}^{(\epsilon, i)} \dots A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{2s+1, \sigma, m}^{(i)}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$([A_1 A_2 A_3]_{3, \sigma, m}^{(i)})^{(\epsilon, i)} = [A_3^{(\epsilon, i)} A_2^{(\epsilon, i)} A_1^{(\epsilon, i)}]_{3, \sigma, m}^{(i)}.$$

Следствие 7.4 можно получить и из следствия 7.2 при $m = 2$.

Если в следствии 7.4 положить $m = 2$, то $\sigma = (12)$ и верно

Следствие 7.5. Для любых пространственных матриц A_1, \dots, A_{2s+1} из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ верно равенство

$$\begin{aligned} & ([A_1 A_2 \dots A_{2s} A_{2s+1}]_{2s+1, (12), 2}^{(i)})^{(\iota, i)} = \\ & = [A_{2s+1}^{(\iota, i)} A_{2s}^{(\iota, i)} \dots A_2^{(\iota, i)} A_1^{(\iota, i)}]_{2s+1, (12), 2}^{(i)}. \end{aligned}$$

В частности, если $s = 1$, то

$$([A_1 A_2 A_3]_{3, (12), 2}^{(i)})^{(\iota, i)} = [A_3^{(\iota, i)} A_2^{(\iota, i)} A_1^{(\iota, i)}]_{3, (12), 2}^{(i)}.$$

Заметим, что следствие 7.5 может быть также получено из следствия 7.3 при $m = 2$.

Замечание 7.1. Все равенства из теоремы 7.1 и её следствий 7.1–7.5 останутся верными, если в них заменить пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$), а ориентацию (i) на ориентацию (j) (соответственно на ориентацию (k)).

Из теоремы 6.1 и предложения 7.1 вытекает

Предложение 7.2. Если A_1, \dots, A_l – пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, то определитель $\det^{(i)}[A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ ориентации (i) не изменится, если в нём любые s пространственных матриц, где $s = 1, \dots, l$, заменить (i) -транспонированными пространственными матрицами. В частности, для $l = 3$, $m = 2$, $\sigma = (12)$ имеем

$$\begin{aligned} \det^{(i)}[ABC]_{3, (12), 2}^{(i)} &= \det^{(i)}[A'BC]_{3, (12), 2}^{(i)} = \\ &= \det^{(i)}[AB'C]_{3, (12), 2}^{(i)} = \det^{(i)}[ABC']_{3, (12), 2}^{(i)} = \\ &= \det^{(i)}[A'B'C]_{3, (12), 2}^{(i)} = \det^{(i)}[A'BC']_{3, (12), 2}^{(i)} = \\ &= \det^{(i)}[AB'C']_{3, (12), 2}^{(i)} = \det^{(i)}[A'B'C']_{3, (12), 2}^{(i)}. \end{aligned}$$

Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации (j) пространственных матриц из $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и определителей ориентации (k) пространственных матриц из $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$.

8 Аналогии и обобщения

1. В [6] показано, что всякой функции, определенной на множестве обычных матриц над некоторым кольцом P со значениями в P , можно поставить в соответствие функцию, определенную на множестве вектор-матриц над P со значениями в P . Точно так же на множестве пространственных матриц над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей помимо функций $\det^{(i)}$, $\det^{(j)}$, $\det^{(k)}$ и \det можно рассматривать и другие функции, которые являются аналогами функций на множестве обычных матриц со значениями в P .

В качестве примера рассмотрим аналоги функции $\text{рег}: \mathbf{M}_n(P) \rightarrow P$, где

$$\text{рег} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

для матрицы $A \in \mathbf{M}_n(P)$. Значение $\text{рег} A$ называют перманентом матрицы A [15].

Определение 8.1. Перманентом ориентации (i) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ называется произведение перманентов всех ее сечений ориентации (i) , обозначаемое символом $\text{рег}^{(i)} A$; перманентом ориентации (j) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ называется произведение перманентов всех ее сечений ориентации (j) , обозначаемое символом $\text{рег}^{(j)} A$; перманентом ориентации (k) пространственной матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ называется произведение перманентов всех ее сечений ориентации (k) , обозначаемое символом $\text{рег}^{(k)} A$.

Определение 8.2. Полным перманентом кубической матрицы A из $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ называется произведение ее перманентов ориентаций (i) , (j) и (k) , обозначаемое символом $\text{рег} A$, то есть

$$\text{рег} A = \text{рег}^{(i)} A \cdot \text{рег}^{(j)} A \cdot \text{рег}^{(k)} A.$$

Сравнивая определения 8.1 и 8.2 с определением кубического перманента из [1], [2], видим, что перманенты из определений 8.1 и 8.2 и кубический перманент из [1], [2] – это совершенно разные понятия.

Так как перманент определяется [15] не только для квадратных матриц, но и для матриц размера $m \times n$, где $m < n$, то можно определить и изучать перманенты фиксированной ориентации и полный перманент пространственной матрицы, у которой все три размера различны.

Для пространственных матриц можно определить и аналоги супердетерминанта, аналогично тому, как это было сделано для вектор-матриц.

В связи с существованием различных обобщений понятия определителя на случай некоммутативных колец возникает задача определения и изучения их аналогов для пространственных матриц.

2. Рассмотрим три отображения множества всех пространственных матриц над ассоциативным кольцом P с единицей в себя: отображение

$$R: A = (a_{ijk})_{m \times n \times p} \rightarrow A^{(\iota, i)} = B = (b_{ijk})_{m \times p \times n},$$

ставящее в соответствие любой пространственной матрице $A = (a_{ijk})_{m \times n \times p}$ (i) -транспонированную к ней пространственную матрицу $A^{(\iota, i)}$, где

$$b_{ijk} = a_{\alpha(i)\alpha(j)\alpha(k)} = a_{ikj}, \quad \alpha = (jk);$$

отображение

$$S: A = (a_{ijk})_{m \times n \times p} \rightarrow A^{(\iota, j)} = C = (c_{ijk})_{p \times n \times m},$$

ставящее в соответствие любой пространственной матрице $A = (a_{ijk})_{m \times n \times p}$ (j) -транспонированную к ней пространственную матрицу $A^{(\iota, j)}$, где

$$c_{ijk} = a_{\beta(i)\beta(j)\beta(k)} = a_{kji}, \quad \beta = (ik);$$

отображение

$$T: A = (a_{ijk})_{m \times n \times p} \rightarrow A^{(\iota, k)} = D = (d_{ijk})_{m \times p \times n},$$

ставящее в соответствие любой пространственной матрице $A = (a_{ijk})_{m \times n \times p}$ (k)-транспонированную к ней пространственную матрицу $A^{(i, k)}$, где

$$d_{ijk} = a_{\gamma(i)\gamma(j)\gamma(k)} = a_{jik}, \gamma = (ij).$$

Так как для любого $U \in \{R, S, T\}$ композиция UU является тождественным преобразованием, то множество $\{R, S, T\}$ не является замкнутым относительно бинарной операции UV .

С другой стороны,

$$UVV = VUU = V$$

для любых $U, V \in \{R, S, T\}$. Кроме того,

$$UVU = W, UVW = V$$

для любых не равных между собой

$$U, V, W \in \{R, S, T\}.$$

Записанные равенства показывают, что справедливо

Предложение 8.1. Множество $\{R, S, T\}$ является полубелевой идемпотентной тернарной группой относительно тернарной операции

$$[UVW] = UVW.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов, Н.П. Пространственные матрицы и их приложения / Н.П. Соколов. – М. : Наука, 1960. – 300 с.
2. Соколов, Н.П. Введение в теорию пространственных матриц / Н.П. Соколов. – Киев : Наукова думка, 1972. – 175 с.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – №1 (37), серия В. – С. 30–37.
5. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №1 (6). – С. 52–56.
6. Гальмак, А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак //

Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 1–5.

7. Гальмак, А.М. σ -Согласованные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 2 (37), серия В. – С. 30–37.

8. Гальмак, А.М. О σ -согласованных вектор-матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 92–99.

9. Гальмак, А.М. Полиадические группы вектор-матриц / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 2 (37), серия В. – С. 30–37.

10. Гальмак, А.М. Полиадические операции на множестве пространственных матриц / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2011. – № 2 (62). – С. 15–21.

11. Русаков С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с

12. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

13. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

14. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

15. Минк, Х. Перманенты / Х. Минк. – М. : Мир., 1982. – 213 с.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА – 002).

Поступила в редакцию 28.10.11.

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПРИМИТИВНЫХ ГРУПП

И.В. Лемешев, В.С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE SOLVABILITY OF SOME FINITE PRIMITIVE GROUPS

I.V. Lemeshev, V.S. Monakhov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть M – подгруппа конечной группы G и $\text{Core}_G M$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в M . Мы определяем строение конечной группы G , если G содержит максимальную подгруппу M с $\text{Core}_G M = 1$ и все максимальные подгруппы H из G с $\text{Core}_G H = 1$ обладают некоторыми свойствами.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа.

Let M be a subgroup of a finite group G and $\text{Core}_G M$ is the largest normal subgroup of G contained in M . We determine the structure of the finite group G if G possesses a maximal subgroup M with $\text{Core}_G M = 1$ and all maximal subgroups H of G with $\text{Core}_G H = 1$ satisfy certain properties.

Keywords: finite group, solvable group, maximal subgroup.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Терминология и обозначения соответствуют [1], [2]. В частности, если H – подгруппа группы G , то

$$\text{Core}_G H = \bigcap_{x \in G} x^{-1} H x$$

ее ядро [1, глава 3.4], которое является наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H . Группу, содержащую максимальную подгруппу с единичным ядром, называют примитивной. В примитивной группе максимальную подгруппу с единичным ядром Гашюц [3] предложил называть примитиватором. Общие свойства примитивных групп подробно описаны в [1, глава 4.6], [3].

В 1957 году Р. Бэр получил следующий результат.

Теорема А [4]. Если группа G примитивна и все ее примитиваторы нильпотентны, то G разрешима.

В 2009 году М. Асаад развил этот результат Бэра.

Теорема В. Примитивная группа G разрешима в следующих случаях:

1) в каждом примитиваторе максимальные подгруппы из всех силовских подгрупп нормальны [5, теорема 1.2];

2) каждый примитиватор является разрешимой группой, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна [5, теорема 1.3 (a)];

3) в каждом примитиваторе все примарные подгруппы пронормальны [5, теорема 1.3 (b)];

4) в каждом примитиваторе все силовские подгруппы циклические [5, теорема 1.3 (c)];

5) каждый примитиватор сверхразрешим и группа G не содержит секций, изоморфных симметрической группе S_4 [5, следствие 2.1].

Заметим, что в ситуациях 1)–5) примитиваторы являются сверхразрешимыми подгруппами. Но заменить нильпотентность в теореме А на сверхразрешимость в общем случае нельзя. Примером служит неразрешимая примитивная группа $PGL(2,7)$. В связи с этим Асаад [5] сформулировал следующий вопрос:

Что можно сказать о структуре примитивной группы, в которой все примитиваторы сверхразрешимы?

В настоящей заметке развивается данная тематика. В теореме 2.1 получен ответ на вопрос Асаада. В теореме 2.2 установлены новые признаки разрешимости и частичной разрешимости примитивной группы с ограничениями на примитиваторы.

При доказательстве теоремы 2.1 используется теорема из работы [6], доказательство которой использует классификацию конечных простых групп. Доказательство теоремы 2.2 классификацию конечных простых групп не использует.

1 Вспомогательные результаты

Для группы G множество всех простых делителей её порядка обозначается через $\pi(G)$. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа

группы G . Если H – подгруппа группы G , то $H/\text{Core}_G H$ – кофактор подгруппы H в группе G . Через G' , $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G ; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n . Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной. Группа, которая одновременно p -замкнута и p -нильпотентна, называется p -разложимой, а pd -группой называют группу, порядок которой делится на простое число p . Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A . Наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G обозначается через $S(G)$. Вполне факторизуемая группа – группа, в которой все подгруппы дополняемы.

Лемма 1.1. Если $G/F(G)$ p -разложима, то $l_p(G) \leq 1$.

Доказательство. Ясно, что группа G является p -разрешимой и фактор-группа

$$(G/N)/(F(G/N))$$

p -разложима для каждой нормальной в G подгруппы N . В силу индукции $l_p(G/N) \leq 1$ для $N \neq 1$. По [8, VI.6.9]

$$O_p(G) = \Phi(G) = 1, F(G) = O_p(G) = C_G(O_p(G)),$$

$$G = [O_p(G)]M, O_p(M) = 1$$

для некоторой максимальной в G подгруппы M . Из p -разложимости $G/F(G)$ следует, что M p -разложима. Но $O_p(M) = 1$, поэтому M – p' -подгруппа и $l_p(G) \leq 1$. Лемма доказана.

Лемма 1.2 [7]. Группа тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она сверхразрешима и ее силовские подгруппы по всем простым делителям ее порядка элементарные абелевы.

Лемма 1.3. Пусть H – максимальная подгруппа группы G и D – пересечение всех максимальных подгрупп группы G , не сопряженных с подгруппой H . Тогда подгруппа D метанильпотентна.

Доказательство. Ясно, что

$$D \cap \text{Core}_G H = \Phi(G)$$

и D нормальна в G . Если $\Phi(G) \neq 1$, то $D/\Phi(G)$ метанильпотентна по индукции, а по [2, 4.2.1] подгруппа D метанильпотентна. Пусть $\Phi(G) = 1$ и N – минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в D . Тогда N не содержится в H и $G = HN$. Поэтому $D/N = \Phi(G/N)$ и D/N нильпотентна. Предположим, что N непримарна и пусть P – силовская p -подгруппа из N ,

$p \in \pi(N)$. По лемме Фраттини $G = NN_G(P)$ и $N_G(P) \neq G$. Если $N_G(P) \subseteq K$, K – максимальная в G подгруппа, $K \neq H^g$, для всех $g \in G$, то $G = NN_G(P) \subseteq K$, противоречие. Поэтому $N_G(P) \subseteq H^x$ для некоторого $x \in G$ и $P^{x^{-1}} \subseteq H \cap N$. Итак, для каждого простого числа $p \in \pi(N)$ некоторая силовская p -подгруппа из N содержится в H . Поэтому $N \subseteq H$, противоречие. Значит N примарна и подгруппа D метанильпотентна.

Лемма 1.4 [6]. Пусть в группе G кофакторы максимальных подгрупп сверхразрешимы. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если G – неразрешимая группа, то ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $PSL(2, p)$, p – простое, $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

2. Если G – разрешимая группа, то ее нильпотентная длина не превышает 3, p -длина $l_p(G) \leq 2$ для всех $p \in \pi(G)$, и $l_q(G) \leq 1$ для наибольшего q из $\pi(G)$.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть группа G примитивна и все ее примитиваторы сверхразрешимы.

1. Если G – неразрешимая группа, то $G \cong PGL(2, p)$, p – простое, $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

2. Если G – разрешимая группа, то $G' = [F(G)]H$, подгруппа H холлова в G' и нильпотентна, поэтому нильпотентная длина G не превышает 3, p -длина $l_p(G) \leq 2$ для $\{p\} = \pi(F(G))$, и $l_q(G) \leq 1$ для всех $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$.

Доказательство.

1. Пусть G – неразрешимая примитивная группа со сверхразрешимыми примитиваторами. Зафиксируем максимальную подгруппу M с единичным ядром.

Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа является сверхразрешимой группой по условию. По [8, IV.9.6] группа G разрешима, противоречие. Значит, G не является простой группой.

Пусть K – нетривиальная нормальная в G подгруппа. Тогда K не содержится в M , $G = KM$ и фактор-группа G/K сверхразрешима. Поэтому в группе G нет нетривиальных разрешимых нормальных подгрупп и $S(G) = 1$.

Предположим, что в группе G существуют две минимальные нормальные подгруппы. Пусть K_i – минимальная нормальная подгруппа группы G , $i = 1, 2$, $K_1 \neq K_2$. Тогда G/K_i разрешима, поэтому $G/K_1 \times G/K_2$ разрешима. По [1, 2.33]

группа G изоморфна подгруппе из $G/K_1 \times G/K_2$, поэтому G разрешима, противоречие. Значит, G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу.

Пусть K – минимальная нормальная в G подгруппа. Тогда

$$K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_t, \quad K_i \cong K_1, \quad 1 \leq i \leq t.$$

Предположим, что $t \geq 2$ и пусть R_i – силовская r -подгруппа из K_i , $r \in \pi(K)$, r – наибольшее. Произведение $R = R_1 \times \dots \times R_t$ будет силовской r -подгруппой из K и $G = N_G(R)K$ по лемме Фраттини. Подгруппа R не нормальна в G , поэтому $N_G(R)$ – собственная подгруппа в G . Пусть U – максимальная подгруппа группы G , содержащая $N_G(R)$. Поскольку $G = KU$, то $\text{Core}_G U = 1$ и U сверхразрешима по условию, в частности, $N_G(R)$ сверхразрешима. Подгруппа $N_G(R)$ не содержится в $N_G(K_1)$ и можно выбрать элемент $a \in N_G(R) \setminus N_G(K_1)$. По [1, 2.39] $K_1^a = K_j$, для некоторого $j > 1$. Согласно [9, X.8.13] $N_{K_1}(R_1) \neq R_1 C_{K_1}(R_1)$, поэтому можно выбрать r' -элемент $b \in N_{K_1}(R_1) \setminus R_1 C_{K_1}(R_1)$. Пусть $A = \langle a, b \rangle$. Ясно, что $A \subseteq N_G(R)$, поэтому произведение RA является сверхразрешимой подгруппой и R нормальна в RA . Элемент $b^a \in K_1^a = K_j$, а элемент $b^{-1} \in K_1$, поэтому элементы b^{-1} и b^a перестановочны и $b^{-1}b^a = [b, a]$ будет r' -элементом. Поскольку $[b, a] \in A' \subseteq (RA)'$ и по [1, 4.52] подгруппа $(RA)'$ нормальна в RA и нильпотентна, то r' -холлова подгруппа B из $(RA)'$ централизует подгруппу R . Так как $[b, a] \in B$, то $[b, a] \in C_G(R) \subseteq C_G(R_1)$. Отсюда следует, что $[a, b] = [b, a]^{-1} \in C_G(R_1)$. Элемент $b^a \in K_1^a = K_j \subseteq C_G(R_1)$ и теперь $b = b^a [a, b] \in C_G(R_1)$, получили противоречие с выбором элемента b . Поэтому допущение $t \geq 2$ неверно и K – простая группа. По лемме 1.4 подгруппа $K \cong PSL(2, p)$, p – простое, $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Так как K простая, то $K \cap C_G(K) = Z(K) = 1$ и $C_G(K)$ – сверхразрешимая нормальная в G подгруппа. Поэтому $C_G(K) = 1$ и

$$G \cong \text{Aut}(PSL(2, p)) = PGL(2, p).$$

Утверждение 1 доказано.

2. Пусть G – разрешимая примитивная и все ее примитиваторы сверхразрешимы. Зафиксируем максимальную подгруппу M с единичным ядром. По [1, 4.42] группа $G = [F(G)]M$, $F = F(G)$ – единственная в G минимальная нормальная подгруппа, F является p -подгруппой для

некоторого $p \in \pi(G)$ и $O_p(M) = 1$. Так как $G/F \cong M$ сверхразрешима, то ее коммутант $(G/F)' = G'F/F \cong M'$ является нильпотентной подгруппой [1, 4.52]. Поскольку F – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, то $F \subseteq G'$ и $G' = [F](G' \cap M)$. Из включения

$$O_p(M') \subseteq O_p(M) = 1$$

следует, что M' является p' -подгруппой. Теперь ясно, что $G' = [F]M'$, подгруппа M' холлова в G' и нильпотентна. Отсюда следует, что нильпотентная длина G не превышает 3, $l_p(G) \leq 2$ и $l_q(G) \leq 1$ для всех $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Зафиксируем простое число p .

1. Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p -нильпотентной группой. При $p = 2$ дополнительно предположим, что силовская 2-подгруппа в каждом примитиваторе абелева. Тогда $G/F(G)$ p -нильпотентна. В частности, группа G p -разрешима и $l_p(G) \leq 2$.

2. Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p -разложимой группой. Тогда $G/F(G)$ p -разложима. В частности, группа G p -разрешима и имеет единичную p -длину.

Доказательство.

1. Ясно, что теорему надо доказывать в случае, когда $p \in \pi(G)$. Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p -нильпотентной группой. Зафиксируем в G максимальную подгруппу H с единичным ядром. Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа p -нильпотентна по условию. По [8, IV.5.4] группа G либо p -нильпотентна, либо бипримарна, в частности, G – непростая группа, противоречие. Значит, допущение неверно и G – непростая группа.

Пусть K – собственная нормальная в G подгруппа и M – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу K . Тогда $K \subseteq \text{Core}_G M$, поэтому в группе G существует максимальная подгруппа с неединичным ядром.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $G = NH$ и факторгруппа $G/N \cong H/H \cap N$ p -нильпотентна. Если N – нильпотентная подгруппа, то теорема доказана. Поэтому N считаем ненильпотентной подгруппой. Если N – p' -группа, то из того, что факторгруппа G/N p -нильпотентна, следует, что и сама группа G p -нильпотентна. Поэтому в дальнейшем считаем, что N является ненильпотентной pd -подгруппой.

Предположим, что существует минимальная нормальная в G подгруппа T , отличная от N . Тогда $N \cap T = 1$, $G = TH$, $G/T \cong H/H \cap T$ p -нильпотентна. Поскольку всех класс p -нильпотентных групп является формацией, то группа G p -нильпотентна и теорема справедлива. Поэтому следует считать, что в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна.

Пусть L – произвольная максимальная подгруппа, не содержащая подгруппу N . Ясно, что $G = LN$. Если $\text{Core}_G L \neq 1$, то $N \subseteq \text{Core}_G L$ и $G = LN = L$, противоречие. Это означает, что каждая максимальная в G подгруппа, не содержащая подгруппу N , имеет единичное ядро, а следовательно, p -нильпотентна.

Пусть P – силовская p -подгруппа из N и $P_1 \in \{Z(P), J(P)\}$, где $Z(P)$ – центр подгруппы P , а $J(P)$ – подгруппа, определенная в [8, IV.6.1]. Обе подгруппы $Z(P)$ и $J(P)$ характеристические в P , они неединичны и не нормальны в группе G . Поэтому $N_G(P_1)$ – собственная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. По лемме Фраттини $G = NN_G(P) \subseteq NN_G(P_1)$.

Пусть T – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P_1)$. Тогда T не содержит N , а значит, $\text{Core}_G T = 1$ и T p -нильпотентна. Поэтому подгруппа $N_N(P_1)$ p -нильпотентна.

Пусть $p > 2$. По [8, IV.6.2] подгруппа N p -нильпотентна. Теперь N – минимальная нормальная в G подгруппа и N является p -нильпотентной pd -подгруппой. Это возможно только в случае, когда N p -группа. Но в этом случае N содержится в $F(G)$ и теорема доказана.

Пусть теперь $p = 2$. Тогда N является неразрешимой подгруппой, силовская 2-подгруппа P из N неединична и $G = NN_G(P)$ по лемме Фраттини. Пусть T – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Тогда T не содержит N , а значит $\text{Core}_G T = 1$, T 2-нильпотентна и имеет абелеву силовскую 2-подгруппу. Поэтому подгруппа $N_N(P)$ 2-нильпотентна и подгруппа P содержится в центре $N_N(P)$. По [8, IV.2.6] подгруппа N 2-нильпотентна. Получили противоречие с тем, что N является неразрешимой подгруппой четного порядка.

Итак, $G/F(G)$ p -нильпотентна. Из определения p -длины [8, глава VI.6] следует, что $l_p(G) \leq 2$.

2. При $p > 2$ применимо доказанное утверждение 1, по которому фактор-группа $G/F(G)$ будет p -нильпотентной. Поскольку $G = F(G)H$

для некоторого примитиватора H и подгруппа H p -разложима по условию, то $G/F(G)$ p -разложима. Из леммы 1.1 следует, что $l_p(G) \leq 1$.

Пусть $p = 2$. Тогда можно повторить пять первых абзацев доказательства утверждения 1 теоремы 2.2 с заменой p -нильпотентности на 2-разложимость и, сохраняя все обозначения, продолжить доказательство.

Предположим, что G/N является группой нечетного порядка, т. е. силовская 2-подгруппа P из N является силовской в G . По лемме Фраттини группа $G = N_G(P)N$, а так как P не нормальна в G , то $N_G(P) \neq G$. Пусть L – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Тогда L не содержит N , а значит $\text{Core}_G L = 1$ и L 2-разложима: $L = P \times K$, где K – нормальная 2'-холлова подгруппа из L . Ясно, что $L = N_G(P)$ и $G = NK$. Если P_1 – произвольная неединичная подгруппа из P , то $K \subseteq N_G(P_1)$ и $G = NK \subseteq NN_G(P_1)$. Так как $N_G(P_1) \neq G$, то существует максимальная в G подгруппа T , содержащая подгруппу $N_G(P_1)$. Из равенства $G = NT$ следует, что T не содержит подгруппу N , поэтому подгруппа T 2-разложима. Теперь и подгруппа $N_G(P_1)$ 2-разложима. Итак, нормализатор каждой неединичной 2-подгруппы из N является 2-разложимой группой. По [8, IV.5.8] подгруппа N 2-нильпотентна. Но N содержит силовскую 2-подгруппу группы G , поэтому N – 2-группа и N содержится в $F(G)$. В этом случае утверждение 2 теоремы доказано.

Теперь рассмотрим случай, когда фактор-группа G/N имеет четный порядок. Тогда каждая не содержащая N максимальная в G подгруппа X будет 2-разложимой подгруппой четного порядка: $X = X_2 \times X_2'$. Если $X_2 \neq G_2$, то X_2 – собственная подгруппа в $N_{G_2}(X_2)$, поэтому X_2 нормальна в G . Но X_2 – неединичная ненормальная в G 2-подгруппа, поэтому $X_2 = G_2$ – силовская 2-подгруппа в G и $X = N_G(G_2)$. Таким образом, каждая не содержащая N максимальная в G подгруппа является нормализатором силовской 2-подгруппы группы G . Так как нормализаторы силовских 2-подгрупп сопряжены, то все не содержащие подгруппу N максимальные в G подгруппы сопряжены и N метанильпотентна по лемме 1.3. Из того, что N – минимальная нормальная в G подгруппа, следует, что $N \subseteq F(G)$. В частности, группа G разрешима, $G/F(G)$ 2-разложима и $l_2(G) \leq 1$ по лемме 1.1. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является вполне факторизуемой группой. Тогда второй коммутант группы G нильпотентен.

Доказательство. Согласно лемме 1.2 вполне факторизуемые группы сверхразрешимы и их силовские подгруппы элементарные абелевы, в частности, вполне факторизуемые группы метабелевы. Так как сверхразрешимые группы 2-нильпотентны, то применима теорема 2.2 при $p=2$ и $G/F(G)$ 2-нильпотентна. Пусть M – максимальная подгруппа с единичным ядром, она по условию существует и вполне факторизуема. Теперь

$$G = F(G)M, \quad G/F(G) \cong M \cap F(G)$$

метабелева, т. е. $(G/F(G))^{(2)} = 1$. По [1, лемма 4.6] $1 = (G/F(G))^{(2)} = G^{(2)}F(G)/F(G)$, поэтому $G^{(2)} \subseteq F(G)$. Следствие доказано.

Следствие 2.2. Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является нильпотентной группой. Тогда G метанильпотентна.

Доказательство. По условию все примитиваторы группы G p -разложимы для каждого $p \in \pi(G)$. Из утверждения 2 теоремы 2.2 получаем, что $G/F(G)$ p -разложима для всех $p \in \pi(G)$, поэтому $G/F(G)$ нильпотентна и G метанильпотентна.

Следствие 2.3. Зафиксируем простое число p . Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p' -подгруппой. Тогда G p -замкнута.

Доказательство. По условию все примитиваторы группы G являются p' -подгруппами, поэтому они p -разложимы и $G/F(G)$ p -разложима по утверждению 2 теоремы 2.2. Пусть M – максимальная подгруппа с единичным ядром, она по условию существует и является p' -подгруппой. Так как $G = F(G)M$, то $F(G)$ – силовская p -подгруппа и группа G p -замкнута. Следствие доказано.

3 Примеры

Пример 3.1. При $p > 3$ в группе $PSL(2, p)$ каждая собственная подгруппа p -замкнута. В группе $SL(2, 8)$ каждая собственная подгруппа 3-замкнута. Эти группы примитивны. Поэтому аналоги теоремы 2.2 с заменой p -нильпотентности на p -замкнутость не имеют места.

Пример 3.2. При $p=2$ условие абелевости силовских 2-подгрупп отбросить нельзя. Примером служит неразрешимая примитивная группа $PGL(2, 7)$, в которой все примитиваторы сверхразрешимы, а значит и 2-нильпотентны.

Следующие два примера указывают на то, что оценки p -длины в теоремах точные при любом p .

Пример 3.3. В примитивной группе S_4 все примитиваторы 2-нильпотентны и $l_2(S_4) = 2$.

Пример 3.4. Пусть p и q – произвольные простые числа и a – показатель числа p по модулю q . В группе $GL(a, p)$ существует элемент β простого порядка q . Полупрямое произведение $[E_{p^a}] \langle \beta \rangle$ с нормальной элементарной абелевой p -подгруппой E_{p^a} будет ненильпотентной группой, у которой все собственные подгруппы примарны. Пусть Q – группа порядка q . В сплетении G групп Q и $[E_{p^a}] \langle \beta \rangle$ все максимальные подгруппы q -нильпотентны и $l_q(G) = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschutz // Notes on pure mathematics; № 11. – Canberra, Australian National University, 1979. – 100 p.
4. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
5. Asaad, M. On the solvability of finite groups / M. Asaad // Commun. algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 719–723.
6. Евтухова, С.М. О конечных группах со сверхразрешимыми кофакторами подгрупп / С.М. Евтухова, В.С. Монахов // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 4. – С. 53–57.
7. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12. – P. 201–204.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen, I. / B. Huppert – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1967. – 793 p.
9. Huppert, B. Finite groups, III. / B. Huppert, N. Blackburn – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1982.

Работа выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10Р-231).

Поступила в редакцию 16.12.11.

УДК 517.925

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕАВТНОМНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С.В. Майоровская

Белорусский государственный экономический университет, Минск

REFLECTING FUNCTION AND SOLUTION-PERIODICITY OF AN NONAUTONOMOUS CUBIC SYSTEM

S.V. Mayorauskaya

Belarus State Economic University, Minsk

Построено множество нелинейных дифференциальных систем с линейной отражающей функцией. Исследовано множество периодических решений таких систем.

Ключевые слова: дифференциальная система, отражающая функция.

The set of nonlinear differential systems with a linear reflecting function was constructed. The set of periodic solutions of such systems was investigated.

Keywords: differential system, reflecting function.

Введение

Задача о существовании и устойчивости периодических решений 2ω -периодических по t дифференциальных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n \quad (0.1)$$

в силу своей важности исследовалась многими авторами. Все полученные методы изучения таких решений так или иначе связаны с отображением Пуанкаре (отображением за период $[t_0; t_0 + 2\omega]$, где 2ω -период правой части системы (0.1)) [1].

Пусть для 2ω -периодической по t системы (0.1) выполнены все условия некоторой теоремы существования и единственности и $\varphi(t; t_0, x_0)$ – ее общее решение в форме Коши. Тогда отображение за период $[t_0; t_0 + 2\omega]$ задается формулой $\Pi_{t_0}(x) = \varphi(t_0 + 2\omega; t_0, x)$. Полагая $t_0 = -\omega$, будем рассматривать отображение $\Pi(x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$ за период $[-\omega; \omega]$. Если функция $\Pi(x)$ для системы (0.1) известна, то задачу о существовании и устойчивости периодических решений данной системы можно считать решенной.

1 Используемые результаты

Мироненко В.И. [2] показал, что, не находя общего решения системы (0.1), возможно найти ее отображение за период $\Pi(x)$ с помощью так называемой отражающей функции

$$F(t, x) = \varphi(-t; t, x),$$

которая определяется для любой (не обязательно периодической) системы вида (0.1). А именно,

если правая часть системы (0.1) 2ω -периодична по t , то $F(-\omega, x) \equiv \varphi(\omega; -\omega, x)$ есть отображение за период $[-\omega; \omega]$ этой системы.

Дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией системы (0.1) тогда и только тогда, когда F удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0 \quad (1.1)$$

и начальному условию

$$F(0, x) = x. \quad (1.2)$$

Соотношение (1.1), называемое основным соотношением для отражающей функции, и начальное условие (1.2) часто позволяют найти отражающую функцию, а значит и отображение за период системы (0.1), не интегрируя рассматриваемую систему.

Основные положения теории отражающей функции и ссылки на работы других авторов, использующих понятие отражающей функции можно найти на сайте <http://reflecting-function.narod.ru>.

2 Основной результат

Основной результат предлагаемой работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $s = s(t)$ – непрерывные на всей числовой оси, нечетные и 2ω -периодические функции. Тогда у системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{ds}{dt} x^2 + \alpha y(1 - 2sx)(1 - sx), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{ds}{dt} xy + \alpha sy^2(1 - 2sx) + \beta y \end{aligned} \quad (2.1)$$

все продолжимые на R решения являются 2ω -периодическими, а нулевое решение неасимптотически устойчиво.

Доказательство. Положим

$$F(t, x, y) = \begin{pmatrix} x(1-2sx)^{-1} \\ y(1-2sx) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Покажем, что функция (2.2) является отражающей функцией системы (2.1). Для этого установим, что указанная функция удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2).

Основное соотношение (1.1) в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial(x, y)} X(t, x, y) + X(-t, F) = 0. \quad (2.3)$$

В том, что соотношение (2.3) действительно представляет собой тождество, убедимся, приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} X(t, x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{ds}{dt}x^2 + \alpha y(1-2sx)(1-sx) \\ \frac{ds}{dt}xy + \alpha sy^2(1-2sx) + \beta y \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \begin{pmatrix} 2\frac{ds}{dt}x^2(1-2sx)^{-2} \\ -2\frac{ds}{dt}xy \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial F}{\partial(x, y)} &= \begin{pmatrix} (1-2sx)^{-2} & 0 \\ -2sy & 1-2sx \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial F}{\partial(x, y)} X(t, x, y) &= \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{ds}{dt}x^2(1-2sx)^{-2} + \alpha y(1-sx)(1-2sx)^{-1} \\ \frac{ds}{dt}xy - 2\alpha sy^2(1-sx)(1-2sx) + \\ + \alpha sy^2(1-2sx)^2 + \beta y(1-2sx) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(-t, F) &= X(-t, x(1-2sx)^{-1}, \\ & y(1-2sx)) = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{ds}{dt}x^2(1-2sx)^{-2} - \alpha y(1-sx)(1-2sx)^{-1} \\ \frac{ds}{dt}xy + \alpha sy^2(1-2sx) - \beta y(1-2sx) \end{pmatrix}.$$

Начальное условие (1.2) также выполняется, поскольку $s(0) = 0$.

Итак, функция (2.2) есть отражающая функция системы (2.1), а значит отображение за период $[-\omega; \omega]$ этой системы имеет вид

$$П(x, y) = F(-\omega, x, y).$$

В силу нечетности и 2ω -периодичности функции s справедливы равенства $s(-\omega) = -s(\omega)$ и $s(-\omega) = s(-\omega + 2\omega) = s(\omega)$, откуда $s(-\omega) = 0$, а значит,

$$П(x, y) = F(-\omega, x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, отображение за период $[-\omega; \omega]$ системы (2.1) есть тождественное отображение в области своего определения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М. : «Наука», 1984. – 272 с.
2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем : монография / В.И. Мироненко ; Мин-во образования РБ, УО «ГТУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.

Поступила в редакцию 21.11.11.

УДК 512.542

НОВЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ p -СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В.Н. Рыжик

Брянская сельскохозяйственная академия, Кокино, Россия

NEW CHARACTERIZATION OF FINITE p -SUPERSOLUBLE GROUPS

V.N. Rizhik

Bryansk Agricultural Academy, Kokino, Russia

В работе получены новые критерии p -сверхразрешимости конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, $CAP_{p\phi}$ -подгруппа, p -разрешимая группа, p -сверхразрешимая группа, примитивная группа.

In this paper new criteria of p -supersolubility of finite groups are given.

Keywords: finite group, $CAP_{p\phi}$ -subgroup, p -soluble group, p -supersoluble group, meet-irreducible subgroup.

AMS 2010 Mathematics Subject Classification: 20D10.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite. Let $K \leq H \leq G$ and $A \leq G$ where K is normal in H . Then A covers the factor H/K if $(A \cap H)K = H$ and A avoids the factor H/K if $A \cap H \leq K$. A subgroup H is called a CAP -subgroup of G [1] provided H either covers or avoids every chief pd -factor of G .

It is well-known that the class of supersoluble groups is characterised as the class of all groups such that every subgroup has the cover and avoidance property. But we can wonder whether or not the group is supersoluble if the CAP -property of the members of some more restricted families of subgroups is assumed. The paper [2] confirms this claim. If all maximal subgroups of the Sylow subgroups of a group have the cover-avoidance property, the group is supersoluble. In this paper we give new criteria of p -supersolubility on the base of the following concept.

Definition 0.1. Let A be a subgroup of a group G , p be a prime. Then we say that

(1) A is a $CAP_{p\phi}$ -subgroup of G if A either covers or avoids every non-Frattini chief pd -factor of G .

(2) A is a partial $CAP_{p\phi}$ -subgroup of G if A either covers or avoids every non-Frattini pd -factor of some chief series of G .

1 Preliminaries

A group G is said to be a pd -group provided p divides $|G|$. We say that a chief factor H/K of a group G is Frattini if $T/L \leq \Phi(G/L)$.

The following lemmas will be used in the paper.

Lemma 1.1. Let $E \leq G$, p be a prime and N a normal subgroup of G . If E be a $CAP_{p\phi}$ -subgroup of and either $N \leq E$ or $(|E|, |N|) = 1$, then EN/N is a $CAP_{p\phi}$ -subgroup of G/N .

Proof. Let $(H/N)/(K/N)$ be any non-Frattini chief pd -factor of G/N . Then H/K be any non-Frattini chief pd -factor of G/N . Hence, by hypothesis, E either covers or avoids the factor H/K , so in the case, where $N \leq E$, the lemma is true. Now suppose that $(|E|, |N|) = 1$. First assume that E covers the factor H/K , that is, $EH = EK$. Then $NEH = NEK$ and

$$(NE/N)(H/N) = (NE/N)(K/N).$$

Hence EN/N covers the factor $(H/N)/(K/N)$. Finally, assume that E avoids the factor H/K , that is, $E \cap H \leq K$. Let N be a π -group. Since $(|E|, |N|) = 1$, it follows that E is a Hall π' -subgroup of NE . Let $D = NE \cap H$. Then $D = (N \cap H)(E \cap H)$. Since $N \leq K$ and $E \cap H \leq K$ we have $D \leq K$. Hence EN/N avoids the factor $(H/N)/(K/N)$. The lemma is proved.

Lemma 1.2 (see [3]). Let P be a nilpotent normal subgroup of a group G . If $P \cap \Phi(G) = 1$, then P is a direct product of some minimal normal subgroups of G .

Lemma 1.3. Let N be a non-identity normal p -subgroup of a group G . If $N \cap \Phi(G) = 1$ and every maximal subgroup of N is $CAP_{p\phi}$ -subgroup

of G , then some maximal subgroup of N is normal in G .

Proof. By Lemma 1.2, $N = N_1 \times \dots \times N_t$, where $N_i\Phi(G)$ is a minimal normal subgroup of G for all $i = 1, \dots, t$.

Let L be a minimal normal subgroup of G contained in N . Suppose that $L \neq N$ and let T/L be a chief factor of G , where $T \leq N$. If

$$T/L \leq \Phi(G/L),$$

then by [1],

$$T = L(T \cap \Phi(G)) = L,$$

a contradiction. Hence $T/L\Phi(G/L)$.

Therefore by Lemma 1.1 the hypothesis holds for G/L , so by induction some maximal subgroup M/L of N/L is normal in G . Hence M is normal in G and maximal in N .

Now suppose that $N=L$. Let M be any maximal subgroup of N . Then since M does not cover $N/1$, $M=1$. The lemma is proved.

Recall that a subgroup H is said to be primitive [4] or meet-irreducible [5] in G if whenever

$$H = X_1 \cap \dots \cap X_n,$$

for some subgroups X_1, \dots, X_n of G , then $H = X_i$ for some i . This is equivalent to say that H is a proper subgroup of the intersection of all subgroups of G which contain properly H .

Lemma 1.4 (see [4]). *Let G be a group.*

(1) *Every subgroup of G is the intersection of some meet-irreducible subgroups of G .*

(2) *Let H be a subgroup of G and K a meet-irreducible subgroup of H . Then there exists a meet-irreducible subgroup X of G such that $K = H \cap X$.*

(3) *Suppose that H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G such that $N \leq H$. Then H is a meet-irreducible subgroup of G if and only if H/N is a meet-irreducible subgroup of G/N .*

2 Criteria of p -supersolubility of groups

Theorem 2.1. *Let G be a group, p a prime.*

Then the following are equivalent:

(1) *G is p -supersoluble.*

(2) *Every subgroup of G is a $CAP_{p\Phi}$ -subgroup of G .*

(3) *G is p -soluble and G has a normal subgroup E with p -supersoluble quotient G/E such that every maximal subgroup of every Sylow p -subgroup of E is a $CAP_{p\Phi}$ -subgroup of G .*

(4) *G is p -soluble and every meet-irreducible subgroup with order divisible by p of every maximal subgroup of G is a $CAP_{p\Phi}$ -subgroup of G .*

(5) *G is p -soluble and G has a normal subgroup E with p -supersoluble quotient G/E such that every maximal subgroup of every Sylow p -subgroup of $O_{p',p}(E)$ is a $CAP_{p\Phi}$ -subgroup of G .*

Proof. The implications (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (2) \Rightarrow (4), (5) \Rightarrow (5) are evident.

(3) \Rightarrow (1) Suppose that this assertion is false and consider a counterexample for which $|G|$ is minimal. Let N be a minimal normal subgroup of G contained in E . Since G is p -soluble, N is either a p -subgroup or p' -subgroup. Note that the hypothesis is still true for G/N by Lemma 1.1, so G/N is p -supersoluble, by the choice of G . Hence N is the only minimal normal subgroup of G contained in E , p divides $|N|$ and $|N| \neq p$. Since G is not p -supersoluble, it follows that N is a p -group and so $N \leq P$ where P is a Sylow p -subgroup of E . Besides, since the class of the p -supersoluble groups is a saturated formation, $N\Phi(G)$. Thus for some maximal subgroup V of P we have $P = VN$. Moreover, for some maximal subgroup M of G we have $G = [N]M$. Let $C = C_G(N)$. Then $C = NM_G$, so $C \cap E = [N](E \cap M_G)$. It follow that

$$C_E(N) = N = O_p(E).$$

Since by hypothesis V is a $CAP_{p\Phi}$ -subgroup of G and $P = VN$, $|V \cap N| = 1$, which implies $|N| = p$, so G is p -supersoluble. This contradiction completes the proof of the implication.

(4) \Rightarrow (1) Suppose that this implication is false and let G be a counterexample with minimal order. Let N be a minimal normal subgroup of G . Then G/N satisfies (4) by Lemma 1.1. Hence G/N is p -supersoluble by the choice of G . Hence N is a p -group and $|N| > p$. Let $N \leq M$ and $E \leq N$, where M is a maximal subgroup of G and E is a maximal subgroup of N . Then E is a meet-irreducible subgroup of N . By Lemma 1.4 for some meet-irreducible subgroup X of M we have $E = X \cap N$. Clearly the order of X is a multiple of p . Since the class of all p -supersoluble groups is a saturated formation, N is the only minimal normal subgroup of G and $N\Phi(G)$. Hence by Condition (4), X either covers or avoids $N/1$. But since $|N| > p$, $E \neq 1$, so $X \cap N \neq 1$, which implies $N = N \cap X = M$, a contradiction.

(5) \Rightarrow (1) Suppose that this is false and consider a counterexample for which $|G||E|$ is minimal. Then

$$(a) O_{p'}(E) = 1.$$

Let $D = O_{p'}(E) \neq 1$. Then

$$O_{p',p}(E/D) = O_{p',p}(E)/D$$

and the hypothesis holds for $(G/D, E/D)$ (see the proof of (3) \Rightarrow (1)). Hence by the choice of (G, E) , G/D is p -supersoluble and so G does, which contradicts the choice of G .

- (b) $O_{p',p}(E)$ is a p -group and $\Phi(G) \cap O_{p',p}(E) = 1$.

The first statement is a corollary of (a). Now suppose that

$$D = \Phi(G) \cap O_{p',p}(E) \neq 1.$$

Then

$$O_{p',p}(E/D) = O_{p',p}(E)/D,$$

by [7], so the hypothesis holds for $(G/D, E/D)$, which implies the p -supersolubility of G , a contradiction.

- (c) Every subgroup of $O_{p',p}(E)$ with prime order is not normal in G .

Suppose that $O_{p',p}(E)$ has a subgroup L such that $|L| = p$ and L is normal in G . Let $C = C_G(L)$. We shall show that the hypothesis holds for $(G, C_E(L))$. It is clear that $G/C_E(L)$ is p -supersoluble and

$$O_{p',p}(E) \leq C_E(L).$$

Hence

$$O_{p',p}(C_E(L)) = O_{p',p}(E),$$

so the hypothesis holds for $(G, C_E(L))$. It follows that $E \leq C_E(L)$. Hence

$$O_{p',p}(E/L) = O_{p',p}(E)/L$$

and the hypothesis holds for $(G/L, E/L)$. Therefore G/L is p -supersoluble, which implies the p -supersolubility of G , a contradiction.

Final contradiction. Let $P = O_{p',p}(E)$. Then by (b), P is a p -group and P is normal in G . Besides, by (b) and [3], P is the direct product of some minimal normal subgroups of G . Hence by Lemma 1.2, P has a maximal subgroup M such which is normal in G . Now by [1] for some minimal normal subgroup L of G contained in P we have $|L| = p$, which contradicts (c).

We say that A is a (partial) CAP_Φ -subgroup of G if A is a (partial) $CAP_{p\Phi}$ -subgroup of G for all primes p .

From Theorem 2.1 we get

Theorem 2.2. *Let G be a group. Then the following are equivalent:*

- (1) G is supersoluble.

(2) Every subgroup of G is a CAP_Φ -subgroup of G .

(3) G is soluble and G has a normal subgroup E with supersoluble quotient G/E such that every maximal subgroup of every Sylow subgroup of E is a CAP_Φ -subgroup of G .

(4) G is soluble and every meet-irreducible subgroup of every maximal subgroup of G is a CAP_Φ -subgroup of G .

(5) G is soluble and G has a normal subgroup E with supersoluble quotient G/E such that every maximal subgroup of every Sylow subgroup of $F(E)$ is a CAP_Φ -subgroup of G .

From Theorem 2.2 we get

Corollary 2.1 (Srinivasan [6]). *Let G be a group. If G has a normal subgroup E with supersoluble quotient G/E such that every maximal subgroup of every Sylow subgroup of E is normal in G , then G is supersoluble.*

Proof. It is not difficult to show that G is soluble. Hence we may use Theorem 2.

Corollary 2.2 (Ezquerro [2]). *Let G be a group. If G has a normal subgroup E with supersoluble quotient G/E such that every maximal subgroup of every Sylow subgroup of E is a CAP -subgroup of G , then G is supersoluble.*

REFERENCES

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992.
2. Ezquerro, L.M. A contribution to the theory of finite supersolvable groups / L.M. Ezquerro // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1993. – 89. – P. 161–170.
3. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, 1978.
4. Johnson, D.L. A note on supersoluble groups / D.L. Johnson // Canadian J. Math. – 1971. – 23. – P. 562–564.
5. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Polygonal Publishing House, 1982.
6. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – 35. – P. 210–214.
7. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

Поступила в редакцию 17.11.11.

УДК 517.538.52+517.538.53

ЭРМИТОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУХ ЭКСПОНЕНТ

Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

HERMITIAN APPROXIMATION OF TWO EXPONENTS

N.V. Rjabchenko, A.P. Starovoitov, G.N. Kazimirov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Для системы, состоящей из функций $\{e^z, e^{2z}\}$, изучаются асимптотические свойства диагональных аппроксимаций Паде–Эрмита $\{\pi_{2n,2n}^j(z; e^{jz})\}_{j=1}^2$. В частности, для любого комплексного числа z найдены асимптотики поведения разностей $e^{jz} - \pi_{2n,2n}^j(z; e^{jz})$ при $j=1, 2$ и $n \rightarrow \infty$. Полученные результаты дополняют исследования Эрмита, Паде, Перрона, Д. Браесса и А.И. Аптекарева, относящиеся к изучению сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент.

Ключевые слова: совершенная система функций, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Паде–Эрмита, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.

We study the asymptotic properties of diagonal Pade–Hermite approximants $\{\pi_{2n,2n}^j(z; e^{jz})\}_{j=1}^2$ for a system consisting of functions $\{e^z, e^{2z}\}$. In particular, we determine the asymptotic behavior of the differences $e^{jz} - \pi_{2n,2n}^j(z; e^{jz})$ for $j=1, 2$ and $n \rightarrow \infty$ for any complex number z . The obtained results supplement research of Pade, Perron, Braess and A.I. Aptekarev dealing with the study of the convergence of joint Pade approximants for systems of exponents.

Keywords: perfect system of functions, joint Pade approximant, Pade–Hermite approximants, asymptotic equality, Hermite integrals.

Введение

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j=1, 2, \dots, r \quad (0.1)$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа n, m_1, m_2, \dots, m_r .

Обозначим

$$\sum_{j=1}^r m_j = m, \quad n_j = n + m - m_j, \quad j=1, 2, \dots, r.$$

Известно [1], что при $j=1, 2, \dots, r$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots \quad (0.2)$$

Если $r=1$, то согласно теореме Паде [2, теорема 1.1.1] многочлены $Q_m(z)$, $P_n^1(z)$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию

$$\pi_{n,m}(z, f_1) = \frac{P_n^1(z)}{Q_m(z)},$$

которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$.

При $r \geq 2$ дробь

$$\pi_{n,m}^j(z) = \pi_{n_j, m}^j(z, f_j) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j=1, 2, \dots, r$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^r$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде для системы функций (0.1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем функций см. в [1], [3]–[7]). Совершенной, в частности, является система экспонент

$$f_j(z) = e^{\lambda_j z}, \quad j=1, 2, \dots, r,$$

где $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$ – различные комплексные числа [1, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен еще Ш. Эрмитом [8]. Именно при доказательстве трансцендентности числа e Эрмит [8], [9] ввел в рассмотрение интегралы

$$M = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{\infty} \left[x \prod_{i=1}^r (x-i) \right]^{p-1} e^{-x} dx,$$

$$M_j = \frac{1}{(p-1)!} \int_j^{\infty} \left[x \prod_{i=1}^r (x-i) \right]^{p-1} e^{-x} dx, \quad (0.3)$$

$$\varepsilon_j = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^j \left[x \prod_{i=1}^r (x-i) \right]^{p-1} e^{-x} dx,$$

которые при некотором простом числе p дают удобное приближение к набору $\{e^j\}_{j=1}^r$:

$$e^j - \frac{M_j}{M} = \frac{\varepsilon_j}{M}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Интегралы Эрмита (0.3) после небольших преобразований [1], [10] приводят к решению системы (0.2) для набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^r$:

$$\begin{aligned} Q_m(z) &= \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^\infty \left[x^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-zx} dx, \\ P_{n_j}^j(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_{\lambda_j}^\infty \left[x^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-zx} dx, \quad (0.4) \\ R_{n,m}^j(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_j} \left[x^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-zx} dx. \end{aligned}$$

В первых двух интегралах (0.4) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $\operatorname{Re} z > 0$. При $\operatorname{Re} z \leq 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^j(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j .

Для одной ($r = 1$) экспоненты e^z явный вид числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z; e^z)$ получил Паде [11]. Опираясь на полученные представления, Паде доказал, что при $\frac{n}{m} \rightarrow \gamma$, $0 \leq \gamma \leq +\infty$ на компактах \mathbb{C} дроби $\pi_{n,m}(z; e^z)$ равномерно сходятся к e^z . О. Перрон [12] обобщил результаты о сходимости $\pi_{n,m}(z; e^z)$ к e^z , доказав ее при $n+m \rightarrow \infty$. Основываясь на результатах численного эксперимента, Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z; e^z)$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом [13] (подробнее см. [14]): для любого комплексного z при $n+m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n,m}(z; e^z) &= \\ &= \frac{(-1)^m n! m! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [10], который доказал, что при $n+m \rightarrow \infty$ для любого $j = 1, 2, \dots, r$ $\pi_{n_j, m}^j(z; e^{\lambda_j z})$ сходится равномерно на компактах в \mathbb{C} к $e^{\lambda_j z}$. Для этого в [10] был установлен следующий аналог леммы Перрона [12], доказывающий сходимость $\pi_{n,m}(z; e^z)$ к e^z : для любых n, m_j

$$\begin{aligned} \left| Q_m(z) - \exp \left\{ - \frac{\sum_{j=1}^r \lambda_j m_j}{n+m} z \right\} \right| &\leq \\ &\leq \frac{\left| z \sum_{j=1}^r \lambda_j \right|^2}{n+m} \left\{ \exp \left| z \sum_{j=1}^r \lambda_j \right| \right\}, \end{aligned}$$

где $Q_m(z)$ – знаменатель совместных аппроксимаций Паде к $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^r$. Из этого неравенства следует, что при $n+m \rightarrow \infty$ для любого $z \in \mathbb{C}$

$$Q_m(z) = \exp \left\{ - \frac{\sum_{j=1}^r \lambda_j m_j}{n+m} z \right\} (1+o(1)). \quad (0.5)$$

В данной работе исследуется асимптотика поведения совместных аппроксимаций Паде для систем из двух экспонент $\{e^z, e^{2z}\}$ при $n = m_1 = m_2$. Как уже отмечалось выше, именно этот диагональный случай рассматривался Эрмитом при доказательстве трансцендентности числа e . Основным результатом работы является следующая

Теорема 0.1. Пусть $\{e^z, e^{2z}\}$ – набор из двух экспонент. Тогда для любого комплексного z при $n = m_1 = m_2$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{2n, 2n}^1(z; e^z) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{2 \cdot (3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z} (1+o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{2n, 2n}^2(z; e^{2z}) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{2 \cdot (3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{2z} \left\{ e^{\frac{z}{\sqrt{3}}} + (-1)^n e^{-\frac{z}{\sqrt{3}}} \right\} (1+o(1)), \end{aligned}$$

где $B(\cdot, \cdot)$ – бета-функция Эйлера.

1 Предварительные результаты

Лемма 1.1. При выполнении условий теоремы 0.1 равномерно по всем $|z| \leq M$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{2n, 2n}^1(z) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{2 \cdot (3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{\sqrt{n/(3n+2)}z} (1+o(1)). \quad (1.1) \end{aligned}$$

Доказательство. Из (0.4) следует, что

$$R_{2n, 2n}^1(z) = \frac{e^z z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^1 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{-zx} dx.$$

В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^1 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{z(1-x)} dx$$

сделаем замену $x = 1 - u$. В результате получим

$$I_1(z) = \int_0^1 (1-u^2)^n u^n e^{zu} du.$$

При $j = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим интегралы

$$J_1^j(z) = \int_0^1 (1-u^2)^n u^n u^j du.$$

Тогда

$$J_1^0 = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u^2)^n (u^2)^{(n-1)/2} du^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{(n-1)/2} (1-t)^n dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right). \quad (1.2)$$

Аналогично

$$J_1^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u^2)^n (u^2)^{n/2} du^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n/2} (1-t)^n dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right). \quad (1.3)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$, т. е.

$$u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right)}{B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+2\right)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Применяя формулу Стирлинга нетрудно получить, что при $n \rightarrow \infty$

$$u_0 = \sqrt{\frac{n}{3n+2}} (1+o(1)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1+o(1)).$$

Следовательно, при достаточно больших n $u_0 \in [0,1]$. Воспользовавшись теоремой Тейлора, будем иметь

$$e^{uz} = e^{u_0 z} e^{z(u-u_0)} = e^{u_0 z} \left\{ 1 + z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 + \dots \right\} = e^{u_0 z} + z(u-u_0)e^{u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \leq M$ и $u \in [0,1]$

$$|\rho_u(z)| \leq |u-u_0|^2 \left\{ \frac{M^2}{2!} + \dots + \frac{M^n}{n!} + \dots \right\} \leq M_1 |u-u_0|^2.$$

Тогда, учитывая выбор u_0 и равенство (1.2), получим

$$I_1(z) = \int_0^1 (1-u^2)^n u^n e^{u_0 z} du + \int_0^1 (1-u^2)^n u^n \rho_u(z) du = \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) + A_\rho(z), \quad (1.4)$$

где при $|z| \leq M$ с учетом выбора u_0

$$|A_\rho(z)| \leq M_1 \int_0^1 (1-u^2)^n u^n (u^2 - u u_0) du = M_1 (J_1^2 - u_0 J_1^1).$$

По аналогии с доказательством равенств (1.2), (1.3) показывается, что

$$J_1^2 = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+3}{2}, n+1\right).$$

Поэтому из (1.3) и определения u_0 следует неравенство

$$|A_\rho(z)| \leq \frac{M_1}{2} \left\{ \frac{B\left(\frac{n+3}{2}, n+1\right)}{B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right)} - \frac{B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right)}{B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right)} \right\} B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right). \quad (1.5)$$

Выражая бета-функции через гамма-функции, с помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{B\left(\frac{n+3}{2}, n+1\right)}{B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right)} \sim \sqrt{\frac{n+1}{3n+3}}, \quad (1.6)$$

$$\frac{B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right)}{B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right)} \sim \sqrt{\frac{n}{3n+2}}.$$

Из (1.4), (1.5) и (1.6) следует, что равномерно по всем $|z| \leq M$ при $n \rightarrow \infty$

$$I_1(z) = \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) (1+o(1)). \quad (1.7)$$

Отсюда с учетом определения функции $I_1(z)$ получим равенство (1.1). Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. При выполнении условий теоремы 1.1 равномерно по всем $|z| \leq M$ при $n \rightarrow \infty$

$$R_{2n,2n}^2(z) = \frac{z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^z \left[e^{\frac{z}{\sqrt{3}}} + (-1)^n e^{-\frac{z}{\sqrt{3}}} \right] (1+o(1)). \quad (1.8)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае

$$R_{2n,2n}^2(z) = \frac{e^{2z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^2 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{-zx} dx = \frac{e^z z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^1 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{z(1-x)} dx + \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \int_1^2 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{z(2-x)} dx =: R_1^2(z) + R_2^2(z).$$

Учитывая асимптотическое равенство (1.7), получаем, что

$$R_1^2(z) = \frac{z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^z e^{z\sqrt{n/(3n+2)}} (1+o(1)). \quad (1.9)$$

Преобразуем $R_2^2(z)$, производя замену $x-1=u$ переменной интегрирования в соответствующем интеграле. В результате будем иметь:

$$R_2^2(z) = \frac{e^{2z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^1 (1+u)^n u^n (u-1)^n e^{-z(1+u)} du = (-1)^n \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^1 (1-u^2)^n u^n e^{z(1-u)} du.$$

Применяя теорему Тейлора, получаем

$$e^{z(1-u)} = e^{z(1-u_0)} e^{z(u_0-u)} = e^{z(1-u_0)} \left\{ 1 - z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 - \dots \right\}.$$

Теперь, как и при доказательстве леммы 1.1, легко показать, что

$$R_2^2(z) = (-1)^n \frac{z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^z e^{-z\sqrt{n/(3n+2)}} (1+o(1)).$$

Отсюда и из (1.9) следует равенство (1.8). Лемма 1.2 доказана.

2 Доказательство теоремы 0.1.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Учитывая равенство (0.5) и условия теоремы, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$Q_{2n}(z) = e^{-z} (1 + o(1)).$$

Поэтому из (0.2) и лемм 1.1 и 1.2 очевидным образом вытекает справедливость утверждений теоремы. Теорема 0.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, 1988.
2. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986.
3. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // *Compositio mathematica* – 1968. – Vol. 19, № 2. – P. 95–166.
4. Jager, H.A. Multidimensional Generalization of the Pade Table / N.A. Jager // *K. Nederl. Ak. Wetensch., Ser. A.* – 1964. – Vol. 67. – P. 192–249.
5. Coates, J. On the algebraic approximation of functions / J. Coates // *K. Nederl. Ak. Wetensch., Ser. A.* – 1966. – Vol. 69. – P. 421–461.
6. Никишин, Е.Н. О системе марковских функций / Е.М. Никишин // *Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика.* – 1979. – № 4. – С. 60–63.
7. Аптекарев, А.И. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов // *Матем. сборник.* – 2010. – Т. 201:2. – С. 29–78.
8. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // *C.R. Akad. Sci. (Paris).* – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
9. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1. / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1933.
10. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // *Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика.* – 1981. – № 1. – С. 68–74.
11. Pade, H. Memoire sur les developpement en fractions continues de la fonction exponential / H. Pade // *Ann Sci., Ecole Normale Sup. (3).* – 1899. – Vol. 16. – P. 394–426.
12. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin : Teubner, 1929.
13. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x , II / D. Braess // *J. Approx. Theory.* – 1984. – Vol. 40:4. – P. 375–379.
14. Petrusherv, P.P. Rational approximation of real function / P.P. Petrusherv, V.A. Popov. – Cambridge : Encyclopedia Math., 1987.

Поступила в редакцию 04.11.11.

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕЕДИНИЧНЫХ ФОРМАЦИЙ

В.М. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON ONE PROPERTY OF THE PRODUCT OF NON-IDENTITY FORMATIONS

V.M. Selkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Все рассматриваемые группы конечны. Произведением $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} называется класс групп $\{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}\}$. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где \mathfrak{F} – наследственная однопорожденная ω -локальная формация и \mathfrak{M} , \mathfrak{H} – две неединичные формации. Доказано, что если формация $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является разрешимо ω -насыщенной и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{M}$.

Ключевые слова: однопорожденная наследственная ω -насыщенная формация, произведение формаций, минимальный ω -локальный спутник.

All groups considered are finite. The product $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ of the formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} is the class $\{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}\}$. Let $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, where \mathfrak{F} is a hereditary one-generated ω -saturated formation and \mathfrak{M} , \mathfrak{H} be two non-identity formations. Suppose that $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ is a solubly ω -saturated formation. If $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, then $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{M}$.

Keywords: one-generated hereditary ω -saturated formation, product of some formations, minimal ω -local satellite.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Напомним, что формация \mathfrak{F} – это такой класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, что каждая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (обозначаемую через $G^{\mathfrak{F}}$), фактор-группа по которой принадлежит \mathfrak{F} . Произведением $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} называется класс групп $\{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}\}$.

Пусть p – простое число. Неединичная формация \mathfrak{F} называется p -насыщенной, если из $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Неединичная формация \mathfrak{F} называется разрешимо p -насыщенной, если из $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Если формация \mathfrak{F} является p -насыщенной (разрешимо p -насыщенной) для всех $p \in \omega$, то \mathfrak{F} называется ω -насыщенной (разрешимо ω -насыщенной) формацией [1], [2]. Пересечение всех разрешимо ω -насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G , называется однопорожденной разрешимо ω -насыщенной формацией. Заметим, что ω -насыщенные формации оказались полезными при изучении различных классов разрешимых групп [3]. В то же время, при изучении групп необязательно разрешимых, более полезными

оказались разрешимо ω -насыщенные формации [4]. В данной работе докажем следующую теорему.

Теорема 0.1. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где \mathfrak{F} – наследственная однопорожденная ω -насыщенная формация и $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ такая разрешимо ω -насыщенная формация, что формации \mathfrak{M} и \mathfrak{H} являются неединичными. Если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{M}$.

1 Предварительные результаты

Пусть ω – непустое множество простых чисел. Функцию f , имеющую вид

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\},$$

называют ω -локальным спутником [1]. Для произвольного ω -локального спутника f символом $LF_{\omega}(f)$ обозначают класс групп

$$(G \mid G/O_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p))$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$.

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ для некоторого ω -локального V -спутника f , то формация \mathfrak{F} называется ω -насыщенной, а f – ω -локальный V -спутник этой формации. Пусть \mathfrak{X} – произвольная совокупность групп, то символ $s^{\omega}\text{form}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех наследственных ω -насыщенных формаций,

содержащих \mathfrak{X} . Спутник f называется минимальным ω -локальным спутником формации \mathfrak{F} , если для любого ω -локального спутника h формации \mathfrak{F} выполняется $f(a) \subseteq h(a)$, для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Лемма 1.1 (Лемма 5, [1]). Пусть \mathfrak{X} – такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{F} = s^\omega \text{form}(\mathfrak{X})$ и f – минимальный наследственный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F} . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = s\text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = s\text{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

Лемма 1.2. Всякая формация порождается набором всех своих формационно критических групп.

Доказательство. Пусть \mathfrak{X} – множество всех формационно критических групп формации \mathfrak{F} . И пусть $\mathfrak{M} = \text{form}(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Если число всех неизоморфных формационно критических групп, принадлежащих формации \mathfrak{F} , конечно, то число всех подформаций этой формации является конечным.

Доказательство. Пусть \mathfrak{X} – множество всех неизоморфных формационно критических групп, принадлежащих формации \mathfrak{F} . И пусть \mathfrak{M} – произвольная подформация формации \mathfrak{F} . Тогда по лемме 1.2, формация \mathfrak{M} порождается набором \mathfrak{X}_0 всех своих формационно критических неизоморфных групп. Но поскольку $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}$ и \mathfrak{X} – конечное множество, то существует лишь конечное множество таких наборов. Лемма доказана.

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая подформация однопорожжденной формации \mathfrak{M} . Тогда множество всех собственных подформаций формации \mathfrak{F} конечно.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \text{form}(G) = \mathfrak{M}$, где G – некоторая группа. Тогда ввиду леммы 1.2, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}(n)$. Значит, по теореме 3.47 [5], формация \mathfrak{F} содержит конечное множество неизоморфных критических групп. Следовательно, ввиду леммы 1.3, формация \mathfrak{F} имеет конечное множество подформаций. Лемма доказана.

Лемма 1.5 (Лемма 3.4, [6]). Пусть p – простое число и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где любая простая группа формации \mathfrak{M} имеет порядок p . Тогда

$$G = A^{\mathfrak{H}} \wr (A/A^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$$

для любой группы $A \in \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где \mathfrak{F} – наследственная однопорожжденная ω -насыщенная формация. Если \mathfrak{M} и \mathfrak{H} такие формации, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то \mathfrak{M} является разрешимой формацией.

2 Доказательство теоремы 0.1

Пусть $\mathfrak{F} = s^\omega \text{form}(G)$. Предположим, что $n = |G|$ и f – минимальный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F} .

Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}$, и пусть группа D содержится $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}$. Тогда, ввиду теоремы 1.1, D – разрешимая группа. Пусть $\mathfrak{M}_0 = c_\omega \text{form}(D)$. Тогда как и при доказательстве предложения А работы [6], можем видеть, что формация \mathfrak{M} является ω -локальной формацией такой, что $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$. Ввиду леммы 1.4, видим, что множество всех ω -локальных подформаций формации \mathfrak{M}_0 конечно.

Следовательно, формация \mathfrak{M}_0 имеет такую ω -локальную подформацию \mathfrak{H}_0 , что $\mathfrak{H}_0 \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}$, но $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}$ для любой собственной ω -композиционной подформации \mathfrak{H}_1 формации \mathfrak{H}_0 . Так как D – разрешимая группа, то формация \mathfrak{M}_0 является разрешимой. Отсюда следует, что формация \mathfrak{M}_0 и любая ω -композиционная подформация формации \mathfrak{M}_0 являются ω -локальными формациями.

Ввиду следствия 4.11 [7], имеем

$$\mathfrak{H}_0 = l_\omega \text{form}(A),$$

где A – монолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой $P = A^{\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}}$ и либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$, либо P – p -группа, где $p \in \omega$, и $A = [P]H$, где

$$P = C_G(P) = F(A) = F_p(A)$$

и $H = [Q]N$ является монолитической группой, $Q = C_H(Q) = O_q(H)$ – минимальная нормальная подгруппа группы H , причем $p \neq q \in \omega$ и N – неединичная нильпотентная группа.

Предположим, что для каждой группы $B \in \mathfrak{H}$ такой, что $|B| > n$, \mathfrak{H} -корадикал $D^{\mathfrak{H}}$ регулярного сплетения $D = A \wr B$ не содержится подпрямой в базе регулярного сплетения D . Тогда ввиду леммы 1.5, имеем группы $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Следовательно,

$$T^{\mathfrak{H}} \wr (T/T^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$$

и p – такое простое число, что для любой простой группы A из \mathfrak{M} имеем $|A| = p$.

Предположим, что $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{F}$, и пусть B – группа минимального порядка из $\mathfrak{N}_p \setminus \mathfrak{F}$.

Пусть $R = B^{\mathfrak{F}}$ – минимальная нормальная подгруппа группы B . Так как $B \in \mathfrak{N}_p \setminus \mathfrak{F}$, то $B^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$.

Нетрудно видеть, что

$$R = Z_p \times \dots \times Z_p \in \mathfrak{F}.$$

Если $B = R$, то R – абелева p -группа. Следовательно, ввиду леммы 3.5.20 [8],

$$B \in \text{form}(Z_p \wr (B/R)),$$

где Z_p – группа порядка p . Если

$$Z_p \wr (B/R) \in \mathfrak{F},$$

то

$$B \in \text{form}(Z_p \wr (B/R)) \in \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору группы B . Значит, $Z_p \wr (B/R) \notin \mathfrak{F}$. Пусть

$$T = A \wr (B/R) = [K](B/R),$$

где K – база регулярного сплетения T . Используя лемму 3.5.20 [8] и тот факт, что $A \in \mathfrak{M}$, видим, что группа $T^{\mathfrak{F}}$ содержится подпрямо в группе $K \in \mathfrak{M}$. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$, то $T^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$. Это показывает, что

$$T \in \mathfrak{M}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Пусть

$$D = T^{|G|} = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_{|G|},$$

где

$$T_1 \cong T_2 \cong \dots \cong T_{|G|} \cong T.$$

Тогда, очевидно, $D \in \mathfrak{F}$. Значит,

$$E = D^{\mathfrak{F}} \wr (D/D^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}.$$

Ясно, что $D^{\mathfrak{F}} \subseteq T_1^{\mathfrak{F}} \times T_2^{\mathfrak{F}} \times \dots \times T_{|G|}^{\mathfrak{F}}$.

Следовательно,

$$|D/D^{\mathfrak{F}}| \geq |T/T^{\mathfrak{F}}|^{|G|}.$$

Значит, $Z_p \in \mathfrak{F}$, $R \neq B$. Это показывает, что $|T/T^{\mathfrak{F}}| > 1$ и $t = |D/D^{\mathfrak{F}}| > |G|$.

Нетрудно видеть, что $T^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Ввиду леммы 3.1.9 [8], группа T монолитична, и ее минимальная нормальная подгруппа имеет вид

$$L = P^{\mathfrak{F}} = \prod_{b \in B/R} P_1^b,$$

где P_1 – минимальная нормальная подгруппа первой копии группы A в группу K . Очевидно,

$$\text{Soc}(D) = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_{|G|},$$

где L_i – минимальная нормальная подгруппа группы T_i . Следовательно, для любой минимальной нормальной подгруппы K группы E выполняется $|K| \geq t > |G|$.

Пусть F – простая неабелева группа изоморфная композиционным факторам подгруппы

$A^{\mathfrak{F}} = R$. Пусть Q – минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{F}}$ и ее композиционные факторы неизоморфны F . Допустим, что Q – абелева p -группа. Тогда $O_p(D^{\mathfrak{F}}) \neq 1$. Так как

$$O_p(D^{\mathfrak{F}}) \text{char} D^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq D,$$

то $O_p(D^{\mathfrak{F}}) \trianglelefteq D$. Следовательно, существует такая минимальная нормальная подгруппа N группы D , что $N \subseteq O_p(D^{\mathfrak{F}})$. Значит, $N \cong \text{Soc}(T_1)$.

Но у T_1 все композиционные факторы изоморфны группе F . Полученное противоречие показывает, что Q – неабелева группа и

$$Q = U \times U \times \dots \times U,$$

где U неизоморфна F . Тогда $(D^{\mathfrak{F}})_Q \neq 1$, и так как

$$(D^{\mathfrak{F}})_Q \text{char} D^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq D,$$

то $(D^{\mathfrak{F}})_Q \trianglelefteq D$. Значит, существует какая минимальная нормальная подгруппа I группы D , что $I \subseteq (D^{\mathfrak{F}})_Q$. Следовательно, $I \cong \text{Soc}(T_1)$. Противоречие. Таким образом, у группы $D^{\mathfrak{F}}$ все композиционные факторы изоморфны F . Значит, каждая минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{F}}$ и любая минимальная нормальная подгруппа X группы E являются неабелевыми группами, чьи композиционные факторы изоморфны композиционным факторам группы P .

Предположим, что $p \in \pi(P) \cap \omega$. Тогда $F_p(E) = 1$, и

$$E \cong E/F_p(E) \in f(p) = \text{sform}(G/F_p(G)).$$

Но

$$|X| \geq |P|^t > |G|,$$

где X – минимальная нормальная подгруппа группы E , что противоречит лемме 3.1.5 [8]. Пусть $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $O_{\omega}(E) = 1$, и

$$E \cong E/O_{\omega}(E) \in f(\omega) = \text{sform}(G/O_{\omega}(G)),$$

что также противоречит лемме 3.1.5 [8]. Таким образом, $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$, и, следовательно, $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{M}\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа G монолитична, и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}}$. Так как

$$R = A_1 \times \dots \times A_t,$$

где $A_1 \cong \dots \cong A_t \cong A$ – простая группа, и $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$, то

$$G^{\mathfrak{F}} = R = A_1 \times \dots \times A_t \in \mathfrak{F}.$$

Значит, $A \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 3.1 [6], $|A| = p$, и R является p -группой. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{N}_p \setminus \mathfrak{F} = \mathfrak{F}.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Так как равенство $\mathfrak{M}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ противоречит условию теоремы, то данное противоречие показывает, что группа B принадлежит формации \mathfrak{F} , причем $|B| > n$ и \mathfrak{F} -корадикал $D^{\mathfrak{F}}$ регулярного сплетения $D = A \wr B$ содержится подпрямо в группе K . Следовательно, $D \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3.1.9 [8], группа D является монолитической с минимальной нормальной подгруппой R , совпадающей с $P^{\mathfrak{A}} = \prod_{b \in B} P_1^b$, где P_1 – минималь-

ная нормальная подгруппа первой копии группы A в группе K . Если $\pi = \emptyset$, то $O_{\omega}(D) = 1$, и по лемме 1.1, имеем

$$D \simeq D/O_{\omega}(D) \in f(\omega') = \text{sform}(G/O_{\omega}(G)).$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что группа D имеет минимальную нормальную подгруппу R с порядком

$$|P|^{|B|} \geq |P|^n > n,$$

что противоречит лемме 3.1.5 [8]. Значит, $\pi \neq \emptyset$.

Нетрудно показать, что $R \not\subseteq \Phi(D)$. Значит, существует такая максимальная подгруппа M группы D такая, что $RM = D$ и $C = C_D(R)$. Таким образом,

$$C = C \cap RM = R(C \cap M).$$

Очевидно, $C \cap M \trianglelefteq D$. Следовательно, $C = R$ и $F_p(D) = R$. Так как

$$D \in \mathfrak{M}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F},$$

то ввиду леммы 1.1, имеем

$$D/F_p(D) = D/R \in f(p) = \text{sform}(G/F_p(G)).$$

Ввиду [9, А, (18.2)], имеем

$$D/R \simeq (A/P) \wr B \simeq H \wr B.$$

Таким образом, $H \wr B \in \text{sform}(G/F_p(G))$.

Тем не менее, группа $H \wr B$ имеет минимальную нормальную подгруппу с порядком

$$|Q|^{|B|} \geq |Q|^n > n.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}_{\omega}\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
2. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журнал. – 2000. – № 52 (6). – С. 783–797.
3. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p -local formations of finite group / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 186 (1997). – P. 57–65.
4. Shemetkov L.A. On partially saturated formations and residuals of finite groups / L.A. Shemetkov // Communication in algebra. – 2001. – 29 (9). – P. 4125–4137.
5. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
6. Go, W. Factorization theory of onegenerated Bear ω -local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35. – P. 2901–2931.
7. Sel'kin, V.M. One-generated formations and their factorizations / V.M. Sel'kin. – Gomel, 2002. – 13 с. – (Preprint / GGU im. F. Skoriny : № 24).
8. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
9. Doerk, K. Finite soluble group / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

Поступила в редакцию 10.01.12.

УДК 577.353; 612.014.421; 612.741.1

МЕТОД ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА СУММАРНОЙ ЭЛЕКТРОМИОГРАММЫ В ОЦЕНКЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕРВНО-МЫШЕЧНОГО АППАРАТА ЧЕЛОВЕКА

М.М. Меженная¹, А.Н. Осипов¹, И.А. Ильясевич²,
Н.С. Давыдова¹, М.В. Давыдов¹, В.А. Кульчицкий³

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²РНПЦ Травматологии и ортопедии МЗ РБ, Минск

³Институт физиологии НАН Беларуси, Минск

METHOD OF TIME-FREQUENCY ANALYSIS OF GLOBAL ELECTROMYOGRAM IN ESTIMATION OF HUMAN NEUROMUSCULAR SYSTEM FUNCTIONAL CONDITION

M.M. Mezhennaya¹, A.N. Osipov¹, I.A. Ilyasevich²,
N.S. Davydova¹, M.V. Davydov¹, V.A. Kulchitsky³

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²Republican Academic and Research Center of Traumatic Surgery and Orthopedics, Minsk

³Institute of Physiology of National Academy of Science of Belarus, Minsk

В клинических условиях проведены исследования суммарной электромиограммы, зарегистрированной в двух группах: у здоровых лиц ($n=33$) и у пациентов с нарушением двигательной функции мышц нижних конечностей ($n=34$). Анализ результатов обработки суммарной электромиограммы в норме и при патологии методом частотно-временного преобразования показал эффективность данного метода для информативной качественной и количественной оценки функционального состояния нервно-мышечного аппарата. Установлены закономерности частотных параметров суммарной электромиограммы в норме и при патологии. Предложен численный критерий для оценки функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека. Полученные результаты представляют интерес для инженеров, специализирующихся в области разработки систем электромиографии.

Ключевые слова: электромиография, суммарная электромиограмма, нервно-мышечная система, нестационарная система, биомедицинский сигнал, быстрое оконное преобразование Фурье, частотно-временной анализ, спектрограмма.

The efficiency of time-frequency method in informative qualitative and quantitative estimation of human neuromuscular system functional condition has been proved by researches with the help of normal and pathologic global electromyogram processed by the method of time-frequency transformation. The regularities of frequency parameters of normal and pathologic electromyogram signals are established. The numerical criterion for estimation of human neuromuscular system functional condition is offered. The results of this work is of great interest for developers of the electromyography systems.

Keywords: electromyography, global electromyogram, neuromuscular system, non-stationary system, biomedical signal, short-time Fourier transformation, time-frequency analysis, spectrogram.

Введение

Суммарная электромиография является признанным методом исследования нервно-мышечной системы, основанным на регистрации и качественно-количественном анализе суммарной биоэлектрической активности совокупности двигательных единиц с помощью накожных электродов [1], [2]. Параметры регистрируемого электромиографического (ЭМГ) сигнала служат объективным диагностическим показателем функционального состояния мышечных групп.

Традиционные методы анализа суммарной электромиограммы базируются на расчете статистических параметров (средняя арифметическая амплитуда и частота потенциалов) и визуальной оценке по общему виду ЭМГ в соответствии с классификацией Ю.С. Юсевич [2]–[4].

Существует практика применения турн-амплитудного анализа по Виллисону [1], [3], [5] и спектрального анализа [6], [7].

Метод визуальной оценки ЭМГ и отнесение ее к одному из общепринятых типов по классификации Ю.С. Юсевич имеет определенное диагностическое значение, однако требует анализа степени насыщенности ЭМГ биоэлектрическими потенциалами, что обнаруживается только при количественной оценке сигнала [3]. Турн-амплитудный анализ по Виллисону также является преимущественно методом графического визуального анализа, но позволяет дифференцировать характер поражения только в случае его достаточной выраженности [1].

В целом, визуальная интерпретация сигнала экспертом в большой степени определяется

опытностью и квалифицированностью аналитика [8].

Количественный анализ биомедицинских сигналов является источником достоверной информации о параметрах сигнала, усиливает объективную составляющую интерпретации, даваемой экспертом. Однако вышеуказанные методы количественной оценки (статистический и спектральный анализ) обладают существенным недостатком, так как рассматривают ЭМГ-сигналы как линейные стационарные, что не позволяет в полной мере охарактеризовать их частотно-временную структуру и динамику изменения параметров в течение всего периода сокращения. Так, например, недостатком спектрального анализа является отсутствие информации о локализации частотных компонент сигнала во времени [8], что наряду с недостаточно проработанной теоретической и методической базой диагностики на основе данного метода не позволило ему получить широкое распространение [8]–[10].

В теории цифровой обработки сигналов стационарной называется система, статистические характеристики которой одинаковы во всех временных сечениях [8], [10]. При этом частотное наполнение стационарных сигналов не меняется во времени [8]. Большинство биомедицинских сигналов не удовлетворяют данным условиям и являются нестационарными [3], [8], [11]–[14], что предусматривает существенное изменение их характеристик во времени. Параметры и преобразования сигнала, рассчитанные за весь интервал регистрации, существенно сглаживают эти изменения.

Для повышения информативности и расширения возможностей современной медицины целесообразно разрабатывать методы и технические средства обработки и анализа биомедицинских сигналов, адекватно отражающие процессы в физиологических системах. Так, в данной работе для анализа нестационарного по своей природе ЭМГ-сигнала предлагается использовать метод частотно-временного преобразования. Предварительные исследования показали целесообразность применения вышеуказанного метода в оценке эффективности лечения и реабилитации пациентов [15].

В статье приведены результаты исследования суммарной электромиограммы, зарегистрированной у здоровых лиц и у пациентов с нарушением двигательной функции мышц нижних конечностей. Для обработки полученных ЭМГ-сигналов использован метод частотно-временного преобразования.

1 Материал и методика исследований

В исследованиях приняли участие 33 здоровых испытуемых (21 мужского и 12 женского пола; средний возраст 21 год) и 34 пациента с нарушением двигательной функции мышц ниж-

них конечностей, обусловленной патологиями суставов и патологиями позвоночника (6 мужского и 28 женского пола; средний возраст 50 лет). Группа здоровых лиц включала тренированных испытуемых, занимающихся тяжелой атлетикой, и нетренированных.

Электрофизиологические исследования проводились на базе ГУ «РНПЦ травматологии и ортопедии» МЗ РБ с использованием разработанного авторами двухканального аппаратно-программного комплекса для регистрации и обработки суммарных ЭМГ-сигналов нервно-мышечного аппарата человека [16]. Отведение ЭМГ-сигналов осуществляли с помощью накожных электродов («3M Red Dot») диаметром 10 мм, которые фиксировались в области двигательной точки мышцы. Межэлектродное расстояние не превышало 20 мм. Биоэлектрическую активность билатеральных мышц нижних конечностей (*m. tibialis anterior*, *m. gastrocnemius medialis*, *m. rectus femoris*, *m. vastus lateralis*) регистрировали при их максимальном произвольном concentрическом напряжении: верхнее отведение – ЭМГ мышц левой нижней конечности, нижнее отведение – ЭМГ мышц правой нижней конечности. Тестовое движение выполнялось после предварительной инструкции в соответствии с разработанной на основе анимационной графики моделью цикла: 1) сокращение мышцы (1,5 с); 2) удержание мышцы в состоянии максимального сокращения (4 с); 3) расслабление мышцы (1,5 с). Предложенная графическая модель позволяет синхронизировать действия испытуемых и унифицировать условия проведения исследований для всех его участников, что в свою очередь обеспечивает сопоставимость результатов обработки суммарной электромиограммы.

1.1 Построение спектрограммы суммарной электромиограммы

Разработанное программное обеспечение позволяет выполнять обработку электромиограммы методом частотно-временного представления сигналов в реальном режиме времени. Данный метод реализуется на базе быстрого оконного преобразования Фурье. При этом сигнал делится на временные отрезки («окна») небольшой длительности, в пределах которых его можно считать стационарным. Временные отрезки получили название квазистационарных сегментов, а подход к обработке – анализ по коротким интервалам [8]. Исходный сигнал на выбранном отрезке умножается на оконную функцию и подвергается быстрому преобразованию Фурье в соответствии с выражением:

$$STFT_x^{(\omega)}(\tau_k, f) = \int_t [x(t) \cdot \omega^*(t - \tau_k)] \cdot e^{-j2\pi ft} dt,$$

где $x(t)$ – исходный сигнал, $\omega(t)$ – оконная функция, τ_k – величина сдвига по времени,

k – порядковый номер сдвига окна, f – частота, t – время, $\omega^*(t)$ – комплексно сопряженная оконная функция [17].

После данной операции путем возведения в квадрат действительной части (амплитуды) оконного преобразования Фурье получают участок спектрограммы для анализируемого окна:

$$\text{Спектрограмма } X(t) = |STFT(\tau_k, f)|^2.$$

Далее производится смещение окна на величину τ_k , и процедура повторяется: выполняется оконное преобразование для текущего временного отрезка, строится соответствующий участок спектрограммы. Величина смещения задается таким образом, чтобы обеспечить перекрытие сегментов при обработке (метод скользящего окна), а тем самым и непрерывность частотно-временного распределения [8], [17]. Подобным образом анализируются все подинтервалы сигнала и строится результирующая спектрограмма, представляющая собой двумерную матрицу, строки которой соответствуют временным отсчетам t от 0 секунд до окончания времени регистрации ЭМГ-сигнала, столбцы – частотам f от 0 до 1000 Гц, а в ячейках рассчитана амплитуда электромиограммы $A[f, t]$.

В качестве основных параметров частотно-временной обработки эмпирическим методом выбраны следующие: окно Хэннинга, размер преобразования в 32768 отсчетов, частота дискретизации в 44 кГц, перекрытие окон в 50%. Указанные характеристики обеспечивают качественное частотно-временное представление электромиограммы, высокое разрешение по частоте (1,34 Гц) и по времени (0,37 с) [18].

На протяжении всех исследований параметры усиления ЭМГ-сигнала и настройки программного обеспечения сохранялись неизменными.

1.2 Расчет амплитудно-частотных параметров суммарной электромиограммы

Для проведения количественного анализа ЭМГ-сигналов в норме и при патологии рассчитываются параметры частотно-временного представления суммарной электромиограммы: нижняя граничная частота, медианная частота, верхняя граничная частота, эффективная ширина спектра. Дополнительно вычисляется средняя амплитуда сигнала по формуле:

$$A_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |A[i]|,$$

где $A[i]$ – амплитуда i -ого отсчета зарегистрированного сигнала, N – число отсчетов сигнала.

Вышеуказанные параметры частотно-временной обработки позволяют в полной мере оценить частотное наполнение ЭМГ-сигнала. Так, нижняя и верхняя граничные частоты

определяют эффективную ширину спектра, т. е. область частот, в которой сосредоточено не менее 90% мощности сигнала [19]. Медианной является частота, делящая площадь под кривой спектральной плотности энергии на две равные части [20]. В отличие от среднего арифметического, понятие медианы относится к робастной статистике [21], не подвержено влиянию больших отклонений и позволяет лучше описывать центральную тенденцию исследуемого ряда значений. При этом исследования медианной частоты ЭМГ-сигналов ранее не проводились.

Определение частотных параметров производится автоматически по результатам вычисления спектрограммы ЭМГ-сигнала на основе разработанного программного обеспечения в среде MatLab. Для этого рассчитывается значение энергии ЭМГ-сигнала в каждой ячейке спектрограммы:

$$E[i, j] = A[i, j]^2,$$

где $A[i, j]$ – амплитуда электромиограммы в i -ой строке и j -ом столбце.

Далее выделяют столбец с порядковым номером j , который соответствует спектральной плотности энергии сигнала в j -ый момент времени, и для определения медианной частоты f_{m_j} выполняют поиск медианы в выделенном столбце исходя из условия: разность суммарной энергии сигнала от 0 Гц до искомой частоты и суммарной энергии от искомой частоты до F по модулю минимальна:

$$\left| \sum_{p=1}^{f_{m_j}} E[p, j] - \sum_{q=f_{m_j}}^F E[q, j] \right| \rightarrow 0.$$

Затем вычисляют энергию сигнала, сосредоточенную в эффективной ширине спектра $E_{эфф}[j]$ и составляющую более 90% (устанавливается точное значение от 91% до 99%) от общей суммы всех элементов столбца:

$$E_{эфф}[j] = 0,95 \sum_{k=1}^F E[k, j].$$

Тогда нижняя граничная частота f_{n_j} определяется из условия: разность между суммой элементов столбца с индексами от f_{n_j} до f_{m_j} и значением $\frac{1}{2} E_{эфф}[j]$ минимальна по модулю:

$$\left| \sum_{k=f_{n_j}}^{f_{m_j}} E[k, j] - \frac{1}{2} E_{эфф}[j] \right| \rightarrow 0.$$

Верхняя граничная частота f_{o_j} определяется из условия: разность между суммой элементов столбца с индексами от f_{m_j} до f_{o_j} и значением $\frac{1}{2} E_{эфф}[j]$ минимальна по модулю:

$$\left| \sum_{k=f_{m_j}}^{f_{e_j}} E[k, j] - \frac{1}{2} E_{эфф}[j] \right| \rightarrow 0.$$

Эффективная полоса частот электромиограммы Δf_j рассчитывается по формуле:

$$\Delta f_j = f_{e_j} - f_{n_j}.$$

Значения f_{n_j} , f_{m_j} , f_{e_j} , Δf_j , а также среднее значение амплитуды в столбце A_{cp_j} вычисляются для всех столбцов спектрограммы $j = 0 \dots T-1$. Результатом расчетов являются одномерные массивы зависимостей нижней граничной частоты, медианной частоты, верхней граничной частоты, эффективной ширины спектра и средней амплитуды электромиограммы от времени – $f_n[t]$, $f_m[t]$, $f_e[t]$, $\Delta f[t]$, $A_{cp}[t]$ соответственно, а также среднеарифметические показатели $f_{n_{cp}}$, $f_{m_{cp}}$, $f_{e_{cp}}$, Δf_{cp} .

2 Результаты исследований и их обсуждение

С целью проведения корректного анализа данных, зарегистрированных в группе пациентов с нарушением двигательной функции мышц нижних конечностей, соответствующие ЭМГ-сигналы были разделены на три группы в зависимости от характера изменения амплитудно-частотных показателей биоэлектрической активности: интерференционная ЭМГ, редуцированная ЭМГ и атипичная ЭМГ.

Интерференционная электромиограмма по типу генерации соответствует норме и отражает суммарную активность большого числа двигательных единиц [4]. Нижняя граница диапазона амплитуд для интерференционных ЭМГ-сигналов выбрана на основании статистических данных, полученных в результате обработки ЭМГ нетренированных испытуемых, и согласуется с амплитудными показателями суммарной электромиограммы в норме [1], [2].

У больных с выраженной степенью патологических изменений наблюдался тип биоэлектрической активности, значительно сниженной по сравнению с нормой. Такой тип активности целесообразно оценить как редуцированный [2], [22].

ЭМГ-сигналы, состоящие из отдельных потенциалов действия двигательных единиц и характеризующиеся амплитудой менее 30 мкВ, а также полное биоэлектрическое молчание были объединены в группу атипичных ЭМГ. Снижение амплитуды суммарной ЭМГ ниже 20 мкВ повышает вероятность возникновения необратимых изменений структуры и функции удлиненной мышцы. При этом ЭМГ такой низкой амплитуды наряду с потенциалами действия двигательных единиц интегрирует значительную долю

тканевого шума, не позволяющего проводить корректный количественный анализ частотных параметров [22], в связи с чем для данной группы показатели частоты не рассчитывались.

2.1 Качественная оценка функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека

Метод частотно-временного анализа в качественной (визуальной) оценке функционального состояния нервно-мышечной системы человека реализован на основе спектрограмм. На рисунке 2.1 приведены ЭМГ-сигналы и соответствующие им спектрограммы мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме и при патологии. На спектрограмме по оси абсцисс указывается время в секундах, по оси ординат – логарифмическая шкала частоты (Гц), цвет соответствует уровню сигнала на данной частоте (по мере увеличения сигнала цвет изменяется от темно-синего (–85 dB) до красного (–60 dB); в черно-белом варианте статьи – от темно-серого до черного соответственно).

Сравнительный анализ ЭМГ-сигналов и спектрограмм мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме и при патологии (рисунок 2.1) выявил следующее:

1. Высокой амплитуде ЭМГ-сигнала в норме, а также интерференционной ЭМГ, зарегистрированной при патологии, соответствует на спектрограмме красно-желтая цветовая гамма (рисунок 2.1, а, б, в), в то время как низкоамплитудные редуцированные ЭМГ-сигналы передаются на спектрограмме светло-зелеными и синими оттенками и тем самым визуально значительно отличаются от нормы (рисунок 2.1, г). Атипичная ЭМГ на спектрограмме представляет собой редкие узкие полосы темно-синего цвета (рисунок 2.1, д) (в статье приведен черно-белый вариант).

2. В отличие от электромиограммы спектрограмма содержит информацию о частотно-временной структуре ЭМГ-сигнала, позволяя визуально оценить частотное наполнение сигнала и динамику его спектральных компонент во времени. Так, редуцированная электромиограмма при патологии на спектрограмме преимущественно характеризуется расширенным частотным диапазоном (рисунок 2.1, г) по сравнению с ЭМГ-сигналом в норме (рисунок 2.1, в), в то время как атипичная ЭМГ имеет на спектрограмме значительно суженный по сравнению с нормой частотный диапазон (рисунок 2.1, д).

3. Спектрограмма позволяет оценить способность мышцы к концентрическому напряжению, а именно: концентрическому напряжению мышцы в норме соответствует длительное удержание амплитуды на одном уровне (рисунок 2.1, а), в то время как при патологических процессах, затрагивающих нервно-мышечную

систему, тонус мышц может не поддерживаться, вследствие чего возникают всплески и спады амплитуды в процессе мышечного сокращения, визуально отображаемые на спектрограмме областями различных цветовых оттенков (рисунок 2.1, г, д).

На основании вышеизложенного следует сделать вывод об информационной значимости и целесообразности использования спектрограмм в качественной оценке функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека.

На рисунке 2.2 приведены графики зависимостей $A_{cp}[t]$, $f_m[t]$, $\Delta f[t]$ для ЭМГ-сигналов

мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме и при патологии, изображенных на рисунке 2.1, б, г.

Полученные графики (рисунок 2.2) свидетельствуют об увеличении амплитуды, уменьшении медианной частоты и сужении эффективной ширины спектра ЭМГ-сигнала в норме по сравнению с патологией. При этом в начале мышечного сокращения наблюдается рост амплитуды, далее при патологии тонус мышцы не поддерживается и амплитуда снижается, в то время как в норме высокий уровень амплитуды сохраняется до тех пор, пока не начинается расслабление мышцы.

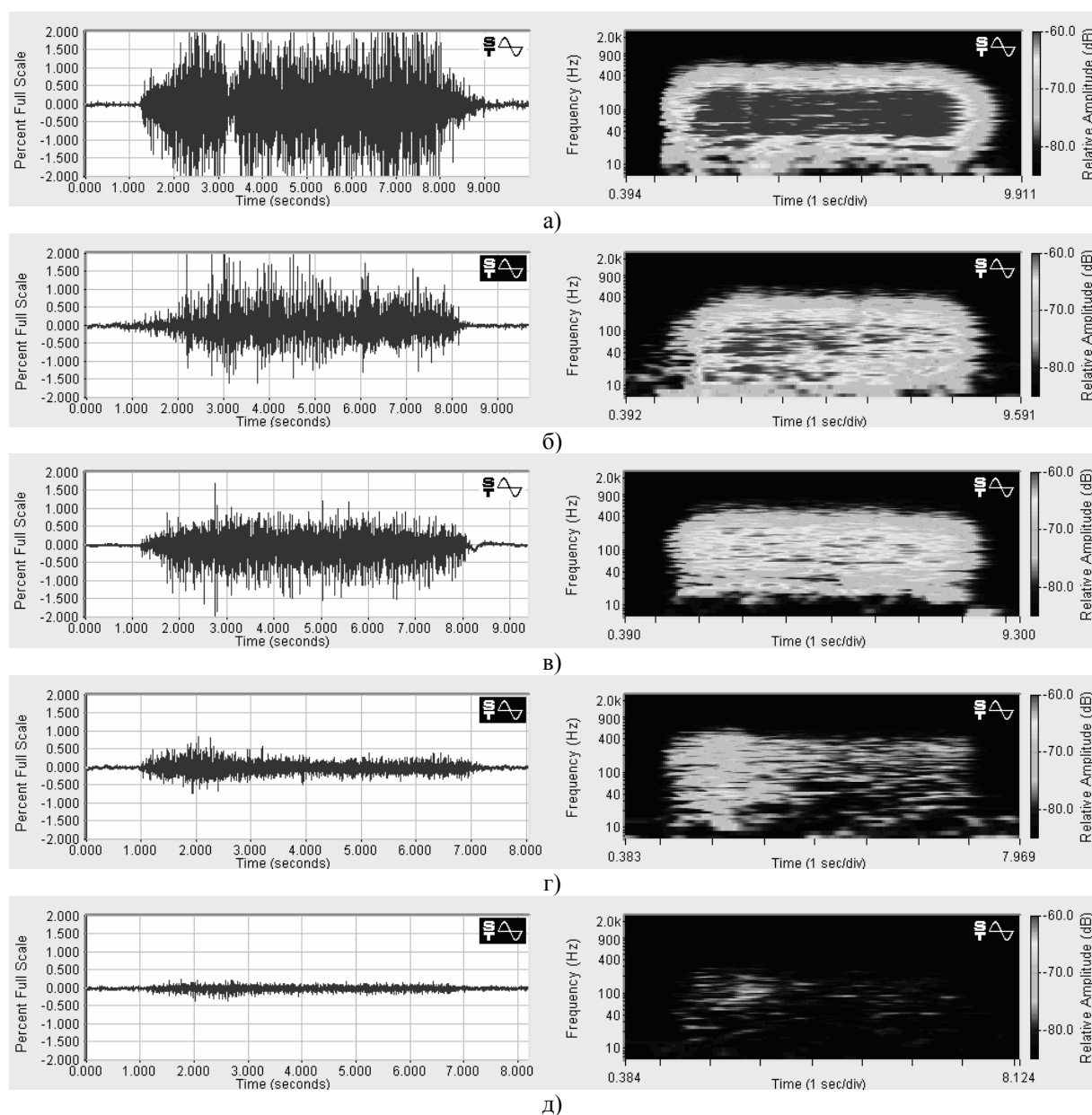


Рисунок 2.1 – Суммарная электромиограмма (слева) и соответствующая спектрограмма (справа) мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме: тренированного испытуемого (а), нетренированного испытуемого (б); при патологии: интерференционная (в), редуцированная (г), атипичная (д)

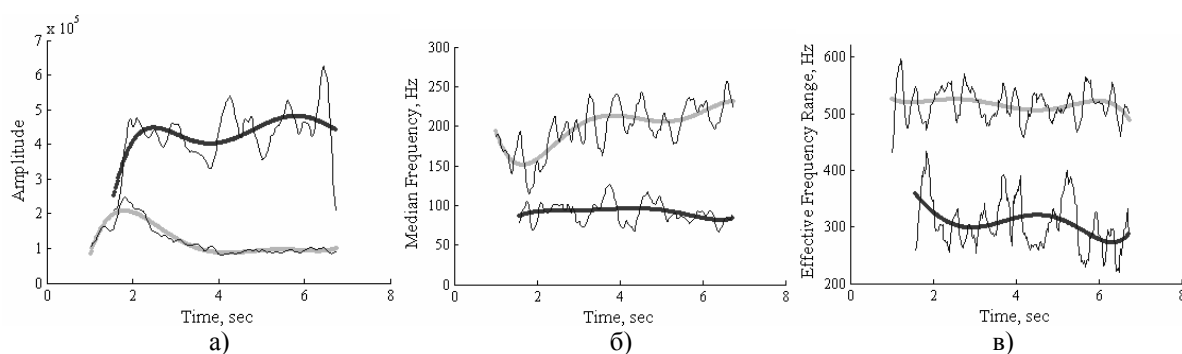


Рисунок 2.2 – Изменение средней амплитуды (а), медианной частоты (б) и эффективной ширины спектра (в) в зависимости от времени для ЭМГ-сигнала мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме (черная линия интерполяции) и при патологии (серая линия интерполяции)

2.2 Количественная оценка функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека

Результаты количественной оценки ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме и при патологии (средние значения и среднеквадратические отклонения параметров A_{cp} , f_{ncp} , f_{mcp} , $f_{вcp}$, Δf_{cp} в виде $M \pm m$) приведены в таблице 2.1.

Количественный анализ суммарной электромиограммы мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме и при патологии выявил следующие закономерности:

- средняя амплитуда ЭМГ-сигнала в норме для тренированных испытуемых достигает наибольших значений ($359,72 \pm 159,10$ мкВ), для нетренированных равна $196,16 \pm 84,00$ мкВ и значительно превышает среднеамплитудные показатели редуцированных ЭМГ-сигналов при патологии ($68,36 \pm 27,16$ мкВ в случае патологии суставов и $59,28 \pm 20,56$ мкВ при патологии позвоночника);

- показатели нижней граничной частоты в норме при патологии существенно не различаются (см. таблицу 2.1);

- медианная частота характеризуется наименьшими значениями в норме ($107,44 \pm 28,71$ Гц для тренированных испытуемых и $122,00 \pm 30,06$ Гц для нетренированных), при патологии суставов для интерференционной ЭМГ возрастает до $138,25 \pm 32,38$ Гц, а для редуцированной ЭМГ достигает $156,86 \pm 37,33$ Гц (при патологии позвоночника аналогичные показатели равны $135,48 \pm 43,33$ Гц и $155,61 \pm 35,96$ Гц соответственно);

- верхняя граничная частота, соответствующая норме, равняется $412,12 \pm 69,82$ Гц для тренированных испытуемых и $445,90 \pm 66,22$ Гц для нетренированных, при патологии суставов для интерференционной ЭМГ соответствует норме ($434,71 \pm 80,21$ Гц), а для редуцированной ЭМГ достигает $478,93 \pm 93,01$ Гц (при патологии позвоночника аналогичные показатели имеют

возрастающую тенденцию и равны $457,52 \pm 64,87$ Гц и $485,46 \pm 70,16$ Гц соответственно);

- эффективная ширина спектра, соответствующая норме, равняется $381,09 \pm 71,38$ Гц для тренированных испытуемых и $415,92 \pm 65,35$ Гц для нетренированных, при патологии суставов для интерференционной ЭМГ равна $398,09 \pm 69,05$ Гц, а для редуцированной ЭМГ достигает $444,34 \pm 88,46$ Гц (при патологии позвоночника аналогичные показатели имеют возрастающую тенденцию и составляют $423,73 \pm 60,26$ Гц и $449,51 \pm 65,44$ Гц соответственно). При этом увеличение эффективной ширины спектра в случае патологического процесса обусловлено прежде всего ростом верхней граничной частоты при неизменной нижней граничной частоте. Это объясняется согласованной работой всех двигательных единиц, входящих в состав мышцы, при ее нормальном состоянии по сравнению с процессами десинхронизации при патологии.

Вышеизложенные закономерности имеют место и для остальных исследованных мышечных групп (*m. tibialis anterior*, *m. rectus femoris*, *m. vastus lateralis*), исключение составляет медианная частота, значения которой носят неоднозначный характер.

С учетом установленных закономерностей увеличения средней амплитуды и уменьшения эффективной ширины спектра суммарной электромиограммы в норме по сравнению с соответствующими параметрами ЭМГ-сигналов при патологии в качестве количественного критерия для оценки функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека предлагается использовать показатель отношения средней амплитуды ЭМГ-сигнала к эффективной ширине спектра ($A_{cp}/\Delta f$, мкВ/Гц). Указанный амплитудно-частотный критерий в норме должен существенно превышать показатели при патологии. Данная гипотеза подтверждается рассчитанными средними значениями амплитудно-частотного критерия в норме и при патологии (таблица 2.2).

Таблица 2.1 – Средние значения параметров ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis* в норме и при патологии

| | Норма | | Патология суставов | | Патология позвоночника | |
|----------------------|--------------------------|----------------------------|-----------------------|--------------------|------------------------|--------------------|
| | Тренированные испытуемые | Нетренированные испытуемые | Интерференционная ЭМГ | Редуцированная ЭМГ | Интерференционная ЭМГ | Редуцированная ЭМГ |
| A_{cp} , мкВ | 359,72±159,10 | 196,16±84,00 | 155,92±27,14 | 68,36±27,16 | 153,00±20,08 | 59,28±20,56 |
| f_{ncp} , Гц | 31,03±3,84 | 29,98±4,77 | 36,62±14,02 | 34,59±6,10 | 33,79±9,27 | 35,94±13,30 |
| f_{mcp} , Гц | 107,44±28,71 | 122,00±30,06 | 138,25±32,38 | 156,86±37,33 | 135,48±43,33 | 155,61±35,96 |
| f_{scp} , Гц | 412,12±69,82 | 445,90±66,22 | 434,71±80,21 | 478,93±93,01 | 457,52±64,87 | 485,46±70,16 |
| Δf_{cp} , Гц | 381,09±71,38 | 415,92±65,35 | 398,09±69,05 | 444,34±88,46 | 423,73±60,26 | 449,51±65,44 |
| <i>n</i> | 20 | 46 | 10 | 20 | 8 | 14 |

Обозначение: *n* – число исследованных мышц

Таблица 2.2 – Средние значения предложенного амплитудно-частотного критерия функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека в норме и при патологии, рассчитанные для ЭМГ-сигналов мышцы *m. gastrocnemius medialis*

| | Норма | | Патология суставов | | Патология позвоночника | |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------|-----------------------|--------------------|------------------------|--------------------|
| | Тренированные испытуемые | Нетренированные испытуемые | Интерференционная ЭМГ | Редуцированная ЭМГ | Интерференционная ЭМГ | Редуцированная ЭМГ |
| $A_{cp}/\Delta f$, мкВ/Гц | 1,01±0,54 | 0,50±0,29 | 0,41±0,16 | 0,16±0,06 | 0,37±0,08 | 0,14±0,05 |

Предложенный амплитудно-частотный критерий характеризуется высокой достоверностью и информативностью в оценке функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека на основе суммарной электромиографии.

Заключение

В клинических условиях проведены исследования суммарной электромиограммы, зарегистрированной в двух группах: у здоровых лиц и у пациентов с нарушением двигательной функции мышц нижних конечностей. Анализ результатов обработки суммарной электромиограммы в норме и при патологии методом частотно-временного преобразования показал эффективность данного метода для информативной качественной и количественной оценки функционального состояния нервно-мышечного аппарата.

Качественный анализ структуры нестационарного по своей природе ЭМГ-сигнала (включая временную локализацию его спектральных компонент) и динамики его параметров в процессе мышечного сокращения выполняется на основе спектрограммы, реализующей графическую визуализацию амплитудной, частотной и временной составляющих биомедицинского сигнала в реальном режиме времени. Имеется возможность оценки способности мышцы к концентрическому напряжению по спектрограмме.

Для количественной оценки суммарной электромиограммы выполнен расчет средней

амплитуды сигнала и параметров частотно-временного представления (нижняя граничная частота, медианная частота, верхняя граничная частота, эффективная ширина спектра). Сравнительный анализ рассчитанных параметров в норме и при патологии выявил ряд закономерностей: показатели верхней граничной частоты и эффективной ширины спектра при патологии превышают соответствующие значения в норме, что объясняется нарушением согласованной работы двигательных единиц мышцы, процессами десинхронизации и адаптивной функциональной реорганизации их деятельности при патологии.

На основании установленных закономерностей предложен амплитудно-частотный критерий для оценки функционального состояния нервно-мышечного аппарата человека: показатель отношения средней амплитуды ЭМГ-сигнала к эффективной ширине спектра. Данный критерий позволяет учесть основные параметры нестационарного биоэлектрического сигнала (амплитуду и частоту) и тем самым проводить быструю и эффективную экспресс-диагностику функционального состояния нервно-мышечной системы с использованием автоматизированных комплексов частотно-временной обработки ЭМГ-сигналов.

Предложенные методы качественной и количественной оценки суммарных ЭМГ-сигналов целесообразно использовать для прогнозирования сроков восстановления нарушенных двигательных функций; в качестве критерия при

выборе средств и методов физической реабилитации; для контроля динамики нарушенных функций и объективной оценки эффективности применения лечебных мероприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаев, С.Г. Практикум по клинической электромиографии / С.Г. Николаев. – Иваново, 2001. – 264 с.
2. Гехт, Б.М. Теоретическая и клиническая электромиография / Б.М. Гехт. – Л. : Наука, 1990. – 229 с.
3. Сидоренко, А.В. Нелинейный анализ электромиограмм / А.В. Сидоренко, В.И. Ходулев, А.П. Селицкий // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. – 2006. – №11. – С. 53–59.
4. Юсевич, Ю.С. Электромиография в клинике нервных болезней / Ю.С. Юсевич. – М. : Медицина, 1958.
5. Прянишникова, О.А. Спортивная электромиография / О.А. Прянишникова // Теория и практика физической культуры. – 2005. – № 9.
6. Команцев, В.Н. Методические основы клинической электромиографии / В.Н. Команцев, В.А. Заболотных. – СПб, 2001. – 229 с.
7. Зайченко, К.В. Съём и обработка биоэлектрических сигналов : учеб. пособие / К.В. Зайченко, О.О. Жаринов, А.Н. Кулин ; под ред. К.В. Зайченко. – СПб, 2001. – 140 с.
8. Райгайян, Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход / Р.М. Райгайян. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 440 с.
9. Николаев, С.Г. Компьютерная электромиография в диагностике нервных болезней / С.Г. Николаев // Владимирский медицинский вестник. – Владимир. – 1996. – Т. 3–4. – С. 392–398.
10. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов : учеб. для вузов / А.Б. Сергиенко. – СПб. : Питер. – 2006. – 751 с.
11. Akay, M. Time-frequency representations of signals. Detection and estimation methods for biomedical signals / M. Akay // San Diego: Academic Press. – 1996. – P. 111–152.
12. Time-Frequency Analysis of Electromyogram Signals in Patients with Congenital Nystagmus / M. Hosokawa [et al.] // Japanese Ophthalmological Society. – 2004. – Vol. 48. – P. 262–267.
13. Kaipio, J. Simulation and Estimation of Nonstationary EEG / Kaipio, Jari // Natural and Environmental Sciences. – 1996. – Vol. 40. – P. 110.
14. Lin, Z.Y Time-frequency representation of the electrogastrogram – application of the exponential distributions / Lin Z.Y, Chen D.Z // IEEE Trans Biomed Eng. – 1994. – Vol. 41. – P. 267–275.
15. Частотно-временной анализ интерференционных электромиограмм в оценке эффективности лечения и реабилитации пациентов / М.М. Меженная [и др.] // Инженерный вестник. – Мн. – 2010. – №2 (30). – С. 92–96.
15. Аппаратно-программное обеспечение исследований многоканальных электромиограмм опорно-двигательного аппарата / Н.С. Савченко [и др.] // Медэлектроника – 2008 : материалы Межд. науч.-тех. конф. – Мн. : БГУИР. – 2008. – С. 312–316.
16. Давыдов, А.В. Цифровая обработка сигналов: лекции и практикум на ПК [Электронный ресурс] / А.В. Давыдов. – 2006. – Режим доступа : <http://prodav.narod.ru/dsp/index.html>. – Дата доступа : 03.01.2012.
17. Выбор параметров частотно-временной обработки электромиограмм нервно-мышечного аппарата / М.М. Меженная [и др.] // РТ-2010 : материалы 6-ой Межд. молодежной науч.-тех. конф. – Севастополь : СевНТУ. – 2010. – С. 464.
18. Осипов, А.Н. Спектральный анализ сигналов электростимуляции нервно-мышечной ткани / А.Н. Осипов, М.В. Давыдов // Доклады БГУИР. – Мн. – 2005. – №3 (11). – С. 53–58.
19. Колубаев, Е.А. Анализ акустической эмиссии при трении скольжения высокоуглеродистой стали / Е.А. Колубаев, А.В. Колубаев, О.В. Сизова // Письма в ЖТФ. – 2010. – Т. 36. – Вып.16. – С. 55–61.
20. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния / Ф. Хампель [и др.]. – М. : Мир. – 1989.
21. Сайфутдинов, М.С. Электрофизиологическая оценка состояния мышц нижних конечностей больных ахондроплазией в условиях дистракционного остеосинтеза / М.С. Сайфутдинов, Т.В. Сизова, А.М. Аранович // Известия Челябинского научного центра. – 2007. – Вып. 1 (35). – С. 188–192.

Поступила в редакцию 20.01.12.

ERRATUM TO: SELF-ASSEMBLED NANOPLASMONICS

S. Viarbitskaya, E. Dujardin, C. Girard

NanoSciences Group, CEMES/CNRS UPR 8011, 29 rue Jeanne Marvig, 31055 Toulouse Cedex 4, France

In the article, “Self-assembled nanoplasmonics”, “Problems of Physics, Mathematics and Technics”, 4 (9) 2011, some references in the figure captions and in the references list were published erroneously.

The corrected reference citations in the captions are as follows:

In Figure 1.1, the last line of the caption, the “after addition of MEA [2]” one should read “after addition of MEA [5]”.

In Figure 2.1, the last line of the caption, the “light with the fluorophore [1]” one should read “light with the fluorophore [5]”.

The reference 5 in the references list one should read as follows:

5. *One-dimensional plasmon coupling by facile self-assembly of gold nanoparticles into branched chain network* / S. Lin [et al.] // *Advanced Materials*. – 2005. – Vol. 17. – P. 2553–2559.

The original article requires mentioning that Figure 1.1 and absorption spectra in Figure 2.1 were reproduced with permission of John Wiley and Sons, Inc. All rights reserved.

The errors were corrected in the online version of this article.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (банделеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).