



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 4 (9) 2011

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (9) 2011

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Андреев В.В., Максименко Н.В. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полево-м подходе	7
Андрусевич П.П., Плетюхов В.А., Стражев В.И. Преобразования типа Паули-Гюрши в SU(3)-модели	12
Вербицкая С., Дюжарден Э., Жирар К. Самоорганизующаяся наноплазмоника	16
Гиргель С.С. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса	19
Годлевская А.Н., Егоров Н.Н., Сердюков А.Н. Гравитационные волны во внешнем поле тяготения	24
Капшай В.Н., Шамына А.А., Кондратюк В.В. Резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции в проблеме Ми для биизотропного шара	28
Капшай В.Н., Шиялева К.П., Гришечкин Ю.А. Резонансные состояния релятивистских систем и ковариантные двухчастичные уравнения	33
Константинова А.Ф., Головина Т.Г., Евдищенко Е.А., Набатов Б.В., Константинов К.К. Поглощающие оптически активные кристаллы моноклинного класса 2	38
Курдесов Ф.В. Получение плёнок ZnO:V с различным оптическим рассеянием и их влияние на формирование a-Si:H/ μ c-Si:H слоёв и соби- рание света в тонкоплёночных кремниевых солнечных элементах	45
Ларссон М., Сален П., Ван-дер-Мюлен П., Томас Р.Д., Шмидт Х.Т., Фейфель Р., Пианкастелли М.Н., Фанг Л., Осипов Т., Марфи Б., Юранич П., Бера Н., Кук Е., Уеда К., Рихтер Р., Принц К., Божек Я., Бостедт К., Вада С., Таширо М., Эхара М., Тарантелли Ф. Индуцированное рентгеновским лазером на свободных электронах формирование пар кор-дырка в многоатомных молекулах	51
Пилипович В.А., Конойко А.И., Поликанин А.М. Методы и средства электрооптической модуляции излучения ИК области спектра	54
Савенко В.С. Электропластический эффект при двойниковании металлов	60
Семченко И.В., Хахомов С.А., Самофалов А.Л., Третьяков С.А. Преимущества искусственных слабо отражающих структур на основе оптимальных спиралей при преломлении и поглощении электромагнитных волн	64
Хило Н.А., Казак Н.С., Солоневич С.В., Рыжевич А.А. Преобразователи лазерного излучения на основе кристаллов	68

МАТЕМАТИКА

Белокурский М.С. Кубические неавтономные дифференциальные системы, эквивалентные в смысле совпадения отражающих функций вложимым системам	75
Бельский В.А., Мироненко В.И. О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции	79
Васильев А.Ф., Васильева Т.И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами	86
Гальмак А.М. О σ -согласованных вектор-матрицах	92
Дашкова О.Ю. О модулях над групповыми кольцами локально конечных групп	100
Ходанович Д.А. О производной длине конечной разрешимой группы	106

ИНФОРМАТИКА

Сукач Е.И., Ратобильская Д.В. Возможности программной системы вероятностно-алгебраического моделирования сложных систем	111
---	-----

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферировается в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Д. Д. Павловец, Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 09.12.11. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,9. Уч.-изд. л. 12,1. Тираж 100 экз. Заказ № 560.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2011

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (9) 2011

CONTENTS

PHYSICS

Andreev V.V., Maksimenko N.V. Polarizability of elementary particles in the theoretical-field approach	7
Andrusevich P.P., Pletyukhov V.A., Strazhev V.I. Transformations of the Pauli-Gürsey type in SU(3)-model	12
Viarbitskaya S., Dujardin E., Girard C. Self-assembled nanoplasmonics	16
Girgel S.S. Physical properties of scalar 2D beams of Kummer – Gauss	19
Godlevskaya A.N., Egorov N.N., Serdyukov A.N. Gravitational waves in the external gravitational field	24
Kapshai V.N., Shamyna A.A., Kondratjuk V.V. Resonance structure of the scattering and extinction cross sections in the Mie problem for biisotropic sphere	28
Kapshai V.N., Shilyaeva K.P., Grishechkin Yu.A. Resonance states of relativistic systems and covariant two-particle equations	33
Konstantinova A.F., Golovina T.G., Evdischenko E.A., Nabatov B.V., Konstantinov K.K. Monoclinic optically active absorbing crystals of class 2	38
Kurdzesau F.V. Preparation of ZnO:B films with different optical haze and their influence on a-Si:H/ μ c-Si:H layers formation and light trapping in thin film silicon solar cells	45
Larsson M., Salén P., P. van der Meulen, Thomas R.D., Schmidt H.T., Feifel R., Piancastelli M.N., Fang L., Osipov T., Murphy B., Juranic P., Berrah N., Kukk E., Ueda K., Richter R., Prince K.C., Bozek J.D., Bostedt C., Wada S., Tashiro M., Ehara M., Tarantelli F. X-Ray FEL-induced double core-hole formation in polyatomic molecules	51
Pilipovich V.A., Konojko A.I., Polikanin A.M. Methods and means of the electrooptical modulation of infrared spectrum radiathion	54
Savenko V.S. Electroplastic effect at twinning metals	60
Semchenko I.V., Khakhomov S.A., Samofalov A.L., Tretyakov S.A. Advantages of artificial low-reflecting structures based on the optimal helices at the refraction and absorption of electromagnetic waves	64
Khilo N.A., Kazak N.S., Ryzhevich A.A., Solonevich S.V. Laser radiation converters on the base of crystals	68

MATHEMATICS

Belokursky M.S. The cubic nonautonomous differential systems, equivalent in sense of coincidence of reflecting functions to embedable systems	75
Belsky V.A., Mironenko V.I. Reflecting function preserving polinomial perturbations of Abel equation	79
Vasilyev A.F., Vasilyeva T.I. On finite groups with generally subnormal Sylow subgroups	86
Gal'mak A.M. On σ - compatible vector-matrices	92
Dashkova O.Yu. On modules over group rings of locally finite groups	100
Hodanovich D.A. On the derivative length of a finite solvable group	106

INFORMATION SCIENCE

Sukach E.I., Ratobylyskaya D.V. Opportunity program of probability-algebraic simulation of complex systems	111
---	-----

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

УДК 530.1; 539.12

ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ В ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОМ ПОДХОДЕ

В.В. Андреев, Н.В. Максименко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

POLARIZABILITY OF ELEMENTARY PARTICLES IN THE THEORETICAL-FIELD APPROACH

V.V. Andreev, N.V. Maksimenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

На основе теоретико-полевого подхода и решений электродинамических уравнений ковариантным методом функций Грина получены лагранжианы и амплитуды комптоновского рассеяния на пионе и нуклоне с учетом электрической и магнитной поляризуемостей. Проведен расчет магнитной и электрической квазистатических поляризуемостей для спинорной частицы с использованием методики вычисления матричных элементов комптоновского рассеяния.

Ключевые слова: поляризуемость, лагранжиан, комптоновское рассеяние, функция Грина.

The effective Lagrangians and amplitudes of Compton scattering on pion and nucleon with the account of electric and magnetic polarizabilities are obtained on the basis of the theoretical-field approach and solutions of electrodynamic equations by means of Green functions covariant method. Calculations of magnetic and electric quasi-static polarizabilities of spinor particle were evaluated on the basis of matrix elements calculation for Compton scattering amplitudes.

Keywords: polarizability, Lagrangian, Compton scattering, Green function.

Введение

При описании взаимодействия электромагнитного поля со средами с определенными физическими свойствами эффективно использовались ковариантные теоретико-полевые методы [1]. В свою очередь, такие элементарные частицы, как адроны, также являются структурными объектами. Поэтому фундаментальные оптические характеристики, такие как электрическая и магнитная поляризуемости, естественным образом возникают при описании взаимодействия низкоэнергетического электромагнитного поля с адронами [2]–[4].

Одной из сложных задач, возникающих при исследовании таких характеристик, является последовательное ковариантное описание вкладов поляризуемостей в амплитуды и сечения электродинамических процессов на адронах. Подобную проблему можно решить, построив теоретико-полевого ковариантный формализм взаимодействия электромагнитного поля с адронами с учетом их поляризуемостей.

На протяжении многих лет Ф.И. Федоровым, Л.Г. Морозом и их учениками активно развивались ковариантные методы получения лагранжианов и уравнений взаимодействия электромагнитного поля с адронами, в которых электромагнитные характеристики этих частиц являются основополагающими [5]–[9]. В рамках нерелятивистской электродинамики в монографии [10] проведено построение амплитуд и сечений с учетом поляризуемости ядер.

Цель работы: получить в рамках ковариантного теоретико-полевого подхода лагранжиан, тензор энергии-импульса и уравнения взаимодействия электромагнитного поля с адронами спина 0 и 1/2 с учетом поляризуемостей.

В работе также вычисляются структуры, которые аналогичны поляризуемостям, но возникающие не за счет сильных взаимодействий. Анализируется их возможный вклад в поляризуемости адронов.

1 Ковариантное представление амплитуды комптоновского рассеяния на π -мезоне с учетом вклада поляризуемостей

Для определения низкоэнергетической части амплитуды комптоновского рассеяния (АКР) на π -мезоне с учетом его поляризуемостей воспользуемся ковариантным формализмом Лагранжа. Из низкоэнергетической теоремы следует, что АКР в области низких энергий определяется борновской частью, а также вкладом поляризуемостей и среднеквадратичного радиуса мезона.

Определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей с учетом поляризуемостей следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - m^2 (\phi^+ \phi) + L_I^{(e)} + L_I^{(a)}. \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) введены обозначения:

$$L_I^{(e)} = j_\mu A^\mu + e^2 A^2 (\phi^+ \phi),$$

$$L_I^{(\alpha)} = \left[L^{\mu\nu}(\bar{P}, \bar{M}, \bar{\partial}) + L^{\mu\nu}(\bar{\partial}, \bar{P}, \bar{M}) \right] F_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

где \bar{P} и \bar{M} – операторы электрической и магнитной поляризации структурной частицы и

$$L^{\mu\nu}(\bar{P}, \bar{M}, \bar{\partial}) = -\frac{i}{4m} \left\langle \left(\bar{P}^\mu \bar{\partial}^\nu - \bar{P}^\nu \bar{\partial}^\mu \right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{M}_\rho \bar{\partial}_\sigma \right\rangle,$$

$$L^{\mu\nu}(\bar{\partial}, \bar{P}, \bar{M}) = -\frac{i}{4m} \left\langle \left(\bar{\partial}^\nu \bar{P}^\mu - \bar{\partial}^\mu \bar{P}^\nu \right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\partial}_\sigma \bar{M}_\rho \right\rangle.$$

Стрелки указывают направления действия операторов (производных) на волновые функции π -мезона $\phi(x)$, а сокращенная запись $\langle \rangle$ подразумевает следующее: $\langle \hat{Q} \rangle = \phi^\dagger(x) \hat{Q} \phi(x)$.

Выражение (1.2) согласовано с классическим определением взаимодействия электромагнитного поля с частицей с учетом ее электрической и магнитной поляризаций [11], [12].

Вспользуемся уравнениями Лагранжа-Эйлера для того, чтобы найти уравнения движения структурной заряженной частицы спина 0 в электромагнитном поле. В итоге приходим к соотношению

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = -\left(\hat{V}^{(e)}(x) + \hat{V}^{(\alpha)}(x) \right) \phi(x), \quad (1.3)$$

где

$$\hat{V}^{(e)}(x) + \hat{V}^{(\alpha)}(x) = \partial_\nu \left(ieA^\nu + \hat{\pi}_I^{(\alpha)\nu} \right) + ieA^\nu \partial_\nu - e^2 A^2,$$

$$\hat{\pi}_I^{(\alpha)\nu} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi^\dagger)} \left[L^{\rho\sigma}(\bar{P}, \bar{M}, \bar{\partial}) + L^{\rho\sigma}(\bar{\partial}, \bar{P}, \bar{M}) \right] F_{\rho\sigma}. \quad (1.4)$$

Соотношения выше позволяют нам вычислить АКР на π -мезоне с учетом поляризуемостей. Для этого определим S -матричные элементы согласно работам [13], [14]:

$$S_{fi} = \left\langle f_p(x'), \int d^4x \Delta^c(x' - x) \Big|_{t=\pm\infty} \hat{V}^{(\alpha)}(x) f_p(x) \right\rangle =$$

$$= (-i) \int d^4x f_p^*(x) \hat{V}^{(\alpha)}(x) f_p(x) \quad (1.5)$$

с $\Delta^c(x' - x)$ – функцией Грина и с волновыми функциями мезонов в виде плоских волн

$$f_p(x) = \frac{\exp(-ipx)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}}.$$

Далее, используя асимптотические условия, в которых пренебрегается взаимодействиями при $t = \pm\infty$ для S -матричных элементов (1.5), находим, что

$$S_{fi} = i \int d^4x \partial_\mu f_p^*(x) \hat{\pi}_I^{(\alpha)\mu} =$$

$$= \int d^4x \left\langle \left[L^{\mu\nu}(\bar{P}, \bar{M}, \bar{\partial}) + L^{\mu\nu}(\bar{\partial}, \bar{P}, \bar{M}) \right] F_{\mu\nu} \right\rangle.$$

Для операторов электрической и магнитной поляризации структурной частицы \bar{P} и \bar{M} нами предлагается использовать выражения:

$$\bar{P} = 4\pi\alpha_E F^{\mu\rho}(i\bar{\partial}_\rho), \quad \bar{M} = 4\pi\beta_M \tilde{F}_{\mu\rho}(i\bar{\partial}^\rho),$$

где α_E и β_M – электрическая и магнитная поляризуемости π -мезона, а тензор

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

Тогда для S -матричного элемента получим:

$$S_{fi} = i \frac{2\pi}{m} \int d^4x \left[\langle \bar{\partial}_\rho \bar{\partial}^\nu \rangle + \langle \bar{\partial}^\nu \bar{\partial}_\rho \rangle \right] \times$$

$$\times \left[\alpha_E F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}^{\mu\rho} \tilde{F}_{\mu\nu} \right]. \quad (1.6)$$

Используя соотношение

$$\tilde{F}^{\mu\rho} \tilde{F}_{\mu\nu} = \left[F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\rho F^2 \right],$$

уравнение (1.6) можно представить в виде [15]:

$$S_{fi} = i \frac{2\pi}{m} \int d^4x \left[\langle \bar{\partial}_\rho \bar{\partial}^\nu \rangle + \langle \bar{\partial}^\nu \bar{\partial}_\rho \rangle \right] \times$$

$$\times \left[(\alpha_E + \beta_M) F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} - \frac{\beta_M}{2} \delta_\nu^\rho F^2 \right]. \quad (1.7)$$

В импульсном представлении амплитуда (1.7) после выделения нормировочных множителей запишется следующим образом:

$$S_{fi} = \frac{(-i)(2\pi)^4 \delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^6 \sqrt{16\omega_1 \omega_2 E_1 E_2}} M \quad (1.8)$$

с матрицей M :

$$M = -\frac{2\pi}{m} \left(p_{2\nu} p_1^\mu + p_2^\mu p_{1\nu} \right) \left[(\alpha_E + \beta_M) \times \right.$$

$$\left. \times \left(F_{\mu\rho}^{(2)} F_{(1)}^{\rho\nu} + F_{\mu\rho}^{(1)} F_{(2)}^{\rho\nu} \right) - \beta_M \delta_\mu^\nu F_{(2)}^{\mu\rho} F_{\mu\nu}^{(1)} \right]. \quad (1.9)$$

В соотношениях (1.8) и (1.9) использованы обозначения:

$$F_{(1)}^{\mu\nu} = k_1^\mu e_{\lambda_1}^\nu - k_1^\nu e_{\lambda_1}^\mu; \quad F_{(2)}^{\mu\nu} = k_2^\mu e_{\lambda_2}^\nu - k_2^\nu e_{\lambda_2}^\mu;$$

$k_{1,2}$ – 4-импульсы фотонов с энергиями $\omega_{1,2}$ и векторами поляризации $e_{\lambda_{1,2}}$ соответственно.

Ковариантное уравнение (1.9) является калибровочно-инвариантным выражением для АКР на частице спина 0 с учетом поляризуемостей.

2 Ковариантное представление АКР на нуклоне с учетом вклада поляризуемостей

Определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина 1/2 (для определенности с нуклоном) следующим образом:

$$L(x) = -\frac{1}{4} F^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\Psi}(x) \left[(i\bar{\partial} - m) - e\hat{A} - \frac{1}{4} \bar{L}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \Psi(x) -$$

$$- \frac{1}{2} \bar{\Psi}(x) \left[(i\bar{\partial} + m) + e\hat{A} + \frac{1}{4} \bar{L}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \Psi(x), \quad (2.1)$$

где

$$\bar{L}^{\mu\nu} = -\frac{i}{m} \left[\left(\bar{P}^\mu \bar{\partial}^\nu - \bar{P}^\nu \bar{\partial}^\mu \right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{M}_\rho \bar{\partial}_\sigma \right], \quad (2.2)$$

$$\bar{L}^{\mu\nu} = \frac{i}{m} \left[\left(\bar{\partial}^\nu \bar{P}^\mu - \bar{\partial}^\mu \bar{P}^\nu \right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\partial}_\sigma \bar{M}_\rho \right]. \quad (2.3)$$

Так же как и в предыдущем случае, используя уравнения Лагранжа-Эйлера и лагранжиан (2.1), приходим к уравнениям:

$$\left[(i\bar{\partial} - m) - e\hat{A} - \frac{1}{4}\bar{L}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right] \Psi(x) = 0,$$

$$\bar{\Psi}(x) \left[(i\bar{\partial} + m) + e\hat{A} + \frac{1}{4}\bar{L}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right] = 0.$$

Чтобы получить согласование с низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне, операторы поляризации частицы определим следующим образом:

$$\hat{P}^\mu = 4\pi\alpha_E F^{\mu\nu}\gamma_\nu, \quad \hat{M}^\mu = 4\pi\beta_M \tilde{F}^{\mu\nu}\gamma_\nu,$$

где α_E и β_M – электрическая и магнитная поляризуемости нуклона.

С помощью уравнений (2.1)–(2.3) найдем лагранжиан взаимодействия L_I

$$L_I(x) = \frac{2\pi}{m} \left[\alpha_E F_{\mu\nu} F_\rho^\mu + \beta_M \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_\rho^\mu \right] \theta^{\nu\rho}, \quad (2.4)$$

где

$$\theta^{\nu\rho} = \frac{i}{2} \bar{\Psi}(x) \partial^\nu \gamma^\rho \Psi(x).$$

Тогда на основе определения S -матрицы рассеяния через лагранжиан взаимодействия L_I

$$\hat{S} = i \int L_I(x) d^4x$$

можно рассчитать дифференциальное сечение комптоновского рассеяния на угол $\theta = 0$ в лабораторной системе отсчета с точностью до ω^2 :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha_{QED}}{m} \left[\frac{\alpha_{QED}}{m} - 2\omega^2(\alpha_E + \beta_M) \right], \quad (2.5)$$

где ω – частота излучения и $\alpha_{QED} = e^2/(4\pi)$. Выражение (2.5) совпадает с ранее известными для случая $\kappa_N = 0$ (см., например, [16]), что подтверждает правильность разработанной в данной статье методики построения лагранжиана с учетом поляризуемостей.

3 Тензоры энергии-импульса взаимодействия электромагнитного поля спина 1/2 с учетом электрической поляризуемости

В электродинамике при описании взаимодействия электромагнитного поля с заряженной частицей спина 1/2 используется лагранжиан [17], [18]:

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \bar{D} \Psi - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \bar{D} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi, \quad (3.1)$$

где

$$\bar{D}_\mu = \bar{\partial}_\mu - ieA_\mu \quad \text{и} \quad \bar{D}_\mu = \bar{\partial}_\mu + ieA_\mu.$$

Соответствующие (3.1) уравнения Лагранжа-Эйлера имеют вид:

$$(i\bar{D} - m)\Psi = 0, \quad \bar{\Psi}(i\bar{D} + m) = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \equiv \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi. \quad (3.3)$$

Канонический и метрический тензоры энергии-импульса выражаются через операторы полей [18]:

$$T_{\mu\nu}^{(can)} = -F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + \tilde{\theta}_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

$$T_{\mu\nu}^{(metr)} = F_{\mu\rho} F_\nu^\rho + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + \tilde{\theta}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (j_\mu A_\nu + j_\nu A_\mu), \quad (3.5)$$

где

$$\tilde{\theta}_{\mu\nu} = (\theta_{\mu\nu} + \theta_{\nu\mu}), \quad \theta_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\nu \Psi. \quad (3.6)$$

Прделаем аналогичные построения лагранжиана, но уже для частицы, имеющей электрическую поляризуемость α_E ($\beta_M = 0$). Для этого объединим лагранжианы (2.4) и (3.1)

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \bar{D} \Psi - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \bar{D} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi, \quad (3.7)$$

в котором операторы D переопределены с учетом поляризуемости

$$\bar{D}'_\mu = \left(g_{\mu\nu} + \frac{2\pi\alpha_E}{m} F_{\sigma\nu} F_\mu^\sigma \right) \bar{\partial}^\nu - ieA_\mu,$$

$$\bar{D}'_\mu = \bar{\partial}^\nu \left(g_{\mu\nu} + \frac{2\pi\alpha_E}{m} F_\mu^\sigma F_{\sigma\nu} \right) + ieA_\mu. \quad (3.8)$$

Следуя методике, с помощью которой были получены выражения (3.4) и (3.5), найдем метрический тензор энергии-импульса с учетом поляризуемости частицы спина 1/2:

$$T_{(metr)}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} (j_\mu A_\nu + j_\nu A_\mu) + T_I^{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

где

$$T_I^{\mu\nu} = J^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma}, \quad (3.10)$$

а вспомогательный тензор J пропорционален электрической поляризуемости

$$J^{\rho\sigma} = -\frac{4\pi\alpha_E}{m} (F_\mu^\rho \tilde{\theta}^{\mu\sigma} - F_\mu^\sigma \tilde{\theta}^{\mu\rho}). \quad (3.11)$$

Из соотношений (3.10) и (3.11) следует, что при взаимодействии электромагнитного поля с частицей большой массы плотность энергии переходит в классическое выражение при $\beta_M = 0$ [16]:

$$T^{00} = -2\pi\alpha_E \mathbf{E}^2, \quad (3.12)$$

где \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля.

4 Квазистатические поляризуемости частиц спина 1/2 в КЭД

Интересной особенностью частиц, не имеющих структуру за счет сильных взаимодействий (поляризуемости, среднеквадратичный радиус и др.), является наличие аналогичных характеристик, но за счет электромагнитных или

слабых взаимодействий. Так, хорошо известно, что аномальный магнитный момент электрона «индицируется» высшими порядками теории возмущений, в то время как у протона он имеется изначально.

В данном разделе найдем квазистатические поляризуемости бесструктурных фермионов, которые возникают в комптоновском рассеянии за счет высших порядков.

Хорошо известно, что в общем случае АКР T вперед ($\theta = 0$) и назад ($\theta = \pi$) с точностью до ω^2 запишутся в виде:

$$T_{\lambda,\sigma}^{\lambda',\sigma'}(\theta = 0) = 8\pi m_f \omega^2 (\alpha_E + \beta_M) \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{\sigma,\sigma'}, \quad (4.1)$$

$$T_{\lambda,\sigma}^{\lambda',\sigma'}(\theta = \pi) = 8\pi m_f \omega^2 (\alpha_E - \beta_M) \lambda \delta_{-\lambda,\lambda'} \delta_{\sigma,-\sigma'}. \quad (4.2)$$

Здесь λ и λ' – спиральности начального и конечного фермионов со спиральностями λ и λ' соответственно; σ , σ' – спиральности входящего и исходящего фотонов; m_f – масса фермиона.

С другой стороны, существует возможность рассчитать матричные элементы и, соответственно, амплитуду комптоновского рассеяния в рамках КЭД, включая следующий за борновским порядок теории возмущений по константе α_{QED} (см., например, [19], [20]). В работах [21], [22] разработана методика вычисления поляризуемостей фермионов в рамках квантово-полевых моделей и теорий, путем сравнения соответствующих матричных элементов.

Итогом этой процедуры в данном случае являются соотношения:

$$\alpha_E^{q-s} + \beta_M^{q-s} = \frac{\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3} \frac{11}{6} + \frac{8\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3} \ln\left(\frac{2\omega}{m_f}\right), \quad (4.3)$$

$$\alpha_E^{q-s} - \beta_M^{q-s} = -\frac{\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3} \frac{59}{6} + \frac{4\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3} \ln\left(\frac{2\omega}{\lambda}\right), \quad (4.4)$$

где параметр λ представляет собой бесконечно малую массу фотона.

Отметим следующий факт: в силу того что структуры, аналогичные поляризуемостям, появляются за счет электромагнитных взаимодействий, имеет смысл говорить о полученных выше величинах как о неких «квазиполяризуемостях», которые представляют собой поправки к поляризуемостям в общем случае. По этой причине для них и введены обозначения α_E^{q-s} , β_M^{q-s} .

Как следует из (4.3) и (4.4), квазистатические поляризуемости помимо постоянных членов, содержат и неаналитические слагаемые $\sim \ln\omega$, которые расходятся в томпсоновском пределе ($\omega \rightarrow 0$). Именно вышеуказанное свойство и послужило причиной того, что в работах [23], [24] структуры (4.3) и (4.4) были названы квазистатическими поляризуемостями.

Уравнение (4.3) совпадает с выражением, полученным в работах [23], [24], а формула (4.4) получена впервые. И если в работе [23] методика

потребовала значительных усилий по расчету сечений и взятия интегралов в правиле сумм Балдина [3], то в предлагаемой методике процедура фактически свелась к разложению выражений матричных элементов по частоте фотона ω .

Из соотношений (4.3) и (4.4) легко найти электрическую (α_E^{q-s}) и магнитную (β_M^{q-s}) квазистатические поляризуемости и оценить их вклад в поляризуемости «дираковского» протона (точечный фермион с нулевым аномальным магнитным моментом).

Полагая $m_f = m_p$, а параметр $\omega = 0,1 \cdot m_p$, находим, что

$$\alpha_E^{q-s} + \beta_M^{q-s} \approx -5,8 \times 10^{-7} \text{Фм}^3. \quad (4.5)$$

Сравнивая полученный результат с экспериментальными данными [25]:

$$\alpha_E^{(p)} + \beta_M^{(p)} = (13,8 \pm 0,4) \times 10^{-4} \text{Фм}^3,$$

можно заметить, что вклад данных поправок мал и не превышает даже экспериментальных ошибок.

Заключение

На основе теоретико-полевого подхода и решений электродинамических уравнений методом функции Грина получены в ковариантной форме лагранжианы и амплитуды комптоновского рассеяния на пионе и нуклоне с учетом их поляризуемостей.

Установлено, что в случае пиона операторы электрической и магнитной поляризации структурной частицы \bar{P} и \bar{M} определяются через тензоры электромагнитного поля:

$$\bar{P}^\mu = 4\pi\alpha_E F^{\mu\rho} (i\vec{\partial}_\rho) \text{ и } \bar{M} = 4\pi\beta_M \tilde{F}_{\mu\rho} (i\vec{\partial}^\rho)$$

для адронов спина 0 и

$$\hat{P}^\mu = 4\pi\alpha_E F^{\mu\nu} \gamma_\nu, \quad \hat{M}^\mu = 4\pi\beta_M \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_\nu$$

адронов спина 1/2.

Выполнено релятивистское обобщение подхода [10] для получения АКР на скалярных и спинорных частицах с учетом их поляризуемостей. Получены соответствующие тензоры энергии-импульса взаимодействия электромагнитного поля с адронами спина 1/2.

Показано, что разработанный ковариантный формализм Лагранжа для взаимодействия электромагнитного поля с адронами согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния как для спина 0, так и для спина 1/2.

На основе оригинальной методики воспроизведен известный результат для комбинации квазистатических поляризуемостей $\alpha_E^{q-s} + \beta_M^{q-s}$ в рамках КЭД и получено новое выражение для $\alpha_E^{q-s} - \beta_M^{q-s}$. Несомненным достоинством методики выделения «поляризуемостей», упомянутой в разделе 4, является ее относительная простота. Данный подход открывает более широкие

возможности для изучения внутренней структуры нуклонов и может быть применен в рамках различных квантово-полевых теорий и моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокуть, Б.В. О сохранении момента импульса электромагнитного излучения в оптически активных средах / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков // ЖПС. – 1970. – Т. XII. – Вып. 1. – С. 139–141.
2. Klein, A. Low-energy theorems for renormalizable field theories / A. Klein // Phys. Rev. – 1955. – Vol. 99. – P. 998–1008.
3. Baldin, A.M. Polarizability of nucleons / A.M. Baldin // Nucl. Phys. – 1960. – Vol. C18. – P. 310–317.
4. Петрунькин, В.А. Рассеяние фотонов малой энергии на системе со спином 1/2 / В.А. Петрунькин // ЖЭТФ. – 1961. – Т. 40. – № 4. – С. 1148–1154.
5. Мороз, Л.Г. Матрица рассеяния с учетом взаимодействия Паули / Л.Г. Мороз, Ф.И. Федоров // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 39. – Вып. 2. – С. 293–303.
6. Крылов, Б.В. Спиновые частицы в поле плоской электромагнитной волны / Б.В. Крылов, А.Ф. Радюк, Ф.И. Федоров // Препринт АН БССР. Ин-т физики. – 1976. – № 113. – 60 с.
7. Максименко, Н. В. Поляризуемость и гирация элементарных частиц / Н.В. Максименко, Л.Г. Мороз // Вопросы атомной науки и техники. Серия: общая и ядерная физика. – 1979. – № 4 (10). – С. 26–27.
8. Левчук, М. И. Гирация нуклона как одна из характеристик его электромагнитной структуры / М.И. Левчук, Л.Г. Мороз // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. – 1985. – № 1. – С. 45–54.
9. Андреев, В.В. Поляризуемости псевдоскалярных мезонов в пуанкаре-ковариантной кварковой модели / В.В. Андреев, Н.В. Максименко // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Сер. Прыродазнаўчых навук. – 2009. – № 2 (33). – С. 36–45.
10. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 315 с.
11. de Groot, C.P. Электродинамика / С.Р. де Гроот, Л.Г. Сатторп. – М. : Наука, 1982. – 560 с.
12. Anandan, J.S. Classical and quantum interaction of the dipole / J.S. Anandan // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 1354–1357.
13. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л. Мороз. – Минск : Наука и техника, 1968. – 387 с.
14. Богуш, А. А. Введение в калибровочную полевою теорию электрослабых взаимодействий / А. А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1987. – 359 с.
15. Максименко, Н.В. Низкоэнергетическое комптоновское рассеяние и поляризуемость адронов спина 0 в калибровочно –инвариантном подходе / Н.В. Максименко, Е.В. Вакулина // Известия вузов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 7. – С. 84–88.
16. Петрунькин, В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12. – С. 692–753.
17. Бьеркен, Д.Д. Релятивистская квантовая теория: в 2 т. / Д.Д. Бьеркен, С.Д. Дрелл. – М. : Наука, 1978. – Т.1: Релятивистская квантовая механика. – 296 с.
18. Полубаринов, И.В. Уравнения квантовой электродинамики / И.В. Полубаринов // ЭЧАЯ. – 2003. – Т. 32. – Вып. 3. – С. 738–811.
19. Tsai, W.-Y. Compton scattering. ii. differential cross-sections and left-right asymmetry / W.-Y. Tsai, L. L. Deraad, K. A. Milton // Phys. Rev. – 1972. – Vol. D6. – P. 1428–1438.
20. Denner, A. Complete O(alpha) QED corrections to polarized Compton scattering / A. Denner, S. Dittmaier // Nucl. Phys. – 1999. – Vol. B540. – P. 58–86.
21. Андреев, В.В. Электрические и магнитные квазистатические поляризуемости спинорной частицы в КЭД / В.В. Андреев, А.М. Сейтлиев // В сб. науч. трудов «Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности» / под ред. Ю.А. Курочкина [и др.] Институт физики НАН Беларуси. – Вып. 7. – Минск : Институт физики НАН Беларуси, 2011. – С. 8–15.
22. Андреев, В.В. Инвариантные амплитуды комптоновского рассеяния в КЭД / В.В. Андреев, А.М. Сейтлиев // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. – 2011. – 3. – С. 60–65.
23. Llanta, E. Polarizability sum rules in QED / E. Llanta, R. Tarrach // Phys.Lett. – 1978. – Vol. B78. – P. 586–589.
24. Holstein, B.R. Sum rules for magnetic moments and polarizabilities in QED and chiral effective-field theory / B.R. Holstein, V. Pascalutsa, M. Vanderhaeghen // Phys. Rev. – 2005. – Vol. D72, № 9. –P. 094014.
25. Review of Particle Physics / K. Nakamura [et al.] // Journal of Physics G. – 2010. – Vol. 37. – P. 075021.

Поступила в редакцию 17.11.11.

УДК 539.12:530.145

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ПАУЛИ-ГЮРШИ В SU(3)-МОДЕЛИ

П.П. Андрусевич¹, В.А. Плетюхов², В.И. Стражев¹¹Белорусский государственный университет, Минск²Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

TRANSFORMATIONS OF THE PAULI-GÜRSEY TYPE IN SU(3)-MODEL

P.P. Andrusevich¹, V.A. Pletyukhov², V.I. Strazhev¹¹Belarusian State University, Minsk²A.S. Pushkin Brest State University, Brest

Показано, что наиболее полной группой непрерывных преобразований внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории безмассовой дираковской частицы с тремя внутренними степенями свободы является группа SU(3,3). В рамках релятивистской квантовой механики группа цветовой симметрии представляет собой максимальную непрерывную компактную подгруппу последней.

Ключевые слова: преобразования, внутренняя симметрия, дираковское поле, генераторы, группа, инвариантность.

It is shown that the group SU(3,3) is the complete continuous group of internal symmetry of the Lagrangian formulation of the theory of the massless Dirac fermion with three internal degrees of freedom. The color symmetry group SU(3) can be considered as a compact subgroup of the latter.

Keywords: transformations, internal symmetry, Dirac field, generators, group, invariance.

Введение

Симметрии уравнения Дирака, не связанные с преобразованиями пространственно-временных координат, обсуждаются в литературе в различных математических подходах достаточно давно (см. [1]–[3] и цитированную здесь литературу). Известно, что лагранжева формулировка массивного дираковского поля инвариантна относительно преобразований группы внутренней симметрии SO(2,1), получившей в работе [1] название зарядовой симметрии. Для безмассового дираковского поля известна также симметрия, описываемая группой SO(3) и получившая название группы Паули-Гюрши [4], [5]. При использовании матричной формы записи уравнения Дирака для безмассовых микрообъектов

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (0.1)$$

преобразования группы Паули-Гюрши имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi' &= a\psi + b\gamma_5 C\bar{\psi}, \\ \bar{\psi}' &= b^* \gamma_5 C\psi + a^* \bar{\psi}, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$, $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, $C = \gamma_2 \gamma_4$ – матрица зарядового сопряжения, a и b – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|a|^2 + |b|^2 = 1$. В свою очередь, в работах [5], [6] отмечается, что при переходе к безмассовому дираковскому полю группа зарядовой симметрии расширяется до 6-параметрической группы SO(3,1) (будем называть ее полной группой Паули-Гюрши), включающей в себя вышеуказанные группы SO(2,1) и SO(3) в качестве подгрупп.

Как видно из (0.2), для нахождения наиболее полной группы внутренней симметрии безмассового дираковского поля в соответствующие преобразования надо включить, помимо волновой функции ψ , также сопряженную функцию $\bar{\psi}$, что фактически означает использование 8-компонентной волновой функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \quad (0.3)$$

В работе [7] показано, что данный прием эквивалентен вещественному описанию дираковского поля, при котором вещественные и мнимые компоненты комплексной функции ψ разделены. В рамках такого описания в [8] установлено, что полная группа Паули-Гюрши состоит из двух принципиально разных типов преобразований, которые коммутируют (три генератора) или антикоммутируют (три генератора) с матрицами Γ_μ 8x8 уравнения Дирака, представленного в вещественной форме. Группа зарядовой симметрии SO(2,1) задается генераторами преобразований, коммутирующими с вышеуказанными матрицами. Группа Паули-Гюрши включает в себя генератор фазовых преобразований дираковского поля, который присутствует и в группе зарядовой симметрии, а также преобразования, которые антикоммутируют с матрицами Γ_μ . Иными словами, расширение группы зарядовой симметрии до группы SO(3,1) связано, как и в случае перехода от группы вращений к группе Лоренца, с вовлечением в рассмотрение

преобразований, имеющих иное физическое истолкование и следствия. В частности, это приводит к возможности рассмотрения внутренней симметрии SO(3,1) в теории двух типов полей Дирака с отличной от нуля массой [9], а также в теории вещественного поля Дирака-Кэлера [10].

В настоящей работе подход к установлению наиболее полной группы внутренней симметрии дираковских полей, базирующийся на использовании вещественной формы их описания, применяется к системе из трех уравнений Дирака с $m=0$, лежащей, как известно, в основе SU(3)-калибровочной модели сильных взаимодействий.

1 Вещественная форма системы трех уравнений Дирака

Рассмотрим систему трех уравнений Дирака для безмассовых частиц ($m \neq 0$):

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 &= 0, \\ \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 &= 0, \\ \gamma_\mu \partial_\mu \psi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Метрику пространства $g_{\mu\nu}$ и матрицы γ_μ выберем в виде:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1,1,1,1), \quad (1.2)$$

$$\gamma_i = \sigma_2 \otimes \sigma_i, \quad (1.3)$$

$$\gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_2 \quad (i=1,2,3).$$

Беря от (1.1) комплексное сопряжение и учитывая мнимый характер временной координаты x_4 , для сопряженных функций $\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*$ получим уравнения:

$$\begin{aligned} (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4) \psi_1^* &= 0, \\ (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4) \psi_2^* &= 0, \\ (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4) \psi_3^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассматривая системы (1.1) и (1.4) совместно, придем к 24-компонентной системе уравнений, которую можно представить в универсальной матричной форме:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0. \quad (1.5)$$

При выборе волновой функции Ψ в (1.5) в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) - \text{столбец} \quad (1.6)$$

для матриц Γ_μ будем иметь выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_6 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma_3 &= \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_4. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для дальнейшего удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\begin{aligned} \Psi &= (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_3^r, \psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i) - \text{столбец}, \\ \psi_{1,2,3}^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3} + \psi_{1,2,3}^*), \\ \psi_{1,2,3}^i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3} - \psi_{1,2,3}^*). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Указанный переход от представления (1.6) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве волновой функции Ψ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{12} & I_{12} \\ I_{12} & -I_{12} \end{pmatrix}, \\ u^{-1} = u^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{12} & I_{12} \\ I_{12} & -I_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_6 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma_3 &= \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_4. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Лагранжиан уравнения (1.5)

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad (1.11)$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (1.1)

$$\begin{aligned} L &= -\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 - \bar{\psi}_3 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_3 = \\ &= -\psi_1^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \psi_2^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 - \psi_3^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_3 \end{aligned} \quad (1.12)$$

при выборе матрицы билинейной формы η в (1.11) в виде

$$\eta = I_6 \otimes \gamma_4, \quad (1.13)$$

который инвариантен относительно преобразования (1.9).

Уравнение (1.5) с волновой функцией (1.8), матрицами Γ_μ (1.10) и лагранжианом (1.11), (1.13) будем называть вещественной формой исходной системы (1.1) с лагранжианом (1.12), поскольку соответствующая матричному уравнению (1.5) система 24-х уравнений, записанных в явном виде, является вещественной. Эту форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки системы (1.1).

Как уже отмечалось во введении, данный подход аналогичен подходу Паули, который применялся в работе [4] при установлении полной группы внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака, и является в определенном смысле его модифицированным обобщением на случай дираковских полей различных размерностей.

2 Внутренняя симметрия лагранжиана

Для решения поставленной задачи будем использовать фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_μ , по определению, имеют следующую блочную форму:

$$\Gamma_\mu = I_6 \otimes \gamma_\mu. \quad (2.1)$$

Переход от представления (1.8) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования:

$$A = \frac{1}{2} [I_6 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes (I_4 + i\gamma_2)], \quad (2.2)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2} [I_6 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes (I_4 - i\gamma_2)].$$

Матрица билинейной формы η принимает при этом вид:

$$\eta = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes \gamma_4. \quad (2.3)$$

Инвариантность уравнения (1.5) с матрицами Γ_μ (2.1) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu) \quad (2.4)$$

обеспечивается матрицами двух типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad (2.5)$$

$$Q_2 = q^{(2)} \otimes \gamma_5, \quad (2.6)$$

где $q^{(1)}, q^{(2)}$ – комплексные матрицы 6×6 , на которые накладываются ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (1.5). При этом матрицы Q_1, Q_2 удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям с матрицами Γ_μ (2.1):

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = 0, \quad (2.7)$$

$$[Q_2, \Gamma_\mu]_+ = 0. \quad (2.8)$$

Матричные преобразования (2.5), (2.6) можно параметризовать посредством 72-х базисных операторов

$$J_{00} = I_{24}, J_{i0} = (\sigma_i \otimes I_3) \otimes I_4, \quad (2.9)$$

$$J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, J_{iA} = (\sigma_i \otimes \alpha_A) \otimes I_4,$$

$$L_{00} = I_6 \otimes \gamma_5, L_{i0} = (\sigma_i \otimes I_3) \otimes \gamma_5, \quad (2.10)$$

$$L_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, L_{iA} = (\sigma_i \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5,$$

где α_A ($A=1 \div 8$) – генераторы группы $SU(3)$, которые выберем в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{11} - e^{33}, \quad \alpha_2 = e^{22} - e^{33}, \\ \alpha_3 &= e^{23} + e^{32}, \quad \alpha_4 = e^{13} + e^{31}, \\ \alpha_5 &= e^{12} + e^{21}, \quad \alpha_6 = -i(e^{23} - e^{32}), \\ \alpha_7 &= -i(e^{31} - e^{13}), \quad \alpha_8 = -i(e^{12} - e^{21}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

e^{ij} –элементы полной матричной алгебры [11, с. 307].

Возвращаясь теперь обратно в базис (1.8), получим для операторов (2.9), (2.10) выражения:

$$J_{00} = I_{24}, J_{10} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes I_4,$$

$$J_{20} = -(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2, J_{30} = (\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2, \quad (2.12)$$

$$J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, J_{1A} = (\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes I_4,$$

$$J_{2A} = -(\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2, J_{3A} = (\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2;$$

$$L_{00} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes \gamma_5,$$

$$L_{10} = I_6 \otimes \gamma_5,$$

$$L_{20} = -i(\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2\gamma_5,$$

$$L_{30} = -i(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad (2.13)$$

$$L_{0A} = (\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5,$$

$$L_{1A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5,$$

$$L_{2A} = -i(\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2\gamma_5,$$

$$L_{3A} = -i(\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2\gamma_5.$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (1.5) относительно преобразований, задаваемых базисными операторами (2.12), (2.13), накладывает на соответствующие параметры $\omega_N \leftrightarrow J^N, \theta_N \leftrightarrow L^N$ следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \omega_{00}, \omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{01}, \dots, \omega_{05}, \omega_{16}, \omega_{17}, \\ \omega_{18}, \omega_{21}, \dots, \omega_{25}, \omega_{31}, \dots, \omega_{35} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\theta_{10}, \theta_{06}, \theta_{07}, \theta_{08}, \theta_{11}, \dots, \theta_{15}, \theta_{26}, \theta_{27},$$

$$\theta_{28}, \theta_{36}, \theta_{37}, \theta_{38} \text{ – вещественные;}$$

$$\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, \dots, \omega_{15}, \omega_{26},$$

$$\omega_{27}, \omega_{28}, \omega_{36}, \omega_{37}, \omega_{38}, \quad (2.15)$$

$$\theta_{00}, \theta_{20}, \theta_{30}, \theta_{01}, \dots, \theta_{05}, \theta_{16}, \theta_{17},$$

$$\theta_{18}, \theta_{21}, \dots, \theta_{25}, \theta_{31}, \dots, \theta_{35} \text{ – мнимые.}$$

Требование инвариантности лагранжиана (1.11) относительно преобразований внутренней симметрии (2.4) приводит к условию

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu, \quad (2.16)$$

которое для матриц Q_1, Q_2 принимает соответственно вид:

$$Q_1^+ \eta Q_1 = \eta, \quad (2.17)$$

$$Q_2^+ \eta Q_2 = -\eta. \quad (2.18)$$

Каждое из условий (2.17), (2.18) накладывает по 15 связей на параметры этих преобразований (мы их не будем выписывать ввиду громоздкости). В результате получаем 42-параметрическую группу матричных преобразований, задаваемую 72 базисными операторами (2.12), (2.13), на параметры которых (2.14), (2.15) накладывается 30 условий, вытекающих из (2.17), (2.18).

Для того чтобы выяснить структуру данной группы преобразований, выделим из них непрерывные преобразования, представимые в форме Ли. С этой целью запишем условие (2.16) для бесконечно малых преобразований

$$Q_1 = 1 + \omega J, \quad Q_2 = 1 + \theta L. \quad (2.19)$$

В результате получим соотношения

$$(\omega J)^+ \eta = -\omega \eta J, \quad (2.20)$$

$$(\theta L)^+ \eta = \theta \eta L, \quad (2.21)$$

в которых базисные операторы J, L (за исключением единичного J_{00}) выступают в качестве генераторов. Непосредственная проверка показывает, что условия (2.20), (2.21) выполняются для 36 однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами

$$J_{i0}, J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11}, \dots, J_{15}, \quad (2.22)$$

$$J_{21}, \dots, J_{25}, J_{31}, \dots, J_{35};$$

$$L_{00}, L_{01}, \dots, L_{05}, L_{16}, L_{17}, \quad (2.23)$$

$$L_{18}, L_{26}, L_{27}, L_{28}, L_{36}, L_{37}, L_{38}.$$

Остальные 6 однопараметрических преобразований представляют собой дискретные

преобразования, являющиеся аналогом γ_5 -преобразования, которое в случае трех безмассовых уравнений Дирака реализуется в $3! = 6$ вариантах.

Что касается непрерывной группы Ли, задаваемой генераторами (2.22), (2.23), то один из них (L_{00}) коммутирует со всеми остальными и представляет собой непрерывный аналог γ_5 -преобразования ($e^{\theta_{00}L_{00}}$) для системы из трех безмассовых уравнений Дирака. Оставшиеся 35 генераторов образуют унитарную группу SU(3,3) с 18 вещественными ($\omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{21}, \dots, \omega_{25}, \omega_{31}, \dots, \omega_{35}, \theta_{26}, \theta_{27}, \theta_{28}, \theta_{36}, \theta_{37}, \theta_{38}$) и 17 мнимыми ($\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, \dots, \omega_{15}, \theta_{01}, \dots, \theta_{05}, \theta_{16}, \theta_{17}, \theta_{18}$) параметрами.

Заключение

Итак, наиболее полной непрерывной группой внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории безмассовых дираковских фермионов с тремя внутренними степенями свободы является группа SU(3,3). Она состоит из преобразований двух типов Q_1 и Q_2 , соответственно коммутирующих и антикоммутирующих с матрицами Γ_μ уравнения (1.5), представляющего собой вещественную матричную форму исходной системы (1.1). Генераторы (2.22), относящиеся к преобразованиям Q_1 , образуют в группе SU(3,3) 21-параметрическую подгруппу с 12-тью вещественными ($\omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{21}, \dots, \omega_{25}, \omega_{31}, \dots, \omega_{35}$) и 9-тью мнимыми ($\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, \dots, \omega_{15}$) параметрами, изоморфную группе SO(4,3) и являющуюся наиболее полной группой внутренней симметрии лагранжиана системы трех уравнений Дирака для частиц с ненулевой массой [13]. В свою очередь, группа SU(3) цветовой симметрии является максимальной компактной подгруппой последней и задается генераторами $J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}$ [7]. Тем самым допускается возможность трактовать происхождение цветовой симметрии как результат спонтанного нарушения симметрии SO(4,3), что является предметом исследования авторов в настоящее время.

Что же касается преобразований Q_2 , которые задаются генераторами (2.23), антикоммутирующими с матрицами Γ_μ , то они представляют расширение типа Паули-Гюрги симметрии SO(4,3) до группы SU(3,3). Возможные физические следствия

наличия такого расширения также будут рассмотрены в последующих работах авторов. В первую очередь, представляет интерес вопрос, какие из вышеуказанных симметрий, помимо цветовой, «выживают» на квантовом уровне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стражев, В.И.* О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П.Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – № 11. – С. 115–117.
2. *Pursey, D.L.* Symmetries of the Dirac equation / D.L. Pursey, J.F. Plebanski // Phys. Rev. – 1984. – Vol. 29. – P. 1848–1850.
3. *Фуцич, В.И.*, Симметрия уравнений квантовой механики / В.И. Фуцич, А.Г. Никитин // М.: Наука, 1990. – 400 с.
4. *Pauli, W.* On the conservation of the lepton charge / W. Pauli // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 6. – P. 204–214.
5. *Gürsey, F.* Connection of charge independence and baryon number conservation with the Pauli transformation / F. Gürsey // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 8. – P. 411–415.
6. *Ибрагимов, Н.Х.* Об инвариантности уравнений Дирака / Н.Х. Ибрагимов // ДАН СССР. – 1969. – Т. 185. – С. 1226–1228.
7. *Pletyukhov, V.A.* Internal symmetry of the three Dirac fields / V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev, P.P. Andrusевич // NDCS. – 2011. – Vol. 14. – № 1. – P. 96–101.
8. *Плетюхов, В.А.* Внутренние симметрии безмассовых дираковских полей / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 13–17.
9. *Андрусевич П.П.* О внутренней симметрии дираковских полей / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўнта. Сер. 4 «Физика. Математика». – 2010. – № 2. – С. 5–12.
10. *Плетюхов, В.А.* Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. – Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
11. *Богущи, А.А.* Введение в полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богущи // – Минск: Наука и техника. – 1987. – 359 с.

Поступила в редакцию 25.10.11.

УДК 548.2; 535.3; 538.9

САМООРГАНИЗУЮЩАЯСЯ НАНОПЛАЗМОНИКА

С. Вербицкая, Э. Дюжарден, К. Жирар

*Группа наноисследований, Центр разработки материалов и структурных исследований,
Национальный центр научных исследований, Тулуза, Франция*

SELF-ASSEMBLED NANOPLASMONICS

S. Viarbitskaya, E. Dujardin, C. Girard

NanoSciences Group, CEMES/CNRS UPR 8011, 29 rue Jeanne Marvig, 31055 Toulouse Cedex 4, France

Известные к настоящему времени плазмонные структуры можно разделить на два класса в зависимости от того, получены ли они с использованием традиционных микро-технологических методов, как например, электронной и фотолитографии (top-down), или в процессе химического синтеза (bottom-up). Первые интенсивно изучаются вплоть до настоящего времени, но остаются большими и простыми в смысле размеров и особенностей архитектуры соответственно. Плазмонные структуры, формирующиеся в результате bottom-up процессов, стали доступными для исследования только недавно, и необходимо исследовать их оптические свойства в ближней зоне. Bottom-up подход расширяет возможности объединения малых наноструктур в сложные по архитектуре системы. Самоорганизация наночастиц в сложные суперструктуры – один из предложенных процессов, связанных с усложнением структуры. В данной статье мы обсуждаем проблемы синтеза самоорганизующихся наноструктур, оптической адресации в таких структурах и вводим понятие многомерных плазмонных структур.

Ключевые слова: *субволновая оптика, нанофотоника, наноструктуры, коллоид металла, оптика ближнего поля, плазмоника, самоорганизующиеся наноструктуры.*

State-of-the-art plasmonic structures can be splitted into two classes depending on whether they were obtained by top-down or bottom-up processes. The former have been extensively studied but they remain to be large and simple in terms of feature size and architecture, respectively. The latter have only been made available recently and need much investigation of their near-field optical properties, yet they push the integration limit further and provide a new approach to complex architectures. Self-assembling of nanoparticles in complex superstructures is one of the suggested bottom-up approaches. We discuss the challenging problem of the light evanescent wave optical addressing in such structures and introduce a concept of multi-scale plasmonic architectures.

Keywords: *sub-wavelength optics, nanophotonics, nano-structures, metal colloid, near-field optics, plasmonics, self-assembled nanostructures.*

Introduction

The prospect of combining small dimensions of an electronic circuit with the large bandwidth of a photonic network has driven rapid expansion of research into the area of nanoplasmonics and light flow control particularly at the sub-wavelength scale. The metal nanoscale features that can carry both optical signals and electric currents are surface plasmons (SPs). SPs are collective oscillation of surface electrons that can interact strongly with light resulting in optical energy confinement and enhancement of the near metal-dielectric surface. SPs coupled with light can propagate along the metallic structure and transport optical energy below the photon diffraction limit. By tailoring optical properties of metallic nanostructures it is possible to guide propagating SPs and thereby optically address single nanoscale and molecular systems with an unprecedented degree of spatial resolution lacking in conventional photonic devices [1]. The advances in nanoplasmonics and nanofabrication will lead to further miniaturization of electro-optic photonic devices and their implementation in molecular electronics, nano-resolution optical imaging, ultra-sensitive sensors and information technology. The

latter includes future all-optical integrated circuits, novel optical components for electro-optic devices, optical data transmission and communication.

1 State-of-the-art of the plasmonics nanostructures

1.1 Top-down and bottom-up approaches

The top-down approach to fabricate plasmonic structures is mainly based on electron beam lithography and has been ubiquitous for implementation of the plasmonics ideas. The approach allows producing structures of the desired but rather simple shape and geometry. Moreover it suffers from lack of spatial control (dimensions and definition of shapes and interstices) and energy dissipation due to poorly defined objects' structure. Chemically synthesized crystalline plasmonic nanostructures (so called bottom-up approach) have defined surfaces and morphology better than the top-down amorphous or polycrystalline nanostructures, exhibit lower losses and superior enhancement [2]. They also allow more accurate tuning of nanostructure's optical properties due to precisely known morphological features which also makes theoretical investigation be more straightforward. In spite of the superior optical

properties of crystalline nanostructures their application has been limited by difficulties in assembling of colloidal nanoparticles (NPs) of arbitrary shapes and sizes and in transferring from colloid onto a solid substrate. Thus, another approach is being developed, such as growing the desired nanoscale plasmonic systems right on the substrate surface.

1.2 Self-assembly of NP architectures

Higher order architectures can be obtained by spontaneous self-assembly which yields, for example, metal NP short chains or extended networks (figure 1.1). We foresee that the diversity of colloidal chemistry principles that can be applied to such systems will not only allow the design and production of well-defined superstructures such as dimers, trimmers, short chains with controlled length and topology but also offer a versatile platform for post-assembly functionalization with active molecular moieties [3].

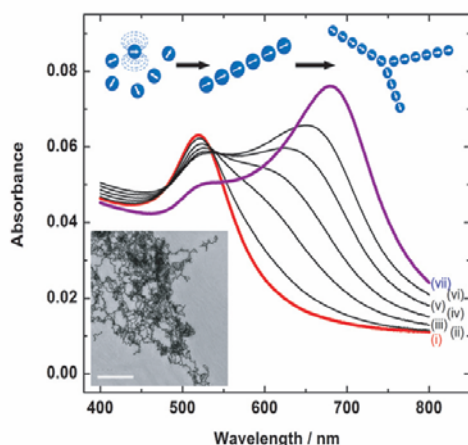


Figure 1.1 – Formation of plasmonic particle networks from colloidal gold. Isolated 13nm diameter gold nano-crystals are self-assembled by addition of mercaptoethanol (MEA). The self-assembly into chains and then branched networks by induced dipolar interactions (scheme in the upper insert) is followed in time by UV-VIS spectrophotometry, which shows the decrease of the 520 nm band as the 700 nm band emerges. After 24-48 hours, the networks are fully formed and can be observed in the transmission electron microscopy (image in the lower insert, bar 500nm). Spectra are taken at (i) 0 min, (ii) 30 min, (iii) 1 h, (iv) 1.5 h, (v) 2 h, (vi) 2.5 h and (vii) 24 h after addition of MEA [5]. Spectra reproduced from [5] with permission of John Wiley and Sons, Inc. All rights reserved.

Dipolar interactions are common for magnetic NPs, which bear an intrinsic dipole moment, leading, for example, to the alignment of iron oxide NPs inside magnetotactic bacteria [4]. In the case of spherical metallic NPs no intrinsic electric dipole should be expected. Nevertheless, citrate-capped NPs can be seen as highly negatively charged spheres. When a fraction of the citrates is replaced by another neutral capping group prone to forming a

self-assembled monolayer on gold surfaces, one may expect the molecules to segregate into domains. Provided that the spatial distribution of the domains is slightly non-uniform, an induced electric dipole will be generated on the NP surface and linear self-assembly and branching will proceed as for the previous systems. This is precisely what we observed when we mixed enough 2-mercaptoethanol (MEA) with 13 nm citrate-capped gold NPs to cover 60% of the gold surface with a SAM as shown in figure 1.1 [5].

2 Multi-scale plasmonic architectures

By combining different bottom-up approaches such as self-assembling and self-organizing with lithography and other top-down methods, it becomes conceivable to produce integrated multi-scale plasmonic architectures able to channel light from a micron-sized laser beam to nanoscopic entities (figure 2.1) [3]. To date, several approaches to explore capabilities of multi-scale plasmonic structures to propagate and confine light at nanoscale have been tested. In the pioneering work of J.C. Weeber focused beam launched SP polaritons (electromagnetic surface waves resulting from the coupling of incident light and SPs) on a homogeneous wide metal film which further propagated on thin metal stripes [5]. Direct excitation of SPs in metallic nanowires by a tightly focus beam [6] and electromagnetic energy transfer in chains of weakly coupled metal NPs upon excitation by the tip of the near-field scanning optical microscope [7] have been studied. Hybrid approaches combining plasmonic and dielectric wave guiding have been demonstrated by coupling light propagating along the microscopic polymer waveguide into a nanoscopic plasmonic waveguide, when two waveguides are perpendicular to each other [8] and by hybrid compact near-field interaction between plasmonic and photonic waveguides [9]. However, in spite of the great effort applied by research groups worldwide in the area, the problems of high propagation losses and spatial control in plasmonic NP systems are still unsolved.

Optical energy propagation in plasmonic nano- and micro-structures is at the heart of the plasmonic based future electro-optic devices, which may offer new solutions for optical signal processing and data transmission. Therefore the capacities of plasmonic nanostructures to (i) confine (ii) propagation and funnel light and (iii) optically address nanoscale entities are being studied by research groups worldwide. In pursuing the goal of effective light flow control at nanoscale the major challenges have been formulated, such as: (i) synthesis, fabrication and manipulation of metal nanosystems with desired optical properties, (ii) fabrication and manipulation of complex multi-scale plasmonics based electro-optic devices, (iii) optical energy plasmonic nanosystems coupling and decoupling, (iv) optical addressing spatial resolution control, (v) propagating

optical energy dissipation and losses decrease and compensation.

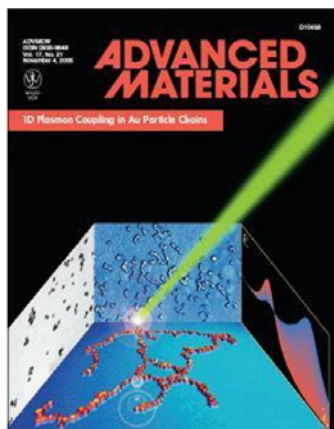


Figure 2.1 – Underlying principle and challenges of self-assembled nanoplasmonics. Laser beam is incident on one end of the complex metal NP network. Optical energy is transported to another end of the network via near-field coupling. Fluorescence of the coupled to metal fluorophore is due to interaction of the transported light with the fluorophore [5]. Inside front cover reproduced with permission of John Wiley and Sons, Inc. All rights reserved.

The investigation of fundamental aspects and optimization of functionalities of the bottom-up plasmonic nanostructures require intensive support of both theoretical modeling and numerical simulations. For example, understanding how plasmon couple with each other and with nearby molecules, accurate evaluation of dissipation in the developed multi-scale plasmonic structures, study of the disorder consequences on the efficiency of self-assembled plasmonic structures will be among the major questions associated with future bottom-up plasmonics. In order to realize these objectives numerical tools mainly based on the Green dyadic methods (GDM) will enable us to compute accurately the local electromagnetic properties of three-dimensional metal superstructures with complex geometries lying on the substrate [3].

Techniques for optical characterization of such multi-scale fabricated devices include near-field, far-field, single molecule and electron loss spectroscopy methods. To investigate near-field optical properties of nano-objects, near-field experimental methods such as photon scanning tunneling microscopy and scanning near-field optical microscopy were initially developed. They, however, need to accurately locate a near-field detector (tip) in the vicinity of the sample, making the system difficult to describe theoretically since the detector has the influence on the system itself. Recently, an alternative method based on two photon luminescence has been developed to give access to near field information through a far field measurement [10]. Together with GDM, TPL microscopy will be used to probe near and far field

optical properties of the developed self-assembled metal superstructures.

Conclusion

We discussed the advantages and disadvantages of bottom-up and top-down approaches to synthesize and fabricate plasmonic nanostructures. Bottom-up structures possess superior optical, structural and morphological properties as compared with their top-down counterparts and present a promising solution for nanoplasmonics applications requiring optical addressing of nano and molecular systems with sub-wavelength spatial resolution, better control of optical energy propagation and reduced energy dissipation at nanoscale. Example of a bottom-up system of self-assembled gold nanoparticles was given. Finally, we presented a concept of multi-scale plasmonic architectures and outlined the associated scientific and technological challenges.

REFERENCES

1. Girard, C. Near-field optical properties of top-down and bottom-up nanostructures / C. Girard, E. Dujardin // *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*. – 2006. – Vol. 8. – P. 73 – 86.
2. Silver nanowires as surface plasmon resonators / H. Ditlbacher [et al.] // *Physical review letters*. – 2005. – Vol. 95. – P. 257403.
3. Shaping and manipulation of light fields with bottom-up plasmonic structures / C. Girard [et al.] // *New Journal of Physics*. – 2008. – Vol. 10. – P. 105016.
4. Tlusty, T. Entropic networks in colloidal self-assembly / T. Tlusty, S.A. Safran // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. – 2001. – Vol. 359. – P. 879–881.
5. One-dimensional plasmon coupling by facile self-assembly of gold nanoparticles into branched chain network / S. Lin [et al.] // *Advanced Materials*. – 2005. – Vol. 17. – P. 2553–2559.
6. Plasmon polaritons of metallic nanowires for controlling submicron propagation of light / J.-C. Weeber [et al.] // *Physical Review B*. – 1999. – Vol. 60. – P. 9061.
7. Dickson, R.M. Unidirectional plasmon propagation in metallic nanowires / R.M. Dickson, L.A. Lyon // *Journal of Physical Chemistry B*. – 2000. – Vol. 104. – P. 6095.
8. Local detection of electromagnetic energy transport below the diffraction limit in metal nanoparticle plasmon waveguides / S.A. Maier [et al.] // *Nature Materials*. – 2003. – Vol. 2. – P. 229–232.
9. Integration of photonic and silver nanowire plasmonic waveguides / A.L. Pyayt [et al.] // *Nature Nanotechnology*. – 2008. – Vol. 3. – P. 660–665.
10. Spectroscopic mode mapping of resonant plasmon nanoantennas / P. Ghenuche [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2008. – Vol. 101. – P. 116805.

Поступила в редакцию 14.11.11.

УДК 535.42+537.86

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНЫХ 2D ПУЧКОВ КУММЕРА – ГАУССА**С.С. Гиргель***Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель***PHYSICAL PROPERTIES OF SCALAR 2D BEAMS OF KUMMER – GAUSS****S.S. Girdel***F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Развит унифицированный формализм, с использованием которого можно вывести общие выражения для параксиальных двумерных световых пучков Куммера – Гаусса, подобных гауссовым, и установить взаимосвязь между ними. Детально исследованы условия их физической реализуемости. Найдены новые типы пучков Куммера – Гаусса. Такие пучки представляют в виде произведения гауссиана на функции Куммера комплексного аргумента и целочисленного индекса n .

Ключевые слова: параксиальные пучки, пучки Эрмита – Гаусса, пучки Куммера – Гаусса; пучки, подобные гауссовым; квадратичная интегрируемость.

The unified formalism allowing to deduce common expressions for paraxial two-dimensional Gaussian-like light Kummer – Gaussian beams and discover correlations between them is developed. Conditions of their physical realizability are explored in details. New types of Kummer – Gaussian beams are discovered. Such beams are presented as Gaussian product on Kummer function of complex argument and a n integer index.

Keywords: paraxial beams, Hermite – Gaussian beams, Kummer – Gaussian beams, Gaussian-like beams, square integrability.

Введение

В настоящее время повысился интерес к поиску решений нового типа для оптических полей. Наибольший интерес представляют решения, которые соответствуют локализованным в малом объеме направленным пучкам излучения, реализуемым экспериментально [1]–[2]. Обычно для вывода уравнений таких пучков используют различные подходы, поэтому установление взаимосвязей между ними затруднено. В нашей работе [3] был предложен унифицированный формализм, придерживаясь которого можно вывести выражения для пучков, подобных гауссовым, разных типов и установить взаимосвязь между ними. В настоящей работе этот формализм обобщен и представлен аналогично тому, как это реализовано в [4]. Подробно рассмотрены условия физической реализации исследуемых пучков. Установлена также возможность существования новых типов пучков и сформулированы условия квадратичной интегрируемости (КИ) сопоставляемых им выражений.

1 Фундаментальная гауссова мода

Для монохроматических волн вида

$$f(\mathbf{r}, t) = f \exp(kz - i\omega t)$$

скалярное параболическое уравнение, решением которого является амплитуда f параксиального светового 2D пучка, имеет вид [1]–[5]:

$$(\partial_{x,x}^2 + 2ik\partial_z)f = 0. \quad (1.1)$$

Целесообразно далее перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Z = z/z_0. \quad (1.2)$$

Здесь $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OZ соответственно. Вместо стандартного комплексного параметра пучка

$$q = z - q_0,$$

где z – расстояние от начала координат до точки, лежащей на оси пучка, в которой определяются характеристики волнового поля, введем комплексный безразмерный параметр пучка $Q = q/z_0$ и запишем, учитывая формулы (1.2):

$$Q = Z - Q_0, \quad \text{где } Q_0 = Q'_0 + iQ''_0. \quad (1.3)$$

Теперь параболическое уравнение (1.1) можно записать в безразмерном виде:

$$(\partial_{X,X}^2 + 4i\partial_Q)f = 0. \quad (1.4)$$

Из множества решений этого уравнения только одно является фундаментальным решением – гауссиан [1], [3], [5]

$$G(X, Q) = \exp(iX^2/Q) / \sqrt{Q}. \quad (1.5)$$

Данное решение удовлетворяет физическим принципам: при $X \rightarrow \pm\infty$ $G(X, Q) \rightarrow 0$; функция (1.5) квадратично интегрируема, если $\text{Im}(Q_0) = Q''_0 > 0$. Гауссиан $G(X, Q)$ представляет двумерную основную гауссову моду [5].

2 Подобные гауссиану моды высших порядков

Для нахождения более сложных решений параболического уравнения (1.4) используем подстановку

$$f(X, Q) = G(X, Q) \cdot h(X, Q). \quad (2.1)$$

Здесь на некоторую функцию $h(X, Q)$ накладывается гауссова функция $G(X, Q)$. Поэтому пучки, которым сопоставляются функции $f(X, Q)$, будем называть подобными гауссовым световыми пучками.

Новая функция $h(X, Q)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{X, X}^2 h + \frac{4i}{Q} X \partial_X h + 4i \partial_Q h = 0. \quad (2.2)$$

Для его решения произведём нелинейную замену переменных:

$$X_1(Q) = X \cdot b(Q), \quad (2.3)$$

где $b(Q)$ – некоторая функция от Q . Тогда функция $h(X_1, Q)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{X_1, X_1}^2 h - 2c X_1 \partial_{X_1} h + 4i b^{-2} \partial_Q h = 0, \quad (2.4)$$

где

$$c = -\frac{i}{b^2} \left(\frac{2}{Q} + \frac{1}{b^2} d_Q(b^2) \right). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) при произвольной зависимости $b(Q)$ не имеет известных аналитических решений. Оно решается, если множитель c в (2.5) не зависит от Q и является некоторой комплексной константой. Интегрируя (2.5), находим $b(Q)$ при $c = const$:

$$(b(Q))^2 = \frac{is}{Q(Q - cs)}. \quad (2.6)$$

Здесь s – некоторая комплексная константа интегрирования.

Выполним разделение переменных в (2.4), предполагая, что

$$h(X_1, Q) = h_1(X_1) \cdot h_3(Q). \quad (2.7)$$

При этом условии уравнение (2.4) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{dh_3}{h_3} = -\frac{ivb^2}{2} dQ; \quad (2.8)$$

$$d_{X_1, X_1}^2 h_1 - 2X_1 d_{X_1} h_1 + 2\nu h_1 = 0, \quad (2.9)$$

где ν – постоянная разделения переменных, в общем случае комплексная.

Решения уравнений (2.8) и (2.9) соответствуют параксиальным подобным гауссовым модам высших порядков и принципиально различаются при $c=0$ и при $c \neq 0$. Оба варианта обсуждались в [3]; более подробно остановимся на модах, для которых $c=0$.

3 Пучки Куммера – Гаусса с комплексным аргументом

Если $c \neq 0$, то, без ограничения общности, можно положить $c=1$ и функцию $b(Q)$ представить в форме

$$b^2 = i(1/\tilde{Q} - 1/Q). \quad (3.1)$$

Здесь введен второй комплексный безразмерный параметр пучка: $\tilde{Q} = Q - s$. Тогда, полагая $\tilde{Q}_0 = Q_0 + s$, имеем

$$\tilde{Q} = Z - \tilde{Q}_0, \quad \text{где } \tilde{Q}_0 = \tilde{Q}'_0 + i\tilde{Q}''_0. \quad (3.2)$$

Теперь аргумент X_1 функции $h_1(X_1)$ зависит от поперечной координаты X и двух комплексных параметров пучка Q и \tilde{Q} :

$$X_1^2 = i(1/\tilde{Q} - 1/Q) X^2. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид:

$$h_3(Q) = (\tilde{Q}/Q)^{\nu/2}. \quad (3.4)$$

Общее решение $h_1(X_1)$ уравнения (2.9) – скалярную амплитуду подобного гауссиану пучка здесь удобно представить [3] через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$ [6]–[10] – функцию Куммера M :

$$h_1(X_1) = A \cdot X_1 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right) + B \cdot {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2\right) \equiv h_1^e + h_1^o, \quad (3.5)$$

где A и B – некоторые произвольные постоянные. Индексы o и e отмечают соответственно четность (even) и нечетность (odd) функций h_1^e и h_1^o относительно изменения знака аргумента X_1 .

Общее решение для амплитуды $f(X)$ в (2.1) скалярного пучка, подобного гауссову, имеет вид [3]:

$$f(X, Q, \tilde{Q}, \nu) = G(X, Q) \cdot (\tilde{Q}/Q)^{\nu/2} h_1(X_1). \quad (3.6)$$

Зависимость функции f от поперечной координаты X_1 определяется функциями Куммера и Гаусса, поэтому пучки, которым сопоставлены формулы (3.2)–(3.6), будем называть пучками Куммера – Гаусса ($K-G$). Функции (3.2)–(3.6) зависят от трех произвольных комплексных параметров Q_0 , \tilde{Q}_0 и ν . Пучки $K-G$ представляют обобщение пучков Эрмита – Гаусса ($H-G$) с комплексным аргументом [1]–[5], [11]–[13]. Функциям h_1^e и h_1^o соответствуют амплитуды f^e и f^o , сопоставляемые пучкам $K-G$ различной четности. Подчеркнем, что, в соответствии с (3.5)–(3.6), для произвольного набора комплексных параметров (Q_0, \tilde{Q}_0, ν) всегда существуют два независимых решения f^e и f^o – четное и нечетное относительно изменения знака переменной X .

Схожие с полученными здесь решениями для амплитуды f параболического уравнения для скалярных 2D пучков были представлены в [4], (см. также [5], [12], [13]).

Заметим, что в [3] вместо Q нами использовалась переменная $L = iQ$, где $Q = Z - i$, т. е. характерный поперечный размер x_0 выбирался так, чтобы выполнялось равенство $Q_0'' = 0$. В настоящей работе обсуждается более общий случай, когда $\tilde{Q} = Z - \tilde{Q}_0$, где $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_0' + i\tilde{Q}_0''$ – некоторый комплексный скаляр. Отметим также, что в работе [3] допущена опечатка: формулу (3.15) в [3] следует записывать как $\text{Re}(1/p) > -1$.

Таким образом, при $c \neq 0$ параксиальные двумерные световые пучки, подобные гауссовым, в общем случае являются пучками $K-G$, и им сопоставляются функции комплексного аргумента X_1 , которые зависят от трех произвольных комплексных параметров: Q_0 , \tilde{Q}_0 и ν .

Пучки $K-G$ отличаются от гипергеометрически-гауссовых мод, рассмотренных в [14]–[16].

Заметим, что трехмерные скалярные решения для пучков $K-G$ можно построить как произведение 2D решений типа (3.6):

$$f(X, Y, Z) = f(X, Q_X, \tilde{Q}_X, \nu_X) \cdot f(Y, Q_Y, \tilde{Q}_Y, \nu_Y). \quad (3.7)$$

При этом возможна любая комбинация четностей. Итак, в общем случае амплитуда 3D скалярного пучка $K-G$ зависит от трех координат и шести свободных комплексных параметров.

4 Условия физической реализуемости пучков Куммера – Гаусса

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности [1], [2]. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех X . Более того, при $X \rightarrow \pm\infty$ амплитуда f должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой, т.е. интеграл $k^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dX_1$ должен сходиться. Чтобы гауссов пучок был физически реализуемым, как отмечалось выше, достаточно одного простого ограничения: $Q_0'' > 0$.

В работе [4] отмечено, что полученные её авторами решения уравнений для пучков, при математическом описании представляемых как произведение функций параболического цилиндра на гауссиан G , инвариантны относительно преобразований (записаны с использованием введённых нами выше обозначений)

$$Q \leftrightarrow \tilde{Q}, \quad \nu \leftrightarrow (-\nu - 1). \quad (4.1)$$

Несложно показать, что соотношения симметрии (4.1) выполняются и для пучков $K-G$. Поэтому будем использовать их далее.

Проведем анализ условий КИ для пучков $K-G$. Для этого исследуем асимптотическое поведение функций f при $|f| \rightarrow \infty$. Асимптотическое

поведение конфлюэнтной гипергеометрической функции $F_1(a, b, \Phi)$ при $|\Phi| \rightarrow \infty$ описывается формулой [7], [10]

$$F_1(a, b, \Phi) = \frac{\exp(-i\pi a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \Phi^{-a} + \frac{\exp(\Phi) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \Phi^{a-b}, \quad (4.2)$$

где Γ – гамма-функция и $a \neq 0, -1, -2, \dots = -m$. Учитывая (4.2) применительно к (3.6), получим условия КИ для пучков $K-G$, соответствующие различным частным ситуациям, рассмотренным ниже.

1. ν – целое число. При этом возможны следующие частные случаи:

1.1. $Q_0'' > 0$. При $\nu = 1, 3, 5, \dots = 2m + 1$ выражения для f^o описывают стандартные, элегантные и обобщенные пучки $H-G$. При выполнении дополнительного условия $\tilde{Q}_0'' \geq 0$ выражения для f^e соответствуют пучкам $K-G$ нового типа, отмеченным нами в [3] и отсутствующим в [4].

1.1.1. При $\tilde{Q}_0'' > 0$ и каждом значении $\nu = -1, -3, -5, \dots = -2m - 1$ выражения для f^e соответствуют различным пучкам $H-G$. При дополнительном ограничении $\tilde{Q}_0'' \geq 0$ функции f^o обладают КИ и соответствуют пучкам $K-G$ нового типа, не описанным ранее в научной литературе.

1.2. $Q_0'' > 0$. При $\nu = 0, 2, 4, \dots = 2m$ выражения для f^e описывают стандартные, элегантные и обобщенные пучки $H-G$. При дополнительном условии $\tilde{Q}_0'' \geq 0$ выражения для функций f^o представляют математический образ пучков $K-G$ нового типа, отмеченных нами в [3].

1.2.1. При $\tilde{Q}_0'' > 0$ при каждом значении $\nu = -2, -4, -6, \dots = -2m - 2$ выражения для f^o получаем различные по типу пучки $H-G$. При дополнительном условии $Q_0'' \geq 0$ функции f^e обладают КИ и соответствуют пучкам $K-G$ нового типа, не описанным ранее в литературе.

В рассмотренных далее частных случаях 2.1–2.4 условия физической реализуемости, т. е. КИ для четных и нечетных мод $K-G$ одинаковы, поэтому далее индексы o и e при f опускаем.

2.1. При $Q_0'' > 0$ и $\tilde{Q}_0'' > 0$ пучки $K-G$ обладают КИ при произвольных комплексных индексах ν .

2.2. Если $Q_0'' > 0$, $\tilde{Q}_0'' = 0$, то при различных значениях ν' вопрос о КИ решается по-разному:

2.2.1. Функция f является КИ, если $\nu' > -1/2$;

2.2.2. $|f| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, но не является КИ, если $\nu' \in [-1/2, -1)$;

2.2.3. $|f| \rightarrow const \neq 0$ и не является КИ при $|x| \rightarrow \infty$, если $\nu' = -1$;

2.2.4. $|f| \rightarrow \infty$ и не является КИ при $|x| \rightarrow \infty$, если $\nu' < -1$.

2.3. Если $Q_0'' = 0$, $\tilde{Q}_0'' > 0$, тогда решение вопроса о КИ функции f неоднозначно:

2.3.1. пучок является КИ, если $\nu' < -1/2$;

2.3.2. $|f| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, но не КИ, если $\nu' \in [-1/2, 0)$;

2.3.3. $|f| \rightarrow const \neq 0$, но не КИ при $|x| \rightarrow \infty$, если $\nu' = 0$;

2.3.4. $|f| \rightarrow \infty$ и не КИ при $|x| \rightarrow \infty$, если $\nu' > 0$.

Варианты 2.3 получаются из 2.2 в результате выполнения преобразований симметрии (4.1).

2.4. Наконец, если $Q_0'' = \tilde{Q}_0'' = 0$, мы имеем снова различные варианты.

2.4.1. $|f| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, но не КИ, если $\nu' \in (-1, 0)$;

2.4.2. $|f| \rightarrow const \neq 0$ и не является КИ, если $\nu' = 0$ или $\nu' = 1$;

2.4.3. $|f| \rightarrow \infty$ и не КИ при $|x| \rightarrow \infty$, если $\nu' < -1$ или $\nu' > 0$.

Все найденные выше условия КИ для функций, используемых при описании пучков $K-G$, подтверждаются при графическом моделировании их свойств.

Подчеркнем, что в варианте 2.4.3 при $\nu' > 0$ получаем $|f| \rightarrow \infty$, а в варианте 2.4.2 при $\nu' = 0$ функции $|f| \rightarrow const \neq 0$. В работе [4] в обеих этих ситуациях авторы полагают, что $|f| \rightarrow 0$, но это неверно. Наши выводы, сформулированные в 2.4, также соответствуют свойствам инвариантности (4.1) пучков $K-G$.

5 Пучки $K-G$ целочисленного индекса ν

Остановимся на некоторых частных вариантах пучков $K-G$ целочисленного индекса ν , которые сводятся к пучкам $H-G$. Если $\nu = 1, 3, 5, \dots = 2m + 1$, то функции ${}_1F_1$ редуцируются к полиномам Эрмита [6]–[8] нечетного индекса:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1-(2m+1)}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right) &= \\ &= \frac{(-1)^m m!}{2(2m+1)!} H_{2m+1}(X_1). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Поэтому $h_1^o(X_1) \sim H_{2m+1}(X_1)$ и функции $f^o \sim G H_{2m+1}(X_1)$.

Таким образом, если $\nu = 1, 3, 5, \dots = 2m + 1$, то нечетные функции f^o , соответствующие пучкам $K-G$, редуцируются в известные [2], [4], [5] нечетные функции комплексного аргумента, сопоставляемые обобщенным пучкам $H-G$.

Аналогично, при $\nu = 0, 2, 4, \dots = 2m$ функции ${}_1F_1$ редуцируются к полиномам Эрмита [6]–[8] четного индекса:

$${}_1F_1\left(-m, \frac{1}{2}, X_1^2\right) = \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} H_{2m}(X_1). \quad (5.2)$$

При этом $h_1^e(X_1) \sim H_{2m}(X_1)$ и функции

$$f^e \sim G H_{2m}(X_1).$$

Следовательно, если $\nu = 0, 2, 4, \dots = 2m$, то чётные функции f^e , сопоставляемые пучкам $K-G$, сводятся к известным [2], [4], [5] чётным функциям комплексного аргумента, посредством которых описывают обобщенные пучки $H-G$.

Пучки $K-G$, которым соответствуют нечётные функции f^o при $\nu = 0, 2, 4, \dots = 2m$, и пучки $K-G$, которым сопоставляют чётные функции f^e при $\nu = 1, 3, 5, \dots = 2m + 1$, являются новыми и не описаны в [4], [12], [13]. Например, авторы работы [4] искали решения параболического уравнения в виде функций параболического цилиндра, умноженных на гауссиан. Поэтому естественно, что те пучки $K-G$, которые не выражаются через функции параболического цилиндра, в [4] отсутствуют.

Используя соотношения инвариантности (4.1), получим аналогичные выводы относительно условий существования новых пучков $K-G$, которым соответствуют функции f^o , снабжённые отрицательным целочисленным индексом ν (варианты 1.1.1 и 1.2.1).

Аргумент X_1 функций Эрмита при описании пучков $H-G$ может быть вещественным при любых Z только при выполнении условия $Q_0^* = \tilde{Q}_0$. При этом обобщенные пучки $H-G$ редуцируются к двумерным стандартным $H-G$ ($sH-G$) пучкам [1], [2] с вещественным аргументом.

В пределе при $\tilde{Q}_0 \rightarrow \infty$ обобщенные пучки $H-G$ комплексного аргумента сводятся к элегантным пучкам $H-G$ (eHG), впервые введенным Сигманом [11].

Заметим, что только $sH-G$ пучки распространяются в свободном пространстве, сохраняя свою форму. Остальные пучки $K-G$ в процессе распространения изменяют свой поперечный профиль. Поэтому их можно назвать пучками с изменяющейся геометрией профиля. К их числу относятся и $eH-G$ пучки.

Заключение

В данной работе унифицированный формализм использован для решения скалярного двумерного параболического уравнения для параксиальных световых пучков. В этих целях после предварительного перехода к безразмерным переменным произведена нелинейная замена переменных. Получены общие решения, пригодные для описания параксиальных пучков, подобных гауссову и названных пучками $K-G$, так как для их математического описания используются произведения функций Куммера и Гаусса. Функции, соответствующие пучкам $K-G$, зависят от трёх свободных комплексных параметров – Q_0 , \tilde{Q}_0 и ν – и являются обобщением известных функций комплексного аргумента, сопоставляемых обобщенным пучкам $H-G$.

Установлено, что при каждом наборе трёх свободных комплексных параметров Q_0 , \tilde{Q}_0 , ν всегда существуют два типа световых пучков $K-G$ – описываемых четными (f^e) и нечетными (f^o) функциями аргумента X .

Выявлено, что даже при целочисленных значениях индексов $\nu = n$, наряду с известным решением в виде функции $H-G$ комплексного аргумента, всегда существует второе (новое) решение, представляемое функцией $K-G$ противоположной чётности с таким же индексом $\nu = n$.

Установлена взаимосвязь пучков $K-G$ с обобщенными, стандартными и элегантными пучками $H-G$.

Фазовая и амплитудная поверхности пучков $K-G$ даже при распространении в свободном пространстве непрерывно деформируются. Все 2D пучки $K-G$, кроме пучков $sH-G$, являются пучками с изменяющейся геометрией.

Найдены ограничения на параметры, при соблюдении которых полученные решения соответствуют пучкам с конечной энергией, подобным гауссовым, то есть физически реализуемым. Установлено, что условия физической реализуемости различны для пучков $K-G$, описываемых четными и нечетными функциями с целочисленным индексом ν , и одинаковы – при нецелочисленном индексе ν .

Показано, что выражения, полученные для описания 2D пучков $K-G$, легко обобщаются в формулы, соответствующие 3D пучкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М. : Наука, 1990. – 264 с.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 142 с.
3. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
4. *Bandres, M.A.* Cartesian beams / M.A. Bandres and J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.
5. *Киселев, А.П.* Новые структуры параксиальных гауссовых пучков / А.П. Киселев // Опт. и спектр. – 2004. – Т. 96, № 4. – С. 533–535.
6. *Лебедев, Н.Н.* Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 379 с.
7. *Справочник по специальным функциям* / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М. : Наука, 1979. – 830 с.
8. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1977. – 342 с.
9. *Полянин, А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
10. *Флюгге, З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2 / 3. Флюгге. – М. : Мир, 1974. – 418 с.
11. *Siegman, A.E.* Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.
12. *Pratesi, R.* Generalized gaussian beams in free space / R. Pratesi, L. Ronchi // JOSA. – 1977. – Vol. 17, № 9. – P. 1274–1276.
13. *Torre, A.* A note on the general solution of paraxial wave equation: a Lie algebra view / A. Torre // Journ. Opt. A. – 2008. – Vol. 10, № 8. – P. 055006 – 055020.
14. *Hypergeometric-Gaussian modes* / E. Karimi [et al.] // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 21. – P. 3053–3055.
15. *Improved focusing with Hypergeometric-Gaussian type-II optical modes* / E. Karimi [et al.] // Optics Express. – 2008. – Vol. 16, № 25. – P. 21069–21075.
16. *Гипергеометрические моды* / В.В. Котляр [и др.] // Компьютерная оптика. – 2006. – № 3. – С. 16–22.

Поступила в редакцию 17.11.11.

УДК 539.12

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

А.Н. Годлевская, Н.Н. Егоров, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

GRAVITATIONAL WAVES IN THE EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD

A.N. Godlevskaya, N.N. Egorov, A.N. Serdyukov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В рамках релятивистской калибровочно-инвариантной модели скалярного гравитационного поля развивается теория распространения неоднородных по своей природе плоских гравитационных волн в свободном пространстве и в сплошной среде при воздействии внешнего поля тяготения.

Ключевые слова: гравитационные волны, калибровочно-инвариантная модель, скалярное поле, волновое уравнение, частотная дисперсия, нейтронная звезда.

The theory of propagation of non-uniform plane gravitational waves in the free space and in the continuous medium at the influence of the external gravitational field on the basis of relativistic gauge-invariant model of scalar gravitational field is developed.

Keywords: gravitational waves, gauge-invariant model, scalar field, wave equation, frequency dispersion, neutron star.

Введение

Исследование проблемы гравитационного излучения в метрических теориях тяготения сопряжено с известными математическими трудностями, возникающими из-за существенно нелинейного характера полевых уравнений. Поэтому при изучении гравитационных волн, как в общей теории относительности [1]–[3], так и в релятивистской теории гравитации [4] принято ограничиваться рассмотрением слабых полей и строить приближенную теорию гравитационных волн на основе поддающихся аналитическому решению линеаризованных уравнений. В общей теории относительности (ОТО) это соответствует, как известно, приближению малых возмущений метрики пространства-времени, где гравитационные волны рассматриваются как мелкая «рябь» на фоне крупномасштабной кривизны, характерной для внешних полей тяготения [3].

Калибровочно-инвариантная модель тяготения со скалярным потенциалом [5], [6], представляющая последовательное минимальное релятивистское обобщение гравитатики Ньютона в рамках стандартных ограничений теории классических полей [7], [8] и восходящая к ранним попыткам построения релятивистской теории гравитационного поля со скалярным потенциалом [9]–[12], допускает естественную и строгую линеаризацию уравнений поля простой заменой полевых переменных. При этом, как показано в [5], [6], можно обходиться без отмеченных выше упрощающих приближений и развивать точную теорию гравитационных волн в свободном пространстве без ограничения их интенсивности.

В настоящем сообщении в рамках предложенной в [5], [6] модели гравитационного поля решена важная для астрофизических приложений задача распространения гравитационных волн в свободном пространстве и в плотной материальной среде при наличии сильного внешнего поля тяготения.

1 Волновое уравнение

Для получения полевого уравнения гравитационных волн, распространяющихся в условиях воздействия внешних полей тяготения, применим тот же, что и при учете гравитационного взаимодействия в механике и электродинамике [6], [13], способ мультипликативного подключения внешнего гравитационного поля к функции Лагранжа свободной физической системы. Отождествляя свободное гравитационное поле с классическим линейным скалярным безмассовым полем U , в качестве его лагранжиана применим выражение [6]

$$L_0 = -\frac{c^4}{2\pi G} (\partial_\mu U)^2. \quad (1.1)$$

«Подключение» к (1.1) внешнего поля тяготения $\mathbf{g} = -\nabla\Phi_{\text{ext}}$ (1.2) приводит к модифицированному лагранжиану

$$L = -\frac{c^4}{2\pi G} (\partial_\mu U)^2 \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext}}}{c^2}\right). \quad (1.3)$$

Потенциал внешнего поля Φ_{ext} в дальнейшем будем считать заданным. Поэтому при построении уравнения поля гравитационных волн ограничимся варьированием только волновой полевой переменной U . Таким образом, уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U)} = \frac{\partial L}{\partial U}$$

с учетом (1.3) примет вид:

$$\partial_\mu \left(\partial_\mu U \cdot \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext}}}{c^2}\right) \right) = 0.$$

Переходя к трёхмерным обозначениям и учитывая (2), получаем линейное волновое уравнение для потенциальной функции гравитационных волн во внешнем поле тяготения следующего вида:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \mathbf{g} \nabla \right) U = 0. \quad (1.4)$$

2 Плоские волны

Решения уравнения (1.4) будем искать в виде плоских волн

$$U = U_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.1)$$

с постоянной амплитудой U_0 . Подставляя (2.1) в (1.4), получим

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\mathbf{k}\mathbf{g}}{c^2} \right) U = 0. \quad (2.2)$$

Как видно из (2.2), условием существования нетривиальных решений для U будет дисперсионное уравнение

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\mathbf{k}\mathbf{g}}{c^2} = 0. \quad (2.3)$$

Очевидно, никакие вещественные значения – одновременно для \mathbf{k} и ω – при условии $\mathbf{k}\mathbf{g} \neq 0$ не могут удовлетворить этому уравнению. Поэтому при вещественных частотах ω его решения для \mathbf{k} следует искать в комплексной форме: $\mathbf{k} = \mathbf{K} + i\mathbf{N}$, где \mathbf{K} и \mathbf{N} – некоторые вещественные векторы, которые предстоит определить.

Допуская комплексную форму волнового вектора \mathbf{k} , мы, тем самым, переходим к поиску решений волнового уравнения (1.4) для скалярного поля U в виде неоднородных плоских волн

$$U = U_0 e^{-\mathbf{N}\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.4)$$

Таким образом, из (2.3) получаем уравнение

$$\mathbf{K}^2 - \mathbf{N}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mathbf{N}\mathbf{g}}{c^2} + 2i\mathbf{K}\mathbf{N} + \frac{i\mathbf{K}\mathbf{g}}{c^2} = 0,$$

которое преобразуется в систему уравнений для \mathbf{K} и \mathbf{N} – вещественной и мнимой частей вектора \mathbf{k} :

$$\mathbf{K}^2 - \mathbf{N}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mathbf{N}\mathbf{g}}{c^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{K} \left(\mathbf{N} + \frac{\mathbf{g}}{2c^2} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Эти соотношения должны выполняться для всех направлений волновой нормали \mathbf{n} . Поскольку $\mathbf{K} \parallel \mathbf{n}$, то из (2.6) следует

$$\mathbf{N} = -\frac{\mathbf{g}}{2c^2}. \quad (2.7)$$

Подставляя далее (2.7) в (2.5), получим дисперсионное уравнение для волнового вектора \mathbf{K} неоднородной гравитационной волны

$$\mathbf{K}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\mathbf{g}^2}{4c^4} = 0. \quad (2.8)$$

Отсюда находим значение модуля \mathbf{K}

$$K = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{g}^2}{4c^2\omega^2}}. \quad (2.9)$$

Аналогично теории электромагнитных волн введем для рассматриваемых волн показатель преломления $n(\omega)$, полагая

$$\mathbf{K} = \frac{\omega n(\omega)}{c} \mathbf{n}.$$

Из (2.9) при этом следует

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}}, \quad (2.10)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{g}{2c}. \quad (2.11)$$

Как видим, показатель преломления гравитационных волн, распространяющихся во внешнем поле тяготения, зависит от частоты. Это означает, что пространство, заполненное полем тяготения, в отношении условий распространения гравитационных волн проявляет себя как среда, обладающая частотной дисперсией.

Из (2.7), (2.10), (2.11) окончательно находим комплексный волновой вектор $\mathbf{k} = \mathbf{K} + i\mathbf{N}$ гравитационной волны во внешнем поле тяготения \mathbf{g} :

$$\mathbf{k} = \frac{n(\omega)\omega}{c} \mathbf{n} - i \frac{\mathbf{g}}{2c^2}. \quad (2.12)$$

С учётом (2.12) для потенциальной функции (2.1) можем записать следующее выражение:

$$U = U_0 \exp\left(\frac{\mathbf{g}\mathbf{r}}{2c^2}\right) \exp\left[i\left(\frac{n\omega}{c} \mathbf{n}\mathbf{r} - \omega t\right)\right]. \quad (2.13)$$

Эта функция описывает плоскую неоднородную волну с постоянным амплитудным коэффициентом U_0 , распространяющуюся в направлении фазовой волновой нормали \mathbf{n} и затухающую в направлении, противоположном вектору напряжённости \mathbf{g} внешнего поля, с таким же коэффициентом экстинкции, как и в случае электромагнитных волн [13], [14].

Как видно из (2.10), особенностью частотной дисперсии гравитационных волн во внешнем поле тяготения является наличие критической частоты (2.11). В диапазоне частот $\omega < \Omega_0$ волновой вектор (2.12) оказывается мнимым, и волновой процесс вырождается в затухающее в пространстве колебание поля. Таким образом, волновой процесс на частотах, меньших критической, подавляется полем тяготения.

3 Энергия гравитационного излучения

Определим скорость переноса энергии неоднородной гравитационной волной во внешнем

поле тяготения. Канонический тензор энергии-импульса скалярного поля [7], [8]

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U)}\partial_\nu U,$$

определяемый функцией Лагранжа (1.3), имеет вид:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{\pi G} \left(\partial_\mu U \cdot \partial_\nu U - \frac{1}{2} (\partial_\sigma U)^2 \delta_{\mu\nu} \right) \times \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right). \quad (3.1)$$

Из (3.1) получаем положительное выражение для плотности энергии $W = -T_{44}$

$$W = \frac{c^4}{2\pi G} \left((\nabla U)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \right) \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right) \quad (3.2)$$

и формулу для плотности потока энергии $S_i = -icT_{i4}$:

$$\mathbf{S} = -\frac{c^4}{\pi G} \frac{\partial U}{\partial t} \nabla U \cdot \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right). \quad (3.3)$$

Отделяя вещественную часть в комплексном решении (2.13) и подставляя ее в формулы (3.2), (3.3), после усреднения по периоду колебаний поля найдем

$$\bar{W} = \frac{c^2 \omega^2}{2\pi G} |U_0|^2, \quad (3.4)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c^2 \omega^2}{2\pi G} |U_0|^2 cn(\omega) \mathbf{n}. \quad (3.5)$$

Из выражений (3.4) и (3.5) следует соотношение

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{W} cn(\omega) \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

которое означает, что перенос энергии гравитационными волнами при их распространении во внешнем поле тяготения осуществляется в направлении фазовой нормали \mathbf{n} со скоростью $U_{\text{эн.}} = cn(\omega)$. Эта величина, как легко убедиться, совпадает с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}} = c \left[\frac{d(\omega n(\omega))}{d\omega} \right]^{-1}.$$

4 Гравитационные волны в сплошной среде нейтронной звезды

При решении задач об излучении гравитационных волн в свободное пространство возникает необходимость рассмотрения их распространения в сплошной среде плотного источника (например, внутри нейтронной звезды) при наличии сверхмощного поля тяготения. Поле гравитационного излучения в этом случае будет описываться полным лагранжианом системы «поле – материя» [5], [6], модифицированным с учетом внешнего поля тяготения:

$$L = -\left(\frac{c^4}{2\pi G} (\partial_\mu U)^2 + c^2 \mu_0 \right) \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right), \quad (4.1)$$

где μ_0 – плотность звезды. Для упрощения задачи будем рассматривать ограниченный участок звездной среды вблизи поверхности, считая μ_0 в его пределах постоянной величиной.

Применяя вариационный принцип, из (4.1) получим волновое уравнение

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \mathbf{g} \nabla - \frac{\omega_0^2}{c^2} \right) U = 0, \quad (4.2)$$

где для удобства введено обозначение

$$\omega_0 = \sqrt{2\pi G \mu_0}. \quad (4.3)$$

По-прежнему ограничиваясь рассмотрением плоских волн вида (2.1), переходим от (3.6) к алгебраическому уравнению

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2} + i \frac{\mathbf{k} \mathbf{g}}{c^2} \right) U = 0, \quad (4.4)$$

которое имеет ненулевое решение при комплексном волновом векторе

$$\mathbf{k} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \cdot \frac{\omega}{c} \mathbf{n} - i \frac{\mathbf{g}}{2c^2}. \quad (4.5)$$

Здесь принято обозначение

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_0^2}, \quad (4.6)$$

где, как и прежде, $\Omega_0 = g/2c$.

Как и в предыдущей задаче, в действительной части вектора (4.5) можно выделить показатель преломления гравитационной волны при ее распространении в сплошной среде звездной материи с учетом поля тяготения:

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}. \quad (4.7)$$

Из (4.6), (4.7) видно, что для волн в сплошной среде сверхплотных звезд также существует критическая частота Ω , которая сдвинута в область более высоких частот по сравнению с критической частотой в пространстве вне звезды ($\Omega > \Omega_0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вебер, Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны / Дж. Вебер. – М. : ИЛ, 1962. – 271 с.
2. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М. : Наука, 1988. – 509 с.
3. Гравитация : в 3 т. / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. – М. : Мир, 1977. – Т. 3. – 510 с.
4. Логунов, А.А. Релятивистская теория гравитации / А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили. – Наука, 1989. – 303 с.
5. Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля: монография / А.Н. Сердюков. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2005. – 257 с.
6. Сердюков, А.Н. Минимальная модель тяготения в рамках стандартных ограничений теории классических полей / А.Н. Сердюков //

Письма в ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 6, № 3 (152) – С. 312–331.

7. Боголюбов, Н.Н. Введение в теорию квантованных полей / Н.Н. Боголюбов. – М. : Наука, 2008. – 736 с.

8. Богуш, А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1987. – 359 с.

9. Nordström, G. Relativitätsprinzip und Gravitation. / G. Nordström // Phys. Zeitschrift. – 1912. – Bd. 13, S. 1126–1129.

10. Nordström, G. Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik / G. Nordström // Ann. d. Phys. – 1913. – Bd. 40. – S. 856–878.

11. Nordström, G. Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips /

G. Nordström // Ann. d. Phys. – 1913. – Bd. 42. – S. 533 – 554.

12. Abraham, M. Theorie der Elektrizität. 2. B : Elektromagnetische Theorie der Strahlung / M. Abraham // Leipzig – Berlin, Teubner Verlag. – 1923. – S. 381–390.

13. Сердюков, А.Н. Теоретико-полевая трактовка гравитационного взаимодействия в электродинамике / А.Н. Сердюков // Письма в ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 8, № 2 (165) – С. 137–156.

14. Сердюков, А.Н. Электромагнитные волны в поле тяготения / А.Н. Сердюков, А.Н. Годлевская // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – Т. 2, № 6 (39). – С. 45–47.

Поступила в редакцию 17.11.11.

УДК 537.87

РЕЗОНАНСНАЯ СТРУКТУРА СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ И ЭКСТИНКЦИИ В ПРОБЛЕМЕ МИ ДЛЯ БИИЗОТРОПНОГО ШАРА

В.Н. Капшай¹, А.А. Шамына¹, В.В. Кондратюк²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

RESONANCE STRUCTURE OF THE SCATTERING AND EXTINCTION CROSS SECTIONS IN THE MIE PROBLEM FOR BIISOTROPIC SPHERE

V.N. Kapshai¹, A.A. Shamyna¹, V.V. Kondratjuk²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²P. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

На основе точного решения задачи Ми рассчитаны сечения экстинкции и рассеяния плоской монохроматической циркулярно поляризованной волны на биизотропном шаре, помещённом в биизотропную среду. Зависимости сечений от отношения радиуса шара к длине волны проанализированы численно. Обнаружена резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции с узкими и очень узкими пиками, которые накладываются на медленно осциллирующую дифракционную зависимость.

Ключевые слова: биизотропная среда, материальные уравнения, теория Ми, сферические электромагнитные волны, сечение рассеяния, сечение экстинкции, резонансная структура.

The extinction and scattering cross sections for the case of the plane monochromatic circularly polarized electromagnetic wave scattered by a biisotropic sphere embedded in a biisotropic medium are calculated on the basis of the exact solution of the Mie problem. Scattering and extinction cross section dependences on the ratio of the sphere radius to the wavelength are analyzed numerically. The resonance structure of the scattering and extinction cross sections is revealed. These cross sections have narrow and very narrow peaks which are superimposed upon slowly oscillating diffraction background.

Keywords: biisotropic medium, constitutive relations, Mie theory, spherical electromagnetic waves, scattering cross section, extinction cross section, resonance structure.

Introduction

This paper is devoted to the study of the extinction cross section behavior in the problem of electromagnetic plane monochromatic wave scattering by a biisotropic homogeneous sphere of radius R imbedded in another biisotropic medium. The study of biisotropic media whose electromagnetic properties are described by the constitutive relations of the form

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \quad \vec{B} = (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H}$$

[1]–[5], is important due to the fact that remaining isotropic these media, nevertheless, may have electromagnetic properties that are significantly different from the properties of simple isotropic media like isotropic dielectrics.

1 Analytical solution of the Mie problem

At first we discuss briefly the results of the corresponding scattering problem solving and present analytical expressions for the coefficients of scattered and internal fields [6]. Solving boundary problems with spherical symmetry it is convenient to use the theory of spherical vectors $\vec{Y}_{JM}^L(\vec{n}_r)$ [7] and define the spherical waves $\vec{F}_{JM}^{(z)}(k|\vec{r})$ [8]–[12]. Taking into account the spherical wave expansion of

a plane monochromatic circularly polarized wave which is incident on the biisotropic sphere [6], [10], [12]:

$$\vec{E}_v^{in}(\vec{r}) = \sum_{J=1}^{\infty} E_J \vec{F}_{Jv}^{(j)}(k_v|\vec{r});$$

$$\vec{H}_v^{in}(\vec{r}) = -\sum_{J=1}^{\infty} E_J b_J \vec{F}_{Jv}^{(j)}(k_v|\vec{r}),$$

one should use analogous expansions for the scattered and internal fields [6], [10], [12]:

$$\vec{E}_v^{sct}(\vec{r}) = -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma v}^J \vec{F}_{J\sigma v}^{(h^1)}(k_{\sigma}|\vec{r}),$$

$$\vec{E}_v^{prt}(\vec{r}) = \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma v}^J \vec{F}_{J\sigma v}^{(z)}(k_{\sigma}^1|\vec{r}).$$

$$\vec{H}_v^{sct}(\vec{r}) = \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma v}^J b_{\sigma} \vec{F}_{J\sigma v}^{(h^1)}(k_{\sigma}|\vec{r}),$$

$$\vec{H}_v^{prt}(\vec{r}) = -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma v}^J b_{\sigma}^1 \vec{F}_{J\sigma v}^{(z)}(k_{\sigma}^1|\vec{r}). \quad (1.1)$$

$$E_J = E_0 \sqrt{2\pi(2J+1)} i^J;$$

$$b_{\sigma} = \left(\chi + i\sigma \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \right) / \mu;$$

$$k_v = \left(\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + v\alpha \right) \omega/c.$$

The continuity of the tangential components of the electric and magnetic fields at the interface between two media yields a system of algebraic equations for the expansion coefficients from which one can determine the coefficients $f_{\sigma\nu}^J$ and $g_{\sigma\nu}^J$ of the scattered and internal fields. The solution of this system can be written as:

$$\begin{aligned} f_{\sigma\nu}^J &= \frac{k_\sigma \Delta_{\sigma\nu}^f}{k_\nu \Delta}; \\ g_{\sigma\nu}^J &= \frac{k_\sigma^1 \Delta_{\sigma\nu}^g}{k_\nu \Delta}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta &= [b_{+1}b_{-1} + b_{+1}^1b_{-1}^1] \Pi(\hat{h}_+ \hat{h}_-) \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) + \\ &+ [b_{+1}b_{+1}^1 + b_{-1}b_{-1}^1] \mathcal{W}(\hat{h}_+ \hat{z}_+) \mathcal{W}(\hat{h}_- \hat{z}_-) - \\ &- [b_{+1}b_{-1}^1 + b_{-1}b_{+1}^1] \Pi(\hat{h}_- \hat{z}_+) \Pi(\hat{h}_+ \hat{z}_-); \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\hat{j}_\nu = \hat{j}_J(k_\nu R); \hat{h}_\sigma = \hat{h}_J^{(1)}(k_\sigma R); \hat{z}_\sigma = \hat{j}_J(k_\sigma R),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma\nu}^f &= [b_\nu b_{-\sigma} + b_{+1}^1 b_{-1}^1] \times \\ &\times \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) (\hat{j}_\nu \hat{h}'_{-\sigma} + v\sigma \hat{j}'_\nu \hat{h}_{-\sigma}) + \\ &+ [b_{-\sigma} b_{-\sigma}^1 + b_\nu b_\sigma^1] \mathcal{W}(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_\nu \hat{z}'_\sigma - v\sigma \hat{j}'_\nu \hat{z}_\sigma) - \\ &- [b_{-\sigma} b_\sigma^1 + b_\nu b_{-\sigma}^1] \Pi(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_\sigma) (\hat{j}_\nu \hat{z}'_{-\sigma} + v\sigma \hat{j}'_\nu \hat{z}_{-\sigma}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma\nu}^g &= [b_\nu b_{-\sigma}^1 + b_+ b_-] \times \\ &\times \Pi(\hat{h}_+ \hat{h}_-) (\hat{j}_\nu \hat{z}'_{-\sigma} + v\sigma \hat{j}'_\nu \hat{z}_{-\sigma}) - \\ &- [b_\nu b_\sigma + b_{-\sigma} b_{-\sigma}^1] \mathcal{W}(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_\nu \hat{h}'_\sigma - v\sigma \hat{j}'_\nu \hat{h}_\sigma) - \\ &- [b_\nu b_{-\sigma} + b_\sigma b_{-\sigma}^1] \Pi(\hat{h}_\sigma \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_\nu \hat{h}'_{-\sigma} + v\sigma \hat{j}'_\nu \hat{h}_{-\sigma}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Writing the determinants we use the denotation

$$W(y_1 y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

$$\Pi(y_1 y_2) = y_1 y_2' + y_1' y_2.$$

Formulae (1.2)–(1.5) altogether constitute the solution of the coefficients determination problem for the scattered and internal field expansions.

2 Absorption, scattering and extinction cross sections

Now let us turn to the calculation of the scattering, absorption, and extinction cross sections. The Pointing vector for the field outside the scattering particle can be represented as the sum of three terms:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \text{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] = \vec{S}^{in} + \vec{S}^{sct} + \vec{S}^{ext}, \quad (2.1) \\ \vec{S}^{ext} &= \text{Re}\left\{ [\vec{E}^{in}, \vec{H}^{sct*}] + [\vec{E}^{sct}, \vec{H}^{in*}] \right\}; \end{aligned}$$

$$\vec{S}^{sct} = \text{Re}[\vec{E}^{sct}, \vec{H}^{sct*}];$$

$$\vec{S}^{in} = \text{Re}[\vec{E}^{in}, \vec{H}^{in*}],$$

where \vec{S}^{in} is the Pointing vector of the incident wave, \vec{S}^{sct} is the Pointing vector of the scattered field, \vec{S}^{ext} is the term due to the interaction between the incident and scattered waves. Therefore, the energy fluxes through a sphere of radius $r > R$ ($\Phi^{abs} = -\int \vec{S} d\vec{\sigma}$) may be written as the sum of three

$$\text{terms: } \Phi^{abs} = \Phi^{in} - \Phi^{sct} + \Phi^{ext},$$

where

$$\Phi^{sct} = \int \vec{S}^{sct} d\vec{\sigma},$$

$$\Phi^{ext} = -\int \vec{S}^{ext} d\vec{\sigma},$$

$$\Phi^{in} = -\int \vec{S}^{in} d\vec{\sigma}. \quad (2.2)$$

For the nonabsorbing surrounding medium $\Phi^{in} = 0$, consequently $\Phi^{ext} = \Phi^{abs} + \Phi^{sct}$, which means that the extinction of the electromagnetic wave is due to the absorption and scattering. Calculating the fluxes Φ^{sct} and Φ^{ext} (2.2) and dividing them by the intensity of the incident wave $I^{in} = |\vec{S}^{in}|$, one can obtain the scattering cross section and the extinction cross section. The explicit form of the Pointing vector of the incident wave (2.1) is

$$\vec{S}^{in} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{\mu} E_0^2 \vec{k};$$

$$I^{in} = |\vec{S}^{in}| = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{\mu} E_0^2. \quad (2.3)$$

Using formulae (2.1) and (2.2) one can easily calculate the scattered energy flux:

$$\begin{aligned} \Phi^{sct} &= \int \text{Re}[\vec{E}^{sct}, \vec{H}^{sct*}] \vec{n} d\sigma = \\ &= \int \text{Re}\left\{ \vec{E}^{sct} [\vec{H}^{sct*}, \vec{n}] d\sigma \right\} = \\ &= \text{Re} \int \vec{H}^{sct*} [\vec{n}, \vec{E}^{sct}] r^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Considering the scattered field in the far field zone ($k_\sigma r \gg 1$) for the scattered flux we get the following expression:

$$\begin{aligned} \Phi^{sct} &= \text{Re} \left\{ E_0 \sum_{J=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_J} 2\pi i (-E_0) \times \right. \\ &\times \sum_{J'=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_{J'}} 2\pi \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^J f_{\sigma\nu}^{J'*} b_\sigma^* \times \\ &\times \int \frac{e^{-ik_\sigma r}}{k_\sigma r} \frac{e^{ik_\sigma r}}{k_\sigma r} \left\{ \vec{Y}_{J\nu}^{(0)*} - \sigma \vec{Y}_{J\nu}^{(1)*} \right\} \left\{ \vec{Y}_{J'\nu}^{(1)} - \sigma \vec{Y}_{J'\nu}^{(0)} \right\} r^2 d\Omega \Big\} = \\ &= \text{Re} \left\{ -i 2\pi E_0^2 \sum_{J=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_J} 2\pi \times \right. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{J'=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_{J'}} 2\pi \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^J f_{\sigma\nu}^{J'*} b_{\sigma}^* \frac{1}{k_{\sigma}^2} \times \\ & \times \int \left[-\sigma \bar{Y}_{J\nu}^{(1)*} \bar{Y}_{J\nu}^{(1)} - \sigma \bar{Y}_{J\nu}^{(0)*} \bar{Y}_{J\nu}^{(0)} \right] r^2 d\Omega = \\ = & \operatorname{Re} \left\{ \frac{4\pi}{\mu} E_0^2 \sum_{J=1}^{\infty} \gamma_J \sum_{\sigma=\pm 1} |f_{\sigma\nu}^J|^2 \frac{1}{k_{\sigma}^2} \left(i\sigma\chi + \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \right) \right\} = \\ = & 4\pi \frac{\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{\mu} E_0^2 \sum_{J=1}^{\infty} \gamma_J \sum_{\sigma=\pm 1} |f_{\sigma\nu}^J|^2 \frac{1}{k_{\sigma}^2}, \\ & \gamma_J = 2J + 1. \end{aligned}$$

Dividing the scattered flux (2.4) by the incident irradiance (2.3) for the scattering cross section we obtain

$$\sigma_{\nu}^{sct} = \frac{\Phi^{sct}}{I^{in}} = 4\pi \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \sum_{\sigma=\pm 1} |f_{\sigma\nu}^J|^2 \frac{1}{k_{\sigma}^2}. \quad (2.5)$$

Similarly, one can calculate the extinction cross section starting with the flux Φ^{ext} :

$$\begin{aligned} \Phi^{ext} &= -\operatorname{Re} \int \left\{ \bar{E}^{in} \left[\bar{H}^{sct*}, \bar{n} \right] + \bar{E}^{sct} \left[\bar{H}^{in*}, \bar{n} \right] \right\} d\sigma = \\ &= \operatorname{Re} \int \left\{ \bar{E}^{in*} \left[\bar{n}, \bar{H}^{sct} \right] - \bar{H}^{in*} \left[\bar{n}, \bar{E}^{sct} \right] \right\} r^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Taking into account the expansions for the vectors \bar{E} and \bar{H} one can find the following analytical expression for the flux Φ^{ext} :

$$\begin{aligned} \Phi^{ext} &= \operatorname{Re} \left[E_0^2 \frac{2\pi}{\mu} \sum_{J=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_J} (-i)^J \sum_{J'=1}^{\infty} \sqrt{2J'+1} i^{J'} \times \right. \\ & \times \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^{J'} (\sigma + \nu) i^2 \frac{\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{k_{\sigma} k_{\nu}} \times \\ & \times \int \left(i\sigma \hat{j}_J(k_{\nu}r) \hat{h}_{J'}^{(1)\prime}(k_{\sigma}r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)*}(\bar{n}_r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)}(\bar{n}_r) - \right. \\ & \left. - i\nu \hat{j}'_J(k_{\nu}r) \hat{h}_{J'}^{(1)}(k_{\sigma}r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)*}(\bar{n}_r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)}(\bar{n}_r) \right) d\Omega = \\ = & \operatorname{Re} \left[-\frac{2\pi}{\mu} E_0^2 \sum_{J=1}^{\infty} \gamma_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^J \frac{1}{k_{\sigma} k_{\nu}} i\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} (\sigma + \nu) \times \right. \\ & \times \left[\sigma \hat{j}_J(k_{\nu}r) \hat{h}_{J'}^{(1)\prime}(k_{\sigma}r) - \nu \hat{j}'_J(k_{\nu}r) \hat{h}_{J'}^{(1)}(k_{\sigma}r) \right] = \\ = & \frac{2\pi}{\mu} E_0^2 \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \sum_{J=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_J} \sum_{\sigma=\pm 1} \operatorname{Re} \left[f_{\sigma\nu}^J \frac{1}{k_{\sigma} k_{\nu}} (1 + \sigma\nu) \right]. \end{aligned}$$

Finally, for the extinction cross section we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}^{ext} &= \frac{\Phi^{ext}}{I^n} = \\ &= 2\pi \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \sum_{\sigma=\pm 1} \operatorname{Re} \left[f_{\sigma\nu}^J \frac{1 + \sigma\nu}{k_{\sigma} k_{\nu}} \right]. \quad (2.6) \end{aligned}$$

The absorption cross section $\sigma^{abs} = \sigma^{ext} - \sigma^{sct}$.

3 Results of numerical calculations

The results obtained for the scattering cross section (2.5) and extinction cross section (2.6) have

been studied by numerical calculations performed in the Mathematica system. It should be noted that describing electromagnetic processes it is convenient to use the efficiency factor of extinction (scattering), which is defined as the cross section divided by the particle radius squared (or by πR^2). The dependence of this factor on the parameter R/λ was calculated, the frequency dispersion was not taken into account, and this corresponds to the efficiency factor dependence on the radius at the fixed frequency of the incident radiation. In order to emphasize the effects associated with the parameters α and χ we used their overestimated values.

For small values of the ratio R/λ the efficiency factor increases initially from zero to some maximum, and then shows slow oscillations about some mean value. Such oscillations are usually referred to as the interference structure (interference between incident and scattered waves). Figure 3.1 shows interference behaviour of the efficiency factor in the case when the incident wave is left circularly polarized. For the right circular polarization of the incident wave the refractive index for which ($n_{\nu} = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + \nu\alpha$) is higher than for the left at the same values of the media parameters, the interference structure is changed drastically by the additional resonance structure. Consideration of a smaller area allows specifying the structure. The figure clearly shows that the additional peaks can be of two types – narrow and very narrow.

Structures of this kind in the cross sections of the atomic and nuclear processes are of particular interest. In our opinion they require special attention in case of electromagnetic scattering as well. It should be also noted that numerical calculations show the same behaviour of the scattering cross section. Moreover, in the case under consideration (non-absorbing media) the scattering cross section coincides with the extinction cross section with high accuracy.

Conclusion

In this paper the scattering and extinction cross sections of the plane circularly polarized electromagnetic wave on a biisotropic sphere embedded in another biisotropic environment are calculated on the basis of the exact solution of the Mie problem. The efficiency factor of extinction (and scattering) calculated numerically shows the interference structure on which the additional resonance structure of narrow and very narrow peaks is imposed. In our opinion the explanation of the existence of such narrow peaks is that the behaviour of individual partial terms of the cross sections has a pronounced resonant character due to the existence of the poles of the amplitudes $f_{\sigma\nu}^J(2)$ near the real R/λ -axis.

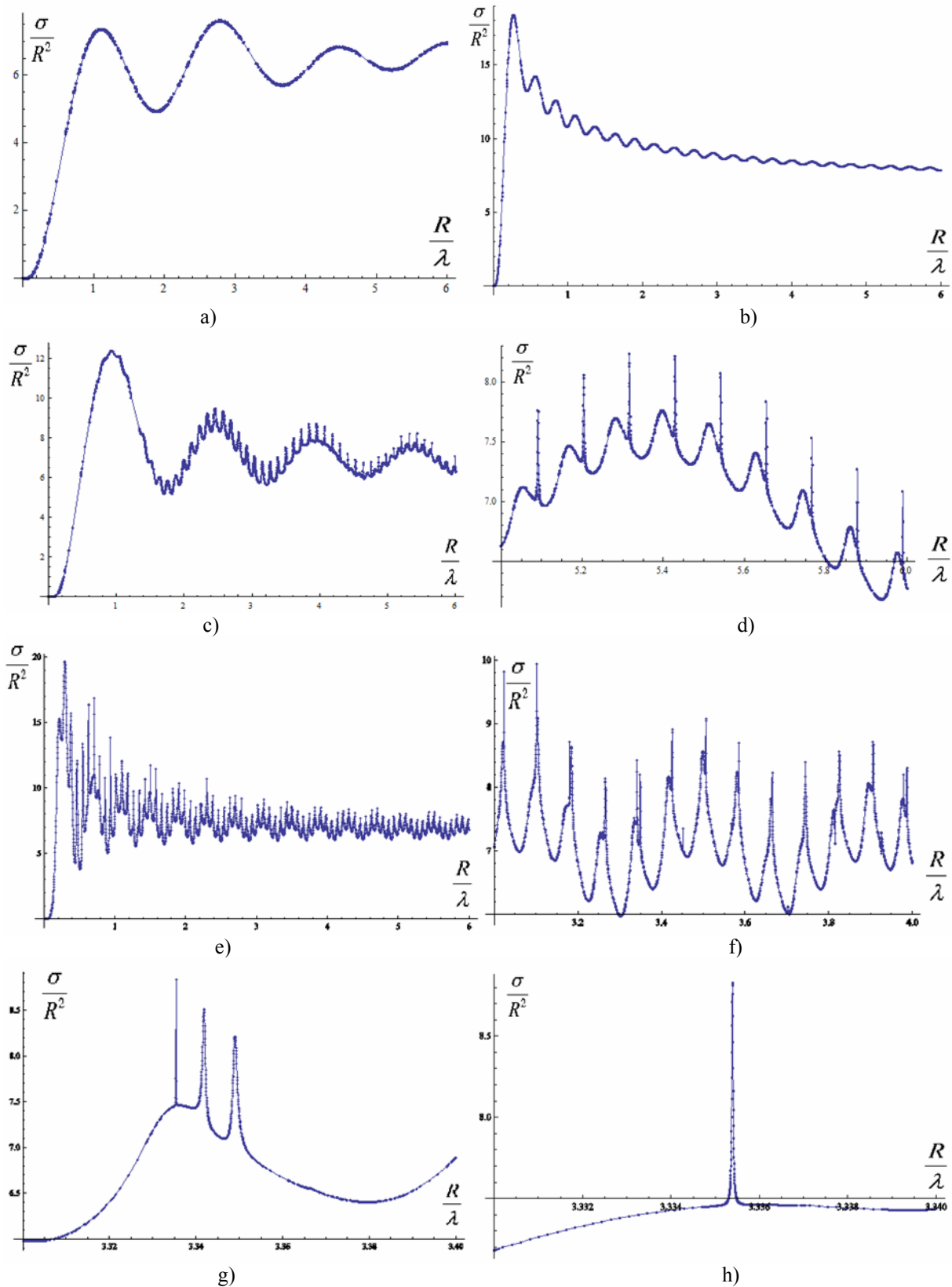


Figure 3.1 – The extinction cross section of a circularly polarized incident wave for the next parameters:

a) $\nu = -1$; $\chi = 0.1$; $\varepsilon = 1.1$; $\mu = 1$; $\alpha = 0.1$ and $\chi_1 = 0.1$; $\varepsilon_1 = 1.5$; $\mu_1 = 1.1$; $\alpha_1 = 0.4$;

b) $\nu = -1$; $\chi = 0.1$; $\varepsilon = 1.1$; $\mu = 1$; $\alpha = 0.1$ and $\chi_1 = 0.1$; $\varepsilon_1 = 1.1$; $\mu_1 = 1$; $\alpha_1 = 2$;

c), d) $\nu = 1$; $\chi = 0.1$; $\varepsilon = 1.1$; $\mu = 1$; $\alpha = 0.1$ and $\chi_1 = 0.1$; $\varepsilon_1 = 1.3$; $\mu_1 = 1.1$; $\alpha_1 = 0.3$;

e), f), g), h) $\nu = 1$; $\chi = 0.1$; $\varepsilon = 1.1$; $\mu = 1$; $\alpha = 0.1$ and $\chi_1 = 0.1$; $\varepsilon_1 = 2$; $\mu_1 = 2$; $\alpha_1 = 0.4$

REFERENCES

1. *Semchenko, I.V.* Research on chiral and bi-anisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // *Progress in Electromagnetics Research (PIER)*. – 1996. – Vol. 12. – P. 335–370.
2. *Sihvola, A.* Comments on boundary problems and electromagnetic constitutive parameters / A. Sihvola, S. Tretyakov // *Optik*. – 2008. – Vol. 120. – P. 247–249.
3. *Obukhov, Y.N.* On the boundary-value problems and the validity of the Post constraint in the modern electromagnetism / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // *Optik*. – 2009. – Vol. 120. – P. 418–421.
4. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.
5. *Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications* / A. Serdyukov [et al.]. – Overseas Publishers Association, 2001. – 400 p.
6. *Капшай, В.Н.* Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.
7. *Варшалович, А.Б.* Квантовая теория углового момента / А.Б. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 600 с.
8. *Годлевская, А.Н.* Сферические электромагнитные волны в естественно гиротропных средах / А.Н. Годлевская, В.А. Карпенко, А.Н. Сердюков // *Опт. и спектр*. – 1985. – Т. 59, № 6. – С. 1262–1265.
9. *Годлевская, А.Н.* Рассеяние электромагнитных волн на металлической сфере в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // *ДАН БССР*. – 1989. – Т. 33, № 4. – С. 332–335.
10. *Годлевская, А.Н.* Рассеяние электромагнитных волн на сферически симметричных частицах в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // *Опт. и спектр*. – 1990. – Т. 68, № 1. – С. 122–127.
11. *Беличенко, В.И.* Рассеяние электромагнитных волн биизотропной сферой / В.И. Беличенко, В.В. Фисанов // *Изв. вузов. Физика*. – 1994. – № 10. – С. 108–112.
12. *Капшай, В.Н.* Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // *Известия ВУЗов. Физика*. – Томск, 2000. – № 11. – С. 79–84.

Поступила в редакцию 15.11.11.

УДК 539.12.01

РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СИСТЕМ И КОВАРИАНТНЫЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В.Н. Капшай, К.П. Шильяева, Ю.А. Гришечкин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

RESONANCE STATES OF RELATIVISTIC SYSTEMS AND COVARIANT TWO-PARTICLE EQUATIONS

V.N. Kapshai, K.P. Shilyaeva, Yu.A. Grishechkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе описан метод, позволяющий находить резонансные состояния для релятивистских двухчастичных систем и исследовать их влияние на сечение рассеяния. Метод основан на решении интегральных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении. Данный метод применён для идентификации структур сечения рассеяния для модельного потенциала.

Ключевые слова: двухчастичные интегральные уравнения, релятивистское конфигурационное представление, комплексный поворот, резонансное состояние, амплитуда рассеяния, сечение рассеяния.

Method for determination of resonance states of the relativistic two-particle system and analysis of their influence on the cross section is presented. The method is based on the integral equations in the relativistic configurational representation. This method is applied for the identification of the scattering cross sections structures for a model potential.

Keywords: two-particle integral equations, relativistic configurational representation, complex scaling, resonance states, scattering amplitude, cross section.

Introduction

One of the quantum field theory approaches used to describe two-particle systems is based on two-particle equations of the quasipotential type [1], [2]. Initially these equations were obtained in the momentum representation where they have integral form analogous to the Schrodinger integral equation. Alternatively, the so called relativistic configurational representation (RCR) [3], [4] for the two-particle quasipotential equations is commonly used. The RCR is introduced by means of expansion of all values in the equations over matrix elements of the principal series of the Lorentz group irreducible unitary representations [5]. One of the advantages of the RCR equations in comparison with the equations in the momentum representation is the physical sense transparency of the potentials. For example the analytic dependence of the potential $V(r)$ on the RCR-variable r may indicate the probable presence of resonant or bound states for the considered system. In this paper we describe model-potential study of the RCR integral equations for the resonance states of the two particle systems.

1 Complex scaling for the relativistic integral equations

Two-particle integral equations for the scattering s -states in the RCR have the following form [6]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin \chi_q mr + \int_0^\infty G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r') dr'. \quad (1.1)$$

Here $j = 1$ ($j = 3$) corresponds to the Logunov-Tavkhelidze equation (modified equation), $j = 2$ ($j = 4$) corresponds to the Kadyshevsky equation (modified equation), $\psi_{(j)}(\chi_q, r)$ – wave function, $V(r)$ – relativistic potential, $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ – Green function (GF). The rapidity χ_q is connected to the relativistic energy $2E_q$ through $2E_q = 2m \cosh \chi_q$. Green functions for the specific j are written as [6]

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \quad (1.2)$$

where

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i \sinh[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{K_q^{(1)} \sinh[\pi mr/2]},$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i \cosh[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{K_q^{(3)} \cosh[\pi mr/2]},$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m \cosh \chi_q)^{-1}}{\cosh[\pi mr/2]} -$$

$$\frac{i \sinh[(\pi + i\chi_q)mr]}{K_q^{(2)} \sinh[\pi mr]},$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i \sinh[(\pi + i\chi_q)mr]}{K_q^{(4)} \sinh[\pi mr]}.$$

Here we use the denotations

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m \sinh 2\chi_q,$$

$$K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m \sinh \chi_q.$$

In quantum mechanics the resonance states are defined as the S -matrix (or scattering amplitude) poles located in the fourth quadrant of the complex momentum p plane [7]. In this work we investigate the existence of such poles in the complex rapidity χ_q plane. Relativistic integral equations for the resonance states have to be homogeneous by analogy with non-relativistic case. In these equations GF for the states with complex energy $2E_q = 2\sqrt{q^2 + m^2}$ (m – mass of each particle) has to be used, where real part of the energy is greater than the rest energy $2m$ of two considered particles.

The integral equations for the resonance states, i.e. states with complex rapidities $\chi_q = \xi_q + iw_q$, where ξ_q, w_q are real parameters have the form

$$\begin{aligned} & \psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, r) = \\ & = \int_0^\infty dr' G_{(j)}(\xi_q + iw_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, r'). \end{aligned} \quad (1.3)$$

One can solve integral equations (1.3) numerically only for sufficiently fast decreasing analytical potentials, because GF and wave function in integrals generally do not decrease at $r \rightarrow \infty$. Moreover numerical solution of this equations is possible only in the band $w_{min} \leq w_q \leq w_{max}$, which is dependent on the properties of the potential. However, resonant rapidities may be found outside this area. In order to solve (1.3) in other domain of complex χ_q , we will use the well known non-relativistic complex scaling method [8], [9]. After transformation of the real variables r, r' to the complex variables $z = r \exp(i\theta)$, $z' = r' \exp(i\theta)$, $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$ the equations for the resonance states are expressed as

$$\begin{aligned} & \psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, r) = \\ & = \int_0^\infty dr' G_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, r, r') V^{(\theta)}(r') \psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, r'), \end{aligned} \quad (1.4)$$

where

$$\begin{aligned} & \psi_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, r) = \psi_{(j)}(\chi_q, z), V^{(\theta)}(r') = \\ & = \exp(i\theta)V(z'), G_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, z, z'). \end{aligned}$$

In the non-relativistic theory resonance states correspond to sudden changes of the scattering amplitude in some resonance energy real part neighborhood. Scattering amplitude in the quantum mechanics is defined as the coefficient divided by momentum in front of the scattered wave $\exp(ipr)$, when asymptotic form of the wave function at $r \rightarrow \infty$ is considered. Let us consider the analogous asymptotes of the relativistic wave function. Taking into account asymptotic behavior of the GFs

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong -\frac{2}{K_q^{(j)}} \sin \chi_q mr' \exp(i\chi_q mr')$$

integral equation (1.1) at $r \rightarrow \infty$ yields:

$$\psi_{(j)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong \sin \chi_q mr + q f_{(j)}(\chi_q) \exp(i\chi_q mr),$$

where $q = m \sinh \chi_q$ is the relativistic momentum and scattering amplitude $f_{(j)}(\chi_q)$ has the following form

$$\begin{aligned} & f_{(j)}(\chi_q) = \\ & = -\frac{2}{qK_q^{(j)}} \int_0^\infty dr' \sin \chi_q mr' V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Partial scattering amplitude is connected to the partial s -wave cross section $\sigma_{(j)}(\chi_q)$

$$\sigma_{(j)}(\chi_q) = 4\pi |f_{(j)}(\chi_q)|^2. \quad (1.6)$$

2 Resonance contributions into the scattering amplitude

In order to study the influence of the resonances on the scattering amplitude (or the cross section) let us define the contribution of the R -th resonance to the scattering amplitude by analogy with the non-relativistic case [10]

$$\frac{\text{Res}[f_{(j)}(\chi_q^R)]}{\chi_q - \chi_q^R}. \quad (2.1)$$

The residue $\text{Res}[f_{(j)}(\chi_q^R)]$ can be found using the Cauchy's theorem [11]

$$\begin{aligned} \text{Res}[f_{(j)}(\chi_q^R)] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f_{(j)}(\chi_q) d\chi_q = \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{(j)}(\chi_q^R + \rho e^{i\phi}) e^{i\phi} d\phi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Contour C is a circle in the complex χ_q plane with the center at resonant rapidity χ_q^R , ρ is the radius of this circle, chosen in such a way that inside the contour only one resonance of interest is located. Defining the reduced scattering amplitude $\tilde{f}_{(j)}$ and reduced cross section $\tilde{\sigma}_{(j)}$

$$\tilde{f}_{(j)}(\chi_q, \chi_q^R) = f_{(j)}(\chi_q) - \frac{\text{Res}[f_{(j)}(\chi_q^R)]}{\chi_q - \chi_q^R}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{\sigma}_{(j)}(\chi_q, \chi_q^R) = 4\pi |\tilde{f}_{(j)}(\chi_q, \chi_q^R)|^2,$$

and then comparing $\sigma_{(j)}$ and $\tilde{\sigma}_{(j)}$ one can identify possible feature in the cross section and investigate the influence of the desired resonance.

For the numerical treatment we approximate integrals in (1.1) and (1.4) by one of the quadrature formulas $\int_a^b F(r) dr \cong \sum_{k=1}^N \omega_k F(r_k)$, where ω_k, r_k – are weights and grid points. After approximation we obtain the systems of N linear algebraic equations with respect to $\psi_k = \psi_{(j)}(\chi_q, r_k)$ and $\psi_k^{(\theta)} = \psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, r_k)$, correspondingly:

$$\sum_{k=1}^N M_{sk} \psi_k = b_s, \quad (2.4)$$

$$M_{sk} = \delta_{sk} - \omega_k G_{(j)}(\chi_q, r_s, r_k) V(r_k), b_s = \sin \chi_q m r_s, \quad V_1(r) = 30r^2 \frac{\cosh(\pi - \beta)mr}{\cosh \pi mr}, \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^N M_{sk}^{(\theta)} \psi_k^{(\theta)} = 0, \quad V_2(r) = 30r^2 \frac{\sinh(\pi - \beta)mr}{\sinh \pi mr},$$

$$M_{sk}^{(\theta)} = \delta_{sk} - \omega_k G_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, r_s, r_k) V^{(\theta)}(r_k),$$

where δ_{sk} are elements of the identity matrix. Non-trivial solution of the homogeneous system exists if the following condition holds:

$$d_{(j)}(\chi_q) = d_{(j)}(\xi_q + iw_q) = \det(M_{(j)}^{(\theta)}) = 0. \quad (2.5)$$

This condition is satisfied only for some complex χ_q values, which are the rapidities corresponding to the resonance states. Separating real and imaginary parts of $d_{(j)}(\chi_q)$ we rewrite equation (2.5) as the system of nonlinear equations

$$\text{Re}[d_{(j)}(\chi_q)] = 0, \quad \text{Im}[d_{(j)}(\chi_q)] = 0. \quad (2.6)$$

Computing $d_{(j)}(\chi_q)$ for different rapidity values (on the grid in the complex χ_q plane) we find the approximate position of the determinant zeroes, and then use these values as start values for solving system (2.6) by the continuous analog of the Newton's method [12]. Solving non-homogeneous system (2.4) and using approximation of the integrals we are able to compute scattering amplitudes and cross sections and obtain residues of the scattering amplitudes at resonant rapidities.

3 Results of the calculations

In tables 3.1 and 3.2 we present the results of the calculations of the resonant rapidities and scattering amplitude residues for the following potentials

where $\beta < \pi$ and $m = 1$. These potentials are possible relativistic generalization of the well known non-relativistic potential $V_0 r^2 \exp(-\alpha r)$.

In figure 3.1 cross sections, scattering amplitudes, reduced cross sections, reduced scattering amplitudes and contributions of the resonances to the scattering amplitudes for the potential V_1 with $j = 2$, $\beta = \pi/4$ are presented. The first three plots correspond to the case when contribution from the first resonance is excluded, the second and third plots correspond to the pictures obtained when contributions from the second and third resonances are omitted. For the considered potential the first and the second resonances lie very close to the real axis (see table 3.1). These structures completely disappear for the reduced cross sections and amplitudes. In the figures for the cross section and for the scattering amplitude one can see narrow peak and narrow trough at the corresponding rapidity values. The third resonance has larger imaginary part and has influence on the wider area of the cross section. In figure 3.1 one can see that the contribution of this resonance to the scattering amplitude is much more delocalized. The wide trough disappears in the reduced cross section, but it is reasonable that structures assigned to the narrow resonances are still visible.

Table 3.1 – Resonant rapidities for the potentials (3.1)

β	R	$j = 2$, potential V_1		$j = 4$, potential V_2	
		$\text{Re}[\chi_q]$	$\text{Im}[\chi_q]$	$\text{Re}[\chi_q]$	$\text{Im}[\chi_q]$
$\frac{\pi}{4}$	1	2.399071	-0.001305	2.801659	-4.2×10^{-11}
	2	2.767267	-0.007430	3.339097	-0.013728
	3	2.569008	-0.192597	3.425283	-0.187849
		$j = 1$, potential V_1		$j = 3$, potential V_2	
$\frac{\pi}{2}$	1	1.720483	-0.134337	1.868578	-0.257724

Table 3.2 – Scattering amplitude residues for the potentials (3.1)

β	R	$j = 2$, potential V_1		$j = 4$, potential V_2	
		$\text{Re}[\chi_q]$	$\text{Im}[\chi_q]$	$\text{Re}[\chi_q]$	$\text{Im}[\chi_q]$
$\frac{\pi}{4}$	1	-1.9698×10^{-4}	1.3114×10^{-4}	-	-
	2	8.6100×10^{-4}	4.9217×10^{-4}	6.6597×10^{-4}	1.0657×10^{-3}
	3	-7.5494×10^{-3}	6.1202×10^{-2}	9.8482×10^{-2}	-3.4470×10^{-2}
		$j = 1$, potential V_1		$j = 3$, potential V_2	
$\frac{\pi}{2}$	1	-3.4617×10^{-2}	5.1932×10^{-2}	7.4375×10^{-2}	6.4391×10^{-2}

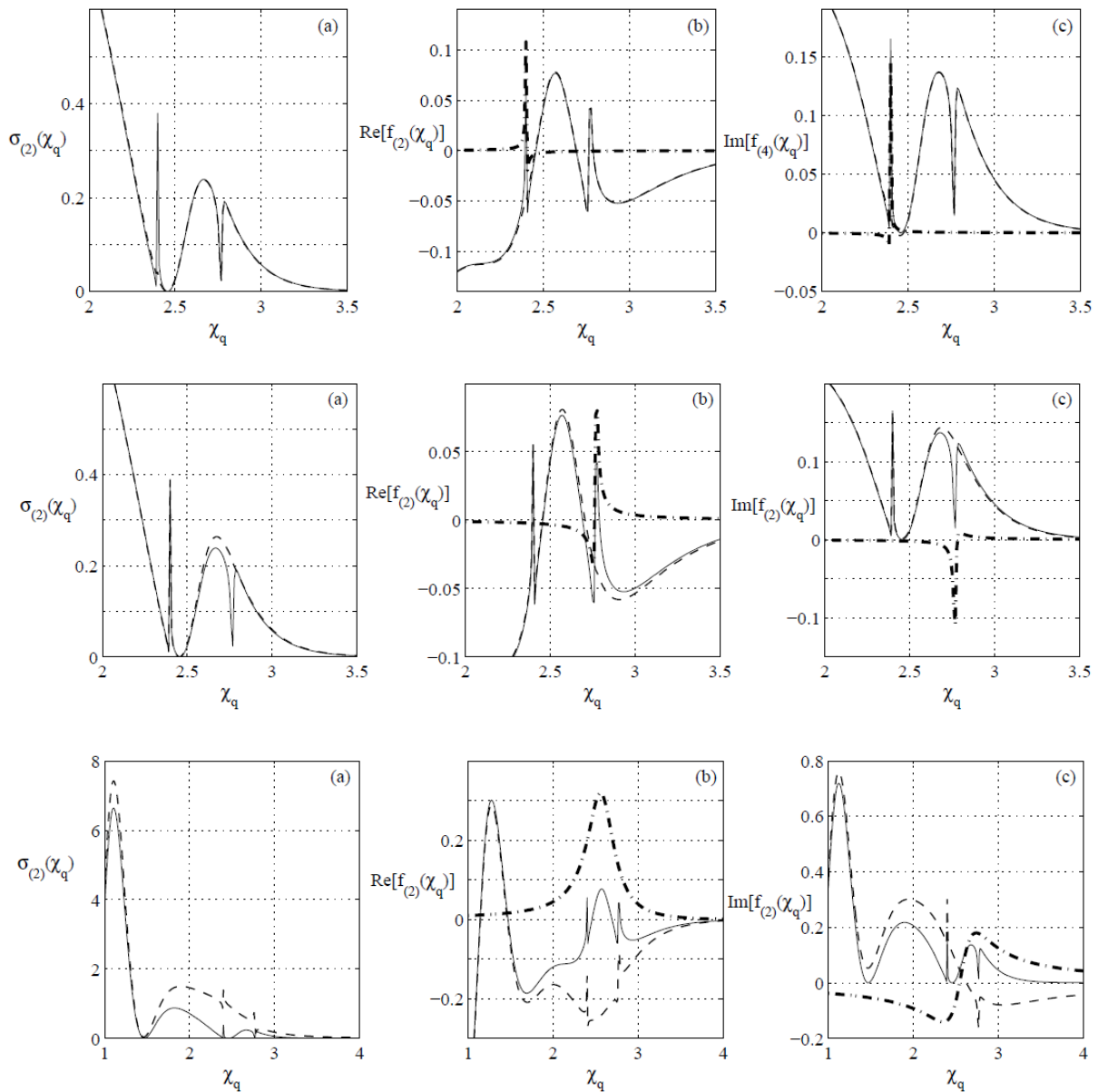


Figure 3.1 – Cross sections and scattering amplitudes
 — — cross section/scattering amplitude; - - - - reduced cross section/reduced scattering amplitude;
 - · - · - contribution of the resonance into the scattering amplitude

Conclusion

The complex scaling method, widely used in the non-relativistic theory and applied to the RCR two particle integral equations allows the calculation of resonant rapidities for the analytical potentials. Defining the contribution of resonance into the scattering amplitude through its residue gives the possibility to assign the structure in the cross section to the particular resonance. It is shown that analysing the influence of the resonance on the cross section with the use of the presented method it is possible to distinguish the contributions from the overlapping resonance structures. The proposed method may be applied for the study of more realistic systems in the presence of resonance states.

REFERENCES

1. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – V. 29. – P. 380–399.
2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky, // Nucl. Phys. – 1968. – V. B6. – P. 125–148.
3. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential approach and the expansion in relativistic spherical functions / V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov, N.B. Skachkov // Nuovo Cimento. – 1968. – V. 55A. – P. 233–257.
4. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел /

В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2. – С. 635–690.

5. Шапиро, И.С. Разложение функции по неприводимым представлениям группы Лоренца / И.С. Шапиро // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 106. – С. 647–649.

6. Alferova, T.A. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proceed. of the Sixth Annual Seminar NPCС'97; Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys., Minsk, 1998. – P. 78–85.

7. Taylor, R.J. Scattering theory / R.J. Taylor. – John Wiley & Sons: New York, London, Sydney, Toronto, 1972. – 570 p.

8. Nuttal, J. Method of Complex Coordinates for Three-Body Calculations above the Breakup Threshold / J. Nuttal, H.L. Cohen // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188. – P. 1542–1544.

9. Balslev, E. Spectral properties of many body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions / E. Balslev, J.M. Combes // Commun. Math. Phys. – 1971. – Vol. 22. – P. 280–294.

10. Shilyaeva, K. Role of Resonances in Building Cross Sections: Comparison Between the Mittag-Leffler and the T-matrix Green Function Expansion Approaches / K. Shilyaeva, N. Elander, E. Yarevsky // Int J Quantum Chem. – 2007. – Vol. 107. – P. 1301–1305.

11. Arfken, G. Mathematical Methods for Physicists / G. Arfken. – Academic Press, San Diego, 1985. – 985 p.

12. Abrashkevich, A. CANM, a program for numerical solution of a system of nlinear equations using the continuous analog of Newton's method / A. Abrashkevich, I. V. Puzynin // Comput. Phys. Commun. – 2004. – Vol. 156. – P. 154–170.

Поступила в редакцию 17.11.11.

УДК 548.55

ПОГЛОЩАЮЩИЕ ОПТИЧЕСКИ АКТИВНЫЕ КРИСТАЛЛЫ МОНОКЛИННОГО КЛАССА 2

**А.Ф. Константинова, Т.Г. Головина,
Е.А. Евдищенко, Б.В. Набатов, К.К. Константинов**

Институт кристаллографии им. В.А. Шубникова РАН, Москва, Россия

MONOCLINIC OPTICALLY ACTIVE ABSORBING CRYSTALS OF CLASS 2

**A.F. Konstantinova, T.G. Golovina,
E.A. Evdischenko, B.V. Nabatov, K.K. Konstantinov**

A.V. Shubnikov Institute of Crystallography, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

В статье содержится описание исследований, основанных на научных идеях и результатах академика Б.В. Бокутя, полученных с использованием ковариантных методов Ф.И. Федорова. Представлены результаты изучения моноклиных оптически активных поглощающих кристаллов класса 2. Проведено сравнение с ромбическими кристаллами класса 222. Последовательно рассмотрены особенности поляризации собственных волн в кристаллах вблизи оптических осей – в прозрачных оптически активных, поглощающих, в оптически активных и поглощающих кристаллах. Для этих же случаев приведены зависимости азимута поляризации света, прошедшего через пластинку при нормальном падении. В моноклиных кристаллах рассмотрено два случая, когда при отсутствии поглощения ось симметрии второго порядка (2) лежит в одной плоскости с оптическими осями и ось 2 перпендикулярна оптическим осям. Основные особенности заметны в случае, когда ось 2 перпендикулярна оптическим осям.

Ключевые слова: ковариантные методы, прозрачные и поглощающие кристаллы, двуосные кристаллы, моноклинные кристаллы класса 2, гиротропия, азимут поляризации, тензор гирации, собственные волны.

The article contains results of the research based on the scientific ideas and results of academician B.V. Bokut which were obtained using covariant methods of F.I. Fedorov. Results of the study of monoclinic optically active absorbing crystals of class 2 are presented. Comparison with rhombic crystals of class 222 is made. Peculiarities of polarization of eigenwaves near optical axes in crystals such as transparent optically active, absorbing, optically active and absorbing are consecutively considered. Dependencies of the azimuth of polarization of transmitted light with the incidence angle equal to zero are presented for these cases. Two cases for monoclinic crystals are considered. The first case is when there is absorption and symmetric axis number 2 lies in the same plane as optical axes and the second case is when axis number 2 is perpendicular to the optical axes. The main peculiarities are noticed when axis number 2 is perpendicular to the optical axes.

Keywords: covariant methods, transparent and absorbing crystals, biaxial crystals, monoclinic crystals of class 2, gyrotropy, azimuth of polarization, gyration tensor, eigen wave.

Введение

После лекций о ковариантных методах, прочитанных Ф.И. Фёдоровым на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова [1], многие исследователи стали применять их для решения задач кристаллооптики. В результате появились работы, выполненные в сотрудничестве не только с Ф.И. Фёдоровым, но и с его учениками – в первую очередь с его аспирантом Б.В. Бокутем. После совместно выполненной с Б.В. Бокутем работы [2] по исследованию поглощающих оптически активных (гиротропных) кристаллов началось систематическое экспериментальное и теоретическое изучение таких кристаллов; подробный обзор работ Ф.И. Фёдорова и его учеников по этой проблеме содержится в [3]. Наши исследования, совместно выполненные с Б.В. Бокутем, завершились написанием книги [4], изданной в Беларуси.

Тем не менее, в большинстве экспериментальных и теоретических работ исследовались свойства одноосных кристаллов и были

предложены методы определения показателей преломления и поглощения, а также параметров гирации [5]. Что касается двуосных кристаллов, то проводились только исследования кристаллов ромбической сингонии аксиального класса 222 [6], [7]. Б.В. Бокуть много внимания уделял исследованию оптически активных кристаллов – свойства именно таких кристаллов были изучены в его докторской диссертации [8]. Нам показалось интересным рассмотреть более сложный случай – когда кристалл относится не к ромбической, а к моноклиной сингонии (класса 2) и является одновременно поглощающим и оптически активным. Настоящая обзорная статья написана на основе результатов исследования именно таких кристаллов, которое было непросто.

Прежде чем описать свойства кристаллов класса 2, сначала сделаем обзор результатов исследования прозрачных активных кристаллов этого класса, затем – результатов изучения поглощающих неактивных кристаллов, и только после этого рассмотрим распространение

световой волны через моноклинные поглощающие оптически активные кристаллы.

Помимо ковариантного метода при расчетах будем использовать также метод Берремана, описанный нами в [9].

Известно, что в двуосных кристаллах главные показатели преломления обозначаются N_g – наибольший, N_m – средний, N_p – наименьший.

Расчеты для моноклинного кристалла проведены для двух случаев: I – направление, соответствующее наибольшему значению показателя преломления N_g , параллельно оси симметрии 2; II – направление, соответствующее N_g , ортогонально оси 2 [8].

1 Прозрачный гиротропный кристалл класса 2

В моноклинных прозрачных гиротропных кристаллах класса 2 направление одной из главных осей тензоров ε и α совпадает с осью симметрии второго порядка (осью 2). Направления двух других главных осей тензоров ε и α в общем случае по-разному ориентированы в плоскости, перпендикулярной оси 2 [10].

В случае I ось Z параллельна оси 2, тензоры ε и α записываются в виде [10]

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

После поворота кристалла вокруг оси Z на угол

$$\varphi_0 = \arctg(2\varepsilon_{12}/(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}))/2$$

тензор ε принимает диагональный вид, т. к. все его главные направления теперь совпадают с направлениями осей X, Y, Z. После поворота на угол φ_0 тензора α его компоненты изменятся, но вид останется тем же, что и в (1.1).

В случае II ось Y параллельна оси 2, ε и α имеют вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

После поворота кристалла вокруг оси Y на угол

$$\theta_0 = \arctg(2\varepsilon_{13}/(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}))/2$$

тензор ε принимает диагональный вид, т. к. теперь все его главные направления совпадают с направлениями осей X, Y, Z. После поворота на угол θ_0 тензора α его компоненты изменятся, но вид останется тем же, что и в (1.3).

Рассмотрим теперь, как изменяется эллиптичность собственных волн вблизи оптических осей кристалла класса 2. Определим также, как изменяется азимут поляризации прошедшего света χ_i в зависимости от ориентации оптических осей кристалла относительно нормали к поверхности.

При прохождении световой волны вдоль оптической оси рассматриваемой кристаллической пластинки толщины d имеет место вращение плоскости поляризации, т. е. изменение азимута прошедшей волны при сохранении ее эллиптичности. Угол поворота плоскости поляризации $\chi_{\max} = \rho d$ (ρ , (град/мм) – удельное вращение вдоль оптической оси кристалла), при этом

$$\rho d = \chi_{\max} = \pi G d / (\lambda \bar{n}), \quad (1.3)$$

$$G = [(\alpha_c - \tilde{\alpha}) \mathbf{m}] \mathbf{n}, \quad (1.4)$$

где G – скалярный параметр гирации [8], $\bar{n} = (n_1 + n_2 + n_3)/3$, n_1, n_2, n_3 – главные значения показателей преломления кристалла, λ – длина волны излучения, $\mathbf{m} = \bar{n} \mathbf{n}$ – вектор рефракции, \mathbf{n} – единичный вектор волновой нормали, $\tilde{\alpha}$ – транспонированный тензор α , α_c – след тензора α .

Приближённо можно записать:

$$G = \bar{n}[(\alpha_{22} + \alpha_{33}) \cdot \theta_1^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{33}) \cdot \theta_2^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \cdot \theta_3^2 - (\alpha_{12} + \alpha_{21}) \cdot \theta_1 \cdot \theta_2], \quad (1.5)$$

где $\theta_1 = \mathbf{n} \mathbf{c}_1$, $\theta_2 = \mathbf{n} \mathbf{c}_2$, $\theta_3 = \mathbf{n} \mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – орты координатных осей.

Рассмотрим две частные ориентации главных осей оптической индикатрисы относительно оси 2 кристалла.

Случай I. Главные значения тензора ε удовлетворяют условию $\varepsilon_{11} < \varepsilon_{22} < \varepsilon_{33}$, т.е. орты \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 его оптических осей лежат в плоскости XZ:

$$\mathbf{c}_1 = \{-\sin V, 0, \cos V\}, \quad \mathbf{c}_2 = \{\sin V, 0, \cos V\}, \quad (1.6)$$

где $V = \arctg \sqrt{\frac{\varepsilon_{33}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})}{\varepsilon_{11}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22})}}$ – угол между оптической осью кристалла и осью Z.

При ориентации оптических осей, определённой в (1.6), скалярный параметр гирации (1.5) принимает вид:

$$G = \bar{n}[(\alpha_{22} + \alpha_{33}) \sin^2 V + (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \cos^2 V], \quad (1.7)$$

одинаковый для волн, распространяющихся вдоль оптических осей (рисунок 1, а).

Случай II. Главные значения тензора ε удовлетворяют условию $\varepsilon_{11} < \varepsilon_{22} < \varepsilon_{33}$, и направление, соответствующее наибольшему значению показателя преломления N_g , ортогонально направлению оси 2 кристалла.

В этом случае тензоры ε и α имеют вид (1.2). Тензор гирации имеет вид:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{c}_1 = \{-\sin V, 0, \cos V\}, \quad \mathbf{c}_2 = \{\sin V, 0, \cos V\}.$$

В этом случае удельное вращение плоскости поляризации при распространении излучения вдоль разных оптических осей разное:

$$\rho_1 = \pi G_1 / (\lambda \bar{n}),$$

$$G_1 = [(\alpha_{22} + \alpha_{33}) \sin^2 V + (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \cos^2 V + (\alpha_{13} + \alpha_{31}) \sin V \cos V] \bar{n},$$

$$\rho_2 = \pi G_2 / (\lambda \bar{n}),$$

$$G_2 = [(\alpha_{22} + \alpha_{33}) \sin^2 V + (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \cos^2 V - (\alpha_{13} + \alpha_{31}) \sin V \cos V] \bar{n}. \quad (1.9)$$

Следовательно, могут быть разными и эллиптичности k_1, k_2 собственных волн, и азимут

поляризации χ_i света, прошедшего вдоль двух разных оптических осей (рисунок 2.1, а – 2.4, а).

В случае I из (1.7) и рисунков 1.1, а – 1.3, а видно, что для прозрачных гиротропных кристаллов класса 2 характер изменения эллиптичностей обеих собственных волн в окрестности оптических осей одинаков, вдоль каждой из осей эллиптичности равны $k_{1,2} = \pm 1$. Видно также, что в этом случае максимумы азимута поляризации прошедшего света χ_{\max} одинаковы (рисунок 1.4, а).

Моноклинный кристалл класса 2 (случай I)

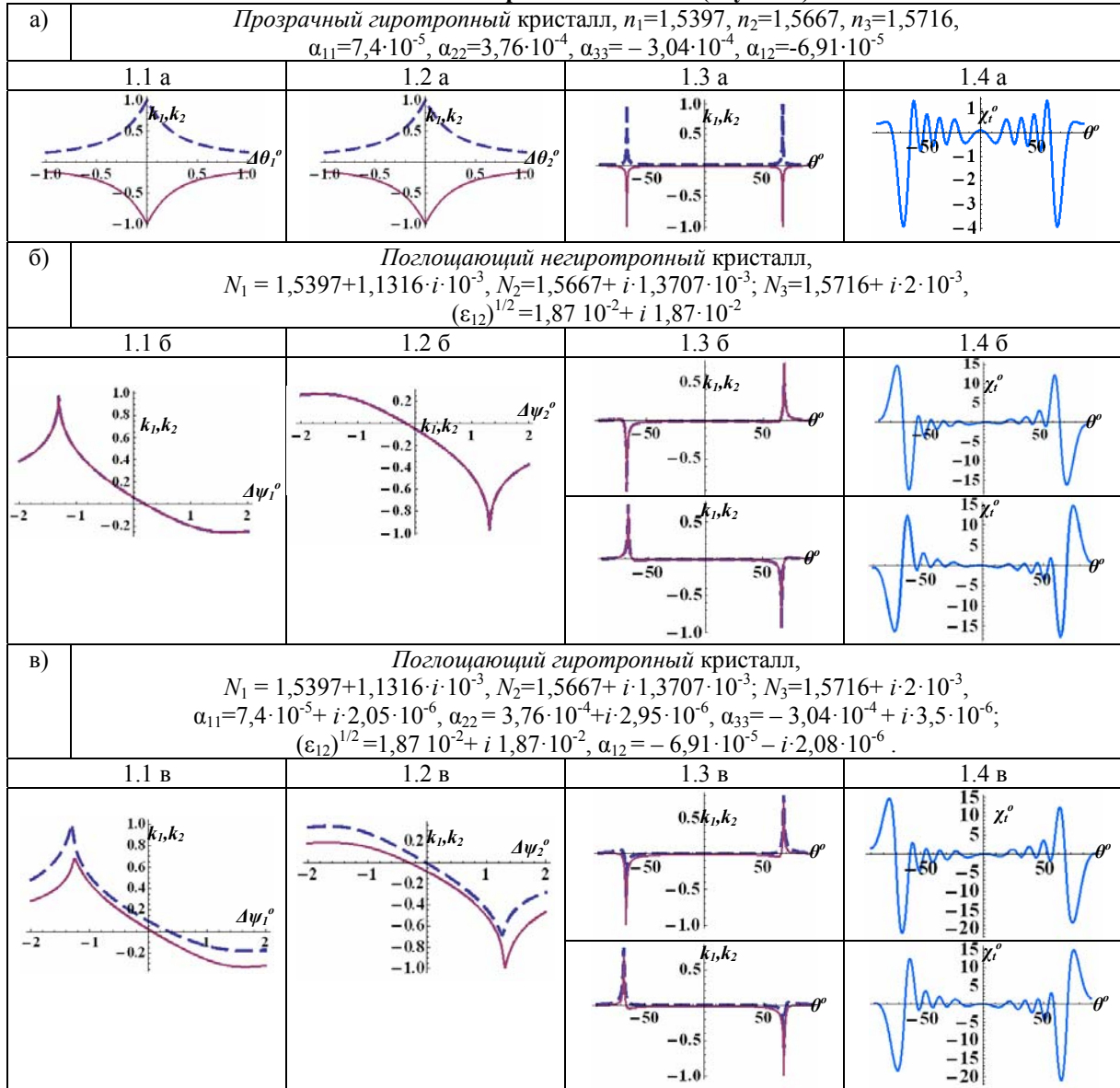


Рисунок 1 – Зависимости эллиптичностей k_1, k_2 собственных волн от угла $\Delta\theta$ вблизи каждой из оптических осей (положение оптической оси – вертикаль), и для двух оптических осей – зависимости k_1, k_2 и азимута поляризации излучения, прошедшего пластинку из моноклинного кристалла класса 2, (случай I) от θ

а – прозрачный гиротропный кристалл; б – поглощающий негиротропный кристалл;

в – поглощающий гиротропный кристалл;

— — правая собственная волна; - - - - левая собственная волна.

Подробности смотри в тексте.

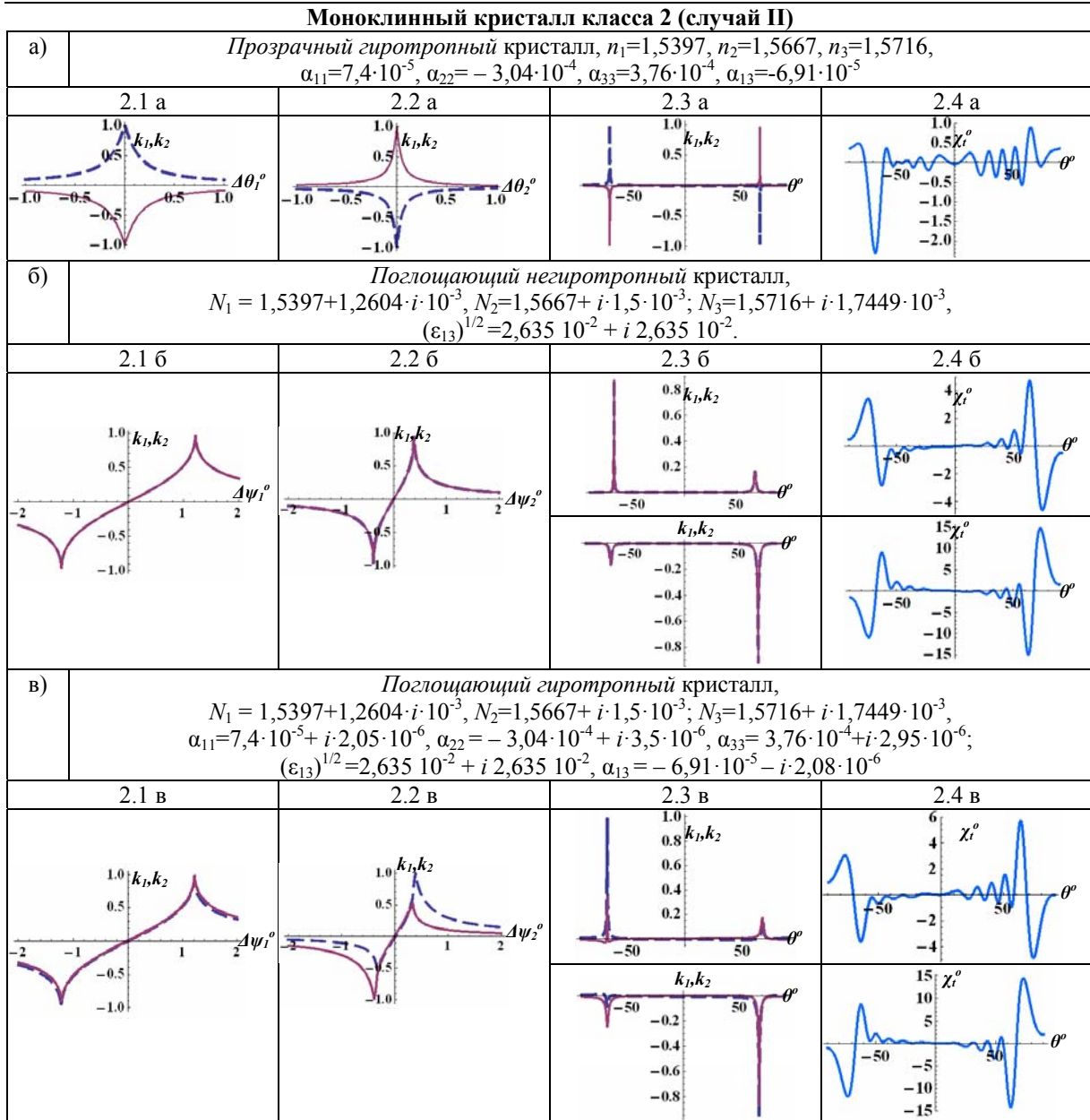


Рисунок 2 – Зависимости эллиптичностей k_1, k_2 собственных волн от угла $\Delta\theta$ вблизи каждой из оптических осей (положение оптической оси – вертикаль), и для двух оптических осей – зависимости k_1, k_2 и азимута поляризации излучения, прошедшего пластинку из моноклинного кристалла класса 2, (случай II) от θ .

а – прозрачный гиротропный кристалл; б – поглощающий негиротропный кристалл;

в – поглощающий гиротропный кристалл;

— — правая собственная волна; - - - - левая собственная волна.

Подробности смотри в тексте.

В случае II из (1.9) и рисунков 2.1, а – 2.3, а видно, что для прозрачных гиротропных кристаллов эллиптичность собственных волн по-разному изменяется в окрестности разных оптических осей. Максимумы азимута χ_{\max} прошедшего света имеют разные значения (рисунок 2.4, а) при распространении вдоль разных оптических осей и могут иметь одинаковые или разные знаки в зависимости от знаков компонент α .

2 Поглощающий кристалл класса 2

Рассмотрим теперь зависимости тех же величин для поглощающего кристалла. Тензор диэлектрической проницаемости такого кристалла имеет действительную и мнимую части [1]:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{ik} = \epsilon'_{ik} + i \cdot \epsilon''_{ik}. \quad (2.1)$$

Обратный тензор ε^{-1} можно записать в ковариантном виде [1]:

$$\varepsilon^{-1} = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''$ – диада [11].

Направляющие вектора оптических осей \mathbf{n}_{\pm} определяются в соответствии с формулой

$$\mathbf{n}_{\pm} = \frac{\sqrt{(\mathbf{c}^*)^2 \mathbf{c} + \sqrt{\mathbf{c}^2 \mathbf{c}^* \pm i \cdot [\mathbf{c} \mathbf{c}^*]}}}{|\mathbf{c}'|^2 + |\mathbf{c}''|^2}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ или $\mathbf{c} = \mathbf{c}''$.

Обсудим общий случай, когда имеются четыре круговые оси. Те ситуации, когда $\mathbf{c}'^2 = 0$ или $\mathbf{c}''^2 = 0$, здесь рассматривать не будем.

Обозначим $\varepsilon^{-1} = \beta$ и запишем

$$\begin{aligned} a &= \beta_{33}, \quad \mathbf{c}' = \{c'_1, c'_2, 0\}, \quad \mathbf{c}'' = \{c''_1, c''_2, 0\}; \\ \beta_{12} &= b(c'_1 c''_2 + c''_1 c'_2), \quad \beta_{11} - \beta_{33} = 2bc'_1 c''_1, \\ \beta_{22} - \beta_{33} &= 2bc'_2 c''_2, \quad \mathbf{c}'^2 = 1, \quad \mathbf{c}''^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из системы уравнений (2.4) найдём \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' (можно использовать любое из получаемых решений).

Расчёты были проведены для тех же случаев I и II ($N_g \parallel$ оси 2 и $N_g \perp$ оси 2, соответственно), что и для оптически активных кристаллов. Результаты расчетов проиллюстрированы на рисунках 1, б и 2, б.

Как и следует из результатов, полученных в [1], [9], [12], каждая из оптических осей, характерных для непоглощающего кристалла, в поглощающем кристалле распадается на две, при этом углы между компонентами расщепления каждой из исходных осей (углы между «новыми» осями) разные, и расположены «новые» оси несимметрично относительно плоскости, содержащей исходные оси. В обоих рассматриваемых случаях эллиптичности двух собственных волн совпадают и в направлении осей близки к ± 1 (рисунки 1.1, б; 1.2, б и 2.1, б; 2.2, б). На рисунках 1.1, б и 1.2, б для поглощающих кристаллов виден выход только одной из оптических осей. На верхних и нижних рисунках 1.3, б и 1.4, б показаны изменения эллиптичностей собственных волн и азимута поляризации прошедшего света в двух плоскостях, каждая из которых отклонена от плоскости оптических осей прозрачного кристалла так, что полностью содержит одну из оптических осей поглощающего кристалла, «отошедшую» от одной из осей прозрачного кристалла. Эллиптичность собственной волны для нее равна 1. При этом в каждой плоскости видна проекция другой оптической оси.

3 Поглощающий гиротропный кристалл класса 2

Рассмотрим кристалл класса 2, которому одновременно свойственны поглощение и оптическая активность.

Расчёты для поглощающего гиротропного кристалла проведены для тех же частных случаев I и II (соответственно $N_g \parallel$ оси 2 и $N_g \perp$ оси 2), что и для оптически активных кристаллов (рисунки 1, в и 2, в). Расположение осей аналогично тому, которое свойственно поглощающим кристаллам.

На рисунках 1.1, в, 1.2, в и 2.1, в, 2.2, в, хорошо видно, что при наличии оптической активности вдоль каждой из оптических осей поглощающего кристалла распространяется уже две волны. В отличие от ситуации, реализуемой для прозрачного оптически активного кристалла, эллиптичности волн, распространяющихся вдоль разных осей, различны. В силу этих обстоятельств, как и следовало ожидать, азимуты поляризации волн, распространяющихся вдоль каждой из оптических осей различны.

4 Ромбический кристалл класса 222

Чтобы сравнить особенности изменения эллиптичностей и азимутов поляризации прошедшего света вблизи оптических осей в кристаллах аксиальных классов, приведём теперь на рисунке 3 соответствующие зависимости для ромбических кристаллов класса 222 [7], [8]. Видно, что все зависимости, характерные для этого кристалла, более симметричны, чем те, которые соответствуют кристаллам моноклинной сингонии.

Заключение

Если оптические оси прозрачного гиротропного моноклинного кристалла класса 2 лежат в одной плоскости с осью симметрии второго порядка, эллиптичность собственных волн изменяется вблизи оптических осей так же, как и в ромбическом кристалле класса 222, и удельное вращение плоскости поляризации одинаково вдоль обеих оптических осей. В моноклинном поглощающем кристалле в указанной ситуации оптические оси расположены несимметрично относительно плоскости оптических осей прозрачного кристалла.

Если оптические оси прозрачного гиротропного моноклинного кристалла класса 2 перпендикулярны оси симметрии второго порядка, эллиптичность собственных волн изменяется вдоль разных оптических осей неодинаково, и удельное вращение плоскости поляризации вдоль разных осей различно. Величина этого различия зависит от параметров гирации кристалла. Оптические оси моноклинного поглощающего кристалла при указанных условиях отклоняются на разные углы от плоскости оптических осей прозрачного кристалла, оставаясь симметричными относительно этой плоскости.

В гиротропном поглощающем моноклинном кристалле оптические оси расположены так же, как и в поглощающем кристалле такой же сингонии.

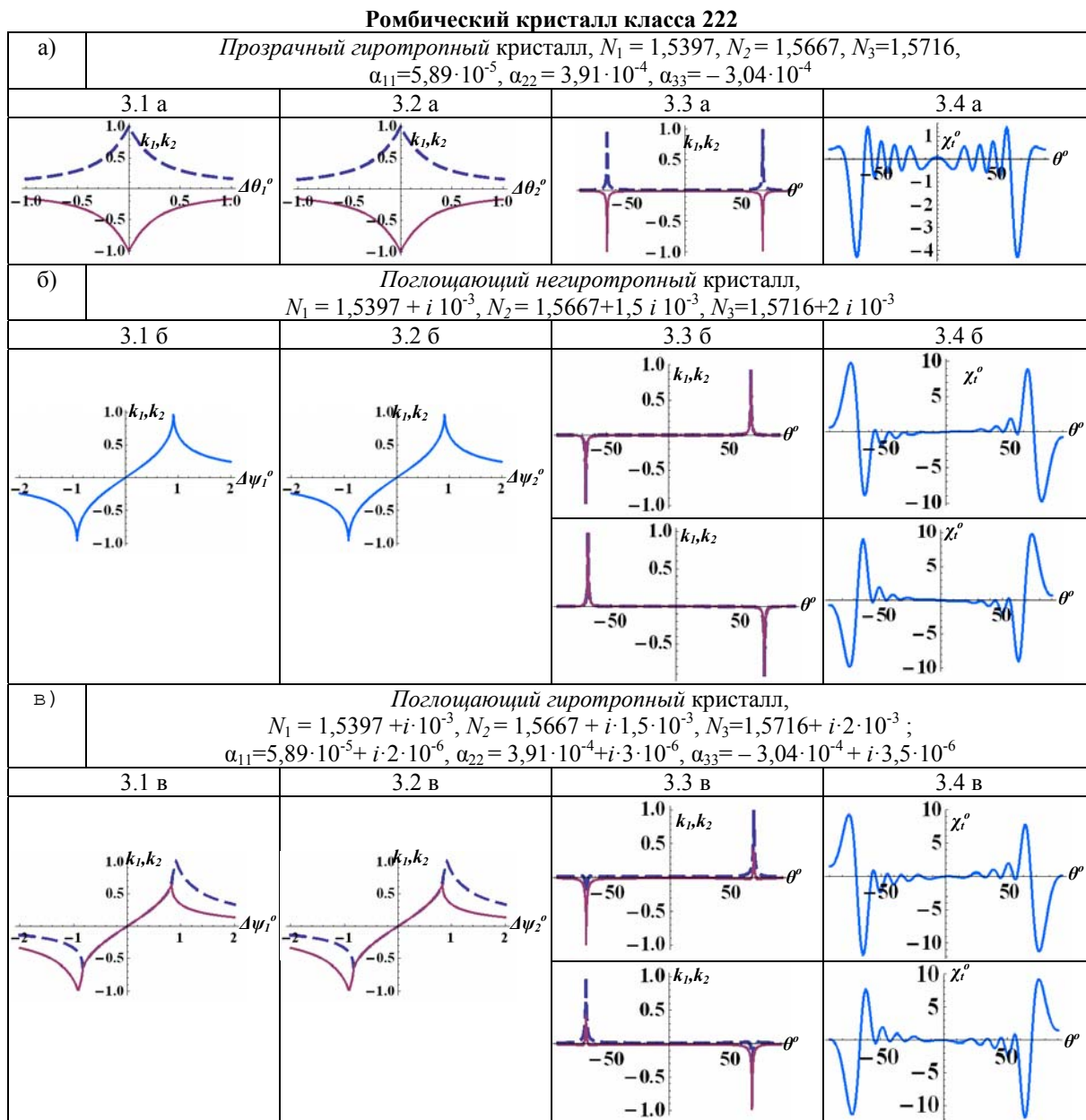


Рисунок 3 – Зависимости эллиптичностей k_1, k_2 собственных волн от угла $\Delta\theta$ вблизи каждой из оптических осей (положение оптической оси – вертикаль), и для двух оптических осей – зависимости k_1, k_2 и азимута поляризации излучения, прошедшего пластинку из ромбического кристалла класса 222, от θ .

а – прозрачный гиротропный кристалл; б – поглощающий негиротропный кристалл;

в – поглощающий гиротропный кристалл;

— — правая собственная волна; - - - — левая собственная волна.

Подробности смотри в тексте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фёдоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Фёдоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.

2. Особенности проявления оптической активности в поглощающих кристаллах / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 1976. – Т. 21, № 6. – С. 1108–1112.

3. Константинова, А.Ф. Развитие исследований оптической активности кристаллов в Институте кристаллографии РАН / А.Ф. Константинова // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 75–89.

4. Оптические свойства кристаллов / А.Ф. Константинова [и др.] – Минск : Наука и техника, 1995. – 304 с.

5. Калдыбаев, К.А. Гиротропия одноосных поглощающих кристаллов / К.А. Калдыбаев, А.Ф. Константинова, З.Б. Перекалина. – М. : Изд-во «Институт социально-экономических и производственно-экологических проблем инвестирования», 2000. – 294 с.

6. Окорочков, А.И. Собственные волны в гиротропных поглощающих кристаллах ромбической сингонии / А.И. Окорочков, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1984. – Т. 29, № 5. – С. 841–848.

7. Особенности распространения света в оптически активных поглощающих кристаллах ромбической сингонии / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 412–417.

8. Бокуть, Б.В. Электромагнитные волны в оптически активных и нелинейных кристаллах :

дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Б.В. Бокуть. – Минск, 1972. – 270 л.

9. Использование современных математических пакетов для точного решения задач о распространении света в анизотропных слоистых средах. II. Оптически активные кристаллы / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2002. – Т. 47, № 5. – С. 879–887.

10. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.

11. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М. : Наука, 1965. – 428 с.

12. Гончаренко, А.М. Исследование оптических свойств поглощающих кристаллов на основе инвариантного метода : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.М. Гончаренко. – Минск, 1960. – 159 л.

Поступила в редакцию 28.10.11.

УДК 539.23:621.383.51

**ПОЛУЧЕНИЕ ПЛЁНОК ZnO:B С РАЗЛИЧНЫМ ОПТИЧЕСКИМ
РАССЕЯНИЕМ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ФОРМИРОВАНИЕ a-Si:H/ μ c-Si:H СЛОЁВ
И СОБИРАНИЕ СВЕТА В ТОНКОПЛЁНОЧНЫХ КРЕМНИЕВЫХ
СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ**

Ф.В. Курдесов

Оэрликон Солар, Трюббах, Швейцария

**PREPARATION OF ZnO:B FILMS WITH DIFFERENT OPTICAL HAZE
AND THEIR INFLUENCE ON a-Si:H/ μ c-Si:H LAYERS FORMATION
AND LIGHT TRAPPING IN THIN FILM SILICON SOLAR CELLS**

F.V. Kurdzesau

Oerlikon Solar Ltd., Trübbach, Switzerland

Гидрогенизированные слои микроморфного кремния (a-Si:H/ μ c-Si:H) были получены на плёнках ZnO:B прозрачного проводящего оксида (ППО) с различной морфологией поверхности (различная шероховатость и оптическое рассеяние). Необходимая структура плёнок оксида цинка была достигнута вариацией их толщины. Данная работа изучает зависимость структурных и оптических свойств слоёв Si от топографии ZnO. Наблюдается незначительное влияние морфологии поверхности подложек на рамановский фактор кристалличности. Он уменьшается примерно на 5% при увеличении оптического рассеяния на ППО от 2 до >40%, при этом значительно увеличивается общее собирание света в ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H структурах (их коэффициент поглощения возрастает с 50 до 70%). Оптимальная комбинация структурных и оптических свойств обнаружена при >20% уровне рассеяния света на ППО.

Ключевые слова: прозрачный проводящий оксид (ППО), собирание света, рамановский фактор кристалличности, гидрогенизированный микроморфный кремний (a-Si:H/ μ c-Si:H), оптическое рассеяние.

Hydrogenated micromorph silicon layers (a-Si:H/ μ c-Si:H) were prepared on ZnO:B transparent conductive oxide (TCO) films with different surface morphology (roughness and optical haze value). The required structure of zinc oxide films was obtained varying their thickness. This study reveals the dependence of structural and optical properties of Si layers on the ZnO topography. The minor influence of the substrate surface morphology on the silicon Raman crystallinity factor was observed. It was ~5% decreased, when the TCO haze value was increased from 2 to >40%, while the light trapping properties were significantly increased (the absorption coefficient of ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H was grown from 50 to 70%). The optimum combination of structural and optical properties was found at >20% TCO haze level.

Keywords: transparent conductive oxide (TCO), light trapping, Raman crystallinity factor, hydrogenated micromorph silicon (a-Si:H/ μ c-Si:H), optical haze.

Introduction

In the recent years ZnO films have found a wide application as transparent conductive electrodes in thin film a-Si and μ c-Si solar cells [1]. One of the main factors limiting the efficiency of such a kind of cells is a low light absorption coefficient which could be significantly improved using a light trapping effect on the boundary between silicon absorber films and transparent conductive oxide (TCO) layers [2]. Considering the case of ZnO films, the desired texture interface required for the light trapping can be obtained via post deposition etching (when initial smooth surface structures from standard sputtering processing are used) [3] or via an adjustment of the growth procedure within chemical vapour deposition (CVD) methods, where the required surface structures are normally appeared as it is grown [4]. The latter fact makes CVD processes more attractive for TCO layers production regarding their further applications in Si thin film solar cells.

Besides the light trapping effect normally described by optical haze value [5], the ZnO surface structure may play a certain role over the formation of a-Si/ μ c-Si films (mainly, affecting the proportion between crystalline and amorphous silicon phases), which can be efficiently tracked via Raman crystallinity measurements [6], [7]. As a strong relationship is observed between Raman crystallinity and output parameters of microcrystalline silicon solar cells [6], the studies of the role of the substrate morphology on the Si nucleation are of great importance [7]. Therefore, more detailed researches on both light trapping properties of ZnO films and their surface effect over the microcrystalline silicon layer growth are required. In the present work the combined optical (transmittance/absorption/haze spectra) and structural (XRD/AFM/Raman) studies on ZnO:B and ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H structures are reported considering the light trapping effects and silicon layer crystallization depending on the surface morphology of TCO front contact films.

1 Experimental details

The ZnO:B layers were deposited by a low pressure (0.5 mbar) chemical vapour deposition (LPCVD) on 5x5 cm² glass substrates at 174 °C with TCO-1200 production set-ups (Oerlikon Solar, 130x110 cm² processing area, 2.4 nm/s deposition rate), where H₂O/DEZ (water/di-ethyl zinc vapours) were used as gas precursors while B₂H₆/hydrogen mixture was applied for boron doping. The optical haze of formed ZnO:B layers varied from 2 to 50% via their thickness adjustment at different deposition times, which allows efficient control of those parameters (see figure 1.1 (a)). Although the dependence of optical haze value on the layer thickness in general case is described by a complex polynomial function, within the 1400–3000 nm interval (which corresponds to 12–50% optical haze values) it can be approximated as linear which simplifies a process control (figure 1.1 (b)).

The obtained ZnO:B films with different haze level were then used as substrates, where silicon layers were simultaneously deposited following the same process recipe. They were grown by a plasma enhanced chemical vapour deposition (PECVD) using KAI-1200 production set up (Oerlikon Solar, 130x110 cm² processing area) at 40 MHz plasma excitation mode in SiH₄/H₂ gas mixture (2.5 mbar gas discharge pressure with 1500/3200 W power levels respectively).

The layers optical properties (transmittance, reflection) were measured by Lambda 950 Perkin Elmer spectrometer in the integration sphere configuration with subsequent derivation of absorption spectra and cut-off frequency (in order to estimate the band-gap value). In the case of TCO films their diffuse transmittance was also studied in order to find the optical haze value (as a relationship between total and diffuse transmittance at 600 nm [1]). The structural studies were performed using x-ray diffraction (XRD) and atomic force microscopy (AFM) methods, while the layers cross-section interface was studied by scanning-electron microscopy (SEM) technique. The obtained a-Si:H/μc-Si:H structures

were additionally investigated by Raman spectroscopy using 514 nm excitation light with a subsequent estimation of their Raman crystallinity factor following the standard fitting procedure [6], [7].

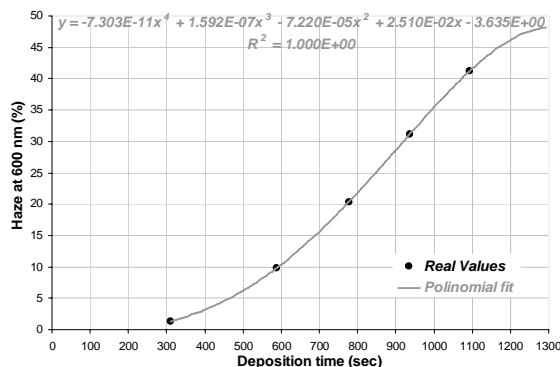
2 Results and discussion

2.1 Structural properties

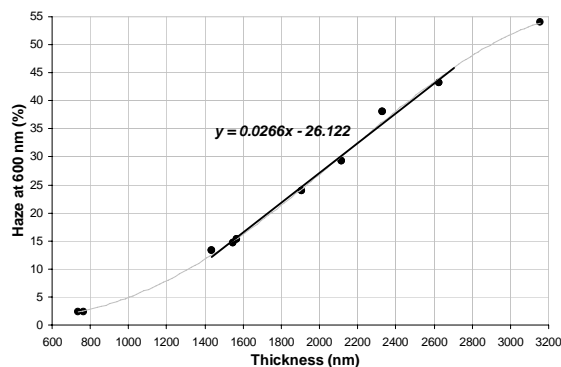
The AFM images obtained from initial ZnO:B and ZnO:B/a-Si/μc-Si:H structures deposited on them are presented in figure 2.1. As one can see, the silicon films surface morphology in all cases significantly depends on their substrate textures. The AFM roughness of microcrystalline silicon layers is found to be in a linear proportion to the roughness level of their TCO substrates (see figure 2.2 (a)). Nevertheless, the dependences between the optical haze value and film roughness for both ZnO:B and silicon layers are not linear. It is growing fast at low haze values (<20%) with subsequent saturation above 40% (see figure 2.2 (b)).

Such a morphology behavior is well detected on ZnO:B/a-Si:H/μc-Si:H cross-section SEM images where the formed silicon layers are repeating the initial surface structure of TCO films (see figure 2.3 (a–c)). The obtained results are in good agreement with data reported in [6], [7], where the microcrystalline silicon phase consists of cones growing perpendicularly to the local substrate plane. Such mechanism provides proportional repeating of the morphology of underlying layers by formed silicon film and results in the linear proportion between their roughness values, which was observed in our experiments (see figure 2.2 (a)).

The gathered Raman spectra for silicon layers grown on the ZnO films with different optical haze are presented in figure 2.4. These measurements were performed following the front (irradiation from the Si surface side) and back (irradiation from the glass/ZnO side) configurations with a subsequent estimation of integrated intensities of peaks corresponding to crystalline (at 510 and 520 cm⁻¹) and amorphous (at 480 cm⁻¹) silicon phases. The Raman crystallinity coefficient (R_c) was then found as a



a)



b)

Figure 1.1 – Optical haze value of ZnO:B layers (at 600 nm) as a function of CVD process time (a) and obtained film thicknesses (b)

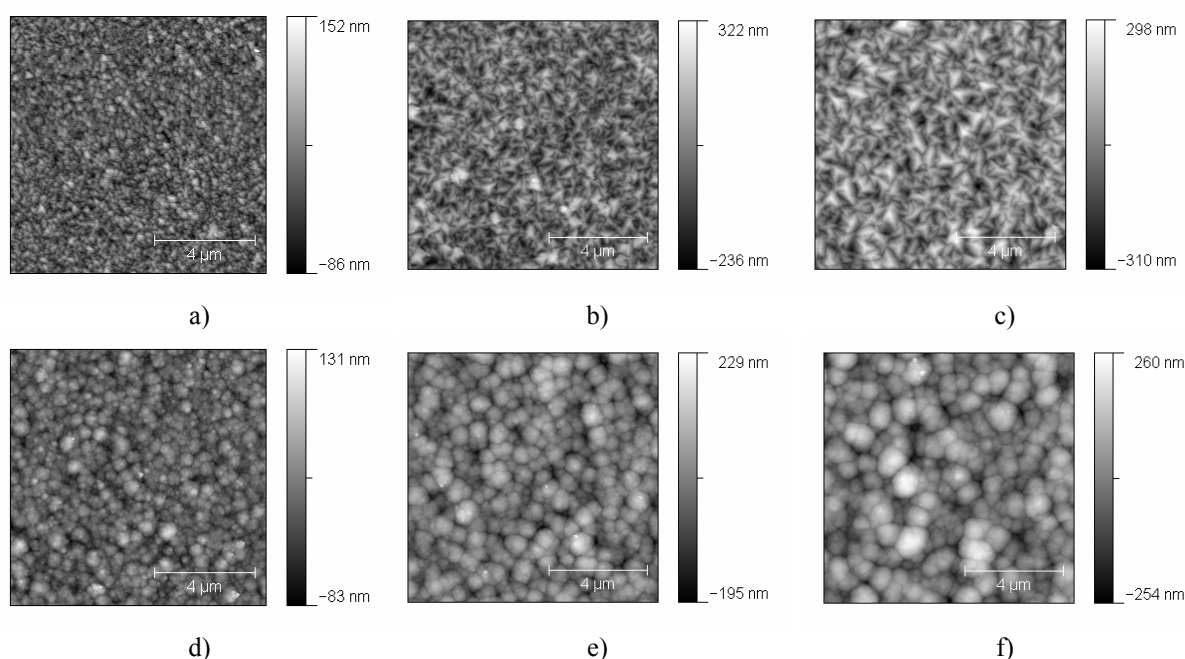


Figure 2.1 – AFM pictures from ZnO:B layers (upper line) and a-Si:H/ μ c-Si:H structures deposited on them (bottom line). The ZnO:B and ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H AFM pictures for <2% substrate haze level (measured at 600 nm) are given as (a) and (d); for 20% haze as (b) and (e); for 40% haze as (c) and (f) respectively

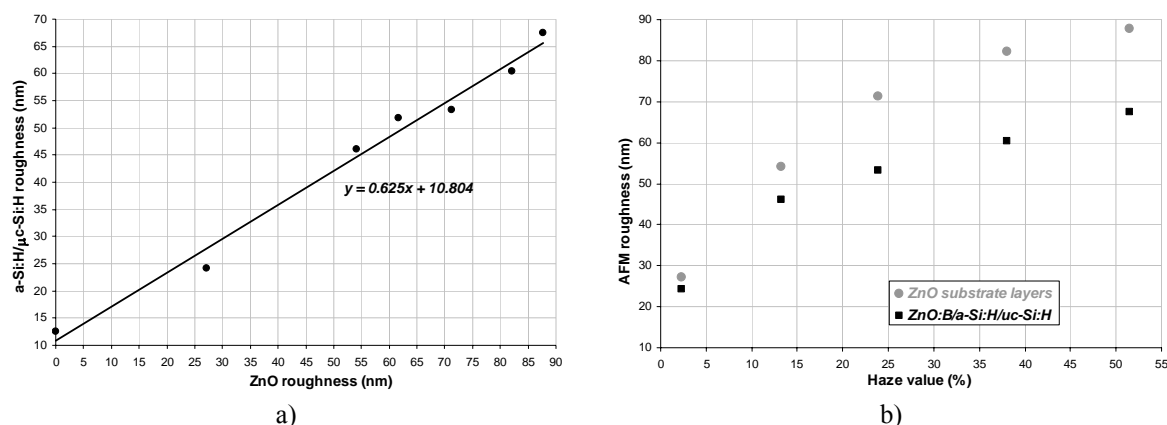


Figure 2.2 – Dependence of AFM roughness of grown a-Si/ μ c-Si layers on the roughness of ZnO:B substrate films (a) and both roughness as a function of TCO optical haze value (b)

relation between crystalline peaks signal ($I_{520}+I_{510}$) and total spectra integration efficiency ($I_{520}+I_{510}+I_{480}$) following the same algorithm as in [6], [7]. As main disadvantages of this method one has to mention low locality of those measurements (~20–30 nm deep from the light excitation surface [8]) and neglecting the differences in Raman diffusion cross-section values between c-Si and a-Si:H phases, which have to be taken into account for precise calculations [9]. Nevertheless, the Raman crystallinity factor found in such a way can also provide the sufficient information about the variations of silicon phases [6], [7].

The summarized Raman measurements data for Si deposited on the substrates with different haze level are presented in figure 2.4 (b). As one can see from this figure, there is no significant variation in the silicon Raman crystallinity factor (all values stay

within 0.54–0.61 interval) for these structures. As a general tendency, the layer crystallinity is becoming slightly worse for higher haze values (both in front and back side measurement configurations), while its behavior at low haze stays unclear (the big oscillation range is then observed). The obtained variations are appeared to be significantly smaller comparing to data reported in [7], where Raman crystallinity factor was decreasing from 50 to 20% following the transition between flat (low haze) and rough (large haze) layers (unfortunately, no roughness/haze values were then reported). The reason of this difference can be connected with similar surface state of all our layers, which were grown by the identical CVD process (only the deposition time was then varied), while different TCO materials and deposition methods were tested in [7].

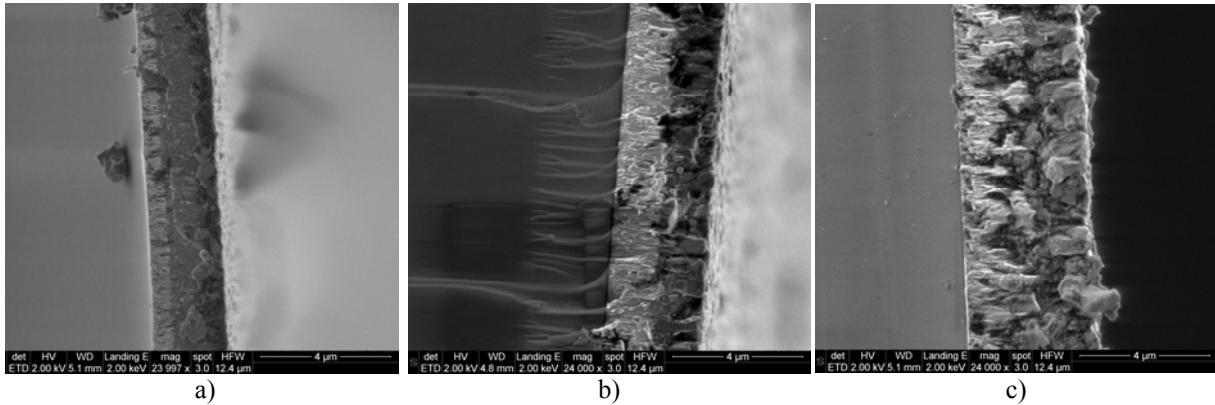


Figure 2.3 – Cross-section SEM of a-Si:H/μc-Si:H layers grown on ZnO:B films at their different optical haze levels: a) >2%; b) ~20%; c) ~40 %

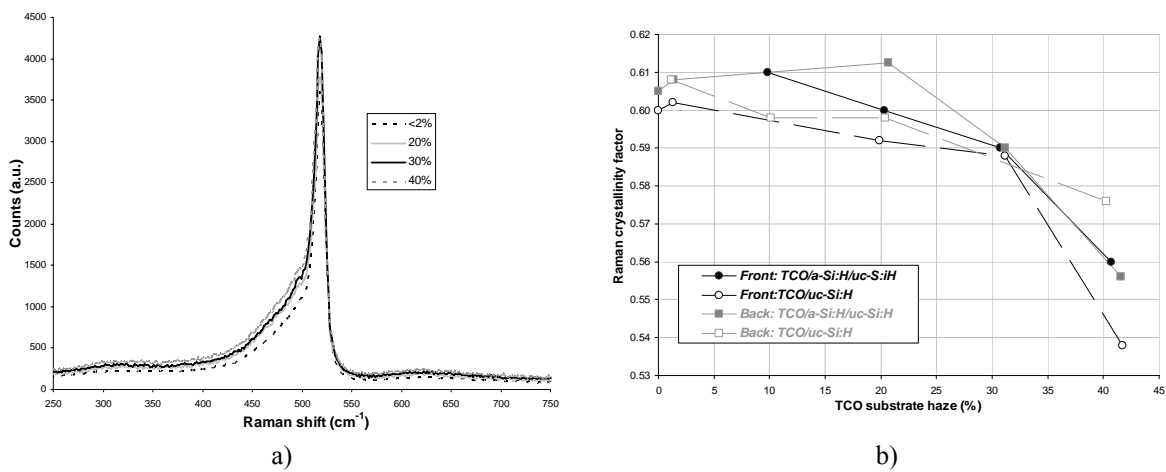


Figure 2.4 – Raman spectra (a) and recalculation of silicon Raman crystallinity factor (R_c) as a function of haze of underlying ZnO:B layers (b)

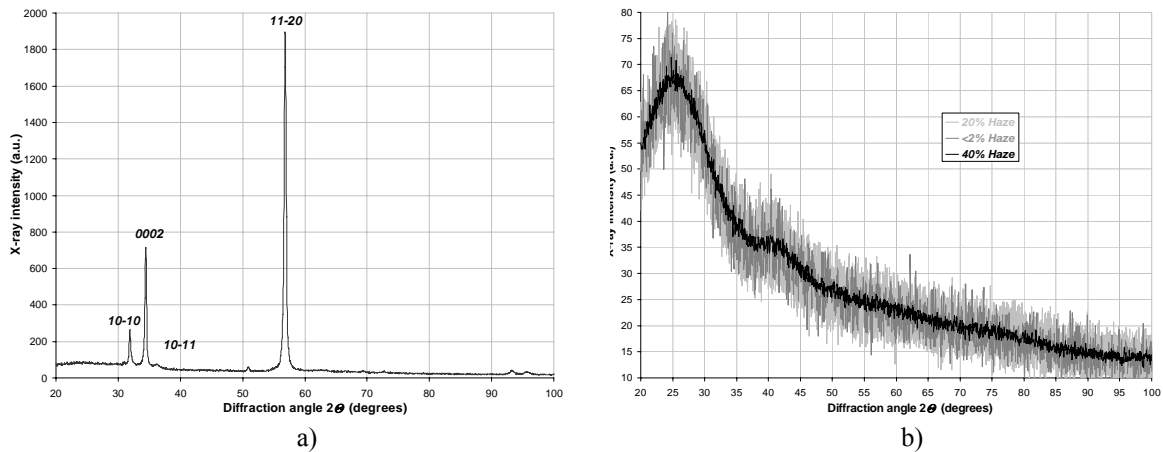


Figure 2.5 – XRD spectra of ZnO:B film (a) and deposited a-Si/μc-Si layers (b)

The additional XRD studies performed on the samples with maximum variations of Raman micro-crystalline factors (corresponding to <2%, 20% and 40% haze levels of TCO) did not show any significant structural difference (see figure 2.5 (b)). All layers are appeared to be amorphous without any clear trace of XRD peaks of silicon phases, while ZnO underlying films have well resolved crystalline structure with a preferable orientation along (11–20) crystallographic plane (see figure 2.5 (a)). Such a

kind of ZnO layer structure is typical for LPCVD processes at selected temperature/DEZ flow process conditions [10], [11].

Thus, regardless of the significant difference in the underlying ZnO layers surface morphology, the amorphous/microcrystalline silicon films grown on them are appeared to have very similar crystalline structure with minor changes in their crystallinity factors (see figure 2.4) under the proportional increase of the surface roughness (see figure 2.2).

2.2 Optical/light trapping properties

The light trapping properties of deposited ZnO:B and resulting ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H structures were studied by optical measurements of their transmittance (T) and reflectance spectra (R) in visual and close IR range (300–2000nm). The optical absorption (A) was then subsequently recalculated from the measured transmittance/reflectance values as $A(\lambda) = 1 - T(\lambda) - R(\lambda)$ (see figure 2.6).

The obtained optical spectra were then treated in order to get the average optical reflection and absorption values in 400-1100 nm wavelength interval (see figure 2.7). As one can see from these data, the optical absorption of ZnO layers (corrected over the glass substrate) increases from 2 to 5% for the haze value grown till 25% (700–1900 nm thickness (figure 2.1 (b)) with a subsequent slow approximation to 5.8% in 25–50% haze interval (see figure 2.7 (a)). Similar behavior is observed for glass/ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H layers but with much higher variation amplitudes: from 53 to 66% over 2–20% substrate haze values and from 66 to 69% in subsequent

20–40% haze interval (see figure 2.7 (b)). Thus, the light trapping effect is close to the optimum at 20% TCO haze level and its further rising does not bring any significant improvement, while the absorption losses in ZnO:B are increased.

An interesting effect was observed following the a-Si/ μ c-Si band-gap values at the different optical haze level of ZnO layers, which was measured deriving their cut-off frequencies from the corresponding spectral curves (see figure 2.6 (b)). The band-gap values of corresponding silicon films are found to be dramatically decreased (from 1.37 to 1.12 eV) under the TCO substrate haze increased from 0 to 20% with a subsequent stabilization around ~ 1.1 eV (see figure 2.8). Regarding the previous data, where no significant structural change of grown silicon films was occurred at different ZnO surface morphology (see figure 2.4–2.5), one can link the observed variations to the difference between the hydrogen content of grown a-Si:H/ μ c-Si:H layers [12].

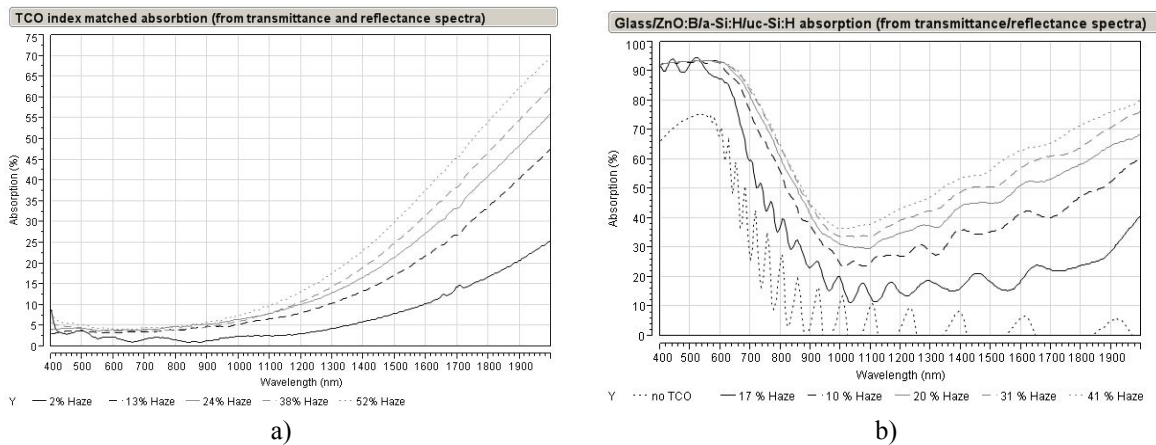


Figure 2.6 – Absorption spectra of index matched [1] ZnO:B layers (a) and absorption spectra of resulting glass/ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H structures grown on those layers (b). Note the difference in the maximum optical absorption and cut off wavelength

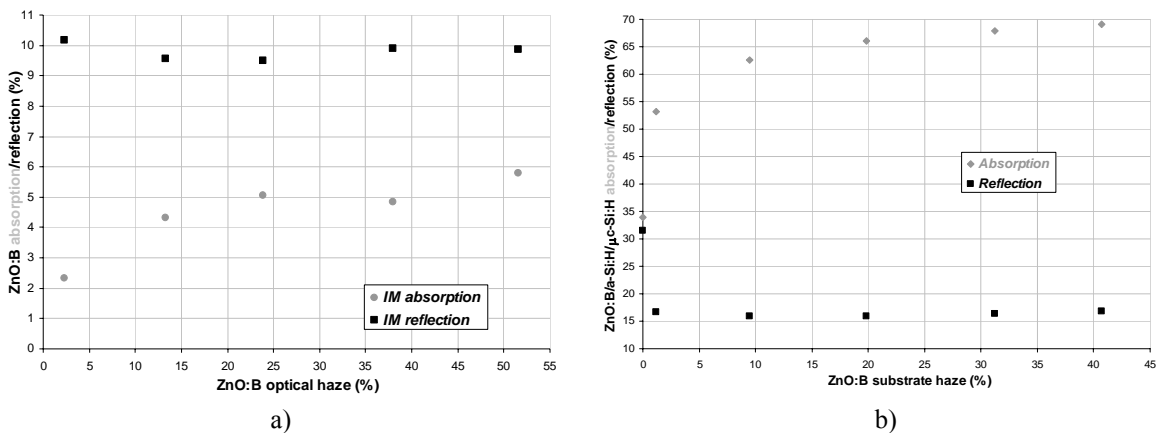


Figure 2.7 – The average optical absorption/reflection within 400-1100 nm interval (visual and close infrared light) for ZnO:B front contacts (a) and glass/ZnO:B/a-Si:H/ μ c-Si:H layers processed on them (b). The ZnO:B absorption is measured under index matched conditions with a subsequent correction to the glass substrate transparency

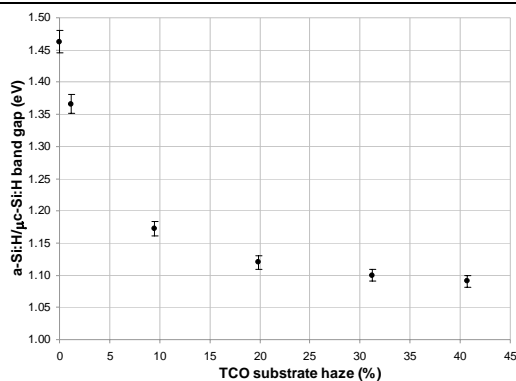


Figure 2.8 – Band-gap of a-Si:H/μc-Si:H layers as a function of optical haze of underlying ZnO:B films (derived from the data in figure 2.6 (b))

Thus, the low haze TCO film leads to the higher hydrogenization level of grown silicon layers, which approximates to the maximum value of 1.46 eV corresponding to the reference sample grown on the clean (without ZnO coating) glass substrates. The thicker TCO films with the higher optical haze lead to the simultaneous hydrogen content decrease and it reduces the band-gap level of formed a-Si/μc-Si films up to 1.1 eV, which corresponds to the value of non-hydrogenized silicon [12]. Since all a-Si:H/μc-Si:H films grew at the same process conditions, the observed hydrogen loss can only be connected to its extraction by ZnO:B layers at the interface area. The intensity of that process is affected by the substrate surface morphology, which is directly linked to the optical haze value.

Conclusion

The influence of CVD deposited ZnO:B layer morphology (attributed to their optical haze value) on optical (light trapping effect) and structural (mainly, degree of crystallization) properties of ZnO:B/a-Si:H/μc-Si:H structures has been studied. The TCO substrate haze values varied between 2 and 50% by the adjustment of their thickness via CVD process time.

It was found that the crystallinity of deposited a-Si:H/μc-Si:H structures has a poor correlation with an optical haze value of ZnO:B substrate layers on which they were deposited. Normally, the Raman crystallinity factor is only ~5% decreased for the optical haze increasing from 2 to 50%. One can expect this dependence from the effect of the TCO substrate's roughness on the PECVD growth of microcrystalline silicon layers.

The light trapping effect of TCO layers was found to be close to the optimum at their optical haze value above 20% (~65% light absorption of corresponding glass/ZnO:B/a-Si/μc-Si structures in 400–1100 nm wavelength interval). This was accompanied by a significant decrease of a-Si:H/μc-Si:H band-gap values, which can be connected to the lowered hydrogen dilution within the silicon layers formed on rough ZnO:B substrates.

The author would like to thank Dr Rolf Erni and Dominik Jaeger (Empa, Swiss Federal Laboratories for Materials Testing and Research) for XRD and SEM measurements and analysis, Maria-Gaelle Tipaka and Taha Abed (Oerlikon Solar) for help with the deposition of a-Si layers and their Raman measurements and Owan Watkins (Oerlikon Solar) for help with the growth of TCO films.

REFERENCES

1. Ellmer, K. Transparent conductive Zinc oxide / K. Ellmer, A. Klein, B. Rech // Basics and applications in thin film solar cells. Springer series in MATERIAL SCIENCE 104.
2. TCO and light trapping in silicon thin film solar cells / J. Muller [et al.] // Solar Energy. – 2004. – Vol. 77. – P. 917–930.
3. High deposition rate aluminum-doped zinc oxide films with highly efficient light trapping for silicon thin films solar cells / S. Calnan [et al.] // Thin Solid Films. – 2008. – Vol. 516. – P. 1242–1248.
4. Kajakawa, Y. Roughness evolution during chemical vapor deposition / Y. Kajakawa // Material Chemistry and Physics. – 2008. – Vol. 112. – P. 311–318.
5. Steinhauser, J. Low pressure chemical vapour deposited zinc oxide for silicon thin film solar cells / J. Steinhauser // Optical and electrical properties. PhD thesis. Neuchatel, 2008.
6. Relationship between Raman crystallinity and open-circuit voltage in microcrystalline silicon solar cells / C. Droz [et al.] // Solar Energy Materials & Solar Cells. – 2004. – Vol. 81. – P. 61–71.
7. Influence of substrate's surface morphology and chemical nature on the nucleation and growth of microcrystalline silicon / E. Vallat-Sauvain [et al.] // Thin solid films. – 2005. – Vol. 485. – P. 77–81.
8. Paillard, V. Measurements of stress gradients in hydrogenated microcrystalline silicon thin films using Raman spectroscopy / V. Paillard, P. Puech, P.R. Cabarrocas // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2002. – Vol. 299–302. – P. 280–283.
9. Bustarret, E. Experimental determination of the nanocrystalline volume fraction in silicon thin films from Raman spectroscopy / E. Bustarret, M.A. Hachicha, M. Brunel // Applied Physics Letters. – 1988. – Vol. 52 (20). – P. 1675–1677.
10. Low pressure chemical vapour deposition of ZnO layers for thin film solar cells: temperature-induce morphological changes / S. Fay [et al.] // Solar Energy Materials & Solar Cells. – 2005. – Vol. 86. – P. 385–397.
11. Opto-electronic properties of rough LP-CVD ZnO:B for use as TCO in thin-film silicon solar cells / S. Fay [et al.] // Thin Solid Films. – 2007. – Vol. 515. – P. 8558–8561.
12. Enhanced optical absorption in microcrystalline silicon / N. Beck [et al.] // Journal of Non-Crystalline Solids. – 1996. – Vol. 198–200. – P. 903–906.

Поступила в редакцию 14.11.11.

УДК 539

ИНДУЦИРОВАННОЕ РЕНТГЕНОВСКИМ ЛАЗЕРОМ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ ФОРМИРОВАНИЕ ПАР КОР-ДЫРКА В МНОГОАТОМНЫХ МОЛЕКУЛАХ

М. Ларссон¹, П. Сален¹, П. Ван-дер-Мюлен¹, Р.Д. Томас¹, Х.Т. Шмидт¹, Р. Фейфель², М.Н. Пианкастелли², Л. Фанг³, Т. Осипов³, Б. Марфи³, П. Юранич³, Н. Бера³, Е. Кук⁴, К. Уеда⁵, Р. Рихтер⁶, К. Принц⁶, Я. Божек⁷, К. Бостедт⁷, С. Вада⁷, М. Таширо⁸, М. Эхара⁸, Ф. Тарантелли⁹

¹Стокгольмский университет, факультет физики, Стокгольм, Швеция

²Уппсальский университет, факультет физики и астрономии, Уппсала, Швеция

³Западный мичиганский университет, факультет физики, Каламазо, США

⁴Университет г. Турку, факультет физики и астрономии, Турку, Финляндия

⁵ИМРАМ, Университет г. Тохоку, Сендай, Япония

⁶Синхротрон г. Триест, Басовицца, Триест, Италия

⁷СЛАК, ЛЦЛС, Менло Парк, США

⁸Институт молекулярных исследований, Оказаки, Япония

⁹Университет г. Перуджа и ИСТМ-ЦНР, факультет химии, Перуджа, Италия

X-RAY FEL-INDUCED DOUBLE CORE-HOLE FORMATION IN POLYATOMIC MOLECULES

M. Larsson¹, P. Salén¹, P. van der Meulen¹, R.D. Thomas¹, H.T. Schmidt¹, R. Feifel², M.N. Piancastelli², L. Fang³, T. Osipov³, B. Murphy³, P. Juranic³, N. Berrah³, E. Kukk⁴, K. Ueda⁵, R. Richter⁶, K.C. Prince⁶, J.D. Bozek⁷, C. Bostedt⁷, S. Wada⁷, M. Tashiro⁸, M. Ehara⁸, F. Tarantelli⁹

¹Stockholm University, Physics Department, 106 91 Stockholm, Sweden

²Uppsala University, Department of Physics and Astronomy, 751 20 Uppsala, Sweden

³Western Michigan University, Physics Department, Kalamazoo, MI 49008, USA

⁴University of Turku, Department of Physics and Astronomy, 20014 Turku, Finland

⁵IMRAM, Tohoku University, Sendai 980-8577, Japan

⁶Sincrotrone Trieste, 34149 Basovizza, Trieste, Italy

⁷SLAC, LCLS, Menlo Park, CA 94025, USA

⁸Institute for Molecular Science, Okazaki 444-8585, Japan

⁹Chemistry Department, University of Perugia and ISTM-CNR, 06123 Perugia, Italy

Для исследования образования молекулярных двойных кор-дырочных состояний при последовательном двухфотонном поглощении рентгеновских лучей используются очень интенсивные, сверхкороткие мягкие рентгеновские импульсы LCLS-рентгеновского лазера на свободных электронах. Влияние критических параметров LCLS – таких, как число фотонов в импульсе, длительность импульса и размер фокусного пятна – на фотоэлектронный и оже-спектры моделируется в деталях, и результаты этого моделирования используются как вспомогательные в интерпретации экспериментально полученных спектров. Представлен обзор результатов двухфотонных экспериментов на LCLS.

Ключевые слова: лазер на свободных электронах, рентгеновский лазер, многоатомная молекула, двойное состояние кор-дырка.

We use extremely intense, ultrashort soft X-Ray pulses generated by the LCLS X-Ray Free Electron Laser to investigate the production of molecular double core-hole states by sequential two-photon X-Ray absorption. The effect of critical LCLS parameters such as the number of photons per pulse, the pulse duration, and the focal spot size on the photoelectron and Auger spectra is modeled in detail and the results of these simulations are used as an aid in the interpretation of the experimental spectra obtained. We review here the results from the two-photon experiments at LCLS.

Keywords: free electron laser, X-ray laser, polyatomic molecule, double core-hole state.

Introduction

The discovery of chemical shifts in photoelectron spectroscopy [1], [2] was an important consequence of the development of this technique, and for

which Kai Siegbahn was awarded the 1981 Nobel Prize in physics. Chemical analysis by means of electron spectroscopy is well established for many years, and there are commercially available

instruments. The basic principle is the absorption of one photon by a molecule, and the ejection of one electron, which is energy analyzed. If the photon energy is sufficient to ionize a K-shell electron, the exact energy of the electron provides information about the local chemical environment. The ionization energy depends on where in a molecule an atom is located.

Cederbaum et al. [3] realized that two-site Double Core Hole States (tsDCHs) could be a more sensitive probe of the local chemical environment than are the usual single core-hole states. However, in 1986 it was not known how to produce K-shell vacancies on two different atoms in a molecule. The cross section for creating holes in the K-shell at two different atomic sites by the absorption of one photon is vanishingly small, and the photon flow from synchrotron radiation sources is too low to allow the absorption of a second photon while the first core-hole still exists. The reason is that the first core-hole is extremely short-lived owing to the Auger effect, which fills the core vacancy within less than 10 fs. This puts huge demands on the light source, demands that a synchrotron light source cannot fulfil. The advent of free electron lasers in the X-ray regime has changed the situation. Free electron lasers, so far only the Linac Coherent Light Source (LCLS) at the SLAC National Accelerator Laboratory, operated by Stanford University, can deliver so many X-ray photons (10^{12}) during such time duration

(10 fs) so that a molecule can absorb two photons during one photo pulse. The second photon can be absorbed before the first vacancy is filled, thus creating a molecule with a tsDCH state. Theoretical predictions showing that this should be possible was presented [4], and it was first verified experimentally shortly after [5].

Experiment

Figure 1 shows the electron accelerator at the SLAC National Accelerator Laboratory, the undulator which produces the X-rays, the AMO (Atomic, Molecular, Optical) hutch, and the electron and ion time-of-flights that are used to record and energy analyze the photoelectrons and photoions [6].

The free-electron laser was running with compressed 40 pC electron bunches at a repetition rate of 60 Hz to generate laser pulses of ~10 fs duration with a pulse energy of approximately 0.2 mJ, a photon energy of between 520 and 705 (± 15) eV, and a pulse energy width of about 0.5%. The laser pulse length is difficult to measure directly for short X-ray pulses and was estimated from the peak electron current of the electron bunch. The photon energy is determined indirectly from the electron bunch kinetic energy. The pulse energy is given from detectors located upstream of the beamline optics which overestimate the pulse energy at the experiment by about 85% due to losses downstream.

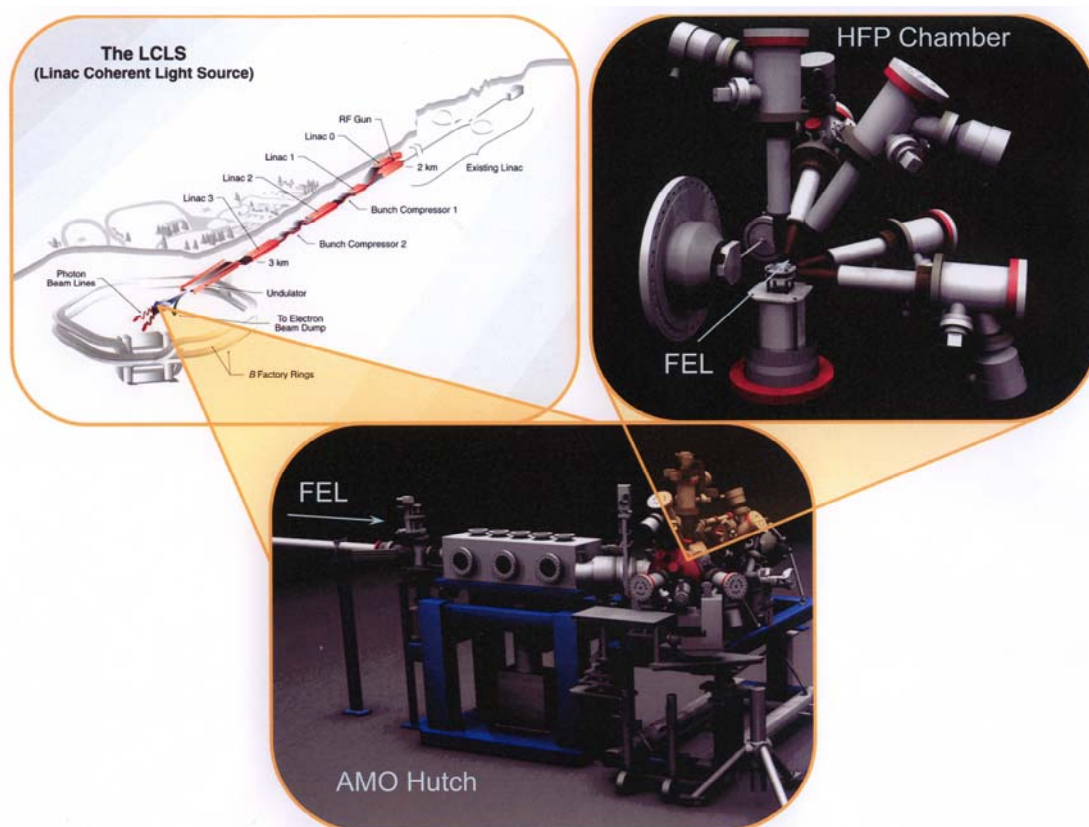


Figure 1 – LCLS at SLAC and the AMO instrument

Each laser pulse intersects a synchronized stream of sample gas with a diameter of about 4 mm, originating from a skimmed, supersonic beam source. The measurements were performed both with a focused and unfocused laser beam in the interaction region. The unfocused data are then subtracted from the focused in order to extract the pure non-linear contributions. Focusing is achieved with Kirkpatrick-Baez (KB) mirrors to an elliptical spot size with a major and minor semi axis of 2.2 μm and 1.2 μm FWHM respectively which corresponds to a beam intensity of roughly 10^{18} W/cm² at the focal spot. For the unfocused measurements the stage of the KB mirrors were shifted 20 mm with respect to the position of the optimal focus. This results in a beam spot with major and minor semi axis of 37.5 μm and 20.6 μm FWHM respectively and an intensity of around 3×10^{15} W/cm².

The ions and electrons produced by the interaction are analyzed with the Atomic, Molecular and Optical (AMO) instrument [7], [8]. It consists of an ion time-of-flight spectrometer (iTOF) to determine charge states and kinetic energies of generated ions, and five eTOFs for measuring the electron kinetic energies at various angles. In these experiments we used two eTOFs oriented at 0° and 54.7° (magic angle) with respect to the polarization of the laser beam. Generally the latter detector provided more non-linear signals, probably because of a better alignment to the laser focal spot but also more noise. Except for CO₂, all presented results originate from the experiments performed with the eTOF oriented at magic angle. The CO₂-data were however taken from measurements with the detector oriented at 0°, due to excessive noise with the other detector. In order to align the iTOF and eTOFs to the interaction region, neon gas was used and the spectrometers were oriented so that a maximum signal from a neon Auger peak was achieved. The electron spectrometers are equipped with multi-element electrostatic lenses and a retardation voltage may be applied in order to increase the energy resolution.

Conclusions

We were successful in the experiment on CO, which was recently performed at LCLS [9]. In this paper the observation of two-site DCH states in CO was demonstrated. This is an important first step towards observations of tsDCH in molecules with atoms having the same atomic number but located at different sites in the molecule, which would allow measurements of chemical shifts that are more sensitive to the chemical environment.

REFERENCES

1. *Siegbahn, K.* in Les Prix Nobel 1981 / K. Siegbahn. – Stockholm : Almqvist & Wiksell International, 1982. – 115 p.
2. *Hagström, S.* Electron spectroscopy for chemical analysis / S. Hagström, C. Nordling, K. Siegbahn // Phys. Lett. – 1964. – Vol. 9. – P. 235.
3. *On double vacancies in the core* / L.S. Cederbaum [et al.] // J. Chem. Phys. – 1986. – Vol. 85. – P. 6513.
4. *Santra, R.* X-ray two-photon photoelectron spectroscopy: A theoretical study of inner-shell spectra of the organic Para-Aminophenol Molecule / R. Santra, N.V. Kryzhevoi, L.S. Cederbaum // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 103. – P. 013002.
5. *Double core-hole production in N₂: Beating the Auger clock* / L. Fang [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – P. 083005.
6. *First lasing and operation of an angstrom-wavelength free-electron laser* / P. Emma [et al.] // Nature Photonics. – 2010. – Vol. 4. – P. 641.
7. *Bozek, J.D.* AMO instrumentation for the LCLS X-ray FEL / J.D. Bozek // Eur. Phys. J., Special Topics. – 2009. – Vol. 169. – P. 129.
8. *High-resolution electron time-of-flight apparatus for the soft x-ray region* / O. Hemmers [et al.] // Rev. Sci. Instrum. – 1998. – Vol. 169. – P. 3809.
9. *Double-core-hole spectroscopy for chemical analysis with an intense X-ray femtosecond laser* / N. Berrah [et al.] // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2011. – Vol. 108. – P. 16912.

Поступила в редакцию 14.11.11.

УДК 535.5

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ИК ОБЛАСТИ СПЕКТРА

В.А. Пилипович, А.И. Конойко, А.М. Поликанин

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

METHODS AND MEANS OF THE ELECTROOPTICAL MODULATION OF INFRARED SPECTRUM RADIATION

V.A. Pilipovich, A.I. Konojko, A.M. Polikanin

B.I. Stepanov Institute of Physics NAS of Belarus, Minsk

Рассматриваются методы и средства амплитудно-поляризационной модуляции плоско поляризованного излучения, которые можно осуществить за счет расщепления плоско поляризованного светового пучка на два, их фазовой модуляции и последующего суммирования.

Ключевые слова: электрооптический эффект, амплитудная модуляция, фазовая модуляция, поляризационный расщепитель, двулучепреломление, изотропный угол.

Means and methods of amplitude-polarization modulation of plane-polarized light are considered. These methods can be realized by means of the splitting plane-polarized light beam on two beams, their phase modulation and subsequent summation.

Keywords: electrooptical effect, amplitude modulation, phase modulation, polarization splitter, birefringence, isotropic angle.

Введение

Общим недостатком электрооптических поляризационных модуляторов с поперечным приложением управляющего поля является тот факт, что вносимая им управляемая разность фаз между ортогональными составляющими электрического вектора проходящей световой волны наводится за счет управляемого смещения только одной из составляющих электрического вектора световой волны [1], [2]. Это приводит к невысокой эффективности их работы, т.к. величина управляющего напряжения в этом случае в два раза больше, нежели в случае, если бы осуществлялось управляемое смещение обоих составляющих электрического вектора световой волны. Поэтому представляет интерес рассмотреть метод поляризационной модуляции плоско поляризованного излучения, который бы исключил этот недостаток, что позволило уменьшить величину управляющего напряжения электрооптического модулятора с поперечным приложением управляющего поля в два раза и при этом минимизировать влияние температурной флуктуации физических параметров электрооптических кристаллов на светомодуляционные характеристики.

1 Низковольтные поляризационные электрооптические модуляторы с поперечным приложением управляющего поля

Сущность метода состоит в уменьшении величины управляющего напряжения электрооптического модулятора с поперечным приложением управляющего поля, которая достигается за счет фазовой модуляции обеих разнесенных в

пространстве ортогональных составляющих электрического вектора падающей на поляризационный расщепитель световой волны с их последующим суммированием.

Оптическая схема низковольтного электрооптического модулятора с поперечным приложением управляющего поля изображена на рисунке 1.1. При этом главная плоскость поляризационного расщепителя повернута на угол 45° относительно главной плоскости поляризатора, а активная ось оптической анизотропии второго электрооптического элемента повернута на угол 45° относительно главной плоскости поляризатора и на угол 90° относительно активной оси оптической анизотропии первого электрооптического элемента, которая перпендикулярна главной плоскости поляризационного расщепителя.

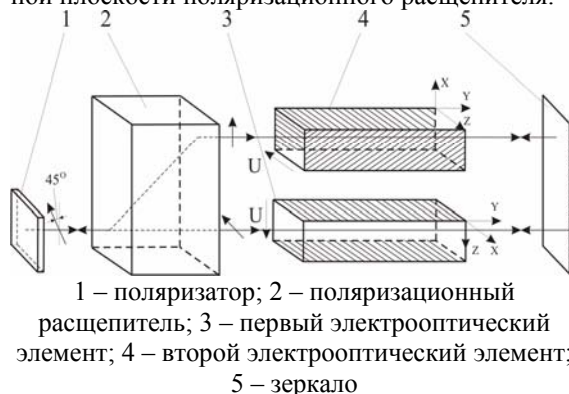


Рисунок 1.1 – Оптическая схема низковольтного амплитудного модулятора излучения видимой и ближней ИК области спектра

Направление вектора напряженности управляющего электрического поля в первом электрооптическом элементе параллельно, а во втором электрооптическом элементе противоположно соответствующим кристаллографическим осям, кроме того, разность оптических путей, пройденных ортогонально поляризованными световыми пучками в одном направлении, должна быть кратна $\lambda/4$.

Электрооптический модулятор с поперечным приложением управляющего поля работает следующим образом. В исходном состоянии на вход электрооптического модулятора с поперечным приложением управляющего поля поступает неполяризованный световой пучок. Пройдя поляризатор, световой пучок становится плоско поляризованным, причем его плоскость поляризации ориентирована под углом 45° к вертикали (к плоскости рисунка). Данный плоско поляризованный пучок поступает на входную грань поляризационного расщепителя, в котором расщепляется на два ортогонально поляризованных световых пучка. Световой пучок (обыкновенный), поляризованный перпендикулярно главной плоскости поляризационного расщепителя, поступает на входную грань первого электрооптического элемента, а световой пучок (необыкновенный), поляризованный параллельно главной плоскости поляризационного расщепителя, – на входную грань второго электрооптического элемента. Оба названных световых пучка проходят через соответствующие электрооптические элементы, отражаются от зеркала и возвращаются в обратном направлении. При этом каждый из них при двойном прохождении через соответствующие электрооптические элементы испытывает одинаковую фазовую задержку Γ , определяемую выражением

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_0 l, \quad (1.1)$$

где n_0 – показатель преломления электрооптического элемента в направлении активной оси оптической анизотропии, l – длина электрооптического элемента.

Это является следствием того, что электрооптические элементы имеют одинаковый линейный размер вдоль направления распространения света вследствие их совместного изготовления. При прохождении ортогонально поляризованных световых пучков через поляризационный расщепитель в обратном направлении они приобретают разность хода, кратную $\lambda/2$, что может быть достигнуто соответствующим подбором толщины поляризационного расщепителя, так как $n_p \neq n_0$, где n_p – фазовый показатель преломления необыкновенного светового пучка. Поэтому суперпозиция ортогонально поляризованных световых пучков дает результирующую выходную плоско поляризованную световую волну,

ориентированную перпендикулярно плоскости поляризации падающей на поляризационный расщепитель световой волны. В результате, в случае отсутствия на электрооптических элементах управляющего напряжения световой пучок не проходит поляризатор в обратном направлении.

Если на первый и второй электрооптические элементы подать управляющее напряжения величиной

$$U = \frac{1}{4} \frac{\lambda}{n_0^3 r_{63}} \frac{d}{l}, \quad (1.2)$$

что в два раза меньше, чем управляющее напряжение существующих лазерных затворов на базе поперечного электрооптического эффекта, то после прохождения ортогонально поляризованными световыми пучками соответствующих электрооптических элементов в обратном направлении они приобретут дополнительную оптическую разность хода, равную $\lambda/2$. Поэтому суперпозиция ортогонально поляризованных световых пучков на выходе поляризационного расщепителя даст результирующую выходную плоско поляризованную световую волну, ориентированную параллельно плоскости поляризации падающей на поляризационный расщепитель световой волны. В результате, в случае наличия на электрооптических элементах управляющего напряжения световой пучок проходит поляризатор в обратном направлении.

Аналогичная задача может быть решена, если между поляризационным расщепителем и первым электрооптическим элементом разместить вращатель плоскости поляризации в соответствии с рисунком 1.2, который будет вращать плоскость поляризации обыкновенного светового пучка на 90° . Таким вращателем может служить фазовая пластинка, вносящая оптическую разность хода, равную $\lambda/2$, оси анизотропии которой ориентированы к плоскости поляризации проходящего светового потока под углом 45° . При этом, чтобы получить амплитудную модуляцию на выходе, необходимо изменить ориентацию электрооптических элементов. Оси оптической анизотропии первого и второго электрооптических элементов должны быть параллельны главной плоскости поляризационного расщепителя. Направление вектора напряженности управляющего электрического поля в первом электрооптическом элементе параллельно, а во втором электрооптическом элементе противоположно соответствующим кристаллографическим осям. Это позволяет формировать данные электрооптические элементы на одном кристалле.

Общим недостатком вышеприведенных оптических схем низковольтного амплитудного модулятора излучения видимой и ближней ИК области является их низкая температурная стабильность. Так как вследствие флуктуации

температуры происходит изменение толщины поляризационного расщепителя (l), что приводит к смещению рабочей точки модулятора на модуляционной характеристике. Это проиллюстрировано на осциллограмме, приведенной на рисунке 1.3 а). Осциллограмма светового сигнала на выходе модулятора, изображенная на рисунке 1.3 б), соответствует случаю отсутствия смещения рабочей точки модулятора.

Кроме того, такие модуляторы могут работать только в параллельных световых пучках. Это является следствием того, что в сходящихся световых пучках плоскости фокусировки обыкновенного и необыкновенного световых пучков не совпадают. Причиной этому является, во-первых, оптическая разность хода обыкновенного и необыкновенного световых пучков, во-вторых, разность дополнительных смещений δ , возникающая вследствие прохождения обыкновенным и необыкновенным световыми пучками через плоско параллельный кристаллический элемент. Величина этого смещения может быть определена из выражения [3]:

$$\delta = \delta_0 - \delta_e = l_p \left(\frac{\cos \omega}{\sqrt{n_p^2 - \sin^2 \omega}} - \frac{\cos \omega}{\sqrt{n_o^2 - \sin^2 \omega}} \right), \quad (1.3)$$

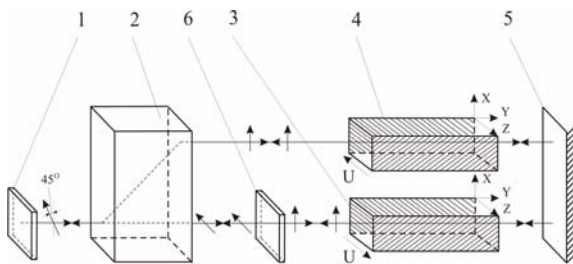
где ω – половина угловой апертуры.

А оптическая разность хода обыкновенного и необыкновенного световых пучков в поляризационном расщепителе равна

$$\Delta' = (n_p - n_o)l, \quad (1.4)$$

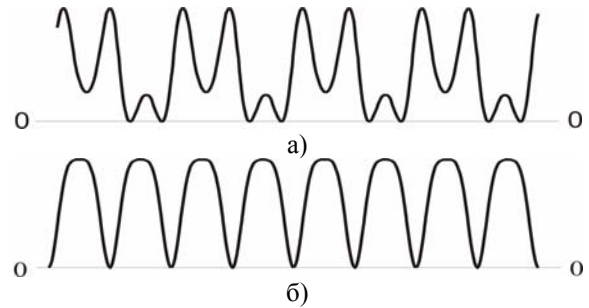
где
$$n_p = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}};$$

n_e, n_o – фазовые показатели преломления, соответственно для необыкновенного и обыкновенного световых пучков; θ – угол, образуемый нормалью к фронту световой волны с оптической осью поляризационного расщепителя.



1 – поляризатор; 2 – поляризационный расщепитель; 3 – первый электрооптический элемент; 4 – второй электрооптический элемент; 5 – зеркало; 6 – вращатель плоскости поляризации

Рисунок 1.2 – Оптическая схема низковольтного амплитудного модулятора излучения видимой и ближней ИК области спектра с параллельными электродами



а) – в случае наличия смещения рабочей точки, б) – в отсутствии смещения.

Рисунок 1.3 – Осциллограммы оптического отклика модуляторов, оптические схемы которых соответствуют схемам, изображенным на рисунках 1.1 и 1.2

Поэтому результирующее смещение плоскости фокусировки обыкновенного и необыкновенного световых пучков вдоль направления распространения (ΔZ_Σ) света будет равно их сумме, то есть [4], [5]

$$\Delta Z_\Sigma = \Delta' + \delta = \quad (1.5)$$

$$= l \left[(n_p - n_o) + \cos \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n_p^2 - \sin^2 \omega}} - \frac{1}{\sqrt{n_o^2 - \sin^2 \omega}} \right) \right].$$

Это смещение приведет к резкому снижению эффективности светомодуляционных характеристик рассматриваемых электрооптических модуляторов.

Эти недостатки могут быть ликвидированы за счет использования в качестве поляризационного расщепителя двух двулучепреломляющих кристаллов, оптические оси которых ориентированы по отношению друг к другу под углом 45° . Тогда оптическая схема, изображенная на рисунке 1.1, трансформируется в оптическую схему, представленную на рисунке 1.4 а). Пунктирными линиями показаны плоскости, в которых лежат оптические оси кристаллов поляризационного расщепителя.

При необходимости базирования электрооптических элементов на одной плоскости в оптическую систему необходимо ввести вращатель плоскости поляризации, обеспечивающий поворот плоскости поляризации в прямом ходе на плюс 45° , а в обратном – на минус 45° . В этом случае оптическая схема низковольтного высокоэффективного амплитудного модулятора излучения примет вид, показанный на рисунке 1.4 б).

В вышеприведенных оптических схемах в качестве поляризационного расщепителя использовались плоскопараллельные кристаллические призмы, в которых оптическая ось ориентирована под углом к направлению распространения света. Использование таких расщепителей в непараллельных световых пучках требует, чтобы этот угол имел строго определенную величину

θ_i , которую можно определить из следующего выражения [6]:

$$\sin^2 \theta_i = -\frac{2n_e^4(n_o^2 + n_e^2) - n_o^4 n_e^2}{2(n_o^2 + n_e^2)(n_o^4 - n_e^4)} \pm \sqrt{\frac{n_e^4}{(n_o^4 - n_e^4)} + \left[\frac{2n_e^4(n_o^2 + n_e^2) - n_o^4 n_e^2}{2(n_o^2 + n_e^2)(n_o^4 - n_e^4)} \right]^2} \quad (1.6)$$

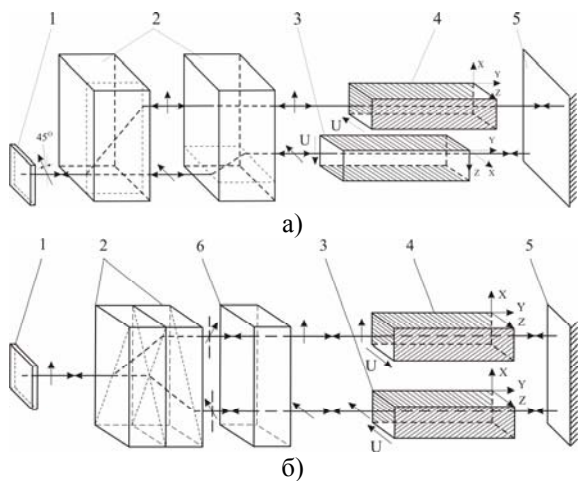
а, следовательно, угол расщепления ψ_i в этом случае можно найти из выражения

$$\psi_i = \arctg \left[\frac{(n_o^4 - n_e^4) \sin \theta_i \cos \theta_i}{n_e^2 + (n_o^2 - n_e^2) \sin^2 \theta_i} \right] \quad (1.7)$$

Такие углы называются изотропными. Изотропные углы расщепления и среза некоторых кристаллов приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Изотропные углы расщепления и среза некоторых кристаллов

Материал кристалла	ψ_i (град.)	θ_i (град.)
NaNO ₃	9,17	49,34
CaCO ₃	5,90	51,27
KH ₂ PO ₄	1,48	53,87



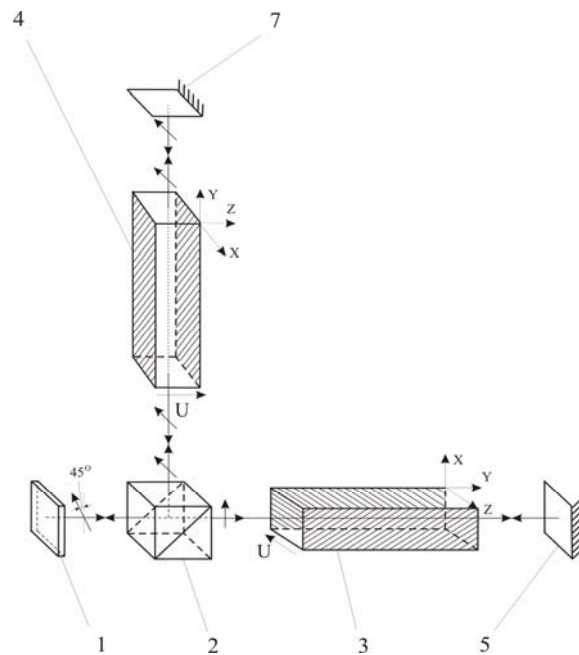
а) 1 – поляризатор; 2 – поляризационный расщепитель; 3 – первый электрооптический элемент; 4 – второй электрооптический элемент; 5 – зеркало

б) 1 – поляризатор; 2 – поляризационный расщепитель; 3 – первый электрооптический элемент; 4 – второй электрооптический элемент; 5 – зеркало; 6 – вращатель плоскости поляризации

Рисунок 1.4 – Оптическая схема низковольтного высокоэффективного амплитудного модулятора излучения видимой и ближней ИК области спектра

В качестве поляризационного расщепителя в модуляторе высокоэффективной модуляции

непараллельных световых пучков, работающего по описанному принципу, может быть использована призма Глана. Оптическая схема такого модулятора представлена на рисунке 1.5. Использование призмы Глана требует введения в оптическую схему второго зеркала. Основным требованием к такому затвору является равенство оптических путей в каналах модуляции, то есть минимизировать температурные градиенты. Это может быть обеспечено за счет базирования оптических элементов системы на общем основании из диэлектрического материала, обладающего высокой теплопроводностью и помещенного в металлический корпус.



1 – поляризатор; 2 – поляризационный расщепитель; 3 – первый электрооптический элемент; 4 – второй электрооптический элемент; 5 – первое зеркало; 7 – второе зеркало.

Рисунок 1.5 – Оптическая схема низковольтного высокоэффективного амплитудного модулятора излучения видимой и ближней ИК области спектра с использованием призмы Глана

2 Метод электрооптической амплитудной модуляции на базе двухлучевой интерференции

Теперь представляет интерес рассмотреть случай использования в качестве расщепителя объемной голограммы, образованной двумя наложенными друг на друга голографическими решетками с параллельными штрихами. В этом случае в корне меняется принцип работы оптической схемы лазерного затвора, так как для обеспечения максимальной дифракционной эффективности расщепителя плоскость поляризации падающего излучения должна быть перпендикулярна штрихам обеих решеток. Поэтому в

результате объединения световых пучков мы будем иметь в наличии не поляризационную модуляцию, а амплитудную модуляцию, являющуюся следствием электрооптического изменения разности фаз объединяемых пучков. Фактически в данном случае имеет место двухлучевая интерференция фазово-модулированных световых пучков.

Увеличение эффективности модуляции такого лазерного электрооптического затвора при одновременном уменьшении величины его управляющего напряжения достигается за счет расщепления падающего на модулятор излучения, что позволяет, во-первых, осуществлять индивидуальную фазовую модуляцию разнесенных в пространстве равных по амплитуде световых пучков с последующим их суммированием; во-вторых, за счет компактного размещения всех оптических элементов модулятора в одной плоскости и помещения их в диэлектрический корпус, материал которого обладает высокой теплопроводностью, минимизировать влияние возникающих в электрооптических кристаллах температурных градиентов на модуляционные характеристики; в-третьих, подавать управляющее напряжение только в момент генерации лазерного излучения.

Оптическая схема низковольтного электрооптического модулятора с поперечным приложением управляющего поля на базе двухлучевой интерференции изображена на рисунке 2.1. Причем первый и второй электрооптические элементы повернуты относительно голографического расщепителя на углы, равные углам дифракции падающих на них дифрагировавших световых пучков (на углы Брэгга), разность оптических путей пройденных дифрагировавшими световыми пучками кратна $\lambda/2$, направление вектора напряженности управляющего электрического поля в первом электрооптическом элементе параллельно, а во втором – противоположно оптической оси.

Такой лазерный электрооптический затвор на базе двухлучевой интерференции работает следующим образом.

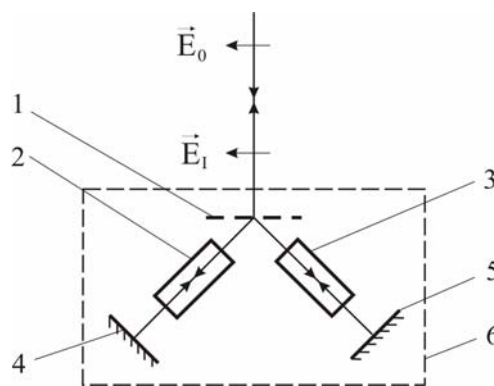
В исходном состоянии на голографический расщепитель поступает плоско поляризованный световой пучок, плоскость поляризации которого ориентирована в плоскости перпендикулярной оптической оси электрооптического кристалла. В результате дифракции исходного светового пучка на голографическом расщепителе в первом и втором электрооптических элементах в результате расщепления будут распространяться два равных по амплитуде и одинаково поляризованных световых пучка. Пройдя первый и второй электрооптические элементы, дифрагированные световые пучки отражаются от первого и второго отражателей и возвращаются в обратном направлении. При этом они приобретают оптическую

разность хода, равную $\lambda/2$. После прохождения голографического расщепителя в обратном направлении дифрагированные световые пучки объединяются и в результате интерференции гасят друг друга.

При подаче на первый и второй электрооптические элементы управляющего напряжения U величиной

$$U = \frac{1}{4} \frac{\lambda}{(n_0^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}) l},$$

которая в два раза меньше, чем у существующих электрооптических лазерных затворов, световые пучки при возвращении к голографическому расщепителю приобретают оптическую разность хода, равную нулю. В результате прохождения голографического расщепителя они интерферируют, поэтому в направлении, противоположном исходному световому пучку, распространяется встречный световой пучок максимальной амплитуды.



- 1 – голографический расщепитель;
- 2 – первый электрооптический элемент;
- 3 – второй электрооптический элемент;
- 4 – первый отражатель; 5 – второй отражатель;
- 6 – диэлектрический корпус

Рисунок 2.1 – Оптическая схема низковольтного высокоэффективного амплитудного модулятора излучения видимой и ближней ИК области спектра с использованием двух лучевой интерференции

Расчеты показывают, что предлагаемые лазерные электрооптические затворы могут работать в световых пучках с угловой апертурой порядка $\pm 4'$. При этом, величина уменьшения светопропускания из-за влияния дифракционной эффективности голографического расщепителя составит не более 1%.

Заключение

Предложен метод амплитудно-поляризационной модуляции плоско поляризованного излучения, который можно осуществить за счет расщепления плоско поляризованного светового пучка на два ортогонально поляризованных, их

фазовой модуляции и последующего суммирования. Предложен метод амплитудной модуляции плоско поляризованного излучения, который можно осуществить за счет расщепления светового пучка при помощи объемной голограммы, представляющей собой две брэгговские решетки с параллельными штрихами, на два поляризованных в одной плоскости, их фазовой модуляции и последующего их суммирования.

Научная новизна полученных результатов заключается: в разработке метода высокоэффективной модуляции оптического излучения на базе поперечного электрооптического эффекта, отличительной особенностью которого является высокая стабильность светомодуляционных характеристик, кроме того, он, в отличие от известных методов, позволяет снизить величину управляющего напряжения не менее чем в 2 раза, что имеет очень важное значение для модуляции добротности лазерных резонаторов, генерирующих излучение с длиной волны порядка 1,5 мкм. Практическая новизна полученных результатов заключается: в том, что на основе метода высокоэффективной модуляции оптического излучения могут быть созданы высокоэффективные лазерные затворы для видимой и ближней ИК области спектра, обладающие величиной управляющего напряжения вдвое меньшей, чем существующие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мустель, Е.П. Методы модуляции и сканирования света / Е.П. Мустель, В.Н. Парыгин. – М. : Наука, 1970. – 296 с.
2. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх, пер. с англ. С.Г. Кривошлыкова, Н.И. Петрова; под ред. И.Н. Сисакяна. – М. : Мир, 1987. – 616 с.
3. Дитчберн, Р. Физическая оптика / Р. Дитчберн, пер. с англ. Л.А. Вайнштейна, О.А. Шустина; под ред. И.А. Яковлева – М. : Наука, 1965. – 632 с.
4. Конойко, А.И. Цифровое управление положением плоскости фокусировки / А.И. Конойко, В.И. Поляков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 2. – С. 57–60.
5. Конойко, А.И. Дискретное управление положением фокуса световых пучков / А.И. Конойко, В.И. Поляков, В.Ф. Ярмолицкий : сб. материалов XIII науч.-техн. конф. с участием зарубежных специалистов «Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления. ДАТЧИК – 2001», май 2001; под ред. проф. В.Н. Азарова. – М. : МГИЭМ, 2001. – С. 248–250.
6. *Convergent beam digital light deflector* / Kulcke, W. [et. al.] // *Optical and Electrooptical Information Processing*, ed. by J. T. Tippet et. al., Cambridge : MIT Press, 1965. – Ch. 23. – P. 371–418.

Поступила в редакцию 22.09.11.

УДК 53(076.6)

ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ПРИ ДВОЙНИКОВАНИИ МЕТАЛЛОВ

В.С. Савенко

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

ELECTROPLASTIC EFFECT AT TWINNING METALS

V.S. Savenko

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr

Использование импульсов тока высокой плотности, электрических и магнитных полей, ионной имплантации позволили интенсифицировать пластическую деформацию металлов, предоставив принципиальную возможность управления двойникованием, с помощью немеханических сил, влияющих на условия и характер упрочнения материала.

Ключевые слова: двойникование, двойниующие дислокации, металл, электропластический эффект, деформация, дислокация, индентор.

Use of pulses of a current of high density, electric and magnetic fields, ionic implantation allowed intensifying plastic deformation of metals, thus, giving basic opportunity for management of plastic deformation twinning with the help of forces of the nonmechanical nature, influencing on conditions and character of hardening of a material by means of controllable twinning.

Keywords: twinning, twinning dispositions, metals, electroplastic effect, deformation, disclosing, indenter.

Introduction

Fundamental and applied problems of modern materiology on increase of production efficiency, and increase of its technological level are defined by necessity of creation of complex of high physic mechanical properties of materials for extreme physical conditions with high service characteristics. The basic kinds of plastic deformation of crystal bodies are sliding and twinning. In spite of the fact that twinning concerns the basic kinds of deformation of crystals, as against sliding, the given kind of plastic deformation is investigated insufficiently full. At the same time experimental results of the twinning study prove to be true discovery of all new phenomena taking place at the given kind of deformation. Deformation of metals at low temperatures and great speeds load results in the fragile destruction. These processes of plastic deformation have no time to be realized. Therefore studying the processes of plastic deformation twinning is an actual task, both in scientific, and in the applied plan.

Twinning realization is carried out in the case of orientation and interdiction for usual disposition sliding, and also at great speeds load and at low temperatures. Sources of generating twinning dispositions are concentrators of tension, and the development of doubles is carried out with great speeds and the subsequent deformation processes on borders of doubles frequently result in the destruction of a material. In this connection management kinetics controllable twinning for creation uniform disposition structures on borders of doubles with the purpose of reduction in concentration of load, gives a real opportunity to use twinning as a reserve of increase of plasticity of a material. On the other hand

systems of thin doubles at the subsequent deformation will create natural obstacles for full dispositions. The creation of twinning structures in the material will probably promote effective hardening of the material which is an independent way and the channel of the twinning metals hardening.

Results and discussion

Influence of pulses of a current on twinning metal crystals, on analogy to sliding and for brevity electroplastic effect (EPE) at twinning was revealed by the author in 1978. It served as the certain impulse for studying the electroplastic effect at twinning, as well as sliding, and is crucial for realization of plastic deformation of metal. The study of the influence of ionic implantation, alloy, and electronic irradiation on physicomaterial properties of materials are of great scientific and practical value as they in many respects define their operational characteristics. From the practical point of view actual researches of joint influence of ionic irradiation and electric field on deformation processes in metals are represented. It is known, that the specified kinds of power influences are effective ways of influence on the condensed system of the metal which in the certain conditions improve and modify its physical characteristics.

By this time there are practically no ways of hardening twinning materials that constrain practical use of some perspective metals and alloys on their basis. According to this statement, it is clear that the research of the ways of increase of plasticity and durability of twinning materials represents the important practical task.

The decision of this task can be carried out in three directions:

1. Increase in plasticity of twinning materials due to the initiation and development of additional twinning under the influence of external power influences.

2. Decrease in the role of twinning borders as concentrators of internal tension in metal by their reduction, or updating.

3. Creation of the structures at electroplastic deformation twinning, capable of strengthening the material without decrease in its plasticity.

Thus, in the true work in a counter balance to the existing practice the structural and mechanics thermal influences on a crystal lattice of metal, the new way of management is offered due to non-mechanical forces – pulses of a current of high density, electric and magnetic and fields and ionic implantation.

The purpose of this work is finding-out physical mechanisms of plastic deformation of metals twinning in conditions of external power influences electric and magnetic fields, ionic implantation, electronic irradiation, creation of physical bases of hardening of twinning materials and technological receptions on the basis of electroplastic processing of metals by pressure, in difficult field conditions and in the crossed fields, in particular.

Twinning, as well as sliding, develops only on certain crystallography to planes, and these processes are mutually causing.

Twinning and sliding are not in a thermodynamic equilibrium condition, and at any temperatures their structural sensitivity depends on updating defects.

At deformation of a crystal by the concentrated loading on the plane cleavage concentrators of tension a system of the wedge doubles appears on certain crystallographic directions. The double wedge represents a set of planes in which the process of reorganization of a lattice in twinning position starts, but up to the end it is not realized if each plane (figure 1) comes to the end of the twinning disposition.

Passing through metal monocrystals the impulses of an electric current with density from 50 – 1000A/mm² and duration 10⁻⁴s, deformation redistribution twinning in vicinities of concentrators of mechanical pressure is observed.

Comparison of pictures of deformation with an impulse of a current and without it shows that at joint action of electric and mechanical pressure there is a stimulation of plastic deformation twinning.

Under the influence of the concentrated loading on a crystal the occurrence of doubles is provided with excitation of dot sources twinning dispositions. Twinning germs have double wedge. Their development follows the bill of simultaneous moving of regional making dispositions in a plane of shift and screw in a plane unity. Such doubles can arise in the

volume of a deformable material near concentrators of pressure at any kind of loading.

One of the features of development of the doubles arising «in a point» is the sequence of elementary certificates of development: at a short-term action of loading there is a thin double of final length. At increase in time of influence on a crystal generating twinning dispositions and their translation on borders of section without increase in the length a twin wedge is observed. It is natural, that moving from a mouth to top twinning dispositions one can meet an obstacle and form congestion. This will sharply increase incoherent twin borders in planes (III), and internal pressure can lead to disclosing of cracks in a secondary plane unity.

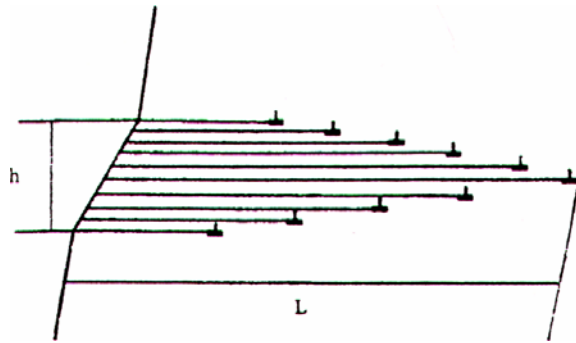


Figure 1 – Disposition model wedge the double

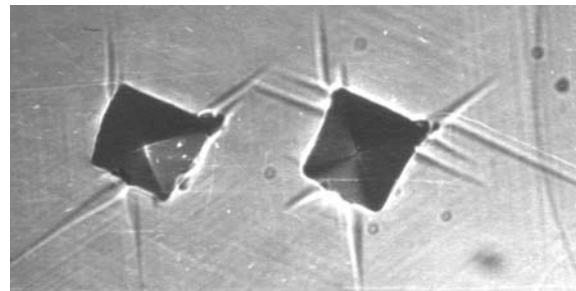


Figure 2 – A microphoto of doubles on a plane (III) monocrystals of bismuth, x 530. The print at the left is received at loading 10g. The print on the right is at the same loading, but when the deformation through a crystal was passed, the density of a current pulse was 600 A/mm²

A new kind of interaction screw twinning dispositions with an obstacle is observed when the current impulse passes through a crystal at deformation. Excitation of an electronic subsystem of the sample leads to the intensive reproduction of twinning dispositions on borders of the section and to collective interaction screw making twinning dispositions with an obstacle. As a result there is a phenomenon of branching of doubles not observed earlier.

Branching of doubles always arises on curve borders of the section where the degree of the incoherent twinning borders is the greatest.

Doubles usually arise on dispositions congestions and relaxations of internal pressure at a print lead. Till now it was known, that the relaxation of

internal pressure can be carried out at the expense of sliding development, for example, in the areas of the crystal adjoining twinning borders. In the given work it is revealed for the first time that under the influence of electric impulses the relaxation of the internal pressure is carried out as a result of the development of new doubles, and new doubles arise not only on congestions of full dispositions but also on borders twinning layers, i. e. on congestions of twinning dispositions. Doubles arising in places of concentration of pressure discharge dislocation congestions thereby reduce the probability of fragile destruction in reintense places of a crystal lattice.

In the absence of external power influences «branchy» doubles arise on twins' borders with small degree coherent (figure 3) more often.

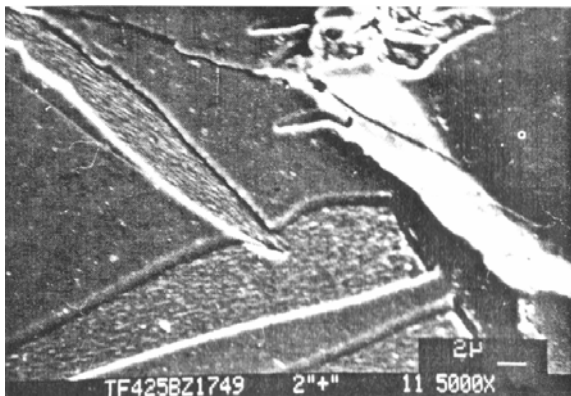


Figure 3 – Origin of the double on the twin border with small degree of coherency

The curvature twinning borders appear owing to superfluous concentration of twinning dispositions on them. The raised density of dispositions on the twin border conducts localization of the internal pressure on it whose sources are twinning dispositions. Thus, in places of the congestion of dispositions there can be pressure comparable in the volume with the occurrence of the threshold aspect of the double wedge. The relaxation of the given pressure occurs in the origin of the twin border and in the new double which develops in a new energetically favourable direction (figure 4).

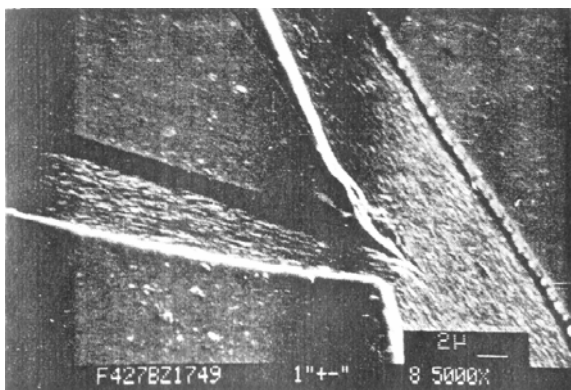


Figure 4 – Branching of the double at a stopper

The picture of fields of pressure at the aspect of the double wedge (figure 5) which is received as the assumption that the twin's border consists of from full [1]–[3], instead of partial dispositions. Fields of pressure around of the congestion of such dispositions of looking like wedge can be calculated under the formula:

$$\sigma_{xy} = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^{N_1} \frac{(x+nd)[(x+nd)^2 - (y+nh)^2]}{[(x+nd)^2 + (y+nh)^2]^2} + \sum_{n=0}^{N_2} \frac{(x+nd)[(x+nd)^2 - (y-nh)^2]}{[(x+nd)^2 + (y-nh)^2]^2} \right\}$$

Where σ_{xy} – chopping off pressure, b – module of vector Burgersa, G – shift module, ν – factor Puassona, n – summation index, N_1 and N_2 – number of dispositions on twin borders. In our case at the computer plotting, presented on figure 5, it was accepted $N_1 = N_2 = 10$.

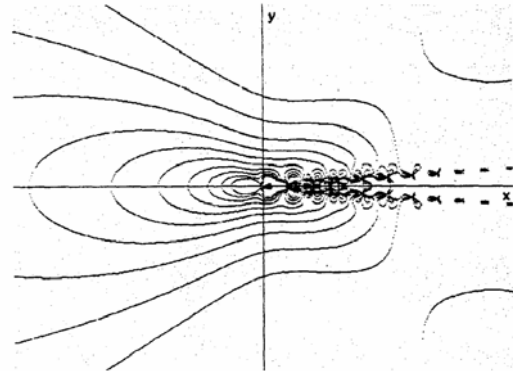


Figure 5 – Fields of pressure at aspect wedge the double

Figure 3 shows that the pressure increased when approaching to twin border. Moreover, at the top of the double they have the same order, as at direct affinity twin borders, but on the dist the aspect wedge is two-three times more. As a result, in the presence of stoppers on the propagation of the aspect double wedge, there is a redistribution of pressure at its top in such a manner that the size of their projections to a new direction twin becomes comparable with the threshold value of the occurrence of the double.

It is possible to stimulate dislocation processes at twinning crystals by passing impulses of an electric current through them [4]–[7]. With the growth of density of the current in the impulse, generating processes of twins' dispositions amplify. Thus, the collective moving on twinning to borders twinning dispositions can co-operate with an obstacle not only with formation of the new double, but also overcome resistance of the stopped dispositions with formation of the second top.

It is possible to explain stimulation by impulses of the electric current. Branching of the doubles increases the internal pressure in a crystal at the

expense of pinch-effect realization. As a result of the occurrence of additional pressure in a crystal the probability of occurrence of the second top of the double raises.

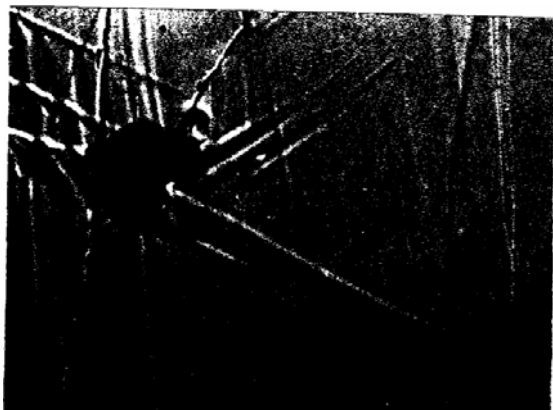


Figure 6 – Formation of the second top of the double in a crystal Be. Density of a current 700 A/mm^2 ; $\times 600$

Thus, with the help of the elektroplastic method of research and method of computer simulation of the fields of pressure around the aspect double wedge, it is established that the relaxation of internal pressure in bismuth monocrystals can occur due to realization of twinning at the expense of branching of doubles. And, the new top of the double arises not on full dispositions, but on partial twins.

With the increase in time of influence, the indenter before passing a current impulse leads to the density growth of twinning dispositions on borders and branch strengthening. Thus, the density twinning on borders of section of each new generation of doubles is less than dispositions in the previous cases (figure 6).

The growth of density of the current in the impulse amplifies generating processes in twinning dispositions. Thus, the collective moving of the twin to borders twinning dispositions can co-operate with an obstacle not only with formation of the new double, but also overcome resistance of the stopped dispositions with formation of the second top. In figure 4 formation of the second top of the double in a crystal Be is shown.

Conclusion

The described phenomena testify the additional possibility of plasticization of mechanically twinning materials at creation, in the course of deformation, the conditions favorable for reproduction

twinning of dispositions. Such conditions can be created in the process of deformation when impulses of a current of high density pass through a material. Thus, the relaxation of the internal pressure arising at dislocations of congestions on borders of section can occur not only at the expense of formation of new doubles. Therefore the reserve of plasticity increases, and the probability of fragile destruction and the result of the partial destruction in twinning decreases.

REFERENCES

1. *Kosevich, A.M.* Effect of electromagnetic fields on the ductility and strength of materials. Abstracts conference / A.M. Kosevich // Successes of physical sciences. – 1971. – Vol. 104. – № 2. – P. 201–254.
2. *Bashmakov, B.I.* Studying of electromechanical effect at bismuth crystals in interval temperatures / B.I. Bashmakov, V.S. Savenko // News of High schools. Physics of Metals. – 1980. – № 7. – P. 29–33.
3. *Savenko, V.S.* Action of electromagnetic fields on plasticity and durability of materials / V.S. Savenko, O.M. Ostrikov // IV International conference. Effect of electromagnetic fields on the ductility and strength of materials. Abstracts conference. – Voronezh, 1996. – P. 20.
4. *Savenko, V.S.* Influence of an irradiation on electromechanical effect at twinning bismuth crystals. / V.S. Savenko, M.S. Tsedrik // News AN BSSR, Fiz-Mat Sciences. – 1980. – № 1. – P. 105–108.
5. *Bashmakov, B.I.* Studying of electromechanical effect at twinning crystals of bismuth in the range of temperatures 77–530 K / B.I. Bashmakov, V.S. Savenko // Izv. High schools. Physics. – 1980. – № 7. – P. 29–33.
6. *Elektroplastic effect at simultaneous imposing electric and a magnetic field in bismuth monocrystals* / V.S. Savenko [et al.] // Bulletin BSU. – 1995. – Sulfurs 1. – № 2. – P. 27–30.
7. *Savenko, V.S.* Elektron-plastical effect at twinning bismuth monocrystals / V.S. Savenko, V.I. Spitsyn, O.A. Troitsk // Reports of academy of sciences of the USSR. – 1985. – Vol. 283. – № 5. – P. 1181–1183.

Поступила в редакцию 15.11.11.

ПРЕИМУЩЕСТВА ИСКУССТВЕННЫХ СЛАБО ОТРАЖАЮЩИХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СПИРАЛЕЙ ПРИ ПРЕЛОМЛЕНИИ И ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

И.В. Семченко¹, С.А. Хахомов¹, А.Л. Самофалов¹, С.А. Третьяков²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Университет Аалто, электротехнический факультет, Финляндия

ADVANTAGES OF ARTIFICIAL LOW-REFLECTING STRUCTURES BASED ON THE OPTIMAL HELICES AT THE REFRACTION AND ABSORPTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES

I.V. Semchenko¹, S.A. Khakhomov¹, A.L. Samofalov¹, S.A. Tretyakov²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²Aalto University School of Electrical Engineering, Finland

Проведено аналитическое исследование преломляющих и поглощающих свойств образца искусственной среды, состоящей из оптимальных спиралей с равными диэлектрическими и магнитными проницаемостями. На основе полученных результатов показано значительное преимущество такой среды по сравнению с «чистыми» диэлектриками и магнетиками.

Ключевые слова: композитные среды, киральность, спиральный элемент, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость.

The analytical study of refractive and absorbing properties of a sample of the artificial medium consisting of the optimal helices with equal permittivity and permeability has been carried out. Significant advantage of this medium in comparison with «pure» dielectric and magnetic materials was shown on the basis of the obtained results.

Keywords: composite materials, chirality, helical element, permittivity, permeability.

Введение

При характеристике сред, у которых числовые значения диэлектрической и магнитной проницаемости одинаковы, традиционно основное внимание уделяется отсутствию отражения электромагнитных волн на поверхности среды. Дополнительным стимулом для изучения этой проблемы стало создание новых искусственных анизотропных структур – метаматериалов, проявляющих особые свойства, которыми не обладают естественные среды [1]. Искусственные структуры с равными диэлектрической и магнитной проницаемостями могут быть созданы на основе металлических спиралей оптимальной формы. В результате исследований, проведенных в настоящей работе, показано, что представляющие научный и практический интерес свойства таких систем не ограничиваются аномально слабым отражением электромагнитных волн на границе с окружающим воздухом. Рассматриваемые структуры имеют входной импеданс, близкий к волновому импедансу свободного пространства, но это не единственное их достоинство. В статье обосновано, что среды, для которых $\varepsilon = \mu$, имеют преимущества перед обычными диэлектриками и магнетиками, обусловленные более сильным преломлением и поглощением электромагнитных волн. Эти свойства искусственных сред

могут быть использованы при создании поглотителей волн сверхвысокой частоты (СВЧ волн).

В работе [2] на примере образца, разработанного авторским коллективом из Института физики полупроводников Сибирского отделения РАН, проведено численное моделирование киральных свойств искусственной анизотропной структуры, образованной из микроспиралей. Показано, что такая искусственно созданная периодическая структура может проявлять значительные киральные свойства в терагерцовом диапазоне. Получены аналитические выражения для вычисления диэлектрической и магнитной проницаемостей, а также киральной восприимчивости структуры, отличающейся существенной гиротропией. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов. Сделан вывод об удовлетворительном описании свойств искусственной структуры с большой киральностью на основе предложенной модели.

1 Моделирование

Для теоретического описания частотной зависимости диэлектрических, магнитных и киральных свойств искусственной структуры в СВЧ диапазоне (вблизи главного резонанса) нами использована модель Лоренца – Друде. При этом учтены следующие факторы: скин-эффект,

ослабление напряженности падающей электромагнитной волны внутри металлической спирали, неоднородное распределение электрического тока по спирали.

Зависимость диэлектрической ε и магнитной μ проницаемости от частоты для среды с сильными киральными свойствами имеет вид [2]:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{A\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\tilde{A}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tilde{A}^2} \left(1 + \frac{q\omega r^2}{2} \sqrt{\varepsilon_0\mu_0\kappa} \right),$$

$$\mu = 1 + \frac{1}{A} \mu_0 B^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\tilde{A}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tilde{A}^2} \left(1 + \frac{q\omega r^2}{2} \sqrt{\varepsilon_0\mu_0\kappa} \right),$$

где

$$\kappa = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} B \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\tilde{A}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tilde{A}^2},$$

$$\frac{1}{A} = \frac{2N e^2}{\pi m_e} \frac{\tau}{r^2 q^2 + 1}, \quad B = \frac{r^2 q}{2} \omega,$$

$$\tilde{A} = \frac{\rho N_0 N_s e^2}{m_e}, \quad N = N_0 N_s N_h V_h, \quad V_h = \pi r_0^2 L,$$

$$\tau = j \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\rho}{\pi \cdot r^2 S_{np} \sin \alpha} 2\alpha_{me}, \quad N_s = \frac{2\Delta}{r_0},$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Величина κ является невозмущенным значением параметра киральности, вычисленным в первом приближении, с учетом уравнения связи $\mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{H}$; e – модуль заряда электрона, m_e – масса электрона, r – радиус спирали, q – удельное кручение спирали, ω – циклическая частота падающего излучения, ω_0 – резонансная частота, ρ – удельное сопротивление металла, N_0 – концентрация электронов проводимости в металле, N_s – объемная доля скин-слоя в спирали, r_0 – радиус проволоки, N_h – концентрация спиралей, V_h – объем проволоки, из которого изготовлена одна спираль, τ – коэффициент ослабления падающего поля внутри металла, S_{np} – площадь сечения проводника, α – угол подъема спирали; α_{me} – магнитоэлектрическая восприимчивость, содержащаяся в материальных уравнениях для отдельной спирали:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha_{ee} \mathbf{E} - j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha_{em} \mathbf{H},$$

$$\mathbf{m} = \alpha_{mm} \mathbf{H} + j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \alpha_{me} \mathbf{E}.$$

Здесь α_{ee} и α_{mm} – тензоры диэлектрической и магнитной восприимчивости спирали; $\alpha_{em} = \alpha_{me}^T$ – псевдотензор, характеризующий киральные свойства спирали; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; символом T

обозначена операция транспонирования. При записи этих выражений полагается, что электрическое и магнитное поле являются монохроматическими, и зависимость их напряженности от времени описывается функцией $\exp(j\omega t)$, как принято в радиофизике [2].

Оптимальные параметры спиралей определены нами в работах [3], [4]. В частности, для электромагнитного поля с длиной волны, равной 10 см, оптимальными являются спирали с параметрами:

$$N_g = 1, \quad r = 7,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \alpha = 13,65^\circ, \quad L = 0,05 \text{ м}, \\ H = 0,012 \text{ м}, \quad d = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

где N_g – число витков спирали, r – радиус витка, α – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали, L – длина медной проволоки, свитой в спираль (соответствует условию главного частотного резонанса), H – высота спирали (в рассматриваемых условиях она равна шагу спирали), d – диаметр проволоки.

В работах [5], [6] нами проведены экспериментальные исследования поляризационных свойств искусственного образца, состоящего из оптимальных одновитковых спиралей с углом подъема $13,65^\circ$. В настоящей работе проведено исследование преломляющих и поглощающих свойств такой же искусственной структуры.

2 Обсуждение результатов

Для определения зависимости диэлектрической ε и магнитной μ проницаемости данного образца от частоты необходимо предварительно определить магнитоэлектрическую восприимчивость α_{me} отдельной спирали.

В работе [6] для образца среды, состоящей из парных взаимно ортогональных спиралей оптимальных параметров, на основании экспериментальных результатов получена зависимость мнимой части диэлектрической проницаемости от частоты. При использовании в первом приближении эмпирического значения параметра киральности образца $\kappa = -0,42 + j \cdot 0,42$ нами получено достаточно точное соответствие аналитической зависимости, представленной на рисунке 2.1 сплошной кривой и экспериментальной зависимости («точечная» кривая), полученной в [6]. Смещение графиков друг относительно друга вдоль шкалы частот, возможно, обусловлено замедлением электромагнитных волн в рассматриваемой среде.

В рассматриваемых условиях коэффициент ослабления падающего поля внутри металла $\tau = -2,329 \cdot 10^{-5} - j \cdot 2,329 \cdot 10^{-5}$, толщина скин-слоя на резонансной частоте составляет $N_s = 4,754 \cdot 10^{-5}$ м.

С учётом полученных значений параметров κ и τ построим частотные зависимости действительной (рисунок 2.2) и мнимой (рисунок 2.3) части диэлектрической, магнитной проницаемости и показателя преломления для образца,

состоящего из одновитковых парных спиралей с углом подъема $13,65^\circ$.

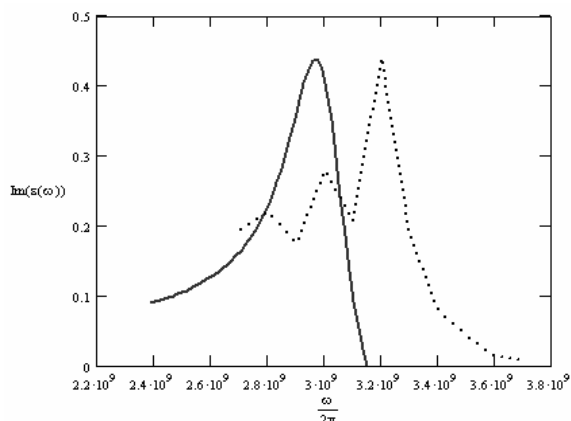


Рисунок 2.1 – Зависимость мнимой части диэлектрической проницаемости от частоты (... экспериментальная зависимость, — аналитическая зависимость)

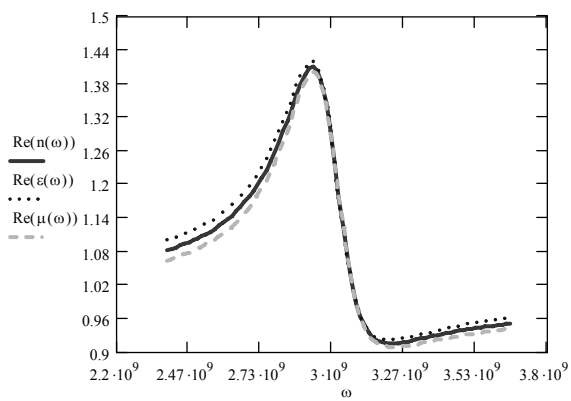


Рисунок 2.2 – Частотная зависимость действительной части диэлектрической $Re(\epsilon(\omega))$, магнитной $Re(\mu(\omega))$ проницаемостей и показателя преломления $Re(n(\omega))$.

Образец среды из одновитковых парных спиралей с углом подъема $13,65^\circ$

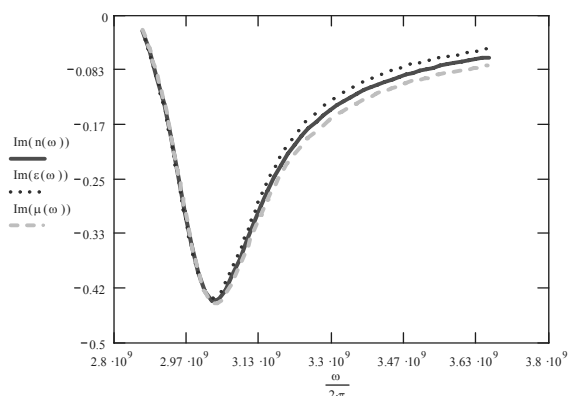


Рисунок 2.3 – Графики частотной зависимости мнимой части диэлектрической $Im(\epsilon(\omega))$, магнитной $Im(\mu(\omega))$ проницаемостей и показателя преломления $Im(n(\omega))$.

Образец среды из одновитковых парных спиралей с углом подъема $13,65^\circ$

На рисунках 2.2 и 2.3 видно, что для образца, состоящего из оптимальных спиралей, равенство значений диэлектрической и магнитной проницаемости имеет место при резонансной частоте ($3 \cdot 10^9$ ГГц). При частотах, близких к резонансной, значения диэлектрической и магнитной проницаемостей очень мало различаются.

В целях сравнения преломляющих свойств исследуемого в настоящей работе искусственно-го образца, состоящего из одновитковых парных спиралей с углом подъема $13,65^\circ$, с преломляющими свойствами «чистых» диэлектриков ($\mu = 1$) и «чистых» магнетиков ($\epsilon = 1$) на рисунке 2.4 для них приведены частотные зависимости действительной части показателя преломления.

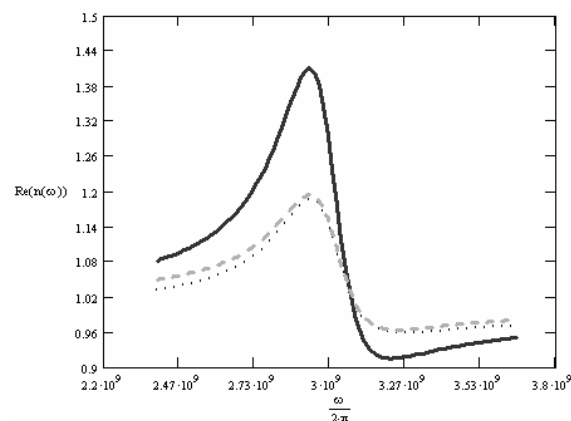


Рисунок 2.4 – Частотная зависимость действительной части показателя преломления искусственной среды (сплошная кривая), «чистого» диэлектрика (штриховая кривая), «чистого» магнетика («точечная» кривая)

На рисунке 2.4 видно, что искусственная среда, состоящая из оптимальных спиралей, значительно превосходит «чистые» диэлектрики и магнетики по преломляющим свойствам.

В области нормальной дисперсии максимальное значение действительной части показателя преломления искусственной среды равно 1,41 (при частоте 2,93 ГГц), у «чистых» диэлектриков оно не превышает 1,194 (на 15,3% меньше, чем у искусственного образца), у «чистых» магнетиков – 1,186 (на 15,9% меньше, чем у искусственного образца).

В области аномальной дисперсии искусственной среды (3,21 ГГц) минимальное значение действительной части показателя преломления равно 0,914. На этой же частоте у «чистых» диэлектриков оно равно 0,964 (отличие от единицы, взятое по модулю, на 58% меньше, чем у искусственного образца), у «чистых» магнетиков – 0,959 (отличие от единицы, взятое по модулю, на 52% меньше, чем у искусственного образца).

Для сравнения поглощающих свойств образца искусственной среды с поглощающими свойствами «чистых» диэлектриков и магнетиков воспользуемся частотными зависимостями

мнимой части показателя преломления искусственной среды, «чистого» диэлектрика и «чистого» магнетика, приведенными на рисунке 2.5.

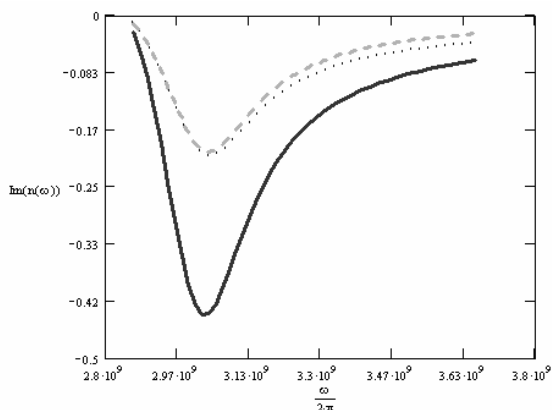


Рисунок 2.5 – Графики частотной зависимости мнимой части показателя преломления искусственной среды (сплошная кривая), «чистого» диэлектрика (штриховая кривая), «чистого» магнетика («точечная» кривая)

Анализируя зависимости, изображённые на рисунке 2.5, видим, что искусственная среда, состоящая из оптимальных спиралей, в значительно большей степени поглощает излучение, чем «чистые» диэлектрики и магнетики. Это свойство искусственной структуры может быть использовано при создании поглотителей излучения СВЧ диапазона.

Вблизи резонансной частоты искусственной среды (3,02 ГГц) максимальное значение модуля мнимой части показателя преломления равно 0,435; у «чистых» диэлектриков оно равно 0,196 (то есть в 2,22 раза меньше, чем у искусственного образца), у «чистых» магнетиков – 0,199 (что в 2,18 раза меньше, чем у искусственного образца).

Заключение

С использованием аналитических выражений, полученных для диэлектрической и магнитной проницаемости в работе [2], проведено моделирование преломляющих и поглощающих

свойств образца искусственной среды, состоящей из оптимальных спиралей, с равными значениями диэлектрической и магнитной проницаемости. Показано значительное преимущество образца искусственной среды по сравнению с «чистыми» диэлектриками и магнетиками по абсорбционным и рефракционным свойствам в отношении СВЧ излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bianisotropic materials optimized for strong interactions with electromagnetic fields* / S.A. Tretyakov // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2. – Р. 49–51.
2. *Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью* / И.В. Семченко [и др.] // Кристаллография. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 404–411.
3. *Исследование поляризации электромагнитного излучения, рассеянного на металлической спирали* / И.В. Семченко [и др.] // Лазерная и оптико-электронная техника. – 2002. – Вып. 7. – С. 84–91.
4. *Преобразование поляризации электромагнитных волн спиральными излучателями* / И.В. Семченко [и др.] // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 8. – С. 917–922.
5. *Оптимальная форма спирали: равенство диэлектрических, магнитных и киральных свойств* / И.В. Семченко [и др.] // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2009. – Т. 2, № 5. – С. 30–36.
6. *Helices of optimal shape for nonreflecting covering* / I.V. Semchenko [et al.] // The European Physical Journal. Applied Physics. – 2010. – Vol. 49. – P. 33002.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований – проект № Ф11МС-005.

Поступила в редакцию 01.11.11.

УДК 535:628.373.8, 535:548

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ КРИСТАЛЛОВ

Н.А. Хило, Н.С. Казак, С.В. Солоневич, А.А. Рыжевич

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

LASER RADIATION CONVERTERS ON THE BASE OF CRYSTALS

N.A. Khilo, N.S. Kazak, A.A. Ryzhevich, S.V. Solonevich

B.I. Stepanov Institute of Physics NAS of Belarus, Minsk

Разработан и изготовлен компактный преобразователь лазерного излучения на основе двуосного кристалла, ориентированного вдоль бинормали. Устройство предназначено для аподизации и уменьшения расходимости лазерных пучков, а также для формирования полых световых пучков с дислокацией волнового фронта. Оптические элементы преобразователя пригодны для трансформации мощного импульсного и непрерывного лазерного излучения. Полученные при этом пучки могут распространяться в прозрачных средах на большое расстояние. Устройство перспективно в использовании для манипуляции частицами по принципу лазерного пинцета, для лазерной обработки материалов, для воздействия на органические клетки и их компоненты, а также в интерферометрии и профилометрии.

Ключевые слова: лазерный пучок, преобразователь лазерного излучения, кристалл, аподизация, многокольцевой световой пучок.

We designed and made a compact laser radiation converter on the basis of a biaxial crystal oriented along its binormal. The device is designed for apodization and decreasing laser beam divergence, as well as for shaping hollow light beams with a wave front dislocation. Optical elements of the converter allow to transform both pulsed, and continuous powerful laser radiation. It is possible to transfer converted beams at large distance in transparent media. The device holds much promise for manipulation by particles on the principle of a laser tweezer, for laser processing of materials, for influence on organic cells and its components, and in interferometry and profilometry.

Keywords: laser beam, laser radiation converter, crystal, apodization, multi-ring light beam.

Введение

При использовании лазерных пучков часто требуется плавно регулировать диаметр их поперечного сечения. Конструкция подавляющего большинства лазеров не позволяет этого сделать непосредственно. Для увеличения диаметра пучка обычно применяют телескопы. При увеличении поперечного размера пучка посредством телескопа его расходимость уменьшается, но при уменьшении поперечного размера пучка этим способом расходимость излучения увеличивается, что в большинстве случаев нежелательно. Для уменьшения диаметра пучка применяют также круглые диафрагмы, однако их применение влечет за собой существенные дифракционные искажения в распределении интенсивности пучка, что во многих случаях нежелательно, особенно при управлении движением частиц малых размеров. Кроме того, круглые диафрагмы имеют фиксированный размер, вследствие чего невозможно оперативно перестраивать диаметр выходного пучка. С применением ирисовых диафрагм удастся плавно изменять размер пучка, однако не устраняются дифракционные искажения. Во избежание дифракционных искажений при одновременном уменьшении диаметра лазерного пучка во многих случаях применяют так называемые аподизирующие диафрагмы различных конструкций [1]–[5], коэффициент пропускания которых плавно изменяется при изменении

радиальной координаты, например, вследствие соответствующего изменения коэффициентов поглощения и/или отражения. «Мягкие» диафрагмы в большинстве случаев также имеют фиксированные размеры. Актуальной является задача изменения диаметра выходного лазерного пучка без увеличения при этом его расходимости и без внесения нежелательных искажений в распределение интенсивности в его поперечном сечении. В настоящей работе описан созданный авторами преобразователь на основе двуосного кристалла, пригодный для решения этой и некоторых других задач по формированию световых пучков.

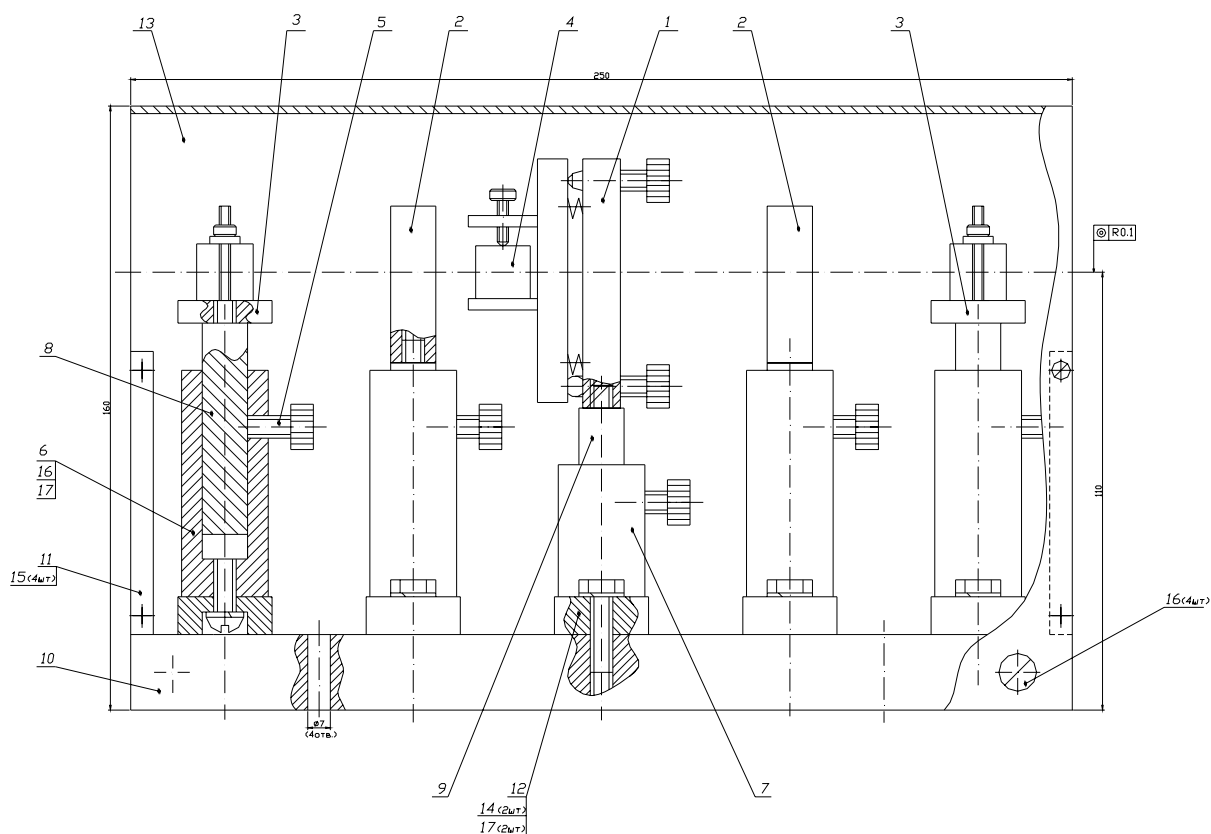
1 Конструкция и принцип работы преобразователя лазерного излучения на основе двуосного кристалла

При распространении циркулярно поляризованной световой волны в двуосном кристалле, ориентированном вдоль его бинормали, происходит ее преобразование в две волны, циркулярно поляризованные в противоположных направлениях, одна из которых имеет дислокацию волнового фронта [6]–[8]. Парциальные коэффициенты преобразования зависят от угла между бинормалью кристалла и направлением распространения света. При распространении расходящегося аксиально симметричного светового пучка вдоль бинормали двуосного кристалла он

может быть преобразован в многокольцевой световой пучок (МКСП), обладающий или не обладающий винтовой дислокацией волнового фронта (ВДВФ) [8]. В целях практического использования этого полезного свойства двусных кристаллов нами разработан компактный преобразователь лазерного излучения, сборочный чертеж которого приведен на рисунке 1.1. Преобразователь предназначен для трансформации обычного линейно поляризованного лазерного пучка в МКСП необходимой конфигурации. Нами собран действующий макет преобразователя, оптическая схема которого приведена на рисунке 1.2, а фотография – на рисунке 1.3. Механические элементы преобразователя изготовлены с участием авторов данной работы на производственной базе Государственного научного учреждения «Институт физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси».

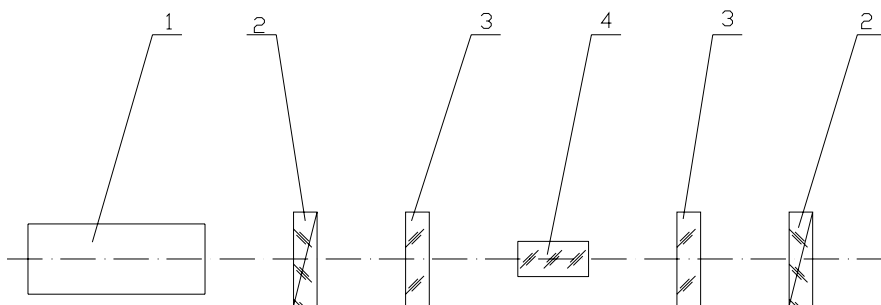
Для демонстрации работы макета использовался гелий-неоновый лазер типа ГН-2П-1, генерирующий одномодовый линейно-поляризованный гауссов пучок, угловая расходимость которого составляла около 0,5 градуса по уровню $\frac{1}{2}$, и степень поляризации превышала 0,99. Для

получения циркулярно-поляризованного излучения применялась четвертьволновая пластинка, просветленная для излучения с длиной волны 633 нм и специальным образом ориентированная относительно плоскости поляризации исходного линейно-поляризованного пучка. В качестве двусного кристалла применялся кристалл КТР – титанил фосфат калия KTiOPO_4 – с размерами $8 \times 8 \times 12 \text{ мм}^3$. Последний габарит является толщиной (длиной) кристалла; параллельно этому ребру кристаллического параллелепипеда ориентирована бинормаль кристалла. После кристалла располагалась еще одна четвертьволновая пластинка, идентичная первой по размерам и ориентации. В качестве поляризатора использовался поляризатор – призма Глана. Все оптические элементы схемы стойки к воздействию лазерного излучения большой мощности. Перед преобразователем и после него могут устанавливаться сферические линзы. Посредством их перемещения при необходимости можно регулировать расходимость и диаметр светового пучка, падающего на преобразователь и выходящего из него [8].



1 – юстировочный держатель кристалла с двумя вращательными степенями свободы, 2 – держатель четвертьволновой пластинки, 3 – держатель поляризатора (призмы Глана), 4 – двусный кристалл, 5 – зажимной винт, 6 – втулка, 7 – короткая втулка, 8 – шток, 9 – короткий шток, 10 – основание, 11 – упор для крышки, 12 – основание держателя, 13 – крышка, 14 – болт, 15 – винт, 16 – винт, 17 – шайба

Рисунок 1.1 – Чертеж преобразователя



1 – лазер; 2 – поляризатор; 3 – четвертьволновая пластинка; 4 – двуосный кристалл

Рисунок 1.2 – Оптическая схема действующего макета преобразователя

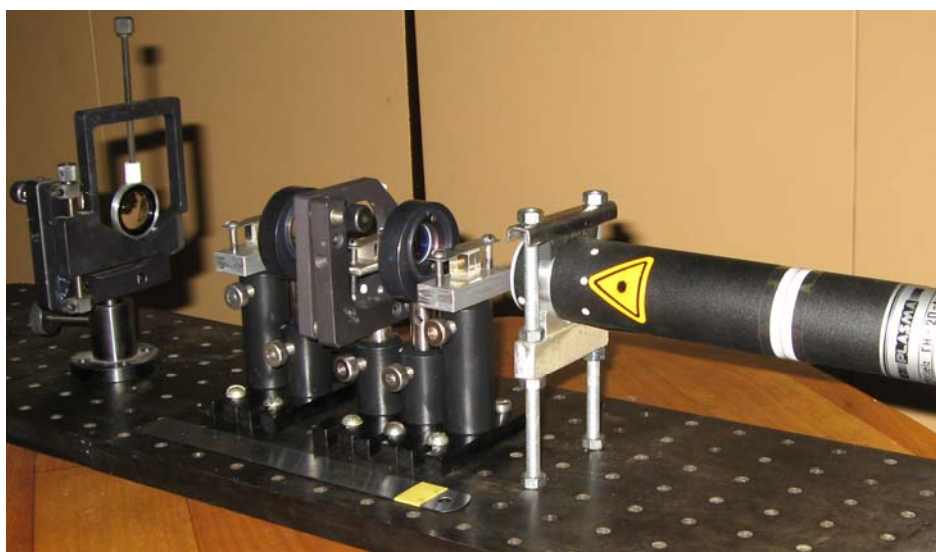


Рисунок 1.3 – Действующий макет преобразователя

В зависимости от взаимной ориентации в схеме четвертьволновых пластинок и поляризаторов на выходе преобразователя формируется световой пучок, имеющий или не имеющий ВДВФ (рисунок 2.1). Выходной однокольцевой пучок с ВДВФ, на оси которого интенсивность минимальна, может быть полезен для проведения импульсной лазерной сварки, после его преобразования в бесселев световой пучок ненулевого порядка – для управления микро- и наночастицами [9], а также для создания профилометров [10]. Вследствие низкой интенсивности света вблизи оси кольцевого пучка в профилометрии цилиндрических изделий удаётся существенно ослабить влияние нежелательной дифракции на торце изделия, обуславливающей искажение результатов измерений при использовании обычных гауссовых пучков. Конструкция преобразователя приспособлена для лёгкой замены двуосного кристалла одноосным, ориентированным соответствующим образом [11]–[13], и получения таким образом МКСП с ВДВФ второго порядка, так как при распространении циркулярно-поляризованного светового пучка в одноосном кристалле происходит изменение порядка

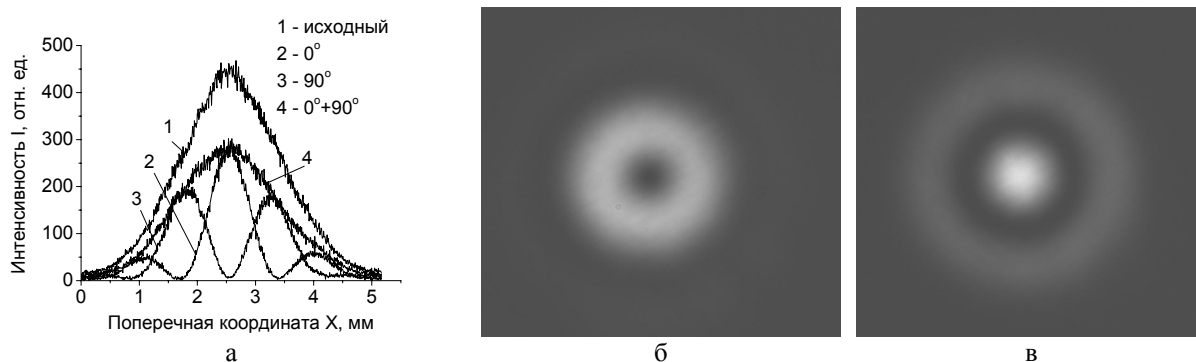
винтовой дислокации сразу на 2 единицы. При этом приосевая область низкой интенсивности полого пучка увеличивается в диаметре.

2 Анодизация лазерных световых пучков с применением преобразователя лазерного излучения на основе двуосного кристалла

Рассмотрим возможность применения МКСП без ВДВФ. Пучок без ВДВФ имеет распределение интенсивности, которая модулирована вдоль радиальной оси координат ρ в соответствии с функцией квадрата косинуса:

$$I(\rho) \sim \cos^2(Z2\pi\alpha L\rho/\lambda),$$

где λ – длина волны излучения; α – параметр анизотропии двуосного кристалла, L – длина кристалла, Z – коэффициент пропорциональности, в силу расходимости пучка зависящий от продольной координаты [6]–[8]. На оси выходных многокольцевых пучков без ВДВФ формируется максимум интенсивности, окруженный темным кольцом, в пределах которого при увеличении значения радиальной координаты интенсивность света сначала плавно уменьшается до 0 и затем вновь возрастает. Основная идея



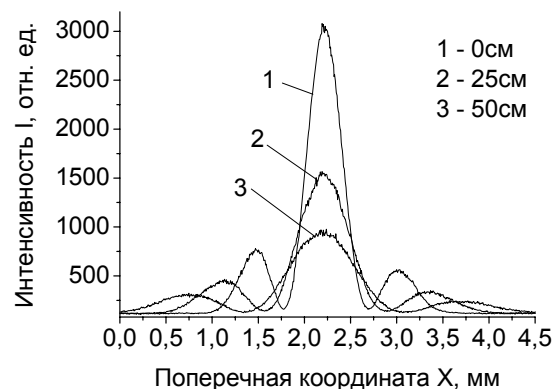
а – диаметральной, б – в сечении МКСП с ВДФ, в – в сечении МКСП без ВДФ
 Рисунок 2.1 – Распределения интенсивности света в поперечных сечениях пучков

метода аподизации состоит в том, чтобы разместить в поперечном сечении выходного многокольцевого пучка без ВДФ круглую диафрагму с диаметром апертуры, равным диаметру окружности, охватывающей центральный максимум пучка без ВДФ, на которой интенсивность излучения равна нулю. При этом выполняется условие $2Z2\pi\alpha L\rho/\lambda = \pi/2$, т.е. $4Z\alpha L\rho/\lambda = 1$. На рисунке 2.1, а показаны зарегистрированные распределения интенсивности в начальном пучке, не проходившем через систему «поляризатор – кристалл – анализатор» (рисунок 2.1, а; кривая 1), в пучке без ВДФ (рисунок 2.1, а; кривая 2), в отделяемом пучке с ВДФ (рисунок 2.1, а; кривая 3) и рассчитанное суммарное распределение интенсивности, полученное в результате сложения значений функций, представленных на рисунке 2.1, а кривыми 2 и 3, при каждом значении их аргумента.

Расходимость МКСП, полученных в результате преобразования, не отличается от расходимости исходных пучков, падающих на преобразователь. Для увеличения количества колец необходимо увеличить расходимость пучка, проходящего через кристалл, что легко достигается использованием сферической линзы, установленной в любом месте перед кристаллом. Изменение диаметрального распределения интенсивности МКСП за преобразователем при увеличении расстояния (в см) от фокусирующей линзы продемонстрировано на рисунке 2.2. При аподизации диафрагмированием выделяется только осевой максимум интенсивности, расходимость которого всегда меньше, чем расходимость исходного пучка. После кристалла в любом месте может быть установлена вторая сферическая линза, посредством которой регулируется расходимость выходного пучка.

Для аподизации методом диафрагмирования МКСП без ВДФ нами вначале была использована ирисовая диафрагма с десятью лепестками, посредством которой можно варьировать диаметр апертуры пропускаемого пучка. На рисунке 2.3 приведены для сравнения распределения интенсивностей в пучках, диафрагмированных

ирисовой диафрагмой оптимальной апертуры (2,84 мм) – прошедшем через преобразователь пучке без ВДФ (а) и исходном пучке (б).



Кристалл длиной 12 мм; линза с фокусным расстоянием $f = 16$ см

Рисунок 2.2 – Поперечные распределения интенсивности в МКСП вдоль диаметра поперечного сечения пучка за преобразователем на различных расстояниях от линзы (в см)

Аподизированный с применением кристалла преобразователя пучок имеет гораздо более однородное распределение интенсивности и существенно меньшую расходимость, чем диафрагмированный без использования кристалла исходный пучок. Если диаметр отверстия диафрагмы оптимален, в выходном аподизированном пучке дополнительные модуляции, связанные с дифракцией света на краю диафрагмы, проявляются слабее всего (рисунок 2.3, а). Однако, несмотря на довольно высокое качество аподизированного пучка, применяя ирисовую диафрагму, не удастся достичь полной гладкости распределения интенсивности пучка в силу отличия формы отверстия от круглой. В распределении интенсивности наблюдается азимутальная модуляция с осевой симметрией 10-го порядка, обусловленная тем, что выходное отверстие ирисовой диафрагмы представляет собой правильный десятиугольник. Даже при максимальной близости многоугольного края ирисовой диафрагмы к окружности с нулевой интенсивностью

вблизи углов многоугольной диафрагмы свет пропускается, а вблизи середин сторон – происходит его отсечение, пусть и небольшой, но всё же ненулевой интенсивности.

Пучки, аподизированные с применением круглой диафрагмы, имеют более гладкое распределение интенсивности. На рисунках 2.4 и 2.5 представлены распределения интенсивности в пучках – диафрагмированных круглой диафрагмой оптимального диаметра и недиафрагмированных.

Из полученных результатов следует, что наилучшие возможности для аподизации

световых пучков обеспечиваются при применении диафрагмы с отверстием, наиболее близким по форме к круглому. Однако, если можно допустить небольшие по контрасту модуляции интенсивности в выходном пучке, то для осуществления оперативного изменения параметров схемы более удобно использование ирисовой диафрагмы.

Аподизированные световые пучки без ВДВФ при распространении в пространстве столь же устойчивы, как и гауссовы световые пучки соответствующих поперечных размеров.

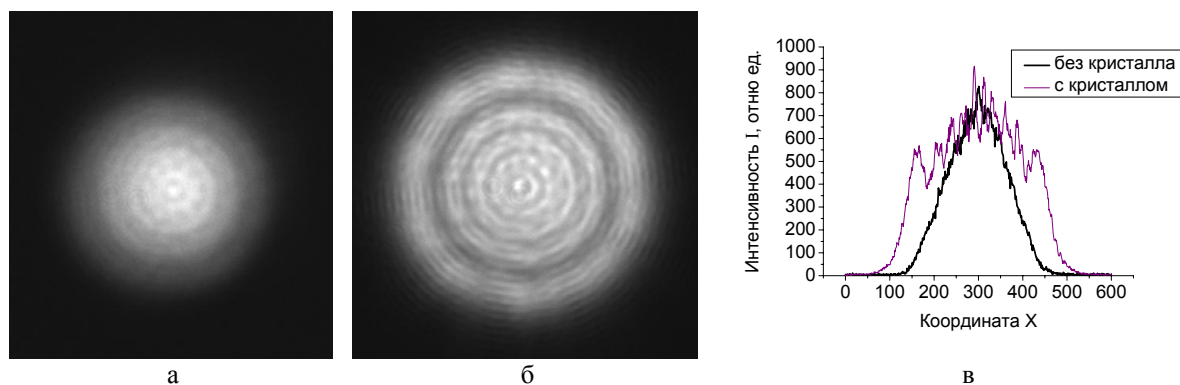
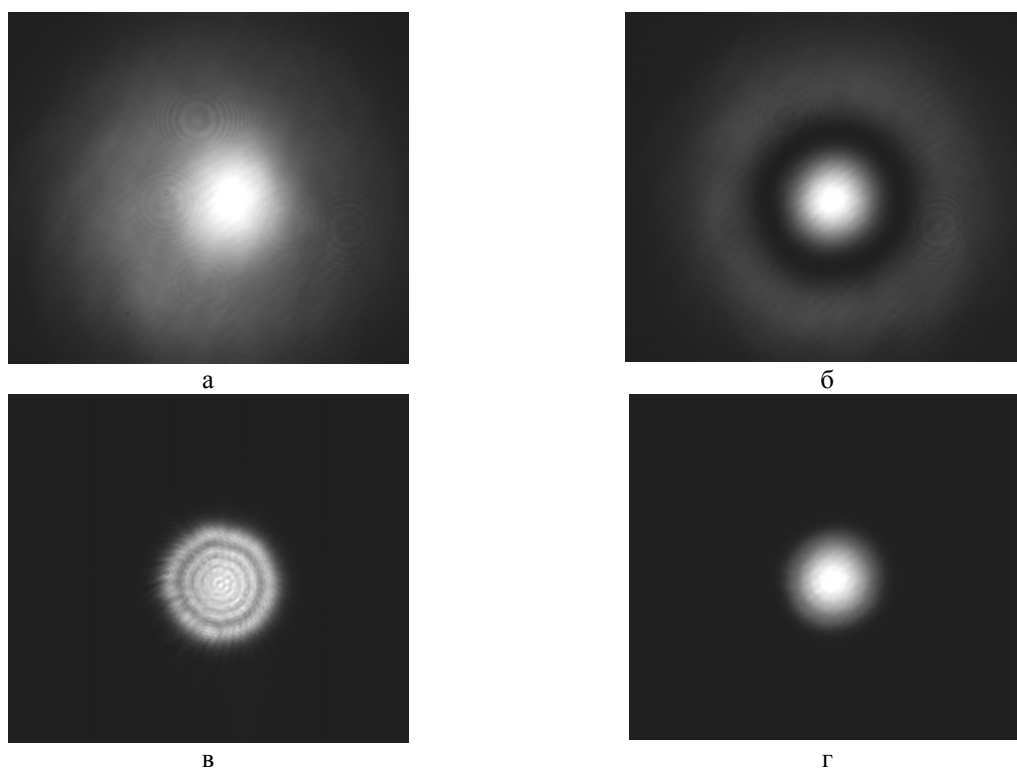


Рисунок 2.3 – Диафрагмированные ирисовой диафрагмой МКСП без ВДВФ (а) и исходный световой пучок (б) и распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка (в)



а – без кристалла, без диафрагмы, б – с кристаллом, без диафрагмы, в – без кристалла, с диафрагмой, г – с кристаллом, с диафрагмой

Рисунок 2.4 – Распределение интенсивности в поперечном сечении диафрагмированного и недиафрагмированного светового пучка

Кроме того, полученные описанным методом пучки отклоняются и фокусируются так же, как и обычные гауссовы, что делает возможным их применение в различных технологических и измерительных установках, а также в целях управления микро- и наночастицами.

Предложенная оптическая схема преобразователя проверена в работе с мощным непрерывным аргоновым лазером ЛГН-512. В силу довольно большой мощности лазерного излучения (до 4 Вт) работа с пучком этого лазера представляет высокую опасность для зрения исследователя, поэтому преобразователь обязательно должен быть заключен в кожух, препятствующий распространению излучения, отраженного от граней оптических элементов.

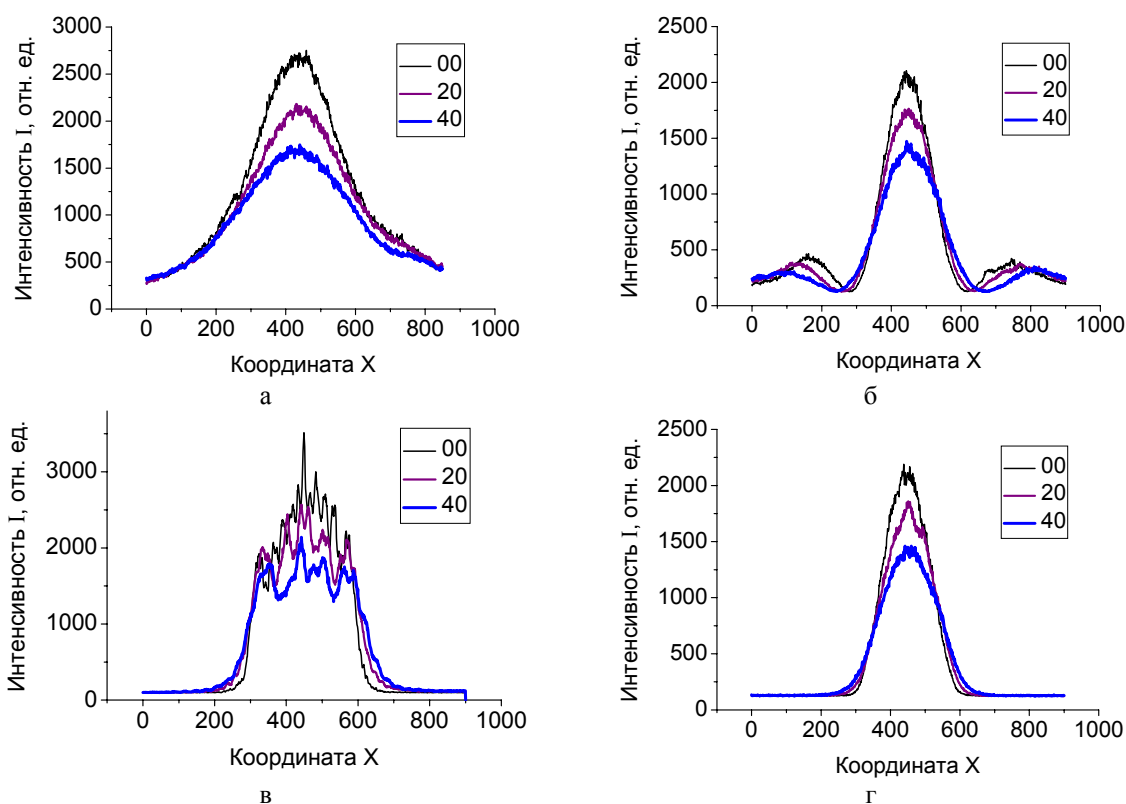
Для минимизации потерь излучения и предотвращения нагрева оптических элементов их входные и выходные грани должны быть просветлены для излучения используемого лазерного источника. Во избежание повреждения оптических элементов на них не должна попадать пыль, поэтому входное и выходное отверстия кожуха должны быть закрыты просветленными защитными стеклами. Начальный лазерный пучок имеет видимый диаметр около 4 мм, что обуславливает необходимость использования кристалла с достаточно большой апертурой.

Аналогичные требования предъявляются к конструкции преобразователя при работе с импульсными лазерами с модулированной добротностью. При аподизации излучения высокой мощности необходимо применять только металлические диафрагмы, предпочтительно охлаждаемые, посредством которых обеспечивается эффективное рассеяние поглощаемой световой энергии. Заметим, что все отмеченные выше закономерности аподизации с применением двуосного кристалла выполняются и при преобразовании мощных лазерных пучков.

Заключение

На основе двуосного кристалла, ориентированного вдоль бинормали, разработан компактный преобразователь лазерного излучения, сравнительно простой в изготовлении и сборке. Все оптические элементы, входящие в состав устройства, обладают высокой лучевой прочностью и пригодны для преобразования мощного лазерного излучения.

Авторами собран действующий макет преобразователя, с применением которого на основе сингулярных свойств кристаллов реализовано формирование многокольцевых световых пучков, которым свойственно наличие или отсутствие винтовой дислокации волнового фронта.



а – без кристалла, без диафрагмы, б – с кристаллом, без диафрагмы,
в – без кристалла, с диафрагмой, г – с кристаллом, с диафрагмой

Рисунок 2.5 – Диаметральное распределение интенсивности в поперечном сечении диафрагмированного и недиафрагмированного пучка при различных расстояниях от диафрагмы (указаны в сантиметрах числами в рамках)

Продемонстрирован метод аподизации световых пучков, обеспечивающий получение качественного распределения интенсивности в поперечном сечении светового пучка, который отличается от исходного меньшим диаметром и расходимостью.

Исследованы особенности световых пучков, аподизированных с применением кольцевой и ирисовой диафрагмы. Выявлены основания для выбора оптических и механических элементов в зависимости от требований к качеству выходного пучка. Оптические элементы схемы пригодны для аподизации мощных лазерных пучков – как импульсных, так и непрерывных. Отделяемое лазерное излучение является линейно поляризованным и также может быть использовано в сопутствующих процессах.

Разработанный метод аподизации аксиально симметричных световых пучков достаточно прост в реализации, характеризуется достаточно высоким (около 50%) КПД преобразования и не приводит к таким нежелательным явлениям, как дифракционное увеличение расходимости и радиальная модуляция интенсивности. Этими особенностями метода обусловлены перспективы его использования в нанотехнологиях для манипулирования частицами по принципу лазерного пинцета, для технологической обработки материалов, для воздействия на органические клетки и ее составляющие, а также возможности применения в интерферометрии и профилометрии.

Схема аподизирования с применением двусосного кристалла пригодна для формирования как сходящихся и расходящихся, так и коллимированных МКСП. Этим обеспечена возможность передачи их на большие расстояния и применения для исследования протяженных прозрачных сред, таких, например, как газы и жидкости. Вследствие малости поперечного размера сфокусированных световых пучков возможно их применение в различных нанотехнологиях в целях создания высокоградиентных оптических ловушек, а также для лазерной обработки материалов. Аподизированные световые пучки высокого качества, обладающие или не обладающие ВДВФ, с применением аксикона легко могут быть трансформированы в качественные бесселевы световые пучки (соответственно ненулевого и нулевого порядков). Полученные таким образом бесселевы пучки также можно применять для управления движением микрочастиц и организации нелинейно-оптических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аподизация световых пучков как метод повышения яркости лазерных установок на неодимовом стекле* / С.Г. Лукишова [и др.] // Труды ИОФАН. – 1987. – Т. 7. – С. 92–147.
2. *Soft diaphragms for apodization of powerful laser beams* / L.M. Vinogradsky [et al.] // *Advanced*

High-Power Lasers: Proc. SPIE. – 2000. – Vol. 3889. – P. 849–860.

3. *Senatsky, Yu.V.* Laser beams apodization by light scattering / Yu.V. Senatsky // *Conference on Lasers & Electro Optics (CLEO-2001) : tech. digest of the conf., Baltimore, USA, May 6-11 2001 / The Baltimore Convention Center.* – Baltimore, 2001. – P. 160.

4. *Pyatakhin, M.V.* Formation of the intensity distribution in laser beams due to diffraction on the structure of small-size optical inhomogeneties / M.V. Pyatakhin, Yu.V. Senatsky // *J. of Russian Laser Research.* – 2002. – Vol. 23, № 4. – P. 332–346.

5. *Аподизаторы для получения одномодовой генерации в лазерах* / Ю.В. Сенатский [и др.] // *Изв. РАН. Сер. физ.* – 2002. – Т. 66, № 7. – С. 919–923.

6. *Казак, Н.С.* Формирование бесселевых световых пучков в условиях внутренней конической рефракции / Н.С. Казак, Н.А. Хило, А.А. Рыжевич // *Квантовая электроника.* – 1999. – Т. 29, № 2. – С. 184–188.

7. *Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals* / T.A. King [et al.] // *Optics Communications.* – 2001. – Vol. 187, Issue 4–6. – P. 407–414.

8. *Казак, Н.С.* Формирование и преобразование бесселевых многокольцевых световых пучков / Н.С. Казак, Е.Г. Катранжи, А.А. Рыжевич // *ЖПС.* – 2002. – Т. 69, № 2. – С. 242–247.

9. *Рыжевич, А.А.* Новый метод формирования бесселевых световых пучков первого порядка и возможность их применения в нанотехнологиях / А.А. Рыжевич // *Опт. журнал.* – 2001. – Т. 68, № 3. – С. 54–55.

10. *Солоневич, С.В.* Лазерный профилометр на основе конических световых пучков для определения качества цилиндрических поверхностей / С.В. Солоневич, А.А. Рыжевич // *Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2006. – № 5. – С. 112–114.

11. *Хило, Н.А.* Преобразование порядка бесселевых световых пучков в одноосных кристаллах / Н.А. Хило, А.А. Рыжевич, Е.С. Петрова // *Квантовая электроника.* – 2001. – Т. 31, № 1. – С. 85–89.

12. *Propagation of high-order circularly-polarized Bessel beams and vortex generation in uniaxial crystals* / V.N. Belyi [et al.] // *Optical Engineering.* – 2011. – Vol. 50, 059001. – P. 1–9; doi:10.1117/1.3572109.

13. *Гиргель, С.С.* Бесселевы световые поля в одноосных кристаллах / С.С. Гиргель // *Гомельский научный семинар по теоретической физике, посвященный 100-летию со дня рождения Ф.И. Федорова : материалы, Гомель, 20–22 июня 2011 г. / ГГУ им. Ф. Скорины.* – Гомель, 2011. – С. 17–22.

Поступила в редакцию 17.11.11.

УДК 517.9

КУБИЧЕСКИЕ НЕАВТНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ В СМЫСЛЕ СОВПАДЕНИЯ ОТРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ВЛОЖИМЫМ СИСТЕМАМ

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE CUBIC NONAUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEMS, EQUIVALENT IN SENSE OF COINCIDENCE OF REFLECTING FUNCTIONS TO EMBEDDABLE SYSTEMS

M.S. Belokursky

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получены необходимые и достаточные условия, при которых неавтономные дифференциальные системы с кубической правой частью эквивалентны в смысле Мироненко вложимым системам.

Ключевые слова: отражающая функция, вложимая система, дифференциальная система, двухточечная краевая задача.

Necessary and sufficient conditions for nonautonomous differential system with cubic right-hand side to be equivalent to embeddable system in sense of Mironenko were obtained.

Keywords: reflecting function, embeddable system, differential system, two-point boundary-value problem.

Введение

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = S(t, x), \quad t \in R, \quad x^T = (x_1, \dots, x_m) \in R^n \quad (0.1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Отражающей функцией [1] системы (0.1) называется функция, определяемая формулой

$$F(t, x) = \varphi(-t; t, x),$$

где $\varphi(t; \tau, x)$ есть общее решение системы (0.1) в форме Коши. Для любого решения $x(t)$ этой системы верно тождество

$$F(t, x(t)) \equiv x(-t).$$

Это свойство можно принять и за определение отражающей функции [2, с. 16]. Несмотря на то, что отражающая функция определяется через решения системы, разработаны методы, которые позволяют находить отражающую функцию, не используя определение. Более того, даже зная лишь некоторые свойства (например, периодичность) отражающей функции можно уже исследовать поведение решений самой системы, не прибегая к построению отражающей функции. Больше о методе отражающей функции и его применении можно найти в [2]–[7], а также на сайте www.reflecting-function.narod.ru.

Простейшим квазимногочленом называется комплекснозначная функция переменного t вида $t^k e^{\nu t}$, где $k \in N_0, \nu \in C$. Всякая линейная комбинация простейших квазимногочленов с комплексными коэффициентами называется

квазимногочленом. Компонента x_i системы (0.1) называется вложимой [8, с. 47], если для любого решения $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ этой системы функция $x_i(t)$ является квазимногочленом (говоря о решениях системы, мы имеем в виду, что они действительны). Компонента x_i системы (0.1) вложима тогда и только тогда, когда для каждого решения $x(t)$ этой системы существует линейное стационарное уравнение вида

$$a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = 0,$$

для которого $x_i(t)$ является решением. Когда компонента $x_i(t)$ любого решения $x(t)$ системы (0.1) является одновременно и решением некоторого общего для всех решений $x(t)$ линейного стационарного уравнения, то эта компонента называется сильно вложимой. Дифференциальная система называется вложимой (сильно вложимой) если любая ее компонента вложима (сильно вложима).

Как вложимые, так и сильно вложимые системы, как правило, являются существенно нелинейными системами. В частности, как показано в [8] они могут иметь несколько положений равновесия, предельные циклы и иметь другие качественные свойства, присущие только нелинейным системам.

С другой стороны, эти системы интегрируются в элементарных функциях. Правило нахождения решений задач Коши для этих систем

см. в [8, с. 45]. Таким образом, мы можем найти отражающую функцию вложимой системы, и, значит, можем построить целый класс дифференциальных систем с такой же отражающей функцией [3, с. 71]:

$$\dot{x} = -0.5F_x(-t, F)F_t + F_x(-t, F)R(t, x) - R(-t, F),$$

где $R(t, x)$ есть произвольная вектор-функция. Дифференциальные системы из этого класса не обязаны быть вложимыми и интегрируемыми в квадратурах, однако они будут иметь те же качественные свойства, что и эквивалентная им вложимая система.

1 Полученные результаты

Ниже приведены теоремы, которые позволяют легко проверить любую кубическую относительно координат фазового вектора систему на предмет ее эквивалентности (в смысле совпадения отражающей функции) вложимым автономным системам

$$\dot{x} = x^2 y, \quad \dot{y} = -xy^2$$

или

$$\dot{x} = y(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x(x^2 + y^2).$$

Теорема 1.1. Из всех кубических относительно координат фазового вектора систем лишь непрерывно дифференцируемая по t дифференциальная система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(t)x + b(t)x^2 y, \\ \dot{y} &= c(t)y - b(t)xy^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

для коэффициентов которой выполнены условия:

- 1) функции $a(t)$ и $c(t)$ – нечетные;
- 2) справедливо соотношение

$$b(t) + b(-t) = 2 + 2t(a(t) + c(t)),$$

эквивалентна вложимой автономной системе

$$\dot{x} = x^2 y, \quad \dot{y} = -xy^2, \quad (1.2)$$

и при этом отражающая функция обеих этих систем имеет вид

$$F(t, x, y) = (xe^{-2by}, ye^{2ay})^T.$$

Доказательство этой теоремы разбивается на два этапа. Сначала необходимо убедиться, что данная функция $F(t, x, y)$ действительно является отражающей функцией вложимой автономной системы (1.2). Для этого достаточно проверить выполнение основного соотношения для отражающей функции этой системы. Затем мы берем произвольную кубическую дифференциальную систему

$$\dot{x} = m_{00} + m_{10}x + m_{01}y + m_{20}x^2 + \dots + m_{03}y^3,$$

$$\dot{y} = n_{00} + n_{10}x + n_{01}y + n_{20}x^2 + \dots + n_{03}y^3$$

и подставляем ее правую часть в основное соотношение для отражающей функции $F(t, x, y)$. Приводим подобные члены относительно степеней $x^0, x, y, x^2, \dots, y^3$ и приравняем их к нулю, чтобы основное соотношение выполнялось.

Отсюда получаем систему вида (1.1) и ограничения на ее коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$. Тем самым доказано, что только для кубических дифференциальных систем вида (1.1), функция $F(t, x, y)$ будет отражающей функцией. И, следовательно, система (1.1) и вложимая автономная система (1.2) эквивалентны.

Замечание 1.1. Из условий 1) и 2) теоремы следует, что коэффициент $b(t)$ имеет вид

$$b(t) = 1 + \alpha(t) + t(a(t) + c(t) + \beta(t)),$$

где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $\beta(t)$ – четная функция. Действительно, из условия 2) мы получаем четную часть функции $b(t)$:

$$\frac{b(t) + b(-t)}{2} = 1 + t(a(t) + c(t)).$$

Тогда нечетную часть функции $b(t)$ можно записать в виде $\alpha(t) + t\beta(t)$, где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $\beta(t)$ – четная функция.

Примером может служить дифференциальная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \sin t + x^2 y (1 + \sin^3 t), \\ \dot{y} &= y \sin t - xy^2 (1 + \sin^3 t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Первое условие теоремы, очевидно, выполняется. Проверим второе условие:

$$1 + \sin^3 t + 1 + \sin^3(-t) = 2 + 2t(-\sin t + \sin t).$$

Оба условия теоремы выполнены, поэтому дифференциальная система (1.3) эквивалентна вложимой автономной системе (1.2).

Теорема 1.2. Дифференциальная система (1.1) с 2ω -периодической по t правой частью не имеет других периодических решений, кроме решений, начинающихся при $t = -\omega$ на координатных осях.

Доказательство. Правая часть системы (1.1) 2ω -периодична по t , а ее решения однозначно определяются своими начальными данными. Согласно основной лемме [3, с. 65] решение $\varphi(t; -\omega, x)$ системы (1.1) будет 2ω -периодическим тогда и только тогда, когда x есть решение системы

$$\begin{aligned} xe^{2\omega xy} &= x, \\ ye^{-2\omega xy} &= y. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если $x = 0$, то оба уравнения системы (1.4) обращаются в верные равенства для любого y :

$$0 = 0, \quad y = y.$$

Поэтому $x = 0, y = y(t)$ есть решение системы (1.4). Если $x \neq 0$, то можно разделить на него обе части первого уравнения системы (1.4):

$$e^{2\omega xy} = 1.$$

Отсюда $y = 0$. Но $y = 0$ является решением и второго уравнения системы (1.4) при любом x . Имеем еще одно решение системы (1.4):

$$x = x(t), \quad y = 0.$$

Рассматривая второе уравнение системы (1.4) получаем те же самые решения.

Таким образом, 2ω -периодическими будут лишь те решения системы (1.1), которые начинаются на координатных осях. Теорема доказана.

Согласно основной лемме [2, с. 12], если мы знаем отражающую функцию $F(t, x, y)$, то отображение за период $[-\omega; \omega]$ имеет вид $F(-\omega, x, y)$. Периодическое решение устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда неподвижная точка отображения Пуанкаре устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива) [9, с. 177]. Исследование устойчивости неподвижной точки уже является алгебраической задачей.

Теорема 1.3. *Отображение за период $[-\omega; \omega]$ системы (1.1) имеет вид:*

$$P(x, y) = (xe^{2\omega xy}, ye^{-2\omega xy})^T.$$

Можно утверждать, что периодические решения системы (1.1) не будут устойчивыми, так как функция $ye^{2\omega xy}$ неограниченно возрастает при росте t .

Граничное условие двухточечной краевой задачи всегда можно записать в виде

$$\Phi(x(\beta), x(\alpha)) = 0.$$

С помощью замены $\tau = t - \frac{\alpha + \beta}{2}$ любая двухточечная задача вида $\Phi(x(\beta), x(\alpha)) = 0$ сводится к задаче вида

$$\Phi(x(s), x(-s)) = 0, \quad (1.5)$$

где $s = \frac{\beta - \alpha}{2}$. В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения из статьи [10, с. 775], которые можно сформулировать в виде утверждения.

Утверждение 1.1. *Решение системы (0.1) $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(s) = x_0$, будет решением задачи (0.1), (1.5) тогда и только тогда, когда оно продолжимо на $[-s, s]$ и является решением системы*

$$\Phi(x_0, F(s, x_0)) = 0.$$

Теорема 1.4. *Решение системы (1.1) $(x(t), y(t))^T$, удовлетворяющее начальному условию $x(s) = x_0, y(s) = y_0$, будет решением задачи (1.1), (1.5) тогда и только тогда, когда оно является решением системы*

$$\Phi_1(x_0, x_0 e^{-2sx_0 y_0}, y_0, y_0 e^{2sx_0 y_0}) = 0,$$

$$\Phi_2(x_0, x_0 e^{-2sx_0 y_0}, y_0, y_0 e^{2sx_0 y_0}) = 0.$$

Доказательство состоит в ссылке на утверждение 1.1.

Как было упомянуто выше, метод отражающей функции позволяет нам построить целый класс дифференциальных систем, решения которых будут иметь те же качественные свойства, что и вложимая автономная система (1.2).

В этом классе будут не только кубические системы вида (1.1), но и дифференциальные системы, решения которых мы не сможем записать в виде отношений, содержащих только квадратуры функций, задающих систему.

Теорема 1.5. *Из всех кубических относительно координат фазового вектора систем лишь непрерывно дифференцируемая по t дифференциальная система вида*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(t)x + c(t)y + b(t)y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= a(t)y - c(t)x - b(t)x(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (1.6)$$

для коэффициентов которой выполнены условия:

1) функции $a(t)$ и $c(t)$ – нечетные;

2) имеет место соотношение

$$b(t) + b(-t) = 2 + 4ta(t),$$

эквивалентна вложимой автономной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -x(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

и при этом отражающая функция обеих этих систем имеет вид

$$\begin{aligned} F(t, x, y) &= (x \cos 2(x^2 + y^2)t - y \sin 2(x^2 + y^2)t, \\ & x \sin 2(x^2 + y^2)t + y \cos 2(x^2 + y^2)t)^T. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.

Замечание 1.2. По аналогии с замечанием к теореме 1 из условий 1) и 2) теоремы 1.5 следует, что коэффициент $b(t)$ имеет вид

$$b(t) = 1 + \alpha(t) + 2t(a(t) + \beta(t)),$$

где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $\beta(t)$ – четная функция.

Теорема 1.6. *Дифференциальная система (1.6) имеет бесконечно много 2ω -периодических решений. Это те и только те решения, которые удовлетворяют начальному условию*

$$x^2(-\omega) + y^2(-\omega) = \frac{\pi k}{\omega},$$

где ω есть полупериод коэффициентов правой части.

Доказательство. Правая часть системы (1.6) 2ω -периодична по t , а ее решения однозначно определяются своими начальными данными. Согласно основной лемме [3, с. 65] решение $\varphi(t; -\omega, x)$ системы (1.6) будет 2ω -периодическим тогда и только тогда, когда $(x, y)^T$ есть решение системы

$$\begin{aligned} x \cos 2(x^2 + y^2)\omega + y \sin 2(x^2 + y^2)\omega &= x, \\ -x \sin 2(x^2 + y^2)\omega + y \cos 2(x^2 + y^2)\omega &= y. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Систему (1.7) можно записать иначе:

$$\begin{aligned} x(\cos 2(x^2 + y^2)\omega - 1) + y \sin 2(x^2 + y^2)\omega &= 0, \\ -x \sin 2(x^2 + y^2)\omega + y(\cos 2(x^2 + y^2)\omega - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система будет иметь не только нулевое решение, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cos 2(x^2 + y^2)\omega - 1 & \sin 2(x^2 + y^2)\omega \\ -\sin 2(x^2 + y^2)\omega & \cos 2(x^2 + y^2)\omega - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$(\cos 2(x^2 + y^2)\omega - 1)^2 + \sin^2 2(x^2 + y^2)\omega = 0.$$

Раскроем скобки и упростим уравнение:

$$2 - 2 \cos 2(x^2 + y^2)\omega = 0.$$

Или

$$\cos 2(x^2 + y^2)\omega = 1.$$

Решив это уравнение, получаем

$$x^2 + y^2 = \frac{\pi k}{\omega}, \quad k \in N_0.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.7. *Отображение за период $[-\omega; \omega]$ системы (1.6) имеет вид:*

$$P(x, y) = (x \cos 2(x^2 + y^2)\omega + y \sin 2(x^2 + y^2)\omega, \\ -x \sin 2(x^2 + y^2)\omega + y \cos 2(x^2 + y^2)\omega)^T.$$

Теорема 1.8. *Решение системы (1.6) $(x(t), y(t))^T$, удовлетворяющее начальному условию*

$$x(s) = x_0, y(s) = y_0,$$

будет решением задачи (1.6), (1.5) тогда и только тогда, когда оно является решением системы

$$\Phi_1(x_0, x_0 \cos 2(x_0^2 + y_0^2)s - y_0 \sin 2(x_0^2 + y_0^2)s, \\ y_0, x_0 \sin 2(x_0^2 + y_0^2)s + y_0 \cos 2(x_0^2 + y_0^2)s) = 0, \\ \Phi_2(x_0, x_0 \cos 2(x_0^2 + y_0^2)s - y_0 \sin 2(x_0^2 + y_0^2)s, \\ y_0, x_0 \sin 2(x_0^2 + y_0^2)s + y_0 \cos 2(x_0^2 + y_0^2)s) = 0.$$

Доказательство состоит в ссылке на утверждение 1.1

В качестве примера системы вида (1.6) можно рассмотреть дифференциальную систему

$$\dot{x} = y \sin \sqrt{7}t \cos t + (1 + \sin^5 t)y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x \sin \sqrt{7}t \cos t - (1 + \sin^5 t)x(x^2 + y^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко, В.И.* Об одном классе дифференциальных систем с элементарными решениями / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4, № 6. – С. 1154–1156.

2. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Мн. : Университетское, 1986. – 76 с.

3. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 196 с.

4. *Мироненко, В.И.* Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.

5. *Musafirov, E.V.* Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.

6. *Mironenko, V.I.* How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.

7. *Мироненко, В.И.* Временные симметрии уравнения Риккати / В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 31–33.

8. *Мироненко, В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Мн. : Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.

9. *Арнольд, В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М. : «Наука», 1971. – 240 с.

10. *Мироненко, В.И.* Метод отражающей функции для краевых задач / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 774–779.

Поступила в редакцию 27.05.11.

УДК 517.925

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ, НЕ ИЗМЕНЯЮЩИХ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В.А. Бельский¹, В.И. МIRONENKO²

¹Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

REFLECTING FUNCTION PRESERVING POLINOMIAL PERTURBATIONS OF ABEL EQUATION

V.A. Belsky¹, V.I. Mironenko²

¹Gomel Engineering Institute of the

Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel

²F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получены необходимые и достаточные условия, при которых для заданного уравнения Абеля $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ можно построить отличное от него уравнение Абеля с такой же отражающей функцией МIRONENKO, как и у исходного уравнения. Рассмотрены случаи, когда такие уравнения могут быть эффективно построены.

Ключевые слова: уравнение Абеля, отражающая функция, эквивалентные уравнения, полиномиальные возмущения.

In this paper the method of constructing of Abel differential equations possessing the same Mironenko reflecting function is studied. For another equation with the same reflecting function to be constructed, the necessary and sufficient conditions for given Abel equation $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ are achieved.

Keywords: Abel equation, reflecting function, equivalence of differential equations, polynomial perturbations.

Введение

Приведем здесь необходимые для понимания данной работы сведения из теории отражающей функции [1], [2, с. 62–69], [3, с. 11–16], [4]. Для дифференциальной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(t, x), \quad t \in R, \\ x^T &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset R^n, \end{aligned} \quad (0.1)$$

с общим решением $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ отражающая функция (ОФ) определяется формулой $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$. Если $F(t, x)$ – ОФ дифференциальной системы (0.1), а $x(t)$ – любое ее решение, определенное при $t = 0$, то $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$. Различные дифференциальные системы могут иметь одну и ту же ОФ. Системы с одной и той же ОФ называются **эквивалентными**. Все системы этого класса эквивалентности и только они могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}F_x^{-1}F_t + F_x^{-1}R(t, x) - R(-t, F),$$

где $F(t, x)$ – ОФ, характеризующая этот класс, $R(t, x)$ – произвольная вектор-функция, F_t и F_x – производные функции F по соответствующим переменным. Если система (0.1) 2ω -периодична по t , то $F(-\omega, x)$ является отображением за период $[-\omega, \omega]$ (отображение Пуанкаре).

Эквивалентные дифференциальные системы имеют одинаковые операторы сдвига [5, с. 11] вдоль решений на симметричном промежутке времени $[-\omega; \omega]$, и, значит, начальные данные $x(-\omega)$ решений краевых задач вида $\Phi(x(\omega), x(-\omega)) = 0$, где Φ – любая функция для этих систем, совпадают. Дифференцируемая функция $F(t, x)$ будет ОФ дифференциальной системы (0.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F(t, x)) \equiv 0$$

и начальному условию $F(0, x) \equiv x$.

В основной части данной работы будем широко использовать также следующую теорему

Теорема А [6] (см. также [2, с. 171]). Пусть непрерывно дифференцируемые вектор-функции

$$\Delta_i(t, x) = [\Delta_{1i}(t, x), \Delta_{2i}(t, x), \dots, \Delta_{ni}(t, x)]^T, \quad i = \overline{1, k}$$

являются решениями дифференциальной системы

$$\frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta(t, x) = 0. \quad (0.2)$$

Тогда все возмущенные системы вида

$$\dot{x} = X(t, x) + \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \Delta_i(t, x), \quad (0.3)$$

где $\alpha_i(t), i = \overline{0, k}$, – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентны системе (0.1) (k – любое число или ∞).

Для изучения дифференциальных систем, кроме работ Мироненко В.И., ОФ применялась также в работах Альсевич Л.А., Вересовича П.П., Кастрицы О.А., Мусафирова Э.В., Чжоу Чжиньсинь и других. В [2] приведен достаточно полный список работ по данной тематике.

1 Возмущения нестационарного уравнения Абеля

Опираясь на результаты теоремы А, для решения поставленных задач мы будем действовать следующим образом. Для исходного уравнения Абеля

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 \quad (1.1)$$

мы будем строить множество возмущенных уравнений (0.3). Как уже отмечалось, все эти уравнения эквивалентны уравнению (1.1). Тогда для того чтобы установить, будет ли другое уравнение Абеля эквивалентно исходному, достаточно будет проверить, содержится ли оно среди построенного класса уравнений (0.3). Или, другими словами, может ли оно быть записано в виде (0.3). Для построения возмущенных уравнений мы будем находить решения уравнения (0.2). Уравнение (0.2) имеет бесконечное множество решений, и найти их все в большинстве случаев невозможно. Поэтому мы ограничимся поисками только полиномиальных $\Delta(t, x)$ вида

$$\Delta(t, x) = r_0(t) + r_1(t)x + \dots + r_m(t)x^m, \quad (1.2)$$

где коэффициенты $r_j(t), j = \overline{0, m}$, будем считать нужное число раз дифференцируемыми на \mathbb{R} функциями. Такая задача оказывается значительно проще. Далее в уравнениях (0.2) и (0.3) мы будем считать $X(t, x)$ правой частью уравнения (1.1).

Лемма 1.1. Пусть в уравнении (1.1) множество нулей коэффициента $a_3(t)$ нигде не плотно на \mathbb{R} . Тогда если уравнение (0.2) имеет ненулевое решение в виде многочлена (1.2), то $m = 3$.

Доказательство. В уравнении (0.2) заменим $X(t, x)$ и $\Delta(t, x)$ соответствующими выражениями, причем $r_m(t)$ считаем отличным от тождественного нуля. Получим соотношение

$$\begin{aligned} & \dot{r}_0 + \dot{r}_1x + \dots + \dot{r}_m x^m + \\ & + (r_1 + 2r_2x + \dots + mr_m x^{m-1})(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) - \\ & - (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)(r_0 + r_1x + \dots + r_mx^m) = 0. \end{aligned}$$

Коэффициент при старшей степени в полученном равенстве $r_m a_3(m-3) \equiv 0$, а это может быть только при $m = 3$, что и требовалось доказать.

Итак, $\Delta(t, x)$ для уравнения (1.1) мы будем искать в виде

$$\Delta(t, x) = r_0(t) + r_1(t)x + r_2(t)x^2 + r_3(t)x^3. \quad (1.3)$$

Естественно, что нас интересуют функции $\Delta(t, x)$, отличные от тождественного нуля. Поэтому всюду в дальнейшем мы считаем $r_i(t)$ не обращающимися в нуль одновременно. Кроме того, мы будем считать функции $a_i(t), r_i(t), i = \overline{0, 3}$, необходимое число раз дифференцируемыми, чтобы все осуществляемые ниже действия имели смысл. При этом нам наверняка достаточно будет существования непрерывных производных третьего порядка, как у функций $a_i(t)$, так и у $r_i(t)$.

Лемма 1.2. Функция $\Delta(t, x)$ вида (1.3) является решением уравнения (0.2) тогда и только тогда, когда функции $r_0(t), r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ являются решением системы

$$\begin{aligned} & -r_2(t)a_3(t) + a_2(t)r_3(t) = 0, \\ & \dot{r}_3(t) - 2r_1(t)a_3(t) + 2a_1(t)r_3(t) = 0, \\ & \dot{r}_2(t) - 3r_0(t)a_3(t) + 3a_0(t)r_3(t) + \\ & + a_1(t)r_2(t) - a_2(t)r_1(t) = 0, \\ & \dot{r}_1(t) + 2a_0(t)r_2(t) - 2a_2(t)r_0(t) = 0, \\ & \dot{r}_0(t) + a_0(t)r_1(t) - a_1(t)r_0(t) = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть функция $\Delta(t, x)$ является решением уравнения (0.2). Заменим в уравнении (0.2) $\Delta(t, x)$ в соответствии с выражением (1.3), а $X(t, x)$ – правой частью уравнения (1.1). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} \Delta = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} [r_0(t) + r_1(t)x + r_2(t)x^2 + r_3(t)x^3] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [r_0(t) + r_1(t)x + r_2(t)x^2 + r_3(t)x^3] \cdot \\ & \cdot [a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3] - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} [a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3] \cdot \\ & \cdot [r_0(t) + r_1(t)x + r_2(t)x^2 + r_3(t)x^3]. \end{aligned}$$

Выполняя дифференцирование, приводя подобные слагаемые по степеням x и приравнявая полученное выражение к нулю, имеем

$$\begin{aligned} & (a_2r_3 - r_2a_3)x^4 + (\dot{r}_3 - 2r_1a_3 + 2a_1r_3)x^3 + \\ & + (\dot{r}_2 - 3r_0a_3 + 3a_0r_3 + a_1r_2 - a_2r_1)x^2 + \\ & + (\dot{r}_1 + 2a_0r_2 - 2a_2r_0)x + \dot{r}_0 + a_0r_1 - 2a_1r_0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\Delta(t, x)$ является решением уравнения (0.2), то каждое слагаемое в последнем уравнении обращается тождественно в нуль, и, значит, функции $r_i(t), i = \overline{0, 3}$ являются решением системы (1.4). Очевидно, что обратное утверждение также имеет место. Лемма доказана.

Таким образом, функции $r_i(t), i = \overline{0,3}$, должны удовлетворять переопределенной линейной дифференциально-алгебраической системе, дифференциальная часть которой – линейная система четвертого порядка. Любому решению $(r_0(t), r_1(t), r_2(t), r_3(t))^T$ этой переопределенной системы соответствует полиномиальное решение (1.3) уравнения (0.2) и наоборот. Так как любые $n = 5$ решений такой системы линейно зависимы, то у уравнения (0.2), если $X(t, x)$ – многочлен третьей степени, не может существовать более четырех линейно независимых решений.

Введем обозначение

$$\varphi(t) := 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 - 9(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2).$$

Лемма 1.3. В точках, где $a_3(t) \neq 0$, система (1.4) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} r_2a_3 &= a_2r_3, \quad 2r_1a_3 = \dot{r}_3 + 2r_3a_1, \quad (1.5) \\ 6r_0a_3^3 &= \dot{r}_3a_2a_3 + (6a_0a_3^2 + 2\dot{a}_2a_3 - 2a_2\dot{a}_3)r_3, \\ 3\ddot{r}_3a_3^2 &= [-6a_3^2a_1 + 2a_2^2a_3 + 3a_3\dot{a}_3]\dot{r}_3 + \\ &+ [6a_3(\dot{a}_3a_1 - a_3\dot{a}_1) - 4a_2(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2)]r_3, \\ 3a_3\varphi \dot{r}_3 &= 2r_3(3\dot{a}_3\varphi - a_3\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть функции $r_i(t), i = \overline{0,3}$ являются решением системы (1.4). Покажем, что из (1.4) следует (1.5). Первые два уравнения

$$r_2a_3 = a_2r_3, \quad (1.6)$$

$$r_1a_3 = \frac{1}{2}\dot{r}_3 + r_3a_1 \quad (1.7)$$

системы (1.5) совпадают с первыми уравнениями системы (1.4). Продифференцируем (1.6), помножим обе части на $a_3(t)$ и, используя само соотношение (1.6), приходим к соотношению

$$\dot{r}_3a_3^2 = \dot{r}_3a_3a_2 + (a_3\dot{a}_2 - \dot{a}_3a_2)r_3. \quad (1.8)$$

Продела аналогичные действия с (1.7), приходим к соотношению

$$\dot{r}_3a_3^2 = \frac{1}{2}\ddot{r}_3a_3 + (a_3a_1 - \frac{1}{2}\dot{a}_3)\dot{r}_3 - (\dot{a}_3a_1 - a_3\dot{a}_1)r_3. \quad (1.9)$$

Умножим третье уравнение системы (1.4) на a_3^2 и, используя соотношения (1.6)–(1.9), преобразуем его к виду

$$6r_0a_3^3 = \dot{r}_3a_2a_3 + (6a_0a_3^2 + 2\dot{a}_2a_3 - 2a_2\dot{a}_3)r_3. \quad (1.10)$$

Умножим четвертое уравнение системы (1.4) на a_3^3 и, используя соотношения (1.6)–(1.10), преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} 3\ddot{r}_3a_3^2 &= [-6a_3^2a_1 + 2a_2^2a_3 + 3a_3\dot{a}_3]\dot{r}_3 + \\ &+ [6a_3(\dot{a}_3a_1 - a_3\dot{a}_1) - 4a_2(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2)]r_3. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Наконец, последнее уравнение системы (1.4) умножим на a_3^3 и, используя предыдущие соотношения, запишем его в виде

$$\begin{aligned} a_3^2(27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 - 9(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2))\dot{r}_3 &= \\ = 2r_3[-3a_2a_3\ddot{a}_3 - 3a_1a_3^2\dot{a}_2 + 6a_1a_2\dot{a}_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + 9a_2\dot{a}_3^2 + 9\dot{a}_0a_3^3 + 3\ddot{a}_2a_3^2 - 9a_0a_3^2\dot{a}_1 - 3a_1a_3^2\dot{a}_1 + \\ + 2a_2^2a_3\dot{a}_2 - 2a_2^3\dot{a}_3 - 9a_3\dot{a}_3\dot{a}_2], \end{aligned}$$

или, с учетом принятых обозначений,

$$3a_3\varphi \dot{r}_3 = 2r_3(3\dot{a}_3\varphi - a_3\dot{\varphi}). \quad (1.12)$$

Итак, после преобразований мы из системы (1.4) получили систему (1.5). Покажем теперь, что и систему (1.5) можно преобразовать в систему (1.4). Пусть функции $r_i(t), i = \overline{0,3}$, являются решением системы (1.5). Ранее было показано, что из первых двух уравнений системы (1.5) следуют соответственно соотношения (1.6)–(1.7). Умножим третье уравнение системы (1.4) на a_3^2 и заменим в полученном уравнении $\dot{r}_3a_3^2, r_0a_3^3$ в соответствии с (1.6) и (1.10). Тогда указанное уравнение обратится в тождество. Умножим четвертое уравнение системы (1.4) на a_3^3 и заменим в полученном уравнении $r_2a_3, \dot{r}_3a_3^2, r_0a_3^3$ в соответствии с тождествами (1.6), (1.9), (1.10). При этом четвертое уравнение обращается в тождество.

Осталось показать, что пятое уравнение системы (1.4) также обращается в тождество в силу системы (1.5). Продифференцируем третье тождество системы (1.5) и выразим из него $\dot{r}_0a_3^3$. Умножим пятое уравнение системы (1.4) на a_3^4 и заменим в полученном уравнении $\dot{r}_0a_3^3, \ddot{r}_3a_3^2, r_0a_3^3, r_1a_3$ согласно соответствующим соотношениям. При этом рассматриваемое уравнение также обращается в тождество. Итак, мы показали, что, если $a_3(t) \neq 0$, решение системы (1.4) является решением системы (1.5) и наоборот. Лемма доказана.

Наша задача состоит в построении уравнения Абеля, эквивалентного заданному уравнению (1.1). Для решения этой задачи нам необходимо и достаточно знать функцию $\Delta(t, x)$, удовлетворяющую уравнению (0.2). Ниже мы приводим ряд утверждений, раскрывающих, при каких условиях такие функции существуют, а также в некоторых случаях выпишем эти функции в явном виде.

Теорема 1.1. Для того чтобы для уравнения Абеля (1.1) существовала хотя бы одна полиномиальная, тождественно не равная нулю, функция $\Delta(t, x)$ вида (1.3), удовлетворяющая уравнению (0.2), необходимо, чтобы функция $\varphi(t)$ удовлетворяла соотношению

$$\begin{aligned} 3a_3\varphi\ddot{\varphi} + 9\varphi(\dot{\varphi}\dot{a}_3 - \varphi\ddot{a}_3 - \varphi\dot{a}_3a_1 - \varphi a_3\dot{a}_1) + \\ + 6\varphi(\dot{\varphi}a_1a_3 + \varphi a_2\dot{a}_2) - 5a_3\dot{\varphi}^2 - 2a_2^2\varphi\dot{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Доказательство. Пусть функция $\Delta(t, x)$, не равная тождественно нулю и удовлетворяющая уравнению (0.2), существует. Согласно леммам 1.2 и 1.3, это означает, что существует

нетривиальное решение системы (1.5). Рассмотрим два последних тождества этой системы. Умножая тождество (1.11) на $\varphi(t)$, получим

$$3\ddot{r}_3 a_3^2 \varphi = [-6a_3^2 a_1 + 2a_2^2 a_3 + 3a_3 \dot{a}_3] \dot{r}_3 \varphi + [6a_3 (\dot{a}_3 a_1 - a_3 \dot{a}_1) - 4a_2 (\dot{a}_3 a_2 - a_3 \dot{a}_2)] r_3 \varphi. \quad (1.14)$$

Теперь продифференцируем равенство (1.12) и умножим полученное соотношение на $a_3(t)\varphi(t)$. Получим соотношение

$$\ddot{r}_3 a_3^2 \varphi^2 + \dot{r}_3 a_3 \varphi (3a_3 \dot{\varphi} - 5\dot{a}_3 \varphi) + 2r_3 a_3 \varphi (3\ddot{a}_3 \varphi + 2\dot{a}_3 \dot{\varphi} - a_3 \ddot{\varphi}) = 0. \quad (1.15)$$

Заменим в равенстве (1.15) выражения $\dot{r}_3 a_3 \varphi$ и $\ddot{r}_3 a_3^2 \varphi^2$ в соответствии с соотношениями (1.12) и (1.14). В результате получим тождество

$$(3a_3 \varphi \ddot{\varphi} + 9\varphi (\dot{\varphi} \dot{a}_3 - \varphi \ddot{a}_3 - \varphi \dot{a}_3 a_1 - \varphi a_3 \dot{a}_1) + 6\varphi (\dot{\varphi} a_1 a_3 + \varphi a_2 \dot{a}_2) - 5a_3 \dot{\varphi}^2 - 2a_2^2 \varphi \dot{\varphi}) r_3 = 0,$$

которое может выполняться в двух случаях:

1) функция

$$\Phi(t) := 3a_3 \varphi \ddot{\varphi} + 9\varphi (\dot{\varphi} \dot{a}_3 - \varphi \ddot{a}_3 - \varphi \dot{a}_3 a_1 - \varphi a_3 \dot{a}_1) + 6\varphi (\dot{\varphi} a_1 a_3 + \varphi a_2 \dot{a}_2) - 5a_3 \dot{\varphi}^2 - 2a_2^2 \varphi \dot{\varphi}$$

тождественно равна нулю. Тогда теорема справедлива.

2) $r_3 \equiv 0$ на некотором интервале. В этом случае, как следует из первых трех соотношений системы (1.5), на этом интервале $r_2 \equiv r_1 \equiv r_0 \equiv 0$, т. е. $\Delta(t, x) \equiv 0$. Таким образом, в этом случае нужного нам $\Delta(t, x)$ не существует. Но по нашему предположению ненулевое $\Delta(t, x)$ существует. А потому имеет место (1.13).

Кроме того, могут быть случаи, когда r_3 , не являясь тождественным нулем, обращается в нуль в отдельных изолированных точках. Тогда, как и ранее, мы докажем что функция $\Phi(t)$ обращается в нуль всюду, кроме этих изолированных точек. Тогда из непрерывности $\Phi(t)$ следует, что она будет равна нулю и в рассматриваемых точках. Теорема доказана.

Замечание 1.1. Мы доказали теорему 1.1 в том случае, когда $a_3(t)$ не обращается в нуль. Но она будет справедлива и в том случае, когда $a_3(t)$ обращается в нуль лишь в изолированных точках. Доказательство этого достигается доопределением найденной функции $\Delta(t, x)$ до непрерывности.

Замечание 1.2. Из доказанных ниже теорем 1.2 и 1.3 следует, что соотношение (1.13) является не только необходимым, но и достаточным условием для существования уравнения Абеля, эквивалентного данному и несовпадающего с ним.

Теорема 1.2. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют соотношению (1.13), причем $\varphi(t)$ может обращаться в нуль лишь в

изолированных точках. Тогда для уравнения (1.1) существует единственное с точностью до постоянного множителя $\Delta(t, x)$ вида (1.3), причем всюду там, где $\varphi(t)$ отлично от нуля, его коэффициенты находятся по формулам

$$r_0(t) = c \frac{3\varphi(3a_3 a_0 + \dot{a}_2) - a_2 \dot{\varphi}}{9\sqrt[3]{\varphi^5}},$$

$$r_1(t) = c \frac{3\varphi(a_3 a_1 + \dot{a}_3) - a_3 \dot{\varphi}}{3\sqrt[3]{\varphi^5}}, \quad (1.16)$$

$$r_2(t) = c \frac{a_3 a_2}{\sqrt[3]{\varphi^2}},$$

$$r_3(t) = c \frac{a_3^2}{\sqrt[3]{\varphi^2}},$$

где c – произвольная постоянная.

Доказательство. Из лемм 1.2 и 1.3 следует, что существование функции $\Delta(t, x)$ вида (1.3) равносильно существованию нетривиального решения системы (1.5). Последнее уравнение системы (1.5) представляет собой линейное уравнение относительно неизвестной функции $r_3(t)$. При выполнении условий теоремы его решение всегда существует, единственно и имеет вид

$$r_3(t) = c \frac{a_3^2(t)}{\sqrt[3]{\varphi^2(t)}}. \quad (1.17)$$

Выполнение условия (1.13) означает, что найденная функция $r_3(t)$ удовлетворяет четвертому уравнению системы (1.5). Используя выражение (1.17), из первых трех уравнений системы (1.5) определяем остальные коэффициенты r_0, r_1, r_2 функции $\Delta(t, x)$. Вычисления показывают, что они имеют вид (1.16). Тогда из (1.16) следует, что функция $\Delta(t, x)$ вида (1.3) единственна и определена с точностью до постоянного множителя. Теорема доказана.

Из теоремы А следует, что, при выполнении условий теоремы 1.2, любое уравнение Абеля, которое может быть записано в виде

$$\dot{x} = a_0 + \alpha(t) \frac{3\varphi(3a_3 a_0 + \dot{a}_2) - a_2 \dot{\varphi}}{9\sqrt[3]{\varphi^5}} + \left(a_1 + \alpha(t) \frac{3\varphi(a_3 a_1 + \dot{a}_3) - a_3 \dot{\varphi}}{3\sqrt[3]{\varphi^5}} \right) x + \left(a_2 + \alpha(t) \frac{a_3 a_2}{\sqrt[3]{\varphi^2}} \right) x^2 + \left(a_3 + \alpha(t) \frac{a_3^2}{\sqrt[3]{\varphi^2}} \right) x^3, \quad (1.18)$$

где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная скалярная нечетная функция, эквивалентно исходному уравнению Абеля (1.1). Т.е. построен класс уравнений (1.18), эквивалентных уравнению (1.1).

Замечание 1.3. В теореме 1.2 мы полагали, что $\varphi(t) \neq 0$. В тех точках t_i , где $\varphi(t_i) = 0$ уравнение (1.18) также может быть определено, но не

для любой произвольной непрерывной нечетной функции $\alpha(t)$, а лишь для таких $\alpha(t)$, для которых существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_i} \alpha(t) \frac{3\varphi(3a_3a_0 + \dot{a}_2) - a_2\dot{\varphi}}{9\sqrt[3]{\varphi^5}},$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i} \alpha(t) \frac{3\varphi(a_3a_1 + \dot{a}_3) - a_3\dot{\varphi}}{3\sqrt[3]{\varphi^5}},$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i} \alpha(t) \frac{a_3a_2}{\sqrt[3]{\varphi^2}}, \quad \lim_{t \rightarrow t_i} \alpha(t) \frac{a_3^2}{\sqrt[3]{\varphi^2}},$$

и поэтому коэффициенты уравнения (1.18) в точках t_i можно доопределить до непрерывности.

Теорема 1.3. Пусть для уравнения Абеля (1.1) имеет место соотношение $\varphi(t) \equiv 0$. Тогда для этого уравнения существуют две линейно независимые функции $\Delta(t, x)$ вида (1.3), удовлетворяющие уравнению (0.2).

Доказательство. Из лемм 1.2 и 1.3 следует, что существование функции $\Delta(t, x)$ равносильно существованию решения системы (1.5). При $\varphi(t) \equiv 0$ последнее уравнение системы (1.5) обращается в тождество, а необходимое условие (1.13) выполняется автоматически. Таким образом, неизвестная функция $r_3(t)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$3\dot{r}_3 a_3^2 = [-6a_3^2 a_1 + 2a_2^2 a_3 + 3a_3 \dot{a}_3] \dot{r}_3 + [6a_3(\dot{a}_3 a_1 - a_3 \dot{a}_1) - 4a_2(\dot{a}_3 a_2 - a_3 \dot{a}_2)] r_3. \quad (1.19)$$

В силу сделанных предположений о коэффициентах уравнения (1.1) решение уравнения (1.19) существует и может быть записано в виде $r_3(t) = c_1 r_{31}(t) + c_2 r_{32}(t)$, где $r_{31}(t), r_{32}(t)$ – два линейно независимых решения этого уравнения. Заменим в первых трех уравнениях системы (1.5) $r_3(t)$ на найденную функцию $r_{31}(t)$. Из полученных соотношений определим остальные коэффициенты $r_{01}(t), r_{11}(t), r_{21}(t)$ функции $\Delta_1(t, x)$. Заменяя в рассматриваемых уравнениях $r_3(t)$ на $r_{32}(t)$ и действуя аналогично, вычислим остальные коэффициенты $r_{02}(t), r_{12}(t), r_{22}(t)$ функции $\Delta_2(t, x)$. Таким образом, нами построены две линейно независимые функции

$$\Delta_1(t, x) = r_{01}(t) + r_{11}(t)x + r_{21}(t)x^2 + r_{31}(t)x^3,$$

$$\Delta_2(t, x) = r_{02}(t) + r_{12}(t)x + r_{22}(t)x^2 + r_{32}(t)x^3.$$

Теорема доказана.

Основываясь на доказанной теореме, а также в силу теоремы А в случае, когда $\varphi(t) \equiv 0$, мы для уравнения Абеля (1.1) можем построить множество эквивалентных ему уравнений

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + \alpha_1(t)\Delta_1(t, x) + \alpha_2(t)\Delta_2(t, x),$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – пробегают класс непрерывных скалярных нечетных функций.

Пример 1.1. Любое уравнение вида $\dot{x} = \cos t + (x - \sin t)^3(1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)t) + \frac{1}{2}\alpha_2(t)(x - \sin t)$ (1.20)

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно уравнению

$$\dot{x} = (x - \sin t)^3 + \cos t. \quad (1.21)$$

Действительно, для уравнения (1.21) имеем $\varphi(t) \equiv 0$. Уравнение (1.19) принимает вид $\dot{r}_3 = 0$, откуда $r_{31} = 1, r_{32} = t$. Из трех первых формул системы (1.5) определяем остальные коэффициенты функций $\Delta_1(t, x), \Delta_2(t, x)$. Эти функции имеют вид

$$\Delta_1(t, x) = (x - \sin t)^3,$$

$$\Delta_2(t, x) = \frac{1}{2}(x - \sin t) + t(x - \sin t)^3.$$

Возмущая уравнение (1.21) с помощью найденных $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$, получим (1.20).

Замечание 1.4. Пусть в уравнении (1.1) коэффициенты $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ заданы и не могут быть изменены, а $a_0(t)$ – произвольный коэффициент. Тогда нетрудно показать, что $a_0(t)$ можно подобрать таким образом, что система (1.5) всегда будет иметь решение. При этом если

$$a_0(t) \equiv \frac{1}{27a_3^2}(-2a_2^3 + 9a_1a_2a_3 + 9(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2)),$$

то, согласно теореме 1.3, существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t, x), \Delta_2(t, x)$ с указанными выше свойствами. Если

$$a_0(t) \equiv \frac{1}{27a_3^2}(\varphi - 2a_2^3 + 9a_1a_2a_3 + 9(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2)),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ не равно тождественно нулю решение уравнения (1.13), то, согласно теореме 1.2, существует лишь одна функция $\Delta(t, x)$, не изменяющая ОФ уравнения (1.1).

Итак, мы показали, что теоремы 1.2 и 1.3 дают нам необходимые и достаточные условия существования функции (или двух линейно-независимых функций) $\Delta(t, x)$ такой, что возмущенное уравнение вида

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + \sum_i \alpha_i(t)\Delta_i(t, x) \quad (1.22)$$

будет эквивалентно данному уравнению Абеля (1.1). В частности, когда выполнено условие (1.13), а $\varphi(t)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках, мы можем эффективно построить функцию $\Delta(t, x)$, вычислив ее коэффициенты в соответствии с формулами (1.16), и затем построить уравнения вида (1.22).

Рассмотрим некоторые другие случаи, когда мы можем эффективно построить функцию $\Delta(t, x)$, не изменяющую ОФ уравнения (1.1).

Теорема 1.4. Пусть для уравнения (1.1) выполняется условие $\varphi(t) \equiv 0$ и, кроме того,

$$3a_3(\dot{a}_3 a_1 - a_3 \dot{a}_1) - 2a_2(\dot{a}_3 a_2 - a_3 \dot{a}_2) \equiv 0. \quad (1.23)$$

Тогда существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t, x), \Delta_2(t, x)$ вида (1.3), такие что уравнение

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + \alpha_1(t)\Delta_1(t, x) + \alpha_2(t)\Delta_2(t, x),$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно исходному уравнению (1.1). При этом там, где $\alpha_3(t) \neq 0$, коэффициенты этих функций вычисляются, соответственно, по формулам

$$r_{01} = \frac{a_0}{a_3} - \frac{1}{3a_3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a_2}{a_3} \right), \quad (1.24)$$

$$r_{11} = \frac{a_1}{a_3}, \quad r_{21} = \frac{a_2}{a_3}, \quad r_{31} = 1,$$

$$r_{02} = \frac{a_2 \psi(t)}{6a_3} + \left[\frac{a_0}{a_3} - \frac{1}{3a_3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a_2}{a_3} \right) \right] \int a_3 \psi(t) dt,$$

$$r_{12} = \frac{\psi(t)}{2} + \frac{a_1}{a_3} \int a_3 \psi(t) dt, \quad (1.25)$$

$$r_{22} = \frac{a_2}{a_3} \int a_3 \psi(t) dt, \quad r_{32} = \int a_3 \psi(t) dt,$$

где $\psi(t) := \exp \left(\int \frac{2a_2^2 - 6a_3 a_1}{3a_3} dt \right)$.

Доказательство. Существование двух линейно независимых функций $\Delta_1(t, x), \Delta_2(t, x)$ вида (1.3) следует из теоремы 3. Функцию $r_3(t)$ определим из уравнения (1.19), которое в силу тождества (1.23) принимает вид

$$\ddot{r}_3 = \left(\frac{2a_2^2 - 6a_3 a_1}{3a_3} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \dot{r}_3,$$

а его фундаментальная система решений

$$r_{31} = 1, \quad r_{32} = \int a_3(t) \psi(t) dt. \quad (1.26)$$

Заменяя поочередно в трех первых уравнениях системы (1.5) $r_3(t)$ в соответствии с (1.26), определим из них остальные коэффициенты функций $\Delta_1(t, x), \Delta_2(t, x)$. Вычисления показывают, что эти коэффициенты имеют вид (1.24), (1.25). Таким образом, построены две линейно независимые функции вида (1.3). Теорема доказана.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = t^3 - 1 + 3t^2 x + 3t x^2 + x^3. \quad (1.27)$$

Для него выполняются все условия теоремы 1.4. Для построения функций $\Delta_1(t, x), \Delta_2(t, x)$ воспользуемся формулами (1.24) и (1.25). Получим

$$\Delta_1(t, x) = t^3 - 2 + 3t^2 x + 3t x^2 + x^3,$$

$$\Delta_2(t, x) = t^4 - \frac{3}{2}t + (3t^3 + \frac{1}{2})x + 3t^2 x^2 + t x^3.$$

Тогда все уравнения вида

$$\dot{x} = (t^3 - 1)[1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)t] - \alpha_1(t) - \frac{1}{2}\alpha_2(t)t + 3t^2[1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)t + \frac{1}{2}\alpha_2(t)]x + 3t[1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)t]x^2 + [1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)t]x^3,$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентны уравнению (1.27) и между собой.

2 Возмущения уравнения Абеля с постоянными коэффициентами

Пусть в уравнении (1.1) все коэффициенты $a_i(t) = const, a_3 \neq 0$. В этом случае для уравнения (1.1) всегда существует эквивалентное ему другое уравнение Абеля, и мы можем его построить.

Обозначим $\varphi_0 := 27a_0 a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1 a_2 a_3$. Отметим, что для уравнения (1.1) с постоянными коэффициентами тождество (1.13) всегда выполняется.

Пусть $\varphi_0 \neq 0$. Тогда, как следует из теоремы 1.2, для такого уравнения существует единственная функция $\Delta(t, x)$ вида (1.3). Легко показать, что ее можно записать в виде

$$\Delta(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (2.1)$$

и поэтому любое уравнение вида

$$\dot{x} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)(1 + \alpha(t))$$

эквивалентно уравнению (1.1). Этот случай тривиален и не представляет для нас интереса, так как к нему можно прийти заменой независимого переменного.

Обозначим $\psi_0 := \frac{-6a_3 a_1 + 2a_2^2}{3a_3}$.

Пусть $\varphi_0 = 0$. Этот случай представляет собой следствие теоремы 1.3.

Теорема 2.1. Пусть $\varphi_0 = 0$. Тогда для уравнения (1.1) с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t, x), \Delta_2(t, x)$ вида (1.3), такие что уравнение

$$\dot{x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \alpha_1(t)\Delta_1(t, x) + \alpha_2(t)\Delta_2(t, x),$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно уравнению (1.1). При этом эти функции могут быть записаны в виде

1) при $\psi_0 = 0$ $\Delta_1(t, x)$ определяется формулой (2.1),

$$\Delta_2(t, x) = \frac{a_2 + 6a_0 a_3 t}{6a_3^2} + \frac{1 + 2a_1 t}{2a_3} x + \frac{a_2 t}{a_3} x^2 + t x^3,$$

2) при $\psi_0 \neq 0$ $\Delta_1(t, x)$ определяется формулой (2.1),

$$\Delta_2(t, x) = \frac{e^{\psi_0 t}}{\psi_0} \left(\frac{\psi_0 a_2 + 6a_0 a_3}{6a_3^2} + \frac{\psi_0 + 2a_1}{2a_3} x + \frac{a_2}{a_3} x^2 + x^3 \right).$$

Доказательство. Существование двух линейно независимых функций $\Delta_1(t, x)$, $\Delta_2(t, x)$ следует из теоремы 1.3. При этом последнее уравнение системы (1.5) обращается в тождество, а остальные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} r_2 a_3 &= a_2 r_3, \quad 2r_1 a_3 = \dot{r}_3 + 2r_3 a_1, \\ 6r_0 a_3^3 &= \dot{r}_3 a_2 a_3 + 6a_0 a_3^2 r_3, \\ 3\dot{r}_3 a_3^2 &= [-6a_3^2 a_1 + 2a_2^2 a_3] \dot{r}_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Четвертое уравнение принимает вид $\ddot{r}_3 = 0$ при $\psi_0 = 0$ или $\ddot{r}_3 = \psi_0 \dot{r}_3$ при $\psi_0 \neq 0$. Это уравнение имеет два линейно независимых решения. Вычисляя эти функции и подставляя их в остальные уравнения системы (2.2), построим линейно независимые функции $\Delta_1(t, x)$, $\Delta_2(t, x)$ в каждом из случаев 1) и 2). Теорема доказана.

Пример 2.1. Воспользуемся доказанной теоремой и построим эквивалентные уравнения для уравнения $\dot{x} = -10 + 3x + 6x^2 + x^3$.

Имеем $\varphi_0 = 0$ и $\psi_0 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_1(t, x) &= -10 + 3x + 6x^2 + x^3, \\ \Delta_2(t, x) &= e^{18t} (8 + 12x + 6x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Поэтому любое уравнение, которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [-10 - 10\alpha_1(t) + 8\alpha_2(t)e^{18t}] + \\ &+ [3 + 3\alpha_1(t) + 12\alpha_2(t)e^{18t}]x + \\ &+ 6[1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)e^{18t}]x^2 + [1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)e^{18t}]x^3, \end{aligned}$$

где $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно исходному уравнению.

Заключение

Итак, мы показали, что если для уравнения Абеля (1.1) существует полиномиальное возмущение $\Delta(t, x)$, удовлетворяющее уравнению (0.2) и потому не изменяющее отражающей функции исходного уравнения, то это $\Delta(t, x)$ является многочленом третьей степени. При этом если

коэффициенты уравнения удовлетворяют соотношению $\varphi(t) \equiv 0$, то для такого уравнения существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$ с указанными выше свойствами. Если же указанное соотношение не выполняется, то существует и притом единственное $\Delta(t, x)$ (с точностью до постоянного множителя) только в случае, если коэффициенты уравнения удовлетворяют тождеству (1.13). Последнее соотношение, как показано, является необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения уравнения (0.2) в виде многочлена третьей степени. Также мы установили, что для любого стационарного уравнения Абеля существуют две линейно независимые полиномиальные функции $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$, не изменяющие отражающей функции исходного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. МIRONENKO, В.И. О методе, позволяющем находить начальные данные периодических решений дифференциальных систем и сравнивать отображения за период / В.И. МIRONENKO // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 14. – № 11. – С. 1985–1994.
2. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. МIRONENKO. – Гомель : УО ГГУ им. Ф. СКОРИНЫ, 2004. – 196 с.
3. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. МIRONENKO. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.
4. MIRONENKO, V.I. Reflecting function [Electronic resource]. – 2010. – Mode of access : <http://www.reflecting-function.narod.ru>. – Date of access : 16.05.2011.
5. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ. – М. : Наука, 1966. – 332 с.
6. МIRONENKO, В.В. Возмущения дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. МIRONENKO // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 10. – С. 1325–1332.

Поступила в редакцию 20.05.11.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.Ф. Васильев¹, Т.И. Васильева²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ON FINITE GROUPS WITH GENERALLY SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.F. Vasilyev¹, T.I. Vasilyeva²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \dots, n$. В работе изучается класс групп $w\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$ и всякая силовская подгруппа группы G является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . Получены свойства класса $w\mathfrak{F}$. В частности, для наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} доказано, что класс $w\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа, наследственная формация, насыщенная формация.

Let \mathfrak{F} be a non-empty formation. A subgroup H of group G is called \mathfrak{F} -subnormal in G if either $H = G$ or there is a chain of subgroups $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ such that $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ for every $i = 1, \dots, n$. In the work the class of groups $w\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$ and every Sylow subgroup of G is \mathfrak{F} -subnormal in G are studied. Properties of the class $w\mathfrak{F}$ are obtained. In particular, for hereditary saturated formation \mathfrak{F} it is proved that the class $w\mathfrak{F}$ is a hereditary saturated formation. Necessary and sufficient conditions are found, at which $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, \mathfrak{F} -subnormal subgroup, hereditary formation, saturated formation.

Введение

Знание свойств вложения силовских подгрупп в группу позволяет во многих случаях найти структуру самой группы. Например, группа нильпотентна, если любая ее силовская подгруппа субнормальна в ней. В 1969 году Т.О. Хоукс [1], используя формационный подход, ввел понятие \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы в конечной разрешимой группе. Предложенная им идея состояла в выделении в группе с помощью непустой насыщенной формации \mathfrak{F} семейства подгрупп, которые имеют свойства, аналогичные свойствам субнормальных подгрупп, и совпадают с последними в случае, когда \mathfrak{F} есть формация \mathfrak{N} всех нильпотентных групп. В 1978 году Л.А. Шеметков в монографии [2] распространил понятие \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы на произвольные конечные группы.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G (обозначается $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$), если либо $H = G$, либо существует цепь максимальных подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Понятие \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы активно изучалось в различных направлениях и

нашло многочисленные приложения (см., например, [3], [4]).

В работе [5] было начато рассмотрение следующей проблемы. Пусть \mathfrak{F} – формация. Что можно сказать о структуре группы G , если все ее силовские подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в G ? В [6]–[9] были продолжены исследования по данной проблеме. Следующие полученные нами результаты относятся к этому направлению.

Определение. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Определим класс групп $w\mathfrak{F}$ следующим образом: $w\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$ и всякая силовская подгруппа группы G является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G .

По определению, единичная группа принадлежит $w\mathfrak{F}$.

Теорема А. Пусть \mathfrak{X} – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) для любой наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} выполняется равенство

$$w\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X};$$

2) для любой насыщенной формации \mathfrak{F} , состоящей из метанильпотентных групп, выполняется равенство $w\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$;

3) формация \mathfrak{X} состоит из метанильпотентных групп.

Ввиду того что формация \mathfrak{U} всех сверхразрешимых групп состоит из метанильпотентных групп, получается

Следствие А.1. $w\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{U}$.

Теорема В. Если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, то $w\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

Теорема С. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$;

2) если G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа, то G является либо группой простого порядка, либо бипримарной дисперсивной группой; если G – неразрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа и $\Phi(G) = 1$, то G – такая монолитическая группа, что $\text{Soc}(G)$ – неабелева группа и $G/\text{Soc}(G)$ – примарная группа.

Напомним, что формация \mathfrak{F} называется формацией с условием Шеметкова, если любая минимальная не \mathfrak{F} -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Следствие С.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация с условием Шеметкова. Тогда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Следствие С.2 [9]. Пусть \mathfrak{F} – формация всех π -нильпотентных групп. Тогда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Следствие С.3 [9]. Пусть \mathfrak{F} – формация всех φ -дисперсивных групп. Тогда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Формация \mathfrak{F} называется решеточной формацией, если в каждой группе множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп группы. Из описания таких формаций (см. [3] либо [4]) следует, что любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка; любая неразрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G с $\Phi(G) = 1$ является монолитической группой, такой, что $\text{Soc}(G)$ – неабелева группа и $G/\text{Soc}(G)$ является циклической примарной группой.

Применяя теорему С, получаем

Следствие С.4. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная решеточная формация, тогда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Следствие С.5 [9]. Пусть \mathfrak{F} – формация всех π -разложимых групп. Тогда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Существуют наследственные насыщенные формации \mathfrak{F} , для которых $w\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$. Например, как установлено в [7], для формации \mathfrak{U} всех сверхразрешимых групп $w\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}$.

Согласно теореме Гашюца-Любедезер-Шмидта, любая насыщенная формация является локальной, и наоборот. В связи с теоремой В возникает следующая задача. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация и h – ее максимальный внутренний

локальный экран. Как с помощью h построить максимальный внутренний локальный экран формации $w\mathfrak{F}$? Ниже предлагается решение данной задачи в случае, когда \mathfrak{F} – разрешимая локальная формация полной характеристики.

Пусть \mathfrak{F} – локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через h^* – локальный экран, такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{E} \mid \text{любая силовская подгруппа из } G \text{ принадлежит } h(p))$.

Теорема D. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная разрешимая формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{P}$. Тогда $w\mathfrak{F} = LF(h^*)$ и h^* – максимальный внутренний локальный экран формации $w\mathfrak{F}$.

Следствие D.1. Пусть \mathfrak{A} – формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда $w(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E}$.

Следствие D.2. $w\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{E}$.

1 Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [2], [10]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе. Через \mathfrak{P} обозначается множество всех простых чисел; для группы G через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G ; $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G для некоторого простого числа p ; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга, $F^*(G)$ – обобщенная подгруппа Фиттинга группы G ; $F_p(G)$ – p -нильпотентный радикал группы G , т. е. произведение всех нормальных p -нильпотентных подгрупп группы G . Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$; наследственной, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Пусть \mathfrak{X} – некоторый класс групп, тогда $M(\mathfrak{X})$ – класс всех минимальных не \mathfrak{X} -групп, т. е. групп, у которых данному классу \mathfrak{X} принадлежат все собственные подгруппы и только они; $\pi(\mathfrak{X})$ – множество всех различных простых делителей порядков групп, которые принадлежат \mathfrak{X} ; гомоморф – класс групп, содержащий с каждой группой все ее гомоморфные образы.

Используются следующие обозначения для конкретных классов групп: \mathfrak{E} – класс всех разрешимых групп; \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп; \mathfrak{A} – класс всех абелевых групп; \mathfrak{N} – класс всех nilпотентных групп; \mathfrak{N}^2 – класс всех групп G , у которых $G^{\mathfrak{N}^2} \in \mathfrak{N}$; \mathfrak{N}_π – класс всех nilпотентных π -групп, π – некоторое множество простых чисел; $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_\pi$ для $\pi = \{p\}$. Нам потребуются известные свойства \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп, которые собраны в следующих двух леммах.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация, G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – подгруппа из G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \mathfrak{F}$ -sn G ;
- 2) если $H \mathfrak{F}$ -sn G , K – подгруппа из G , то $H \cap K \mathfrak{F}$ -sn K ;
- 3) если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $H^x \mathfrak{F}$ -sn G для любого $x \in G$.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация, H – подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N ;
- 2) если $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N , то $HN \mathfrak{F}$ -sn G ;
- 3) если $H \mathfrak{F}$ -sn K и $K \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \mathfrak{F}$ -sn G .

Через $sn_{\mathfrak{F}}(G)$ обозначается множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп группы G .

Замечание 1.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ и $sn(G)$ означает множество всех субнормальных подгрупп группы G . Тогда $sn_{\mathfrak{N}}(G) \subseteq sn(G)$ для любой группы G . В общем случае равенство не имеет места, как показывает пример знакопеременной группы на 5 символах $Alt(5) = G$ и $1 \in sn(G) \setminus sn_{\mathfrak{N}}(G)$. Однако, если G разрешима, то $sn_{\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$.

Замечание 1.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ и $sn^*(G)$ означает множество $\{H \in S(G) \mid \text{либо } H = G, \text{ либо существует цепь подгрупп } H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G \text{ такая, что } |H_i : H_{i-1}| \text{ есть простое число для } i = 1, \dots, n\}$. Тогда $sn_{\mathfrak{U}}(G) \subseteq sn^*(G)$ для любой группы G . Если G разрешима, то $sn_{\mathfrak{U}}(G) = sn^*(G)$.

Будем обозначать через $Syl(G)$ множество всех силовских подгрупп группы G . Тогда для непустой формации \mathfrak{F} класс групп

$$w\mathfrak{F} = \{G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \text{ и } Syl(G) \subseteq sn_{\mathfrak{F}}(G)\}.$$

Из свойств силовских подгрупп группы ввиду леммы 1.2 получается

Лемма 1.3. Если \mathfrak{F} – непустая формация, то $w\mathfrak{F}$ – гомоморф.

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда

- 1) $\mathfrak{F} \subseteq w\mathfrak{F}$;
- 2) $\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq w\mathfrak{F}$;
- 3) $w\mathfrak{F}$ – наследственная формация;
- 4) $w(w\mathfrak{F}) = w\mathfrak{F}$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из леммы 1.1. Утверждение 2) доказывается проверкой определения класса $w\mathfrak{F}$.

Докажем утверждение 3). По лемме 1.3, $w\mathfrak{F}$ – гомоморф.

Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2 , для которых $G/N_1 \in w\mathfrak{F}$, $G/N_2 \in w\mathfrak{F}$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin w\mathfrak{F}$.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$.

Покажем, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Пусть $p \in \pi(G)$. Если $p \in \pi(G/N_i)$, то из $G/N_i \in w\mathfrak{F}$, $i = 1, 2$

следует, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что $p \notin \pi(G/N_i)$ для $i = 1, 2$. Если $p \in \pi(N_1)$, то $P \cap N_1$ – силовская p -подгруппа из N_1 для любой силовской p -подгруппы P из G . Так как

$$|G : P \cap N_1| = |G : N_1| \cdot |N_1 : P \cap N_1|$$

не делится на p , то $P \cap N_1$ – силовская p -подгруппа из G . Отсюда ввиду $N_1 \cap N_2 = 1$ и нормальности N_2 в G следует, что $p \notin \pi(N_2)$. Тогда p делит $|G : N_2|$. Аналогично показывается, что если $p \in \pi(N_2)$, то p делит $|G : N_1|$. Это противоречит с тем, что $p \notin \pi(G/N_i)$ для $i = 1, 2$. Итак, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Возьмем любую силовскую p -подгруппу R группы G . Так как RN_i/N_i – силовская p -подгруппа в G/N_i и $G/N_i \in w\mathfrak{F}$, то $RN_i/N_i \mathfrak{F}$ -sn G/N_i , $i = 1, 2$. Ввиду теоремы А.6.4 из [10], утверждения 2) леммы 1.1 и утверждения 3) леммы 1.2 подгруппа $RN_1 \cap RN_2 = R(N_1 \cap N_2) = R$ \mathfrak{F} -субнормальна в G . Получаем, что $G/N_1 \cap N_2 \cong G \in w\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G . Таким образом, $w\mathfrak{F}$ является формацией.

Для доказательства наследственности $w\mathfrak{F}$ возьмем $G \in w\mathfrak{F}$ и любую подгруппу K из G . По теореме Силова, силовская q -подгруппа T из K содержится в некоторой силовской q -подгруппе Q группы G . Из $Q \mathfrak{F}$ -sn G по утверждению 2) леммы 1.1 следует \mathfrak{F} -субнормальность $T \cap Q = T$ в K . Утверждение 3) доказано.

Докажем утверждение 4). Пусть $\mathfrak{H} = w\mathfrak{F}$.

Из утверждений 3) и 1) леммы следует, что $\mathfrak{H} \subseteq w\mathfrak{H}$. Докажем обратное включение. Пусть G – группа наименьшего порядка из $w\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Возьмем любую $Q \in Syl(G)$.

Допустим, что $G = Q$. Тогда $|G| = q^n$ для некоторого простого числа q . Если $n > 1$, то по выбору G ее любая собственная подгруппа $H \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} = w\mathfrak{F}$, то $\pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По утверждению 2) леммы получаем, что $G \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{H}$. Это противоречит выбору G . Значит, $n = 1$. Из $G \in w\mathfrak{H}$ заключаем, что $\{q\} = \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$, что противоречит выбору G .

Итак, $G \neq Q$, т.е. $|\pi(G)| > 1$. Так как $G \in w\mathfrak{H}$, то в G найдется максимальная подгруппа M , такая, что $Q \subseteq M$ и $G^{\mathfrak{H}} \subseteq M$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в $G^{\mathfrak{H}}$. По лемме 1.3, $G/N \in w\mathfrak{H}$. Из $|G/N| < |G|$ следует, что $G/N \in \mathfrak{H}$. Поэтому $QN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N . Отсюда $QN \mathfrak{F}$ -sn G ввиду 2) леммы 1.2.

Из наследственности $w\mathfrak{H}$ и $G \in w\mathfrak{H}$ следует, что $QN \in w\mathfrak{H}$. Так как $QN \neq G$, $QN \in \mathfrak{H}$. Ввиду того, что $\mathfrak{H} = w\mathfrak{F}$ и $Q \in Syl(QN)$, $Q \mathfrak{F}$ -sn QN . По 3) леммы 1.2 $Q \mathfrak{F}$ -sn G . Получили, что $G \in \mathfrak{H}$. Это противоречит выбору G . Лемма доказана.

Лемма 1.5. Для формации \mathfrak{A} всех абелевых групп $w\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

Доказательство. Так как \mathfrak{A} – наследственная формация и $\pi(\mathfrak{A}) = \mathbf{P}$, то из утверждения 2)

леммы 1.4 вытекает, что $\mathfrak{N} \subseteq w\mathfrak{A}$. Докажем обратное включение. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in w\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$. Тогда $|\pi(G)| > 1$. Возьмем любую $P \in \text{Syl}(G)$. Из $G \neq P$ и $\text{Syl}(G) \subseteq \text{sn}_q(G)$ следует, что найдется максимальная подгруппа M из G , такая, что $P \subseteq M$ и коммутант $G' \subseteq M$. Ввиду наследственности $w\mathfrak{A}$ и выбора G заключаем, что $M \in \mathfrak{N}$. Так как $P \in \text{Syl}(M)$ и M нормальна в G , то подгруппа P нормальна в G . Получили, что $G \in \mathfrak{N}$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 1.6. Пусть \mathfrak{F} – наследственная разрешимая формация. Тогда $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in w\mathfrak{F}$, но $G \notin \mathfrak{E}$. Тогда для силовской подгруппы H из G найдется цепь максимальных подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i+1}$ для всех $i = 1, \dots, n$. По 3) леммы 1.4 и выбору G подгруппа $H_{n-1} \in \mathfrak{E}$. Отсюда и из разрешимости $G/G^{\mathfrak{F}}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{E}$. Получили противоречие с выбором G . Лемма доказана.

2 Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы А. Очевидно, что из утверждения 1) следует утверждение 2).

Предположим, что выполняется утверждение 2) теоремы и из него не следует утверждение 3). Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathfrak{X}$ и $G \notin \mathfrak{N}^2$. Из наследственности класса \mathfrak{X} и насыщенности формации \mathfrak{N}^2 следует, что G – минимальная не \mathfrak{N}^2 -группа и $\Phi(G) = 1$. Рассмотрим два случая.

1. Группа G не является простой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как $N \in \mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{E}$ и $G/N \in \mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{E}$, то группа G разрешима. Тогда N – абелева p -группа для некоторого простого числа p . Поскольку \mathfrak{N}^2 – формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и N – \mathfrak{N}^2 -корадикал группы G . Из $G/N \in \mathfrak{N}^2$ и $G \notin \mathfrak{N}^2$ следует, что G/N не является нильпотентной группой.

Пусть $R \in \text{Syl}(G)$. Обозначим $K = NR$. Тогда $K \neq G$. Так как N – \mathfrak{N}^2 -корадикал группы G , из утверждения 1) леммы 1.1 получаем, что K – \mathfrak{N}^2 -субнормальная подгруппа группы G . Отсюда и из $K \in \mathfrak{N}^2$ по лемме 1.1 следует, что R является \mathfrak{N}^2 -субнормальной подгруппой группы G . Это означает, что $G \in w\mathfrak{N}^2$. Ввиду выполнения утверждения 2) теоремы получаем, что $G \in \mathfrak{N}^2$. Это противоречит выбору G . Тем самым доказано, что всякая разрешимая \mathfrak{X} -группа принадлежит \mathfrak{N}^2 .

2. Группа G является простой. Тогда G – абелева группа. В G найдется группа Шмидта S . По теореме 26.1 из [2], $S = PQ$, где P – нормальная силовская p -подгруппа, Q – силовская

q -подгруппа группы S , $p \neq q$. Обозначим $A = A_K(G)$ фраттиниев модуль [11] группы G над полем $K = F_q$. Из $q \in \pi(G)$ следует, что $A \neq Q$. Ввиду теоремы 3 из [11] и $O_q(G) = 1$ получаем, что A – точный $F_q G$ -модуль. Тогда по известному результату Гашюца [12] существует групповое расширение $A \rightarrow E \rightarrow G$ с $A \subseteq \Phi(E)$. В группе E имеется элементарная абелева q -группа N , такая, что $E/N \cong G$, $N \cong A$ и $N \subseteq \Phi(E)$. Из $E/N \cong G \in \mathfrak{X}$ следует, что $E/\Phi(E) \in \mathfrak{X}$. Поэтому $E \in \mathfrak{X}$, так как формация \mathfrak{X} насыщена.

Обозначим через \bar{S} прообраз подгруппы S группы G при естественном гомоморфизме

$$\varphi : E \rightarrow E/N.$$

Так как $E/N \cong G$, то группы E/N и G можно отождествить. Из $S \in \mathfrak{N}^2$, точности действия G на модуле A и $N \cong A$ следует, что $\bar{S} \in \mathfrak{N}^3 \setminus \mathfrak{N}^2$. Ввиду $E \in \mathfrak{X}$ и наследственности \mathfrak{X} получаем, что $\bar{S} \in \mathfrak{X}$. Отметим, что группа \bar{S} разрешима. По доказанному выше, разрешимая \mathfrak{X} -группа \bar{S} принадлежит \mathfrak{N}^2 . Полученное противоречие завершает доказательство того, что из утверждения 1) следует 2).

Допустим теперь, что выполняется утверждение 3) и из него не следует утверждение 1). Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathfrak{X}$, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, любая силовская подгруппа группы G является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G , но $G \notin \mathfrak{F}$ для некоторой насыщенной формации \mathfrak{F} . Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}^2$ следует, что $G \in \mathfrak{N}^2$. Так как насыщенная формация является локальной и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, то G – нильпотентная группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Ввиду леммы 1.2 любая силовская подгруппа из G/N является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой группы G/N . Тогда $G/N \in \mathfrak{F}$. Из насыщенности формации \mathfrak{F} следует, что $\Phi(G) = 1$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Поэтому в G найдется максимальная подгруппа M , такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Отметим, что N – элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p и $N = C_G(N) = F(G)$. Учитывая, что $G \in \mathfrak{N}^2$, получаем $G/N \cong M \in \mathfrak{N}$. Отсюда, согласно лемме 3.9 из [2], M является холловой p -подгруппой в G .

Если M – силовская q -подгруппа для некоторого простого числа $q \neq p$, то из \mathfrak{F} -субнормальности M в G следует, что $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Получили противоречие.

Значит, M не является силовской подгруппой группы G . Обозначим через Q произвольную силовскую q -подгруппу группы G , где $q \neq p$. Подгруппа $H = NQ \neq G$. Из $G \in w\mathfrak{F}$ и наследственности формации $w\mathfrak{F}$ по лемме 1.1 следует, что любая силовская подгруппа группы H является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в H . Ввиду выбора

G подгруппа $H \in \mathfrak{F}$. Из $N = C_G(N)$ получаем $N = F_p(H)$. Ввиду леммы 4.5 из [2] для некоторого локального экрана f формации \mathfrak{F} факторгруппа $H/F_p(H) \cong Q \in f(p)$. Поэтому любая силовская q -подгруппа группы M принадлежит $f(p)$. Так как M нильпотентна, то $M \in f(p)$. Отсюда и из $G/N \cong M$ следует, что N является f -центральным главным фактором группы G . Учитывая это и $G/N \in \mathfrak{F}$, имеем $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G . Теорема доказана.

Доказательство теоремы В. По лемме 1.4, $w\mathfrak{F}$ является наследственной формацией. Докажем насыщенность $w\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G/\Phi(G) \in w\mathfrak{F}$, но $G \notin w\mathfrak{F}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \in w\mathfrak{F}$, то $G/N/\Phi(G/N) \in w\mathfrak{F}$. По выбору G получаем, что $G/N \in w\mathfrak{F}$.

Класс $w\mathfrak{F}$ является формацией, поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Значит, $N \subseteq \Phi(G)$. Отсюда следует, что N – p -группа для некоторого простого числа p и $O_p(G) = 1$. Пусть Q – произвольная силовская q -подгруппа группы G .

Если $q = p$, то QN/N – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G/N . Из $N \subseteq Q$ и леммы 1.2 следует \mathfrak{F} -субнормальность $QN = Q$ в G .

Пусть $q \neq p$. Обозначим $H = Q\tilde{F}(G)$, где $\tilde{F}(G)$ – такая подгруппа группы G , что $\tilde{F}(G) \supseteq \Phi(G)$ и $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$ является цоклем группы $G/\Phi(G)$. Тогда $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$ квазинильпотентна. Поэтому $\tilde{F}(G)/\Phi(G) \subseteq F^*(H/\Phi(G))$. Отсюда $H/\Phi(G) = Q\Phi(G)/\Phi(G)F^*(H/\Phi(G))$.

Так как $Q\Phi(G)/\Phi(G)$ \mathfrak{F} -субнормальна в $H/\Phi(G)$ и $Q\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ ввиду $\pi(G/\Phi(G)) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и локальности \mathfrak{F} , то по теореме 6.1.11 из [4] $H/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда для максимального внутреннего локального экрана f формации \mathfrak{F} H действует f -стабильно на $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$. Отсюда ввиду $O_p(G) = 1$ по теореме 9.18 из [2] H действует f -стабильно на $\Phi(G)$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.1 получаем, что Q – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы QN . Так как QN \mathfrak{F} -субнормальна в G , то по лемме 1.2 Q \mathfrak{F} -субнормальна в G . Итак, $G \in w\mathfrak{F}$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы С. Установим, что из утверждения 1) следует 2). Допустим, что группа $G \in M(\mathfrak{F})$.

Предположим вначале, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G .

Если $N = G$, то либо $|G| = p$ для некоторого простого p , либо G – простая неабелева группа, $G = \text{Soc}(G)$ и $G/\text{Soc}(G) \cong 1$.

Допустим, что $N \neq G$. В G найдется максимальная подгруппа M , такая, что $G = NM$. Из

$G/N \cong M/M \cap N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G^\mathfrak{F} = N$. Так как \mathfrak{F} – формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Если $NQ \neq G$ для любой силовской подгруппы Q группы G , то $NQ \in \mathfrak{F}$. Тогда из утверждения 1) леммы 1.1 и утверждения 3) леммы 1.2 следует, что Q \mathfrak{F} -sp G . Поэтому $G \in w\mathfrak{F}$. Ввиду выполнимости утверждения 1) теоремы получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G . Значит, $NQ = G$ для некоторой $Q \in \text{Syl}(G)$.

Если G разрешима, то N – элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p . Из $|\pi(G)| > 1$ следует, что Q – q -группа для простого $q \neq p$. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{R}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, группа G ненильпотентна.

В случае неразрешимости G получаем, что $N = \text{Soc}(G)$ – неабелева группа, $G/N \cong Q/Q \cap N$ – примарная группа. Итак, при $\Phi(G) = 1$ для группы G утверждение 2) выполняется.

Предположим теперь, что $\Phi(G) \neq 1$. Из насыщенности \mathfrak{F} следует, что $G/\Phi(G) \notin \mathfrak{F}$. Тогда $G/\Phi(G) \in M(\mathfrak{F})$ и при этом $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$. Если G разрешима, то по доказанному выше либо $G/\Phi(G)$ – группа простого порядка, либо $G/\Phi(G)$ – ненильпотентная бипримарная дисперсивная группа. Отсюда и из выбора G следует, что G – ненильпотентная бипримарная дисперсивная группа.

Если G неразрешима, то $G/\Phi(G)$ неразрешима и, по доказанному выше, $G/\Phi(G)$ – монолитическая группа, такая, что $\text{Soc}(G/\Phi(G))$ – неабелева группа и $G/\Phi(G)/\text{Soc}(G/\Phi(G))$ либо является примарной группой, либо изоморфна 1. Итак, доказано, что из 1) следует 2).

Докажем, что из 2) следует 1). Допустим противное. Пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, любая силовская подгруппа группы G \mathfrak{F} -субнормальна в G , но G не принадлежит формации \mathfrak{F} . Так как $w\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $G/\Phi(G) \in w\mathfrak{F}$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ ввиду выбора G . Из насыщенности \mathfrak{F} следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G . Итак, $\Phi(G) = 1$. Из наследственности $w\mathfrak{F}$ заключаем, что любая собственная подгруппа группы G принадлежит $w\mathfrak{F}$, а значит, и \mathfrak{F} ввиду выбора G . Следовательно, $G \in M(\mathfrak{F})$.

Предположим, что G разрешима. Из утверждения 2) теоремы и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ заключаем, что G – ненильпотентная бипримарная дисперсивная группа. По теореме 24.5 из [2], $G^\mathfrak{F}$ – силовская p -подгруппа группы G для некоторого простого p . Так как в G для $q \neq p$ силовская q -подгруппа $Q \neq G$ и $G \in w\mathfrak{F}$, то в G найдется максимальная подгруппа M , такая, что $G^\mathfrak{F}Q \subseteq M$. Получили противоречие $G \subseteq M \subset G$.

Допустим, что G неразрешима. Так как $G \in w\mathfrak{F}$ и G непримарна, то для любой силовской

подгруппы Q группы G найдется максимальная подгруппа, содержащая Q и $G^{\mathfrak{S}}$. Так как $G^{\mathfrak{S}} \neq 1$, то G – непустая группа. Ввиду выполнения утверждения 2) теоремы G – монолитическая группа, $G/\text{Soc}(G)$ – примарная группа. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\text{Soc}(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , то $G^{\mathfrak{S}} = \text{Soc}(G)$. Значит, $G = G^{\mathfrak{S}}Q$ для некоторой силовской подгруппы Q из G . Но тогда найдется максимальная подгруппа M группы G , такая, что $G = G^{\mathfrak{S}}Q \subseteq M$. Полученное противоречие завершает доказательство того, что из 2) следует 1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы D. Обозначим через $\mathfrak{F}^* = LF(h^*)$. Покажем, что $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Вначале покажем, что $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Допустим противное. Пусть G – группа наименьшего порядка из $w\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^*$. Так как $w\mathfrak{F}$ и \mathfrak{F}^* – наследственные насыщенные формации, то группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{S}}$ и $\Phi(G) = 1$. Кроме того, G является минимальной не \mathfrak{F}^* -группой. Можно показать, что $|\pi(G)| \leq 2$ и $G = NM$, где $N \cap M = 1$, M – некоторая максимальная подгруппа группы G , являющаяся минимальной не $h^*(p)$ -группой. Отметим также, что M является q -группой, где q – некоторое простое число, отличное от p . Из $G \in w\mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{N}^2$ по теореме А следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Получили противоречие с выбором группы G .

Покажем, что $\mathfrak{F}^* \subseteq w\mathfrak{F}$. Допустим противное. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^* \setminus w\mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F}^* и $w\mathfrak{F}$ – наследственные насыщенные формации, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = G^{w\mathfrak{F}}$ и $\Phi(G) = 1$. Кроме того, G является минимальной не $w\mathfrak{F}$ -группой.

По 4) леммы 1.4, $w(w\mathfrak{F}) = w\mathfrak{F}$. Тогда из 2) теоремы С и выбора G следует, что G является бипримарной дисперсивной группой. Нетрудно показать, что G – минимальная не \mathfrak{F} -группа. Поэтому $G = NM$, где $N \cap M = 1$, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , $N = F(G) = C_G(N)$, а M – максимальная подгруппа, являющаяся q -группой, где q – некоторое простое число, отличное от p . Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $G/N = G/F_p(N) \cong M \in h^*(p)$. Ввиду построения экрана h^* получаем, что $M \in h(p)$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Значит, $G \in w\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hawkes, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. Каморников, С.Ф. Подгрупповые факторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Бел. навука, 2003. – 254 с.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
5. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
6. Васильева, Т.И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.
7. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
8. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
9. Семенчук, В.Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Матем. заметки. – 2011. – Vol. 89, № 1. – P. 104–108.
10. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
11. Griess, R. The Frattini module / R. Griess, P. Schmid // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 256–266.
12. Gaschütz, W. Über die modularen Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden / W. Gaschütz // Math. Z. – 1954. – Bd. 60. – S. 274–286.

Поступила в редакцию 09.09.11.

О σ -СОГЛАСОВАННЫХ ВЕКТОР-МАТРИЦАХ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

ON σ -COMPATIBLE VECTOR-MATRICES

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье изучаются свойства σ -согласованных вектор-матриц.

Ключевые слова: матрица, вектор-матрица, полугруппа, группа, кольцо, n -арная группа.

The properties of σ -compatible vector-matrices are studied in this paper.

Keywords: matrice, vector-matrice, semigroup, group, ring, n -ary group.

Введение

Вектор-матрицы над произвольным кольцом впервые были определены в [1], они обобщают понятие m -адической матрицы Э. Поста [2]. Изучению различных свойств вектор-матриц посвящены работы [3]–[5]. В частности, в [3] введено понятие σ -согласованной вектор-матрицы, где σ – подстановка из S_k , и доказано [3, теорема 6.1], что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то подмножество M множества всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом, замкнутое относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, является l -арной полугруппой, в которой все вектор-матрицы имеют один и тот же размер и согласованы с подстановкой σ . Изучению операции $[]_{l, \sigma, k}$ определенной в [6], посвящена также книга [7].

В данной статье продолжено начатое в [3] изучение свойств σ -согласованных вектор-матриц.

Приведем вначале определения некоторых понятий, встречающихся в работе.

n -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \dots a_n] a_{n+1} \dots a_{2n-1}] =$$

$$= [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+n}] a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}],$$

называют n -арной полугруппой, а n -арную операцию $[]$ в этом случае называют ассоциативной.

n -Арную полугруппу $\langle A, [] \rangle$ называют n -арной группой, если в ней для всех $a_1, \dots, a_n, b \in A$ разрешимы уравнения

$$[xa_2 \dots a_n] = b, [a_1 \dots a_{n-1}y] = b.$$

Элемент a n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют:

1) идемпотентом, если $[\underbrace{a \dots a}_n] = a$;

2) нулем, если для всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ верно

$$[ax_1 \dots x_{n-1}] = [x_1 ax_2 \dots x_{n-1}] = \dots$$

$$\dots = [x_1 \dots x_{n-1} a] = a;$$

3) единицей, если для любого $x \in A$ верно

$$[\underbrace{x a \dots a}_{n-1}] = [\underbrace{ax a \dots a}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{a \dots a x}_{n-1}] = x.$$

Понятно, что n -арный группоид не может иметь более одного нуля, а всякая единица n -арного группоида является его идемпотентом.

Элемент a n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ с нулем 0 называют его i -ым делителем нуля, где $i \in \{1, \dots, n\}$, если существуют $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in A$, отличные от нуля, такие, что

$$[b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_n] = 0.$$

Если элемент a является i -ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, то a называют делителем нуля в $\langle A, [] \rangle$.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

Если в n -арном группоиде $\langle A, [] \rangle$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}],$$

то n -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ называют абелевым.

n -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором выполняется тождество

$$[aa_1 \dots a_{n-2} b] = [ba_1 \dots a_{n-2} a],$$

называют полуабелевым.

Более подробную информацию об n -арных полугруппах и n -арных группах можно найти в [2], [8]–[10].

Универсальная алгебра $\langle A, +, [] \rangle$ с бинарной операцией $+$ и n -арной операцией $[]: A^n \rightarrow A$ называется $(2, n)$ -кольцом [11], [12], если выполняются следующие условия:

1) $\langle A, + \rangle$ – абелева группа;

2) в $\langle A, +, [] \rangle$ для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется тождество дистрибутивности

$$[a_1 \dots a_{i-1} (b_1 + b_2) a_{i+1} \dots a_n] =$$

$$= [a_1 \dots a_{i-1} b_1 a_{i+1} \dots a_n] + [a_1 \dots a_{i-1} b_2 a_{i+1} \dots a_n].$$

При $n = 2$ определение $(2, n)$ -кольца превращается в определение обычного кольца.

Линейное пространство A над полем P с определенной на этом пространстве n -арной операцией $[\]$ называется $(2, n)$ -алгеброй над P , если выполняются следующие условия:

1) для любого $\lambda \in P$ и любых $a_1, \dots, a_n \in A$ верно

$$\lambda[a_1 \dots a_n] = [(\lambda a_1) a_2 \dots a_n] = [a_1 (\lambda a_2) a_3 \dots a_n] = \dots = [a_1 \dots a_{n-1} (\lambda a_n)];$$

2) n -арная операция $[\]$ дистрибутивна относительно операции $+$ сложения векторов, то есть в A для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется тождество дистрибутивности из определения $(2, n)$ -кольца.

Ясно, что при $n = 2$ определение $(2, n)$ -алгебры над полем P совпадает с определением обычной бинарной алгебры.

$(2, n)$ -Кольцо называется ассоциативным, если определенная на нем n -арная операция ассоциативна. Аналогично определяется ассоциативная $(2, n)$ -алгебра.

1 Используемые результаты

Вектор-матрицей размера

$$(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$$

над кольцом P называется [1, определение 1] всякий упорядоченный набор $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ матриц A_1, \dots, A_k размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ с элементами из P . Вектор-матрица, у которой квадратные компоненты A_1, \dots, A_k имеют порядки n_1, \dots, n_k , называется [1] квадратной вектор-матрицей порядка (n_1, \dots, n_k) . Вектор-матрица, у которой все компоненты A_1, \dots, A_k – квадратные матрицы одного и того же порядка n , называется [1] квадратной вектор-матрицей порядка n .

Множество всех k -компонентных вектор-матриц над P обозначается символом $\mathbf{M}(k, P)$, а множество всех k -компонентных вектор-матриц размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над P – символом $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$. Символ $\mathbf{M}_{n_1, \dots, n_k}(P)$ используется для обозначения множества всех k -компонентных вектор-матриц порядка (n_1, \dots, n_k) над P , а символ $\mathbf{M}_n(k, P)$ – для обозначения всех k -компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P .

Определение вектор-матрицы обобщает понятие m -адической (m -арной) матрицы Э. Поста [2], которую он определил как упорядоченный набор $m - 1$ квадратных матриц одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

В [1, определение 4] для всех $k \geq 2, l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P определена частичная l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ и доказана

Теорема 1.1 [1, теорема 1]. Пусть

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, 2l - 1$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P , σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k},$$

то для любого $j = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k},$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}.$$

Согласно теореме 1.1, если P – ассоциативное кольцо, а подстановка σ^{l-1} – тождественная, то на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ определена частичная ассоциативная l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$, то есть $\mathbf{M}(k, P)$, рассматриваемое вместе с этой l -арной операцией, является частичной l -арной полу группой.

Из теоремы 1.1 вытекает

Предложение 1.1. Если P – ассоциативное кольцо, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{M}_n(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Во множестве $\mathbf{M}_n(k, P)$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, выделим подмножество $\mathbf{GL}_n(k, P)$ всех k -компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P , у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что обратимость компонент в $\mathbf{M}_n(P)$ можно заменить обратимостью определителей этих компонент в P .

Теорема 1.2 [4, теорема 4.2]. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. В частности, $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ – $(k + 1)$ -арная группа.

l -Арную группу $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной l -арной группой, соответствующей данным k и σ .

Во множестве $\mathbf{GL}_n(k, P)$ выделим подмножество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ всех k -компонентных вектор-матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице кольца P . Так как множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ совпадает с k -ой декартовой степенью специальной линейной группы $\mathbf{SL}_n(P)$, то, применяя теорему 2.9.3 [7], получим следующий результат.

Предложение 1.2. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{SL}_n(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной группой.

l -Арную группу $\langle \mathbf{SL}_n(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ по аналогии с бинарным случаем назовем специальной линейной l -арной группой, соответствующей данным k и σ .

Так как множество $\mathbf{M}_n(k, P)$ совпадает с k -ой декартовой степенью мультипликативной полугруппы $\mathbf{M}_n(P)$, которая при $n > 1$ неабелева, то, ввиду предложения 3.5.4 из [7], имеет место

Предложение 1.3. Если P – ассоциативное кольцо с единицей, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\mathbf{M}_n(k, P)$ при $n > 1$ не является полуабелевой. В частности, она не является абелевой.

Для всякой подстановки $\sigma \in S_k$ положим:

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \sigma_{p+1} \dots \sigma_q \quad (1.1)$$

– разложение σ в произведение независимых циклов, где $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$ – все циклы длины 1;

$$X_1 = \{i_{11}, \dots, i_{1l_1}\}, \dots, X_p = \{i_{p1}, \dots, i_{pl_p}\},$$

$$X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\} \quad (1.2)$$

– σ -орбиты, соответствующие циклам $\sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$. Длина цикла σ_r ($r = 1, \dots, q$) обозначается через l_r . В частности, $l_{p+1} = \dots = l_q = 1$.

Определение 1.1 [3, определение 3.1]. Упорядоченный набор пар $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ целых положительных чисел называется σ -согласованным или согласованным с подстановкой $\sigma \in S_k$, имеющей разложение (1.1), если:

1) для каждой орбиты $X_r = \{i_{r1}, \dots, i_{rl_r}\}$, где $r = 1, \dots, p$, и любого ее элемента i_{rs} , где $s = 1, \dots, l_r$, верны равенства

$$n_{i_{rs}} = m_{\sigma(i_{rs})}, n_{\sigma(i_{rs})} = m_{\sigma^2(i_{rs})}, \dots, \\ \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(i_{rs})} = m_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})}, n_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})} = m_{i_{rs}}; \quad (1.3)$$

2) $m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}}, \dots, m_{i_q} = n_{i_q}$.

Замечание 1.1. Если условие 1) определения 1.1 распространить на одноэлементные циклы, то для орбит

$$X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\}$$

равенства (1.3) примут вид

$$n_{\sigma^{l_{p+1}-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^{l_{p+1}-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^0(i_{p+1})} = n_{i_{p+1}} = m_{i_{p+1}}, \dots \\ \dots, n_{\sigma^{l_q-1}(i_q)} = n_{\sigma^{l_q-1}(i_q)} = n_{\sigma^0(i_q)} = n_{i_q} = m_{i_q}.$$

Таким образом, в определении 1.1 можно обойтись без условия 2), если в условии 1) считать $r = 1, \dots, q$.

Замечание 1.2. Можно показать [3], что из выполнимости условия (1.3) для некоторого $i_{rs} \in X_r$ следует его выполнимость для любого $i_{rs} \in X_r$.

Теорема 1.3 [3, теорема 4.1]. Пусть P – ассоциативное кольцо, упорядоченный набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда множество $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой.

Приведем критерий σ -согласованности вектор-матрицы.

Теорема 1.4. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то вектор-матрица

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in \mathbf{M}(k, P)$$

над ассоциативным кольцом P является σ -согласованной тогда и только тогда, когда определена вектор-матрица $[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, k}$.

Доказательство. Пусть $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ – размер вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$.

Необходимость. Следует из теоремы 1.3.

Достаточность. Пусть для подстановки σ имеет место разложение (1.1) с σ -орбитами (1.2), и пусть $[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$,

где

$$Y_j = A_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l-2}(j)} A_{\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k. \quad (1.4)$$

В частности, это верно для любого элемента j из любой σ -орбиты X_r ($r = 1, \dots, p$) с числом элементов l_r , большим единицы. Так как $l_r < l = tl_r + 1$, то, выписав первые $l_r + 1$ компонент из правой части (1.4), видим, что существует произведение

$$A_j A_{\sigma(j)} A_{\sigma^2(j)} \dots A_{\sigma^{l_r-2}(j)} A_{\sigma^{l_r-1}(j)} A_{\sigma^{l_r}(j)}.$$

Это означает, что для вектор-матрицы \mathbf{A} , имеющей размер $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$, верно

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = \\ = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(j)} = m_{\sigma^{l_r-1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_{\sigma^{l_r}(j)},$$

а так как σ^{l_r} – тождественная подстановка, то последние равенства принимают вид

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = \\ = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(j)} = m_{\sigma^{l_r-1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_j.$$

Таким образом, выполняется условие 1) определения 1.1.

Если j – элемент из любой σ -орбиты X_r ($r = p + 1, \dots, q$) с числом элементов, равным единице, то (1.4) принимает вид $Y_j = \underbrace{A_j \dots A_j}_l$. В

частности, определено произведение $A_j A_j$, откуда следует совпадение размеров матрицы A_j . Таким образом, условие 2) определения 1.1 также выполняется. Следовательно, набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ . Теорема доказана.

2 Перестановочность элементов в l -арной полугруппе $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$

Положим, $1 \leq \mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$, и выделим во множестве $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ подмножество $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}^{(\mu)}(P)$ всех вектор-матриц вида

$$\mathbf{A} = \left(A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A_k = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где B_1, \dots, B_k – квадратные матрицы порядка μ над P :

$$\mathbf{M}^{(\mu)} = \left\{ \mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), B_1 \dots B_k \in \mathbf{M}_\mu(P),$$

где для сокращения записей использовано обозначение $\mathbf{M}^{(\mu)} = \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}^{(\mu)}(P)$, которое иногда будет употребляться, если из контекста ясно, о чем идет речь.

Предложение 2.1. Пусть P – ассоциативное кольцо, набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$,

$$1 \leq \mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}.$$

Тогда множество $\mathbf{M}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}^{(\mu)}, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой, изоморфной l -арной полугруппе $\langle \mathbf{M}_\mu(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство. Заметим, что по теореме 1.3 $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа. Пусть

$$\mathbf{A}_i = \left(A_{i1} = \begin{pmatrix} B_{i1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A_{ik} = \begin{pmatrix} B_{ik} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), i = 1, \dots, l$$

– произвольные вектор-матрицы из $\mathbf{M}^{(\mu)}$,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Y_1, \dots, Y_k).$$

Согласно определению операции $[\]_{l, \sigma, k}$ и ввиду тождественности подстановки σ^{l-1} , имеем

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{lj}, j = 1, \dots, k,$$

откуда получаем $Y_j = \begin{pmatrix} D_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где

$$B_{1j} B_{2\sigma(j)} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} B_{lj} = D_j \in \langle \mathbf{M}_\mu(P). \rangle$$

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{M}^{(\mu)}.$$

Следовательно, множество $\mathbf{M}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l -арной операции, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}^{(\mu)}, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой.

Определим отображение $f: \mathbf{M}^{(\mu)} \rightarrow \mathbf{M}_\mu(k, P)$ по правилу

$$f: \mathbf{U} = \left(\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} V_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow f(\mathbf{U}) = (V_1, \dots, V_k).$$

Ясно, что f – биекция $\mathbf{M}^{(\mu)}$ на $\mathbf{M}_\mu(k, P)$. Так как

$$\begin{aligned} f[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_k]_{l, \sigma, k} &= f(\mathbf{A}) = f(Y_1, \dots, Y_k) = (D_1, \dots, D_k) = \\ &= (B_{11} B_{2\sigma(1)} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} B_{l1}, \dots, B_{1k} B_{2\sigma(k)} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} B_{lk}) = \\ &= [(B_{11}, \dots, B_{1k}) \dots (B_{l1}, \dots, B_{lk})]_{l, \sigma, k} = \\ &= [f(\mathbf{A}_1) \dots f(\mathbf{A}_k)]_{l, \sigma, k}, \end{aligned}$$

то есть

$$f[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_k]_{l, \sigma, k} = [f(\mathbf{A}_1) \dots f(\mathbf{A}_k)]_{l, \sigma, k},$$

то f – изоморфизм l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}^{(\mu)}, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную полугруппу $\langle \mathbf{M}_\mu(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$. Предложение доказано.

Теорема 2.1. Пусть P – ассоциативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\} \geq 2.$$

Тогда l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$

$[\]_{l, \sigma, k} >$ не является полуабелевой

Доказательство. По предложению 1.3 l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_\mu(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, где

$$2 \leq \mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\},$$

не является полуабелевой, но тогда, ввиду предложения 2.1, неполуабелевой будет и изоморфная ей l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}^{(\mu)}, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$. А так как $\mathbf{M}^{(\mu)} \subseteq \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$, то l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ также не является полуабелевой. Теорема доказана.

Далее в следствиях 2.1–2.5 P – ассоциативное кольцо с единицей. Кроме того, в следствиях 2.1–2.3

$$\min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\} \geq 2.$$

Следствие 2.1. Если набор

$$((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$$

согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$ порядка d , то $(d+1)$ -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{d+1, \sigma, k} \rangle$

$[\]_{d+1, \sigma, k} >$ не является полуабелевой.

Следствие 2.2. Если σ – цикл длины k из S_k ,

$$n_1 = m_{\sigma(1)}, n_{\sigma(1)} = m_{\sigma^2(1)}, \dots, n_{\sigma^{k-2}(1)} = m_{\sigma^{k-1}(1)}, n_{\sigma^{k-1}(1)} = m_1,$$

то $(k+1)$ -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$

$[\]_{k+1, \sigma, k} >$ не является полуабелевой.

Следствие 2.3. Если

$$n_1 = m_2, n_2 = m_3, \dots, n_{k-1} = m_k, n_k = m_1,$$

то $(k+1)$ -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$

$[\]_{k+1, (12 \dots k), k} >$ не является полуабелевой.

Следствие 2.4. Если $\min\{m, s, r\} \geq 2$, то 4-арная полугруппа

$$\langle \mathbf{M}_{m \times s, s \times r, r \times m}(P), [\]_{4, (123), 3} \rangle$$

не является полуабелевой.

Следствие 2.5. Если $\min\{m, n\} \geq 2$, то тернарная полугруппа $\langle \mathbf{M}_{m \times n, n \times m}(P), [\]_{3, (12), 2} \rangle$ не является полуабелевой.

Справедливость следующей леммы устанавливается простой проверкой.

Лемма 2.1. Пусть полугруппа P содержит единицу и элемент, отличный от единицы. Если σ – тождественная подстановка из S_k , то l -арный группоид $\langle P^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является абелевым тогда и только тогда, когда полугруппа P коммутативна.

Теорема 2.2. Если P – ассоциативное кольцо с единицей, набор

$$((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$$

согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа

$\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является абелевой

тогда и только тогда, когда σ – тождественная подстановка, $m_1 = n_1 = \dots = m_k = n_k = 1$, P – коммутативное кольцо.

Доказательство. Необходимость. Если σ – нетождественная подстановка, то по предложению 3.5.1 [7] l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_l(k, P) = P^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевой, откуда, ввиду предложения 2.1, следует неабелевость изоморфной ей l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}^{(1)}, []_{l, \sigma, k} \rangle$. А так как $\mathbf{M}^{(1)} \subseteq \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$, то l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ также не является абелевой, что противоречит условию. Следовательно, σ – тождественная подстановка.

Согласно предложению 3.8 [3], вектор-матрица согласована с тождественной подстановкой тогда и только тогда, когда все ее компоненты являются квадратными матрицами. Таким образом, $m_1 = n_1, \dots, m_k = n_k$,

$$\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P) = \mathbf{M}_{n_1, \dots, n_k}(P).$$

Предположим, что $n_j > 1$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$, и положим

$$\mathbf{A} = (E_{n_1}, \dots, E_{n_{j-1}}, A, E_{n_{j+1}}, \dots, E_{n_k}),$$

$$\mathbf{B} = (E_{n_1}, \dots, E_{n_{j-1}}, B, E_{n_{j+1}}, \dots, E_{n_k}),$$

$$\mathbf{E} = (E_{n_1}, \dots, E_{n_k}),$$

где $A, B \in \mathbf{M}_{n_j}(P)$, $AB \neq BA$, а E_{n_1}, \dots, E_{n_k} – единичные матрицы соответствующих размеров. Так как, ввиду тождественности подстановки σ ,

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{E} \dots \mathbf{E}]_{l, \sigma, k} = (E_{n_1}, \dots, E_{n_{j-1}}, AB, E_{n_{j+1}}, \dots, E_{n_k}),$$

$$[\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{E} \dots \mathbf{E}]_{l, \sigma, k} = (E_{n_1}, \dots, E_{n_{j-1}}, BA, E_{n_{j+1}}, \dots, E_{n_k}),$$

то, учитывая $AB \neq BA$, получим

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{E} \dots \mathbf{E}]_{l, \sigma, k} \neq [\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{E} \dots \mathbf{E}]_{l, \sigma, k},$$

что противоречит абелевости l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{n_1, \dots, n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$. Следовательно, $n_j = 1$ для любого $j \in \{1, \dots, k\}$, то есть $\mathbf{M}_{m_1, \dots, m_k}(P) = P^k$. Осталось применить лемму 2.1,

согласно которой P – коммутативное кольцо.

Достаточность. Используется лемма 2.1. Теорема доказана.

3 Отсутствие единиц в l -арной полугруппе $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$

Теорема 3.1. Пусть P – ассоциативное кольцо, набор $((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$ согласован с нетождественной подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда в l -арной полугруппе $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

Доказательство. По условию $\sigma(j) \neq j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Предположим, что вектор-матрица $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_k)$ – единица в

$\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$. Тогда

$$[\mathbf{I} \dots \mathbf{I}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{I} = (I_1, \dots, I_j, \dots, I_k),$$

откуда, согласно определению операции $[]_{l, \sigma, k}$, получаем

$$I_j I_{\sigma(j)} I_{\sigma^2(j)} \dots I_{\sigma^{l-1}(j)} = I_j. \quad (3.1)$$

Рассмотрим вектор-матрицу

$$(I_1, \dots, I_{j-1}, A, I_{j+1}, \dots, I_k) = (B_1, \dots, B_k)$$

из $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$, где матрица A размера $m_j \times n_j$ отлична от матрицы I_j того же размера.

Так как \mathbf{I} – единица в $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$, то

$$(\mathbf{I}(I_1, \dots, I_j, A, I_{j+1}, \dots, I_k) \underbrace{\mathbf{I} \dots \mathbf{I}}_{l-2})_{l, \sigma, k} = (I_1, \dots, I_{j-1}, A, I_{j+1}, \dots, I_k),$$

откуда, снова применяя определение операции $[]_{l, \sigma, k}$, получим

$$I_j B_{\sigma(j)} I_{\sigma^2(j)} \dots I_{\sigma^{l-1}(j)} = A. \quad (3.2)$$

Так как при $t \neq j$ верно $B_t = I_t$, то для $\sigma(j) \neq j$ имеем $B_{\sigma(j)} = I_{\sigma(j)}$. Поэтому (3.2) может быть переписано в виде

$$I_j I_{\sigma(j)} I_{\sigma^2(j)} \dots I_{\sigma^{l-1}(j)} = A. \quad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.3) вытекает, $A = I_j$, что противоречит выбору $A \neq I_j$. Таким образом, предположение о наличии единиц в $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ неверно. Теорема доказана.

Далее в следствиях 3.1–3.5 P – ассоциативное кольцо.

Следствие 3.1. Если набор

$$((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$$

согласован с нетождественной подстановкой $\sigma \in S_k$ порядка d , то в $(d+1)$ -арной полугруппе $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{d+1, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

Следствие 3.2. Пусть σ – цикл длины k из S_k , числа $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ удовлетворяют равенствам из следствия 2.2. Тогда в $(k+1)$ -арной полугруппе

$$\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{k+1, \sigma, k} \rangle$$

нет единиц.

Следствие 3.3. Пусть числа $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ удовлетворяют равенствам из следствия 2.3. Тогда в $(k+1)$ -арной полугруппе

$$\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$$

нет единиц.

Следствие 3.4. В 4-арной полугруппе $\langle \mathbf{M}_{m \times s, s \times r, r \times m}(P), []_{4, (123), 3} \rangle$ нет единиц.

Следствие 3.5. В тернарной полугруппе $\langle \mathbf{M}_{m \times n, n \times m}(P), []_{3, (12), 2} \rangle$ нет единиц.

Замечание 3.1. При доказательстве теоремы 3.1 условие $\sigma^l = \sigma$ не использовалось. Это условие, согласно теореме 1.3, обеспечивает ассоциативность операции $[]_{l, \sigma, k}$.

4 Делители нуля в l -арной полугруппе
 $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$

Суммой вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ и $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k)$ одинаковых размеров называется вектор-матрица

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, \dots, A_k + B_k)$$

того же размера.

Замечание 4.1. Так как множество $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ совпадает с декартовым произведением

$$\mathbf{M}_{m_1 \times n_1}(P) \times \dots \times \mathbf{M}_{m_k \times n_k}(P),$$

в котором каждый сомножитель является абелевой группой относительно операции сложения матриц, то множество $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$, рассматриваемое вместе с операцией сложения вектор-матриц, является абелевой группой. Ясно, что вектор-матрица

$$\mathbf{0} = (0_{m_1 \times n_1}, \dots, 0_{m_k \times n_k}),$$

где все компоненты – нулевые матрицы указанных размеров, является нулем этой абелевой группы $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), + \rangle$.

Теорема 4.1. Пусть P – ассоциативное кольцо, набор $((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\mathbf{0}$ – нуль l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$. Если к тому же σ – нетождественная подстановка, $l \geq 3$, то в этой l -арной полугруппе все элементы являются делителями ее нуля.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ и положим

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k),$$

где

$$\mathbf{A}_t = (A_{t1}, \dots, A_{tk}) \in \mathbf{M}_{m_t \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), t = 1, 2, \dots, l,$$

$$A_{i1} = 0_{m_i \times n_1}, \dots, A_{ik} = 0_{m_k \times n_k},$$

то есть

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{0} = (0_{m_i \times n_1}, \dots, 0_{m_k \times n_k}).$$

Согласно определению операции $[]_{l, \sigma, k}$

$$\begin{aligned} Y_j &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots \\ &\dots A_{(i-1)\sigma^{j-2}(j)} A_{i\sigma^{j-1}(j)} A_{(i+1)\sigma^j(j)} \dots A_{l\sigma^{j-1}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{j-2}(j)} 0_{m_{\sigma^{j-1}(j)} \times n_{\sigma^{j-1}(j)}} \\ &A_{(i+1)\sigma^j(j)} \dots A_{l\sigma^{j-1}(j)} = 0_{m_j \times n_j} \end{aligned}$$

для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тем самым доказано равенство

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{0} \mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, l.$$

Следовательно, $\mathbf{0}$ – нуль l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Пусть теперь $l \geq 3, i \in \{1, \dots, l\}$, $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_k)$ – произвольная вектор-матрица из $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$,

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{C} \mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k),$$

где

$$\mathbf{A}_t = (A_{t1}, A_{t2}, \dots, A_{tk}) \in \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P),$$

$$t \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, l\}.$$

Если $i \geq 3$, то положим

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11} = 0_{m_1 \times n_1}, \dots, A_{1(k-1)} = 0_{m_{k-1} \times n_{k-1}}, A_{1k} \neq 0_{m_k \times n_k}),$$

$$\mathbf{A}_2 = (A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2k}) \neq \mathbf{0}, A_{2\sigma(k)} = 0_{m_{\sigma(k)} \times n_{\sigma(k)}},$$

$$\mathbf{A}_s \neq \mathbf{0}, s \in \{3, \dots, i-1, i+1, \dots, l\}.$$

Тогда для $j = 1, \dots, k-1$ имеем

$$\begin{aligned} Z_j &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{j-2}(j)} C_{\sigma^{j-1}(j)} A_{(i+1)\sigma^j(j)} \dots A_{l\sigma^{j-1}(j)} = \\ &= 0_{m_j \times n_j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{j-2}(j)} \\ &C_{\sigma^{j-1}(j)} A_{(i+1)\sigma^j(j)} \dots A_{l\sigma^{j-1}(j)} = 0_{m_j \times n_j}, \end{aligned}$$

а для $j = k$ имеем

$$\begin{aligned} Z_k &= A_{1k} A_{2\sigma(k)} A_{3\sigma^2(k)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(k)} \\ &C_{\sigma^{i-1}(k)} A_{(i+1)\sigma^i(k)} \dots A_{l\sigma^{i-1}(k)} = \\ &= A_{1k} 0_{m_{\sigma(k)} \times n_{\sigma(k)}} A_{3\sigma^2(k)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(k)} \\ &C_{\sigma^{i-1}(k)} A_{(i+1)\sigma^i(k)} \dots A_{l\sigma^{i-1}(k)} = 0_{m_k \times n_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $i \geq 3$, то

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{C} \mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

где все вектор-матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{A}_{i+1}, \dots, \mathbf{A}_l$ отличны от нуля $\mathbf{0}$.

Если $i = 2$, то положим \mathbf{A}_1 таким же, как в случае $i \geq 3$, в $\mathbf{A}_3 \neq \mathbf{0}$ компонента $A_{3\sigma^2(k)}$ равна нулевой матрице $0_{m_{\sigma^2(k)} \times n_{\sigma^2(k)}}$, вектор-матрицы A_4, \dots, A_l отличны от $\mathbf{0}$. Тогда снова

$$Z_1 = 0_{m_1 \times n_1}, \dots, Z_{k-1} = 0_{m_{k-1} \times n_{k-1}},$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} Z_k &= A_{1k} C_{\sigma(k)} A_{3\sigma^2(k)} A_{4\sigma^3(k)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(k)} = \\ &= A_{1k} C_{\sigma(k)} 0_{m_{\sigma^2(k)} \times n_{\sigma^2(k)}} A_{4\sigma^3(k)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(k)} = 0_{m_k \times n_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, для $i = 2$ равенство (4.1) также верно.

Если $i = 1$, то положим

$$\begin{aligned} A_{2\sigma(1)} &= 0_{m_{\sigma(1)} \times n_{\sigma(1)}}, \dots, A_{2\sigma(k-1)} = 0_{m_{\sigma(k-1)} \times n_{\sigma(k-1)}}, \\ A_{2\sigma(k)} &\neq 0_{m_{\sigma(k)} \times n_{\sigma(k)}}, \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_l$ такие же, как и в случае $i = 2$. Тогда для $j = 1, \dots, k-1$ имеем

$$\begin{aligned} Z_j &= C_j A_{2\sigma(j)} A_{3\sigma^2(j)} \dots A_{l\sigma^{j-1}(j)} = \\ &= C_j 0_{m_{\sigma(j)} \times n_{\sigma(j)}} A_{3\sigma^2(j)} \dots A_{l\sigma^{j-1}(j)} = 0_{m_j \times n_j}, \end{aligned}$$

а для $j = k$ имеем

$$\begin{aligned} Z_k &= C_k A_{2\sigma(k)} A_{3\sigma^2(k)} A_{4\sigma^3(k)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(k)} = \\ &= C_k A_{2\sigma(k)} 0_{m_{\sigma^2(k)} \times n_{\sigma^2(k)}} A_{4\sigma^3(k)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(k)} = 0_{m_k \times n_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, и в случае $i = 1$ верно равенство (4.1). Следовательно, \mathbf{C} – делитель нуля l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$. Теорема доказана.

Для теоремы 4.1 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.1 – 2.5.

5 (2, l)-кольцо $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, []_{l, \sigma, k} \rangle$

Предложение 5.1. Пусть $i = 1, \dots, l$,
 $\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, l$,
 $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k)$,
 $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_k)$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P . Тогда, если определена одна из k -компонентных вектор-матриц

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}, \quad (5.1)$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} +$$

$$+ [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}, \quad (5.2)$$

то определена и вторая вектор-матрица и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} =$$

$$= [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} +$$

$$+ [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}. \quad (5.3)$$

Доказательство. Положим

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{U} = (U_1, \dots, U_k),$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} +$$

$$+ [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{V} = (V_1, \dots, V_k),$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{G} = (G_1, \dots, G_k),$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{H} = (H_1, \dots, H_k).$$

Предположим, что определена вектор-матрица (5.1). Тогда для любого $j = 1, \dots, k$ определена матрица

$$U_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}(B_{\sigma^{i-1}(j)} +$$

$$+ C_{\sigma^{i-1}(j)})A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Из последнего равенства, используя дистрибутивность умножения матриц относительно их сложения, получим

$$U_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}B_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)} +$$

$$+ A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}C_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

где в правой части первое слагаемое совпадает с G_j , а второе – с H_j , то есть

$$U_j = G_j + H_j = V_j, j = 1, \dots, k.$$

Следовательно, определена вектор-матрица (5.2) и верно (5.3).

Если определена вектор-матрица (5.2), то для любого $j = 1, \dots, k$ определена матрица

$$V_j = G_j + H_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots$$

$$\dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}B_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)} +$$

$$+ A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}C_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Из последнего равенства, снова используя дистрибутивность умножения матриц относительно их сложения, получим

$$V_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}(B_{\sigma^{i-1}(j)} +$$

$$+ C_{\sigma^{i-1}(j)})A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)} = U_j,$$

то есть $V_j = U_j, j = 1, \dots, k$. Следовательно, определена вектор-матрица (5.1) и верно (5.3). Предложение доказано.

Теоремы 1.3, 2.1, 3.1, 4.1, замечание 4.1 и предложение 5.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.1. Пусть P – ассоциативное кольцо, набор $((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

- 1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является ассоциативным (2, l)-кольцом;
- 2) если в P есть единица,

$$\min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\} \geq 2,$$

то (2, l)-кольцо из 1) не является полуабелевым;

- 3) если σ – нетождественная подстановка, то в (2, l)-кольце из 1) нет единиц, а при $l \geq 3$ все его элементы являются делителями нуля.

Для теоремы 5.1 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.1–2.5.

6 (2, l)-алгебра $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, []_{l, \sigma, k} \rangle$

Напомним [1], что произведением скаляра $\lambda \in P$ на вектор-матрицу $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ называется вектор-матрица $\lambda\mathbf{A} = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_k)$. Легко проверяется (см. например, предложение 1 из [1]), что множество $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$, где P – поле, является линейным пространством над P с операциями сложения вектор-матриц и умножения вектор-матриц на скаляр. Нулем этого линейного пространства является вектор-матрица $\mathbf{0} = (0_1, \dots, 0_k)$, где компоненты $0_1, \dots, 0_k$ – нулевые матрицы размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ соответственно. Противоположной для вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ является вектор-матрица

$$-\mathbf{A} = (-A_1, \dots, -A_k),$$

у которой компоненты $-A_1, \dots, -A_k$ являются противоположными для матриц A_1, \dots, A_k соответственно.

Предложение 6.1. Если для k -компонентных вектор-матриц

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, l$$

над ассоциативным коммутативным кольцом P определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}$,

$$\text{то} \quad \lambda[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} =$$

$$= [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}(\lambda\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} \quad (6.1)$$

для всех $\lambda \in P$ и любого $i = 1, \dots, l$.

Доказательство. Ясно, что правая часть равенства из формулировки предложения определена. Положим

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (B_1, \dots, B_k),$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}(\lambda\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (C_1, \dots, C_k).$$

$$\text{Так как, согласно определению операции } []_{l, \sigma, k},$$

$$C_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}(\lambda A_{i\sigma^{i-1}(j)})A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)} =$$

$$= \lambda(A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}A_{i\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \lambda B_j,$$

то есть $C_j = \lambda B_j$ для любого $j = 1, \dots, k$, то

$$\lambda[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \lambda(B_1, \dots, B_k) = (\lambda B_1, \dots, \lambda B_k) =$$

$$= (C_1, \dots, C_k) = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1}(\lambda\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}.$$

Предложение доказано.

Теорема 6.1. Пусть P – поле, набор $((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является ассоциативной $(2, l)$ -алгеброй над P ;

2) если $\min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\} \geq 2$, то $(2, l)$ -алгебра из 1) не является полуабелевой;

3) если σ – нетождественная подстановка, то в $(2, l)$ -алгебре из 1) нет единиц, а при $l \geq 3$ все ее элементы являются делителями нуля.

Доказательство. 1) По теореме 1.3 линейное пространство $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно ассоциативной l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, которая по предложению 5.1 дистрибутивна относительно операции сложения вектор-матриц. Кроме того, согласно предложению 6.1, в этом линейном пространстве выполняется условие (6.1). Следовательно, $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ – ассоциативная $(2, l)$ -алгебра.

2), 3) Следует из 2) и 3) теоремы 5.1. Теорема доказана.

Следствие 6.1. Пусть P – поле, набор $((m_1 \times n_1), \dots, (m_k \times n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$ порядка d . Тогда:

1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, [\]_{d+1, \sigma, k} \rangle$ является ассоциативной $(2, d+1)$ -алгеброй над P ;

2) если $\min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\} \geq 2$, то $(2, d+1)$ -алгебра из 1) не является полуабелевой;

3) если σ – нетождественная подстановка, то в $(2, d+1)$ -алгебре из 1) нет единиц, а при $d \geq 2$ все ее элементы являются делителями нуля.

Следствие 6.2. Пусть P – поле, σ – цикл длины k из S_k , числа $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ удовлетворяют равенствам из следствия 2.2. Тогда:

1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ является ассоциативной $(2, k+1)$ -алгеброй над P ;

2) если $\min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\} \geq 2$, то $(2, k+1)$ -алгебра из 1) не является полуабелевой;

3) если σ – нетождественная подстановка, то в $(2, k+1)$ -алгебре из 1) нет единиц, а при $k \geq 2$ все ее элементы являются делителями нуля.

Следствие 6.3. Пусть P – поле, числа $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ удовлетворяют равенствам из следствия 2.3. Тогда:

1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), +, [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ является ассоциативной $(2, k+1)$ -алгеброй над P ;

2) если $\min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\} \geq 2$, то $(2, k+1)$ -алгебра из 1) не является полуабелевой;

3) если σ – нетождественная подстановка, то в $(2, k+1)$ -алгебре из 1) нет единиц, а при $k \geq 2$ все ее элементы являются делителями нуля.

Следствие 6.4. Пусть P – поле. Тогда:

1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m \times s, s \times r, r \times m}(P), [\]_{4, (123), 3} \rangle$ является ассоциативной $(2, 4)$ -алгеброй над P , в которой нет единиц, а все ее элементы являются делителями нуля;

2) если $\min\{m, s, r\} \geq 2$, то $(2, 4)$ -алгебра из 1) не является полуабелевой.

Следствие 6.5. Пусть P – поле. Тогда:

1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{M}_{m \times n, n \times m}(P), [\]_{3, (12), 2} \rangle$ является ассоциативной $(2, 3)$ -алгеброй над P , в которой нет единиц, а все ее элементы являются делителями нуля;

2) если $\min\{m, n\} \geq 2$, то $(2, 3)$ -алгебра из 1) не является полуабелевой

ЛИТЕРАТУРА

- Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 1 (37), серия В. – С. 30–37.
- Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
- Гальмак, А.М. σ -Согласованные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 2 (37), серия В. – С. 30–37.
- Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.
- Гальмак, А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 58–64.
- Гальмак, А.М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28 – 34.
- Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
- Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
- Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
- Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
- Cupona, G. On $[n, m]$ -rings / G. Cupona // Bull. Soc. Math. Phys. Mased. – 1965. – Vol. 16. – P. 5–10.
- Crombez, G. On (n, m) -rings / G. Crombez // Abh. Math. Sem. Univ. – Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180–199.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

Поступила в редакцию 10.09.11.

УДК 512.544

О МОДУЛЯХ НАД ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП

О.Ю. Дашкова

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск, Украина

ON MODULES OVER GROUP RINGS OF LOCALLY FINITE GROUPS

O.Yu. Dashkova

O. Honchar Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk, Ukraine

Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль, такой, что \mathbf{R} – коммутативное кольцо с единицей, $A/C_A(G)$ не является артиновым \mathbf{R} -модулем, $C_G(A)=1$, G – локально конечная группа. Рассматривается система $\mathcal{L}_{nad}(G)$ всех подгрупп $H \leq G$, для которых фактор-модули $A/C_A(H)$ не являются артиновыми \mathbf{R} -модулями. Автор изучает $\mathbf{R}G$ -модуль A , такой, что $\mathcal{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальной упорядоченности как упорядоченное множество. Описаны свойства локально конечной группы G , удовлетворяющей заданным условиям. Также получены некоторые свойства локально разрешимой периодической группы G рассматриваемого вида при условии, что \mathbf{R} – дедекиндово кольцо.

Ключевые слова: артинов \mathbf{R} -модуль, групповое кольцо, локально конечная группа.

Let A be an $\mathbf{R}G$ -module, where \mathbf{R} is a commutative ring with the unit, $A/C_A(G)$ is not an artinian \mathbf{R} -module, $C_G(A)=1$ and G is a locally finite group. Let $\mathcal{L}_{nad}(G)$ be a system of all subgroups $H \leq G$ such that quotient modules $A/C_A(H)$ are not artinian \mathbf{R} -modules. The author studies $\mathbf{R}G$ -module A such that $\mathcal{L}_{nad}(G)$ satisfies either weak minimal condition or weak maximal condition as an ordered set. The properties of the locally finite group G with these conditions are described. Some properties of a locally soluble periodic group G under consideration are obtained if \mathbf{R} is a dedekind ring.

Keywords: an artinian \mathbf{R} -module, a group ring, a locally finite group.

Введение

Пусть A – векторное пространство над полем F . Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F , $GL(F, A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $n \times n$ -матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки, и изучались достаточно много. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F , ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из таких ограничений, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например [1], [2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2]. В [3]

было введено другое условие конечности, налагаемое на бесконечномерные линейные группы. Авторы ввели понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть H – подгруппа группы $GL(F, A)$. H действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы определяют $centdim_F H$ как $\dim_F(A/C_A(H))$. Говорят, что подгруппа H имеет конечную центральную размерность, если $centdim_F H$ конечна, и H имеет бесконечную центральную размерность, если $centdim_F H$ бесконечна.

Пусть $G \leq GL(F, A)$. В [3] была рассмотрена система $\mathcal{L}_{id}(G)$ всех подгрупп группы G , имеющих бесконечную центральную размерность. Чтобы исследовать бесконечномерные линейные группы, которые по своей структуре близки к конечномерным, следует рассмотреть случай, когда система $\mathcal{L}_{id}(G)$ «достаточно мала». Так, в [3] изучались локально разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathcal{L}_{id}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Разрешимые

бесконечномерные линейные группы, у которых $L_{id}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, исследовались в работе [4].

Слабое условие минимальности и слабое условие максимальности являются наиболее естественными теоретико-групповыми обобщениями обычных условий минимальности и максимальности. Слабое условие минимальности было введено в рассмотрение Д.И. Зайцевым [5], а слабое условие максимальности – Р. Бэрмом [6]. Пусть G – группа, \mathcal{M} – некоторое семейство подгрупп группы G . Говорят, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для \mathcal{M} -подгрупп, если \mathcal{M} удовлетворяет слабому условию минимальности, т. е. если для любого убывающего ряда подгрупп из множества \mathcal{M}

$$G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n \geq G_{n+1} \geq \dots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$. Группа G удовлетворяет слабому условию максимальности для \mathcal{M} -подгрупп, если \mathcal{M} удовлетворяет слабому условию максимальности, т. е. если для любого возрастающего ряда подгрупп из множества \mathcal{M}

$$G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \dots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$. В [7] авторы изучали бесконечномерные периодические локально радикальные группы, у которых $\mathcal{L}_{id}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальности.

Если $G \leq GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG -модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$ -модуля A , где \mathbf{R} – кольцо, структура которого близка к структуре поля. При этом обобщением понятия центральной размерности подгруппы линейной группы является понятие централизатора подгруппы, введенное в [8]. Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль, где \mathbf{R} – кольцо, G – группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как \mathbf{R} -модуль, называется централизатором подгруппы H в модуле A . Следует отметить, что в теории модулей существует ряд обобщений конечномерного векторного пространства. Это модули, обладающие конечными композиционными рядами, конечно порожденные модули, нетеровы модули, артиновы модули.

В [9] исследовался $\mathbf{R}G$ -модуль A , такой, что \mathbf{R} – дедекиндово кольцо, $C_G(A)=1$, и централизатор группы G в модуле A не является артиновым \mathbf{R} -модулем. Была рассмотрена система $\mathcal{L}_{nad}(G)$ всех подгрупп группы G ,

централизаторы которых в модуле A не являются артиновыми \mathbf{R} -модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Изучался такой $\mathbf{R}G$ -модуль A , что система $\mathcal{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, а группа G локально разрешима. Также рассматривался случай, когда система $\mathcal{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, $C_G(A)=1$, группа G разрешима, а \mathbf{R} является кольцом целых чисел [10] и дедекиндовым кольцом [11].

Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль, где \mathbf{R} – коммутативное кольцо с единицей, $\mathcal{L}_{nad}(G)$ – система всех подгрупп группы G , централизаторы которых в модуле A не являются артиновыми \mathbf{R} -модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Если $\mathcal{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет слабому условию минимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$. Если же $\mathcal{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет слабому условию максимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{max-nad}$.

Целью настоящей работы является изучение локально конечных групп, удовлетворяющих либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Основными результатами работы являются теоремы 2.1 и 2.2.

1 Предварительные результаты

В настоящем разделе мы получим некоторые элементарные свойства групп рассматриваемого вида. Далее в разделах 1, 2 рассматривается $\mathbf{R}G$ -модуль A , такой, что $C_G(A)=1$, и централизатор группы G в модуле A не является артиновым \mathbf{R} -модулем. Кроме того, всюду, кроме леммы 2.2 и теоремы 2.2, в качестве \mathbf{R} рассматривается коммутативное кольцо с единицей.

Лемма 1.1. Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) Если $L \leq H \leq G$ и централизатор подгруппы H в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем, то и централизатор подгруппы L в модуле A – артинов \mathbf{R} -модуль.

(ii) Если $L, H \leq G$ и централизаторы подгрупп L и H в модуле A являются артиновыми \mathbf{R} -модулями, то централизатор подгруппы $\langle L, H \rangle$ в модуле A – артинов \mathbf{R} -модуль.

Следствие 1.1. Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль. Множество $AD(G)$ всех элементов $x \in G$, таких, что централизатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A – артинов \mathbf{R} -модуль, является нормальной подгруппой группы G .

Доказательство. По лемме 1.1 (ii), $AD(G)$ является подгруппой группы G . Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, отсюда вытекает, что $AD(G)$ нормальна в группе G . Следствие доказано.

Лемма 1.2. Пусть A – \mathbf{RG} -модуль, H – подгруппа группы G . Предположим, что H содержит нормальную подгруппу K , коцентрализатор которой в модуле A не является артиновым \mathbf{R} -модулем. Тогда:

(1) если G удовлетворяет условию $W_{\min\text{-nad}}$, то фактор-группа H/K удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп;

(2) если G удовлетворяет условию $W_{\max\text{-nad}}$, то фактор-группа H/K удовлетворяет слабому условию максимальности для подгрупп.

Лемма 1.3. Пусть A – \mathbf{RG} -модуль, L, K и H – подгруппы группы G , такие, что:

- (i) K – нормальная подгруппа группы L ;
- (ii) K и L – H -инвариантные подгруппы;
- (iii) $L/K \cap HK/K = \langle 1 \rangle$;
- (iv) $L/K = Dr_{n \in \mathbb{N}} L_n/K$, где $L_n/K \neq \langle 1 \rangle$ – H -инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) если G удовлетворяет условию $W_{\max\text{-nad}}$, то коцентрализатор подгруппы HL в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем;

(2) если G удовлетворяет условию $W_{\min\text{-nad}}$, то коцентрализатор подгруппы HK в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем.

Доказательство. Существуют два бесконечных подмножества Σ и Δ множества \mathbb{N} , такие, что $\Sigma \cup \Delta = \mathbb{N}$, $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$. Поскольку множество Δ бесконечно, существует бесконечный строго возрастающий ряд подмножеств множества Δ

$$\Delta(1) \subset \Delta(2) \subset \dots \subset \Delta(k) \subset \dots,$$

а также существует бесконечный строго убывающий ряд подмножеств множества Δ

$$\Delta^*(1) \supset \Delta^*(2) \supset \dots \supset \Delta^*(k) \supset \dots,$$

такие, что множества $\Delta(k+1) \setminus \Delta(k)$ и $\Delta^*(k) \setminus \Delta^*(k+1)$ бесконечны для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть

$$D_k/K = Dr_{t \in \Sigma \cup \Delta(k)} L_t/K$$

и

$$D_k^*/K = Dr_{t \in \Sigma \cup \Delta^*(k)} L_t/K.$$

Сначала рассмотрим строго возрастающий ряд подгрупп

$$HD_1 < HD_2 < \dots < HD_k < \dots.$$

По построению индексы $|HD_{k+1} : HD_k|$ бесконечны. Если группа G удовлетворяет условию $W_{\max\text{-nad}}$, тогда коцентрализатор подгруппы HD_m

в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем для каждого $m \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\langle H, L_t \mid t \in \Sigma \rangle \leq HD_m,$$

из леммы 1.1 следует, что коцентрализатор подгруппы $\langle H, L_t \mid t \in \Sigma \rangle$ в модуле A также является артиновым \mathbf{R} -модулем. Аналогично устанавливаем, что коцентрализатор подгруппы $\langle H, L_t \mid t \in \Delta \rangle$ в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем.

Учитывая равенство $\Sigma \cup \Delta = \mathbb{N}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \langle H, L_t \mid t \in \Delta \rangle, \langle H, L_t \mid t \in \Sigma \rangle \rangle = \\ = \langle H, L_t \mid t \in \Sigma \cup \Delta \rangle = HL. \end{aligned}$$

По лемме 1.1, коцентрализатор подгруппы HL в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем.

Аналогично можно построить строго убывающий ряд подгрупп

$$HD_1^* > HD_2^* > \dots > HD_k^* > \dots,$$

такой, что индексы $|HD_k^* : HD_{k+1}^*|$ бесконечны.

Если группа G удовлетворяет условию $W_{\min\text{-nad}}$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что коцентрализатор подгруппы HD_m^* в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем. Поскольку $HK \leq HD_m^*$, по лемме 1.1, коцентрализатор подгруппы HK в модуле A также является артиновым \mathbf{R} -модулем. Лемма доказана.

Следствие 1.2. Пусть A – \mathbf{RG} -модуль, и пусть L, K и H – подгруппы группы G , такие, что:

- (i) K – нормальная подгруппа группы L ;
- (ii) K и L – H -инвариантные подгруппы;
- (iii) $L/K = Dr_{n \in \mathbb{N}} L_n/K$, где $L_n/K \neq \langle 1 \rangle$ – H -инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$;

(iv) множество $\mathbb{N} \setminus \text{Supp}(L/K \cap HK/K)$ бесконечно.

Если группа G удовлетворяет условию $W_{\min\text{-nad}}$ или условию $W_{\max\text{-nad}}$, то коцентрализатор подгруппы HK в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем. В частности, коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем.

Доказательство. Пусть

$$\Delta = \mathbb{N} \setminus \text{Supp}(L/K \cap HK/K),$$

и пусть $T/K = Dr_{n \in \Delta} L_n/K$. Тогда $T/K \cap HK/K = \langle 1 \rangle$.

Применим лемму 1.3. Следствие доказано.

Следствие 1.3. Пусть A – \mathbf{RG} -модуль, и пусть L, K и H – подгруппы группы G , такие, что:

- (i) K – нормальная подгруппа группы L ;
- (ii) K и L – H -инвариантные подгруппы;
- (iii) $L/K = Dr_{n \in \mathbb{N}} L_n/K$, где $L_n/K \neq \langle 1 \rangle$ – H -инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$.

Если группа G удовлетворяет условию $W_{\min\text{-nad}}$ или условию $W_{\max\text{-nad}}$, то коцентрализатор подгруппы $\langle h \rangle K$ в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем для каждого $h \in H$. В частности, $H \leq AD(G)$.

Доказательство. Пусть $h \in H$. Поскольку L_n/K – H -инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$, то L_n/K – $\langle h \rangle$ -инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$. В частности, множество $\text{Supp}(\langle h \rangle K/K \cap L/K)$ конечно. По следствию 1.2, коцентрализатор подгруппы $\langle h \rangle K$ в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем. Лемма доказана.

2 О структуре локально конечных групп, удовлетворяющих либо условию $W_{\min\text{-nad}}$, либо условию $W_{\max\text{-nad}}$

Очевидно, что черниковская группа удовлетворяет как слабому условию максимальности для подгрупп, так и слабому условию минимальности для подгрупп. Отсюда следует, что при изучении \mathbf{RG} -модуля A в случае, когда группа G является черниковской, G удовлетворяет как условию $W_{\min\text{-nad}}$, так и условию $W_{\max\text{-nad}}$.

Лемма 2.1. Пусть A – \mathbf{RG} -модуль, и предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min\text{-nad}}$, либо условию $W_{\max\text{-nad}}$. Пусть K и H – подгруппы группы G , такие, что K – нормальная подгруппа H , и H/K – бесконечная элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p . Предположим также, что подгруппы K и H $\langle g \rangle$ -инвариантны для некоторого $g \in G$. Если $g^k \in C_G(H/K)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $g \in AD(G)$.

Доказательство. Пусть $M = H/K$. Выберем $1 \neq b_1 \in M$, и положим $B_1 = \langle b_1 \rangle^{\langle g \rangle}$. Поскольку элемент g индуцирует на M автоморфизм конечного порядка, подгруппа B_1 конечна. Справедливо равенство $M = B_1 \times C_1$ для некоторой подгруппы C_1 . Множество $\{C_1^y \mid y \in \langle g \rangle\}$ конечно. Пусть

$$\{C_1^y \mid y \in \langle g \rangle\} = \{U_1, \dots, U_m\}.$$

Отсюда следует, что $\langle g \rangle$ -инвариантная подгруппа

$$D_1 = U_1 \cap \dots \cap U_m = \text{Core}_{\langle g \rangle}(C_1)$$

имеет конечный индекс в M . Пусть $1 \neq b_2 \in D_1$, и $B_2 = \langle b_2 \rangle^{\langle g \rangle}$. Тогда $\langle B_1, B_2 \rangle = B_1 \times B_2$. Как и ранее, устанавливаем, что $M = (B_1 \times B_2) \times C_2$ для некоторой подгруппы C_2 . Продолжив рассуждения

аналогичным образом, можно построить бесконечное семейство $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ неединичных $\langle g \rangle$ -инвариантных подгрупп, такое, что $\langle B_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = Dr_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Согласно следствию 1.3, $g \in AD(G)$. Лемма доказана.

Далее через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядков элементов группы G .

Следствие 2.1. Пусть A – \mathbf{RG} -модуль, и предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min\text{-nad}}$, либо условию $W_{\max\text{-nad}}$. Пусть K и H – подгруппы группы G , такие, что K – нормальная подгруппа H , и H/K – периодическая почти локально разрешимая группа. Если фактор-группа H/K не является черниковской, то $H \leq AD(G)$.

Доказательство. Пусть L/K – локально разрешимая нормальная подгруппа H/K конечного индекса. Поскольку фактор-группа H/K не является черниковской, то L/K также не является черниковской. Пусть g – произвольный элемент подгруппы H . Тогда L/K содержит абелеву $\langle g \rangle$ -инвариантную подгруппу C/K , которая не является черниковской [12]. Если множество $\pi(C/K)$ бесконечно, по следствию 1.3, $g \in AD(G)$. Если же $\pi(C/K)$ конечно, то существует простое число p , для которого силовская p -подгруппа P/K фактор-группы C/K не является черниковской. Отсюда вытекает, что нижний слой B/K подгруппы P/K бесконечен, и поэтому L/K содержит $\langle g \rangle$ -инвариантную бесконечную элементарную абелеву подгруппу B_1/K . Согласно лемме 2.1, $g \in AD(G)$. Следствие доказано.

Следствие 2.2. Пусть A – \mathbf{RG} -модуль, и предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min\text{-nad}}$, либо условию $W_{\max\text{-nad}}$. Пусть K и H – подгруппы группы G , такие, что K – нормальная подгруппа H , и H/K – локально конечная группа. Если фактор-группа H/K не является черниковской, то $H \leq AD(G)$.

Доказательство. Пусть g – произвольный элемент подгруппы H , и пусть $C/K = C_{H/K}(gK)$. Если фактор-группа C/K не является черниковской, то по теореме 5.8 [13] C/K содержит абелеву подгруппу D/K , являющуюся прямым произведением бесконечного множества нетривиальных циклических подгрупп. Согласно следствию 1.3, $g \in AD(G)$. Предположим, что фактор-группа C/K является черниковской. Согласно [14], H/K – почти локально разрешимая группа. Применяя следствие 2.1, получаем, что

$g \in AD(G)$. Следовательно, $H \leq AD(G)$. Следствие доказано.

Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.1. Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль. Предположим, что группа G локально конечна и удовлетворяет либо условию $W_{\min-nad}$, либо условию $W_{\max-nad}$. Тогда либо группа G черниковская, либо $G = AD(G)$.

Напомним, что кольцо \mathbf{R} называется дедекиндовым кольцом, если выполняются следующие условия:

- 1) \mathbf{R} – область целостности;
- 2) \mathbf{R} – нетерово кольцо;
- 3) каждый ненулевой простой идеал кольца \mathbf{R} является максимальным идеалом;
- 4) кольцо \mathbf{R} целозамкнуто.

Лемма 2.2. Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль, G – периодическая локально разрешимая группа, \mathbf{R} – дедекиндово кольцо. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем. Тогда группа G разрешима.

Доказательство. Справедливость леммы следует из леммы 4.1 [15]. Лемма доказана.

Если G – группа, через G_∞ обозначим пересечение всех нормальных подгрупп K группы G , для которых фактор-группа G/K разрешима. В случае, если группа G разрешима, через $s(G)$ обозначим степень разрешимости группы G .

Теорема 2.2. Пусть A – $\mathbf{R}G$ -модуль, G – периодическая локально разрешимая группа, \mathbf{R} – дедекиндово кольцо. Предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min-nad}$, либо условию $W_{\max-nad}$. Тогда фактор-группа G/G_∞ разрешима.

Доказательство. Предположим противное. Пусть фактор-группа $H = G/G_\infty$ неразрешима. Пусть F_1 – произвольная конечная подгруппа H . Поскольку H аппроксимируется разрешимыми группами, существует нормальная подгруппа K_1 группы H , такая, что $F_1 \cap K_1 = \langle 1 \rangle$, и фактор-группа H/K_1 разрешима. Из нашего предположения вытекает, что подгруппа K_1 неразрешима. Поэтому ступени разрешимости конечных подгрупп группы K_1 не ограничены конкретным числом, и, следовательно, K_1 содержит конечную подгруппу D_1 , такую, что $s(F_1) < s(D_1)$. Подгруппы F_1 и D_1 конечны, и поэтому разрешимы. Пусть $F_2 = D_1^{F_1}$. Тогда F_2 – конечная F_1 -инвариантная подгруппа, такая, что $s(F_1) < s(F_2)$. В частности, подгруппа F_1F_2 конечна, и поэтому существует нормальная

подгруппа K_2 группы H , такая, что $F_1F_2 \cap K_2 = \langle 1 \rangle$, и фактор-группа H/K_2 разрешима. Как и ранее, подгруппа K_2 неразрешима, и поэтому можно выбрать конечную F_1F_2 -инвариантную подгруппу F_3 группы K_2 , такую, что $s(F_2) < s(F_3)$. Продолжив наши рассуждения, построим строго возрастающий ряд конечных подгрупп $F_1 < F_1F_2 < \dots < F_1F_2 \dots F_n < \dots$, таких, что:

- (i) F_n – F_j -инвариантная подгруппа для $j < n$;
- (ii) $s(F_j) < s(F_n)$ для $j < n$;
- (iii) $F_1F_2 \dots F_n \cap \langle F_j \mid j > n \rangle = \langle 1 \rangle$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Из этих условий вытекает, что для любого бесконечного подмножества Δ множества \mathbb{N} подгруппа $\langle F_j \mid j \in \Delta \rangle$ разлагается в прямое произведение подгрупп $F_j, j \in \Delta$. Следовательно, подгруппа $\langle F_j \mid j > n \rangle$ неразрешима.

Предположим сначала, что G удовлетворяет условию $W_{\min-nad}$. Существует бесконечный строго убывающий ряд подмножеств

$$N = \Delta(1) \supset \Delta(2) \supset \dots \supset \Delta(k) \supset \dots,$$

таких, что множество $\Delta(k) \setminus \Delta(k+1)$ бесконечно для любого $k \in \mathbb{N}$. Пусть $L_k = \langle F_j \mid j \in \Delta(k) \rangle$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Получим строго убывающий ряд подгрупп фактор-группы H

$$L_1 > L_2 > \dots > L_k > \dots,$$

такой, что индексы $|L_k : L_{k+1}|$ бесконечны. Пусть R_k – прообраз L_k в группе G . Тогда $R_1 > R_2 > \dots > R_k > \dots$ – строго убывающий ряд подгрупп группы G , такой, что индексы $|R_k : R_{k+1}|$ бесконечны. Следовательно, существует $m \in \mathbb{N}$, такое, что коцентрализатор подгруппы R_m в модуле A является артиновым \mathbf{R} -модулем. По лемме 2.2 подгруппа R_m разрешима, и поэтому разрешима фактор-группа $L_m = R_m/G_\infty$. Ранее мы показали, что подгруппа $L_m = \langle F_j \mid j \in \Delta(m) \rangle$ для любого $k \in \mathbb{N}$ неразрешима. Противоречие.

В случае, когда группа G удовлетворяет условию $W_{\max-nad}$, мы строим строго возрастающий ряд подмножеств множества \mathbb{N} и проводим аналогичные рассуждения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips, R.E. The structure of groups of finitary transformations / R.E. Phillips // J. Algebra. – 1988. – Vol. 119, № 2. – P. 400–448.

2. Phillips, R.E. Finitary linear groups: a survey. «Finite and locally finite groups» / R.E. Phillips // NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. – 1995. – Vol. 471. – P. 111–146.
3. Dixon, M.R. Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension / M.R. Dixon, M.J. Evans, L.A. Kurdachenko // J. Algebra. – 2004. – Vol. 277, № 1. – P. 172–186.
4. Kurdachenko, L.A. Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Publ. Mat. – 2008. – Vol. 50. – P. 103–131.
5. Зайцев, Д.И. Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности / Д.И. Зайцев // Укр. мат. журн. – 1968. – Т. 20. – С. 472–482.
6. Baer, R. Polyminimaxgruppen / R. Baer // Math. Ann. – 1968. – Vol. 175. – P. 1–43.
7. Munoz-Escolano, J.M. Periodic linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension / J.M. Munoz-Escolano, J. Otal, N.N. Semko // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 749–763.
8. Курдаченко, Л.А. О группах с минимаксными классами сопряженных элементов / Л.А. Курдаченко // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: науч. тр. / Академия наук Украины, под ред. Черникова Н.С. – Киев, 1993. – С. 160–177.
9. Дашкова, О.Ю. Об одном классе модулей над групповыми кольцами локально разрешимых групп / О.Ю. Дашкова // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 94–98.
10. Дашкова О.Ю. Об одном классе модулей над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп / О.Ю. Дашкова // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 1. – С. 44–51.
11. Дашкова, О.Ю. Об одном классе модулей над групповыми кольцами разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп / О.Ю. Дашкова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14, № 7. – С. 111–119.
12. Зайцев, Д.И. О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп / Д.И. Зайцев // Доклады Академии наук СССР. – 1974. – Т. 214, № 6. – С. 1250–1253.
13. Kegel, O.H. Locally Finite Groups / O.H. Kegel, B.A.F. Wehrfritz. – North-Holland Mathematical Library: North-Holland, Amsterdam, London, 1973. – 210 p.
14. Hartley, B. Fixed points of automorphisms of certain locally finite groups and Chevalley groups / B. Hartley // J. London Math. Soc. – 1988. – Vol. 37, № 2. – P. 421–436.
15. Dashkova, O.Yu. On modules over group rings of locally soluble groups with rank restrictions on some systems of subgroups / O.Yu. Dashkova // Asian-Eur. J. Math. – 2010. – Vol. 3, № 1. – P. 45–55.

Поступила в редакцию 29.08.11.

УДК 512.542

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Д.А. Ходанович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE DERIVATIVE LENGTH OF A FINITE SOLVABLE GROUP

D.A. Hodanovich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получены верхние оценки производной длины фраттиниевой фактор-группы в зависимости от индексов максимальных подгрупп разрешимой группы, не содержащих подгруппу Фиттинга.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фиттинга, подгруппа Фраттини, производная длина.

The upper estimations of the derivative length of the Frattini quotient group depending on the indices of the maximal subgroups which do not contain a Fitting subgroup in the solvable group have been obtained.

Keywords: finite group, solvable group, maximal subgroup, Fitting subgroup, Frattini subgroup, derivative length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1], [2].

Любая разрешимая группа обладает нормальным рядом с абелевыми факторами. Длина самого короткого такого ряда называется производной длиной группы G и обозначается через $d(G)$ [1, глава 4.2]. Ясно, что $d(G)=1$ тогда и только тогда, когда G – неединичная абелева группа. Для любого натурального числа $k > 1$ и разрешимой группы G в точности тогда $d(G)=k$, когда $G \in \mathfrak{A}^k \setminus \mathfrak{A}^{k-1}$. Здесь \mathfrak{A} – формация всех абелевых групп, а \mathfrak{A}^k – произведение k копий формации \mathfrak{A} [1, глава 5.1], [2, глава 1.1].

Для натурального k через $\rho(k)$ и $\sigma(k)$ обозначают соответственно максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп и вполне приводимых подгрупп нечетного порядка полной линейной группы $GL(k, \mathbb{F})$, где \mathbb{F} – поле. Согласно [3] такие функции $\rho(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\sigma(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ существуют и не зависят от поля \mathbb{F} . Значения функций $\rho(k)$ и $\sigma(k)$ известны для каждого натурального k .

Хорошо известно, что в разрешимой группе индекс каждой максимальной подгруппы является степенью некоторого простого числа. На основе этого факта в 2004 году В.С. Монахов [4] ввел следующую функцию

$$m(G) = \max_{p \in \pi(G)} \{ \log_p |G : M| \mid M <_{\max} G, |M : M| = p^a \}$$

и установил общую закономерность [4, теорема 1 (2)] между производной длиной каждой

разрешимой группы G и значениями функций $\rho(k)$ и $m(G)$:

$$d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(m(G)) \leq 3 + m(G).$$

Здесь $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка разрешимой группы G . Запись $M <_{\max} G$ означает, что M – максимальная подгруппа группы G , а $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G .

В другой статье В.С. Монахова [5] показано, что наибольшее значение $m(G)$ достигается на индексах тех максимальных подгрупп разрешимой группы G , которые не содержат подгруппу Фиттинга $F(G)$. Поэтому вполне естественно исследовать влияние индексов не всех, а только некоторых выделенных максимальных подгрупп на производную длину разрешимой группы. К данной тематике относится настоящая заметка.

Для любого натурального k в каждой разрешимой группе G выделим следующие множества подгрупп:

$$\mathcal{M}(G) = \{ M <_{\max} G \mid F(G) \not\subseteq M \};$$

$$\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) = \{ M \in \mathcal{M}(G) \mid d(M) > \rho(k) \}.$$

Множество $\mathcal{M}(G)$ состоит из всех максимальных подгрупп группы G , не содержащих подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G , и в силу [5] оно непусто в каждой неединичной разрешимой группе G . В зависимости от значения k множество $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ может быть как пустым, так и не пустым. Например, $\mathcal{M}(S_4) = \mathcal{M}_{\rho(1)}(S_4) = \{ S_3^x \mid x \in S_4 \}$ непусто, а $\mathcal{M}_{\rho(k)}(S_4)$ пусто для любого натурального $k \geq 2$. Здесь S_n – симметрическая группа степени n .

1 Вспомогательные утверждения

Как обычно, подгруппу Фраттини и Фиттинга обозначаем через $\Phi(G)$ и $F(G)$ соответственно, а полупрямое произведение групп A и B с нормальной в AB подгруппой A через $[A]B$. Коммутант группы G обозначается через G' , а $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ – i -й коммутант группы G . Согласно [1, лемма 4.6] выполняется равенство $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$ для любого натурального i и любой нормальной подгруппы N . Для любой группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G \supseteq G' \supseteq G^{(2)} \supseteq \dots \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \dots$$

Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то группа G называется разрешимой. Наименьшее натуральное n , для которого $G^{(n)} = 1$, называется производной длиной группы G и обозначается через $d(G)$. Несложно проверить, что значение $d(G)$ совпадает с длиной самого короткого нормального ряда группы G с абелевыми факторами.

Лемма 1.1. Для разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – подгруппа группы G , то $d(H) \leq d(G)$;
- 2) если N – нормальная подгруппа группы G , то $d(G/N) \leq d(G) \leq d(N) + d(G/N)$;
- 3) $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + d(G/F(G))$;
- 4) если $t \in \mathbb{N}$, $t \leq d(G)$, то $d(G^{(t)}) = d(G) - t$ и $d(G/G^{(t)}) = t$;
- 5) $G^{(d(G)-1)} \subseteq F(G)$ и $d(G/F(G)) \leq d(G) - 1$.

Доказательство. 1. Утверждения 1–2 вытекают непосредственно из определения производной длины и равенства $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$.

3. Согласно [1, теорема 4.24] фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева. Применим утверждение 2 к группе $G/\Phi(G)$ с нормальной подгруппой $F(G)/\Phi(G)$:

$$d(G/\Phi(G)) \leq d(F(G)/\Phi(G)) + d((G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))) \leq 1 + d(G/F(G)).$$

4. Пусть $n = d(G)$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq n$. Тогда

$$\begin{aligned} G \supset G' \supset G^{(2)} \dots \supset G^{(t-1)} \supset G^{(t)} \supset \\ \supset G^{(t+1)} \supset \dots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = 1, \\ G^{(t)} \supset G^{(t+1)} \supset \dots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = 1 \end{aligned}$$

и $d(G^{(t)}) = n - t = d(G) - t$. Поскольку

$$\begin{aligned} G/G^{(t)} \supset G'/G^{(t)} \supset \\ \supset G^{(2)}/G^{(t)} \dots \supset G^{(t-1)}/G^{(t)} \supset G^{(t)}/G^{(t)} = 1, \end{aligned}$$

то $d(G/G^{(t)}) = t$.

5. Подгруппа $G^{(d(G)-1)}$ абелева и нормальна в G , поэтому

$$G^{(d(G)-1)} \subseteq F(G) \text{ и } d(G/F(G)) \leq d(G) - 1$$

по 4. Лемма доказана.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций. Пусть \mathfrak{E} – формация всех конечных групп, \mathfrak{F} – некоторая формация и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. Пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{H} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{H} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^n = \mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{F}$ для любого натурального $n > 1$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех абелевых и нильпотентных групп обозначают через \mathfrak{A} и \mathfrak{N} соответственно.

Лемма 1.2. Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число.

1. Тогда и только тогда $d(G) \leq k$, когда $G \in \mathfrak{A}^k$.
2. Тогда и только тогда $d(G) = k$, когда $G \in \mathfrak{A}^k \setminus \mathfrak{A}^{k-1}$.
3. Тогда и только тогда $d(G/\Phi(G)) \leq k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 непосредственно вытекают из определений производной длины и произведения формаций.

3. Пусть $d(G/\Phi(G)) \leq k$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$. Согласно [1, лемма 4.21 (2)] справедливо равенство $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, поэтому из леммы 1.1 (5) следует, что $G/F(G) \in \mathfrak{A}^{k-1}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. Обратно, пусть $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. Тогда $G/F(G) \in \mathfrak{A}^{k-1}$, а так как $F(G)/\Phi(G)$ абелева, то $G/F(G) \in \mathfrak{A}^k$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Если \mathfrak{F} – формация, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [2, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.4 [5]. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) подгруппа Фраттини группы G совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга;

2) если $H <_{\max} G$ и $|G:H| = p^h$, p – простое, то существует подгруппа $M <_{\max} G$ такая, что выполняются следующие утверждения:

- 2.1) $F(G)$ не содержится в M ;

2.2) $|G : M| = q^m$, q – простое, и $h \leq m$.

Лемма 1.5 [6], [7].

1. Если $n = 1$, то $\rho(n) = 1$.
2. Если $n \in \{2, 3, 4\}$, то $\rho(n) = n + 2$.
3. Если $n \in \{5, 6, 7\}$, то $\rho(n) = 7$.
4. Если $n \in \{8, 9\}$, то $\rho(n) = n$.
5. Если $n \in \{10, \dots, 17\}$, то $\rho(n) = 10$.
6. Если $n \in \{18, \dots, 25\}$, то $\rho(n) = 11$.
7. Если $n \in \{26, \dots, 33\}$, то $\rho(n) = 12$.
8. Если $n \in \{34, \dots, 65\}$, то $\rho(n) = 13$.
9. Если $n \geq 66$, то $\rho(n) \leq 5 \log_3(n - 2) + 53/10$.

В частности, $\rho(n) \leq n + 2$. Кроме того, если $n \geq 7$, то $\rho(n) \leq n$, а если $n > 10$, то $\rho(n) < n$.

Лемма 1.6 [8, теорема 4В].

1. Если $n \in \{1, 2\}$, то $\sigma(n) = 1$.
2. Если $n \in \{3, 4\}$, то $\sigma(n) = 2$.
3. Если $5 \cdot 7^x \leq n < 15 \cdot 7^x$, то $\sigma(n) = 2x + 3$.
4. Если $15 \cdot 7^x \leq n < 5 \cdot 7^{x+1}$, то $\sigma(n) = 2x + 4$.

Из лемм 1.5 и 1.6 вытекает, что функции $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ неубывающие.

2 Основной результат

Теорема 2.1. Зафиксируем натуральное число k . Если G – разрешимая группа и индекс каждой подгруппы из $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$.

Отметим, что теорема охватывает все разрешимые группы, у которых $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) = \emptyset$.

Доказательство. Согласно введенному обозначению множество $\mathcal{M}(G)$ состоит из всех максимальных подгрупп группы G , не содержащих подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G . Допустим, что G – неединичная группа и $\mathcal{M}(G) = \emptyset$. Тогда каждая максимальная подгруппа из G содержит $F(G)$. Поэтому пересечение всех максимальных подгрупп, которое является подгруппой Фраттини группы G , также содержит подгруппу Фиттинга. Но это в разрешимых группах невозможно [1, лемма 4.21 (1)]. Поэтому допущение неверно и множество $\mathcal{M}(G)$ непусто у каждой неединичной группы G .

Пусть $h = m(G)$. Тогда в группе G существует максимальная подгруппа H такая, что $|G : H| = p^h$ для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.4 (2) существует максимальная подгруппа $M \in \mathcal{M}(G)$ такая, что $|G : M| = q^m$ для некоторого $q \in \pi(G)$ и $h \leq m$. Поскольку $h = m(G)$, то из определения функции $m(G)$ получаем, что $h = m = m(G)$.

Предположим, что M не принадлежит $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$. Тогда $M \in \mathcal{M}(G) \setminus \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$, M не содержит $F(G)$ и $d(M) \leq \rho(k)$. Теперь $G = F(G)M$, а поскольку $G/F(G) \cong M/M \cap F(G)$, то $d(G/F(G)) = d(M/M \cap F(G)) \leq d(M) \leq \rho(k)$.

В предпоследнем неравенстве использовалась лемма 1.1 (2). По лемме 1.1 (3)

$$d(G/\Phi(G)) \leq 1 + d(G/F(G)) \leq 1 + \rho(k),$$

и теорема в этом случае справедлива. В частности, теорема доказана в случае $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) = \emptyset$.

В дальнейшем считаем, что M принадлежит $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$. По условию доказываемой теоремы $|G : M|$ не делится на r^{1+k} для всех $r \in \pi(G)$. Это означает, что $h = m = m(G) \leq k$. Теперь, не используя [4, теорема 1(2)], докажем, что $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$.

Если $k = 1$, то все максимальные подгруппы группы G имеют простые индексы. По теореме Хуперта [1, теорема 4.55] группа G является сверхразрешимой. Но у сверхразрешимой группы коммутант G' нильпотентен [1, теорема 4.52], поэтому

$$G' \subseteq F(G), \quad d(G/F(G)) \leq 1.$$

Применяя лемму 1.1 (3), получаем

$$d(G/\Phi(G)) \leq 2 = 1 + \rho(k).$$

Итак, при $k = 1$ теорема доказана.

Далее считаем $k \geq 2$. По лемме 1.2 (3) для группы G оценка $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$ равносильна включению $G \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$. Согласно лемме 1.3 произведение $\mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ является насыщенной формацией.

Проверим, что условия теоремы наследуют все гомоморфные образы группы G . Пусть K – нормальная подгруппа группы G . Если $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K) = \emptyset$, то

$$d((G/K)/\Phi(G/K)) \leq 1 + \rho(k)$$

по доказанному и $G/K \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ по лемме 1.2 (3). Пусть $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K) \neq \emptyset$, $X/K \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K)$.

Предположим, что $|G/K : X/K|$ делится на r^{1+k} для некоторого $r \in \pi(G/K)$. Так как

$$|G/K : X/K| = |G : X|,$$

то $|G : X|$ делится на r^{1+k} для $r \in \pi(G)$. Получили противоречие с тем, что $m(G) \leq k$. Поэтому предположение неверно, условия теоремы наследуют все гомоморфные образы группы G , и можно применять индукцию по порядку группы. Следовательно, $G/K \in \mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ для всех неединичных нормальных подгрупп K . Ввиду леммы 1.3 формация $\mathfrak{NA}^{\rho(k)}$ насыщена, поэтому $\Phi(G) = 1$.

Пусть подгруппа Фиттинга $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой в G . Для разрешимой группы с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга

$$F(G) = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$$

является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп K_i группы G , см. [1, теорема 4.24]. По индукции $G/K_i \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$, а поскольку $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$ – формация и $n \geq 2$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{1+\rho(k)}$.

В дальнейшем считаем, что $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . По [1, теоремы 4.22, 4.24] $F = C_G(F)$, а по [1, теорема 4.23] существует подгруппа M в группе G такая, что $G = [F]M$. Ясно, что M – максимальная подгруппа и

$$|G : M| = |F| = p^t, \quad p \in \pi(G), \quad t \leq k.$$

Поскольку F – элементарная абелева p -подгруппа порядка p^t и $F = C_G(F)$, то M изоморфна G/F и M изоморфна по [1, теорема 2.8] подгруппе из группы $\text{Aut}F$, которая по [1, теорема 2.50] совпадает с $GL(t, p)$. Из того, что F – минимальная нормальная подгруппа группы G следует, что подгруппа M изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(t, p)$. Теперь из определения функции ρ получаем:

$$d(M) \leq \rho(t) \leq \rho(k).$$

Из леммы 1.2 (1) следует, что $M \in \mathfrak{A}^{\rho(k)}$, поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$. Теперь из леммы 1.2 (3) вытекает, что $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Зафиксируем натуральное число k . Пусть G – разрешимая группа и $\Phi(G) = 1$. Если $M_{\rho(k)}(G) \neq \emptyset$ и индекс каждой подгруппы $M \in M_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G) = 1 + \rho(k)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1 $d(G) \leq 1 + \rho(k)$. По условию существует подгруппа $M \in M_{\rho(k)}(G)$ такая, что $d(M) > \rho(k)$.

Теперь из леммы 1.1 (1) получаем, что

$$\rho(k) < d(M) \leq d(G) \leq 1 + \rho(k),$$

что возможно только в случае $d(M) = d(G) = 1 + \rho(k)$. Следствие доказано.

Согласно теореме Томпсона–Фейта любая группа нечетного порядка разрешима. Для них воспользуемся функцией $\sigma(k)$. Таким образом, для группы G нечетного порядка через $M_{\sigma(k)}(G)$ обозначим множество всех максимальных подгрупп M , обладающих следующими свойствами: M не содержит подгруппу

Фиттинга; $d(M) > \sigma(k)$. Повторяя доказательство теоремы с заменой функции $\rho(k)$ на $\sigma(k)$ получаем

Следствие 2.2. *Зафиксируем натуральное число k . Если G – группа нечетного порядка и индекс каждой подгруппы $M \in M_{\sigma(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \sigma(k)$.*

Конкретизируя значения k и используя леммы 1.5 и 1.6, получаем еще два следствия.

Следствие 2.3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что в разрешимой группе G индекс каждой подгруппы $M \in M_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$. Тогда:*

- 1) если $k = 1$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;
- 2) если $k \in \{2, 3, 4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3 + k$;
- 3) если $k \in \{5, 6, 7\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 8$;
- 4) если $k \in \{8, 9\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + k$;
- 5) если $k \in \{10, \dots, 17\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 11$;
- 6) если $k \in \{18, \dots, 25\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 12$;
- 7) если $k \in \{26, \dots, 33\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 13$;
- 8) если $k \in \{34, \dots, 65\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 14$;
- 9) если $k \geq 66$, то

$$d(G/\Phi(G)) \leq 1 + 5 \log_9(k - 2) + 53/10.$$

Следствие 2.4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что в группе G нечетного порядка индекс каждой подгруппы $M \in M_{\sigma(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$. Тогда:*

- 1) если $k \in \{1, 2\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;
- 2) если $k \in \{3, 4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3$;
- 3) если $5 \cdot 7^x \leq k < 15 \cdot 7^x$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 4 + 2x$;
- 4) если $15 \cdot 7^x \leq k < 5 \cdot 7^{x+1}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 5 + 2x$.

Отметим, что доказанная теорема и ее следствия развивают результаты работы [9], в которой найдены оценки нильпотентной длины разрешимой группы с ограниченными индексами неметанильпотентных максимальных подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн. : Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. Zassenhaus, H. Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen / H. Zassenhaus // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1938. – Bd. 12. – S. 289–312.

-
4. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.
5. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
6. Dixon, J.D. The solvable length of a solvable linear groups / J.D. Dixon // Math. Z. – 1968. – Bd. 12. – S. 151–158.
7. Newman, M.F. The solvable length of a solvable linear groups / M.F. Newman // Math. Z. – 1972. – Bd. 126. – S. 59–70.
8. Palfy, P.P. Bounds for linear groups of odd order / P.P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. – Ser. 2. 1990. – 39. Suppl. № 23. – P. 253–263.
9. Монахов, В.С. О влиянии индексов максимальных подгрупп на нильпотентную длину конечной разрешимой группы / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 23–28.

Поступила в редакцию 15.08.11.

УДК 519.876.5:62-192

ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

OPPORTUNITY PROGRAM OF PROBABILITY-ALGEBRAIC SIMULATION OF COMPLEX SYSTEMS

E.I. Sukach, D.V. Ratobylskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Приводится описание компьютерной системы PALS, реализующей метод вероятностно-алгебраического моделирования сложных систем и позволяющей оценить в динамике вероятностные характеристики исследуемого свойства сложных систем со многими состояниями. На примерах демонстрируется оценка вероятностных свойств структурно-простых и структурно-сложных систем.

Ключевые слова: вероятностно-алгебраическое моделирование, надёжность сложной системы, структурно-простая система, структурно-сложная система.

The description of the computer system PALS performing the method of the probability-algebraic simulation of complex systems is presented. It allows estimating in dynamics the probability characteristics of the investigated property of complex systems with many states. The assessment of probability properties of structurally-simple and structurally-complex systems is shown in the examples.

Keywords: probability-algebraic simulation, reliability of complex system, structurally-simple system, structurally-complex system.

Введение

Формализация сложных систем (СС) с целью их моделирования порождает известную проблему размерности, связанную с ростом пространства состояний модели и связей между ними, которая приводит к трудоёмкости, а, во многих случаях, невозможности ручного описания моделей, определения их параметров и выполнения расчетов. Проблема может быть решена только с помощью автоматизации подготовительных этапов занесения информации, автоматизации построения моделей, обработки и интерпретации полученных результатов. При этом программное обеспечение анализа вероятностных свойств СС должно обеспечивать приемлемый для практики уровень точности описания процессов, протекающих в системе.

С целью оценки интегральных показателей функционирования СС, функционирующих в условиях случайных воздействий, разработан ряд систем имитационного моделирования, которые реализуют положенные в их основу методы и предполагают проведение серий имитационных экспериментов (ИЭ) с последующим усреднением полученных результатов [1]. Процедура Монте-Карло, применяемая в ходе ИЭ, позволяет учесть вероятностный характер компонентов, составляющих СС, и реализовать возможные траектории функционирования системы.

Полученные в результате моделирования зависимости, описывающие изменение откликов системы в зависимости от изменения входных параметров, являются приближёнными. Погрешность моделирования может быть значительно уменьшена за счёт увеличения объёма выборки формируемых статистических данных, что в ряде случаев, например, при рассмотрении редких событий, требует значительных временных затрат.

Получение точных вероятностных оценок свойств СС по вероятностным параметрам составляющих их компонентов обеспечивают системы автоматизации аналитических расчётов: АРБИТР (ПК АСМ СЗМА) [2] – программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования и расчета надежности и безопасности систем; Relex Reliability Studio [3] – программная среда, включающая различные методы анализа надёжности и реализующая разнообразные формы задания моделей (графы, деревья отказов, событий, блок-схемы надёжности); Risk Spectrum – программное обеспечение вероятностного анализа безопасности объектов атомной энергетики [4]. Существенным ограничением использования указанных программных продуктов является размерность системы, которая определяется числом составляющих её компонентов. Увеличение числа компонентов и/или числа их состояний приводит к

экспоненциальной сложности задачи и делает невозможным проведение расчётов.

В статье приводится описание программной системы PALS (Probability-Algebraic Simulation), реализующей метод вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) СС [5] и позволяющей оценить в динамике вероятностные характеристики исследуемого свойства (надёжность, производительность, эффективность и др.) СС, выбрать необходимый уровень детализации процессов на основе поставленных целей исследования и решаемых задач, согласованно использовать различные стратегии моделирования.

Система PALS автоматизирует расчёты СС, различной структурной сложности. Для структурнопростых систем сняты ограничения на число компонентов, составляющих систему, и число их возможных состояний. Для структурносложных систем, в рамках вероятностно-алгебраического подхода, реализована методика расчёта надёжности многокомпонентных систем со многими состояниями, основанная на сведениях моделей с произвольным числом состояний к расчётным бинарным моделям [6].

1 Состав и структурная организация программной системы PALS

Программная система вероятностно-алгебраического моделирования PALS, реализующая автоматическое построение моделей и расчёты вероятностных показателей исследуемого свойства графовых систем включает: подсистему формирования структурной схемы модели (PS.GRAF_D); библиотеку функций, определяющих отношения между компонентами (LIB.FUNC); подсистему статического моделирования (PS.STAT); подсистему динамического моделирования (PS.DINAM); библиотеку типовых вероятностно-алгебраических моделей (LIB.PALS); подсистему визуализации результатов моделирования (PS.VIZ); справочную систему (PS.SPRAV); базу данных моделирования (BD.PALS). Схема, определяющая взаимосвязи подсистем, представлена на рисунке 1.1.

Подсистема формирования структурной схемы модели PS.GRAF_D обеспечивает визуальное средство описания объекта исследования и реализует операции, связанные с формированием структуры исследуемой системы в виде графа. Она включает процедуры построения, сохранения и редактирования в диалоговом режиме графического образа модели путём использования стандартных элементов: рёбер графа, соответствующих выделенным компонентам исследуемой системы, и вершин, определяющих функциональные отношения между компонентами. Подсистема PS.GRAF_D обеспечивает наглядное представление состава компонентов, связей между ними и уровней вложенности функций, описывающих эти связи, что позволяет

в автоматическом режиме определить исходные параметры компонентов, установить уровни иерархии функциональных связей и в дальнейшем, используя эффективные алгоритмы при машинной реализации метода, обеспечить замещение функциональных связей между компонентами системы вероятностными вычислениями с использованием коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования.

Сервисные функции, реализованные в составе PS.GRAF_D, обеспечивают копирование, редактирование, удаление элементов схемы модели. Кроме этого, реализована возможность настройки параметров расчёта (задания значений по умолчанию). Работа подсистемы и её взаимодействие с базой данных моделирования обеспечивает снижение объемов вводимой пользователем информации.

Библиотека функций LIB.FUNC включает параметризованные заготовки типовых детерминированных и вероятностных функций, позволяющих описать отношения между компонентами исследуемой системы. Состав функций приводится в таблице 1.1. В таблице представлены примеры детерминированных функций, определяющих связи между компонентами, и их семантика при исследовании свойства надёжности систем.

Возможно пополнение состава библиотеки функций за счёт расширения областей применения метода, усложнения отношений между компонентами и перехода от бинарных к n -арным операциям, описывающим взаимосвязи между множеством компонентов.

Подсистема статического моделирования PS.STAT включает процедуры формирования алгебраической модели системы в символьном виде и её автоматического преобразования в вероятностную форму, позволяющую реализовать одномоментное ВАЛМ на очередной итерации многошагового процесса моделирования системы. Алгебраическая модель формируется с учётом заданной структуры сети. При рассмотрении простых графовых систем статическое моделирование реализуется с использованием алгоритма «свёртки» векторов вероятностей компонентов согласно введённым операциям (PR.PALS). Рассмотрение систем, включающих зависимые компоненты, реализуется процедурой «свёртки» векторов компонентов с учётом значений корреляционных матриц в качестве коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования.

В случае рассмотрения структурно-сложной системы со многими состояниями реализуется переход к исследованию множества систем той же структуры, но с двумя обобщёнными состояниями. В этом случае для проведения исследования вероятностных характеристик бинарных систем используются известные алгоритмы логико-вероятностного моделирования (PR.LOGIC) [7].

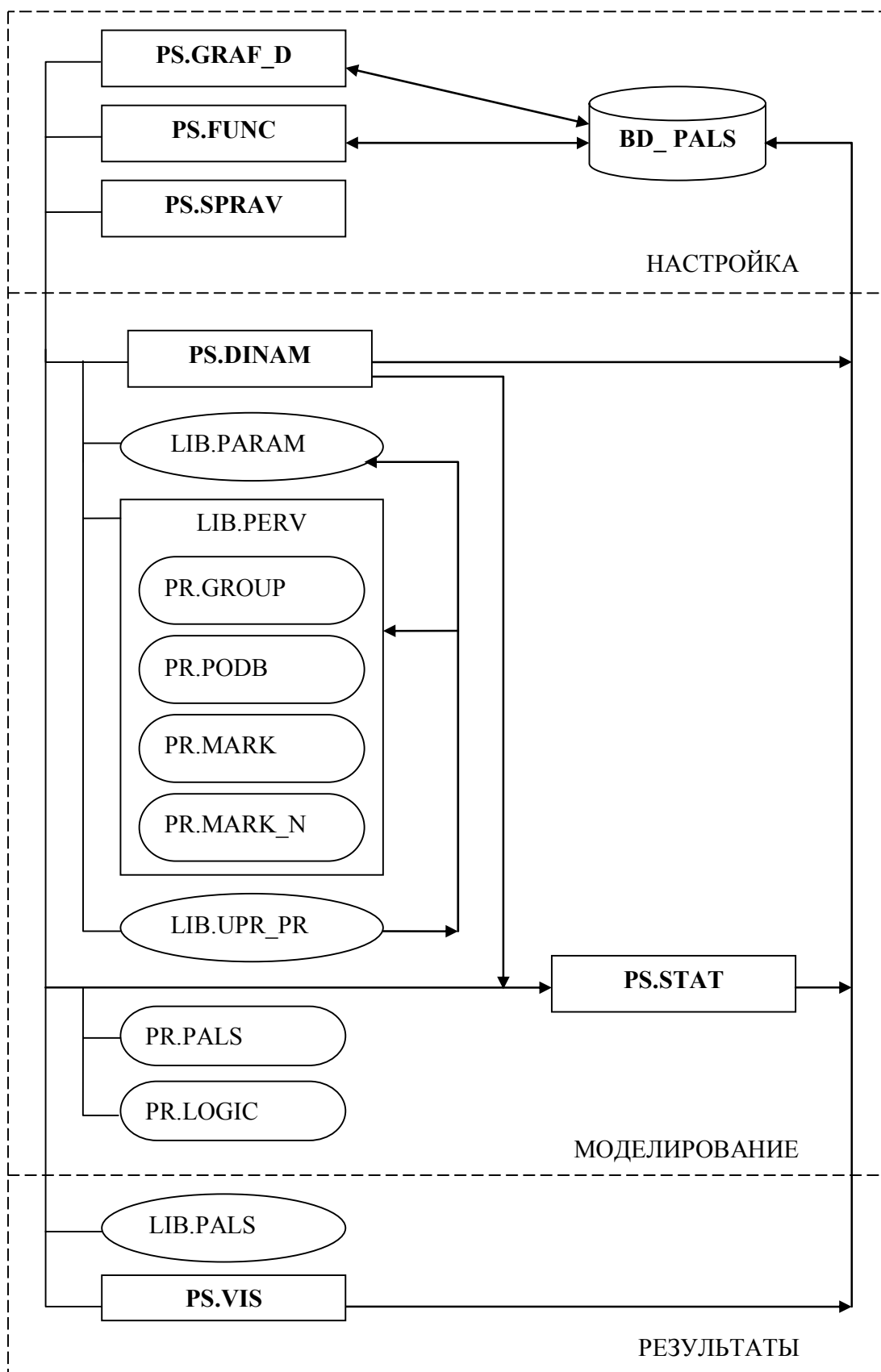


Рисунок 1.1 – Структурная схема взаимодействия подсистем PALS

Таблица 1.1 – Примеры функций, определяющие связи между компонентами системы

Вид функции	Интерпретация функций при исследовании свойства надёжности СС
$F(i, j) = \max(i, j)$	В детерминированном случае отказ результирующего компонента происходит в результате отказа одного из компонентов. В случае числа состояний $n > 2$ состояние результирующего компонента определяется состоянием наименее надёжного компонента (последовательное соединение).
$F(i, j) = \min(i, j)$	В детерминированном случае отказ результирующего компонента происходит в результате отказа двух компонентов. В случае числа состояний $n > 2$ состояние результирующего компонента определяется состоянием наиболее надёжного компонента (параллельное соединение).
$F(i, j) = \min(i + j - 1, n)$	В детерминированном случае, результирующий компонент работает, если работает один из компонентов или работают оба. В случае числа состояний $n > 2$ состояние результирующего компонента определяется суммированием состояний исходных компонентов.
$F(i, j) = i - j $	В детерминированном случае результирующий компонент работает, если работает один из компонентов. В случае числа состояний $n > 2$ состояние результирующего компонента определяется разностью состояний исходных компонентов.
$F(i, j, l) = \left\lceil \frac{i + j + l - \min(i, j, l)}{2} \right\rceil$	В детерминированном случае результирующий компонент находится в рабочем состоянии, если работают как минимум два компонента из трёх. В случае числа состояний $n > 2$ состояние результирующего компонента определяется средним значением состояний двух максимально надёжных компонентов.

По результатам моделирования формируются результирующие вектора вероятностей системы со многими состояниями.

Таким образом подсистема статического моделирования на основании вероятностной информации о состояниях исследуемого свойства компонентов автоматически формирует результирующие вектора всех промежуточных узлов графа и всей системы в целом.

Подсистема динамического моделирования PS.DINAM структурно включает блок реализации первичного моделирования с использованием параметрических функций (LIB.PARAM); блок реализации первичного моделирования с использованием аппарата цепей Маркова (LIB.PERV); блок управляющих правил (LIB.UPR_PR).

Блок реализации первичного моделирования с использованием параметрических функций (LIB.PARAM) включает процедуры вероятностного изменения исследуемого свойства отдельными компонентами с использованием различных параметрических функций, параметрами которых являются время, указанные состояния компонентов и системы в целом.

В случаях, когда не удаётся найти аналитический вид зависимости, описывающей вероятностное изменение исследуемого свойства

системы, выбирается одна из форм марковских моделей [8], отражающая особенности стохастического процесса изменения состояний компонентов и позволяющая перейти к рассмотрению изменения исследуемого свойства систем на достаточно малом шаге моделирования (LIB.PERV). С целью реализации разнообразных функций организации первичного моделирования с использованием аппарата цепей Маркова используется следующий набор процедур: процедуры классификации компонентов системы по выбранным признакам (PR.GROUP); процедуры подбора параметров марковских моделей (PR.PODB); процедуры реализации первичного моделирования с использованием имеющихся форм моделей (PR.MARK); процедуры перехода к рассмотрению непрерывного процесса изменения исследуемого свойства компонентов (PR.MARK_N).

В простейшем случае результатом динамического моделирования на выбранном временном интервале является вектор вероятностей состояний системы, зависящий от вероятностных изменений состояний компонентов и взаимного влияния вероятностных характеристик компонентов в процессе функционирования системы.

При использовании алгоритма динамического моделирования с управлением результатом

является последовательность вариантов структурной организации системы, полученных с учётом динамических изменений компонентов системы и их взаимного влияния, а также вектора вероятностей, соответствующие каждому варианту. Получение такой последовательности вариантов структурной организации исследуемых систем является важным при обосновании решений, корректирующих процесс выполнения системой заданной функции путём согласованной работы её компонентов.

Блок управляющих правил (LIB.UPR_PR) содержит представленные в формализованном виде правила, состав которых может быть обновлён с учетом особенностей исследуемой проблемной области.

Библиотека типовых вероятностно-алгебраических моделей LIB.PALS включает параметризованные варианты моделей сложных систем из различных предметных областей, которые могут быть использованы как «заготовки» при моделировании исследуемого свойства графовых систем и требуют лишь задания исходной информации о параметрах компонентов и структуре исследуемой системы.

Подсистема визуализации PS.VIZ одновременно с процессом моделирования, в динамике отображает формируемые вектора. По окончании расчёта вероятностных характеристик исследуемого свойства графовой системы генератор отчетов, формирующий протокол работы системы в электронном виде, автоматически отображает временные диаграммы и графики изменения исследуемого свойства, как отдельных компонентов, так и всей системы.

Справочная подсистема PS.SPRAV ориентирована на инженеров-проектировщиков, не имеющих специальных знаний в области моделирования вероятностных свойств системы. В ней содержится вся необходимая информация о работе системы PALS с описанием интерфейса пользователя и его действий, а также даётся описание типовых вероятностно-алгебраических моделей, составляющих библиотеку LIB.PALS.

База данных BD.PALS осуществляет взаимодействие структурных подсистем системы вероятностно-алгебраического моделирования PALS. Она реализована универсальными программными средствами. В ней хранятся, обновляются и накапливаются данные моделирования по каждому компоненту и всей системе в целом.

Программная система PALS реализована в интегрированной среде Borland Delphi 10 Lite v 3.0 разработки Windows-приложений. Она позволяет проводить расчеты графовой схемы, содержащей неограниченное число уровней вложенности компонентов путём статического – для текущего момента времени, и динамического моделирования, отображающего вероятностные изменения СС во времени.

2 Оценка динамических вероятностных характеристик сложных систем со многими состояниями

Система PALS позволяет оценить вероятностные характеристики как структурно-простых, так и структурно-сложных систем графовой структуры. Структурно-простые системы при их математическом описании сводятся к последовательным, параллельным или древовидным структурам. Структурно-сложные системы описываются сценариями сетевого типа с циклами и неустранимой повторностью аргументов при их формализации [8]. Известными примерами графов, описывающих структурно-сложные системы, являются мостиковая структура, структура двух «звёзд», включенных на «треугольник», кольцевая структура. Кроме этого, структурная сложность систем может быть обусловлена наличием множества несовместных состояний, выделенных для систем, имеющих простую структуру [9]. В этом смысле оба примера, выбранные для демонстрации работы системы PALS, описывают расчёты структурно-сложных систем.

Рассмотрим СС, графическая схема которой представлена на рисунке 2.1. Система является структурно-простой в смысле её структурной организации. Она включает компоненты $K = \{K_i\}, i = \overline{1,11}$, которые описываются однотипным образом и характеризуются множеством состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1,5}$, соответствующих определённому уровню некоторого случайным образом изменяющегося свойства. Начальные значения вероятностей состояний компонентов задаются векторами:

$$P^{i0} = (p_1^{i0}, p_2^{i0}, \dots, p_5^{i0}), \sum_{j=1}^5 p_j^{i0} = 1, i = \overline{1,11},$$

которые изменяются во времени.

Вероятностное изменение состояний компонентов исследуемой структуры описывается марковскими моделями специального вида [8] с дискретными состояниями и дискретным временем, переходные матрицы которых для всех компонентов различны. В результате первичного моделирования формируются значения векторов вероятностей, характеризующие изменение состояний компонентов на заданном промежутке времени:

$$P^{it} = (p_1^{it}, p_2^{it}, \dots, p_5^{it}), \sum_{j=1}^5 p_j^{it} = 1, i = \overline{1,11}, t = \overline{1,10}.$$

Они являются исходными данными для вероятностно-алгебраического моделирования исследуемой структуры (рисунок 2.1). В расчётных вероятностных моделях используются функции $F_1(i, j) = \min(i + j - 1, n)$ для рёбер, расположенных параллельно, и функция $F_2(i, j) = \max(i, j)$ – для последовательно соединённых ребер графа.

На рисунке 2.2 представлена вероятностная динамика состояний системы на исследуемом временном интервале.

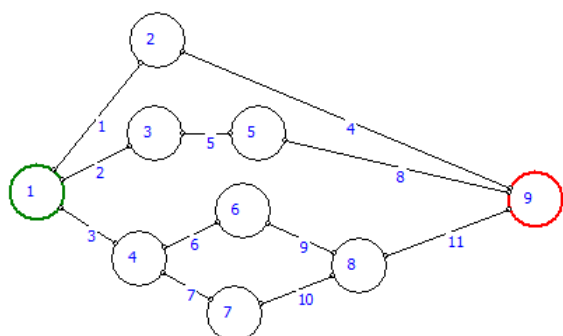


Рисунок 2.1 – Граф сложной системы со многими состояниями

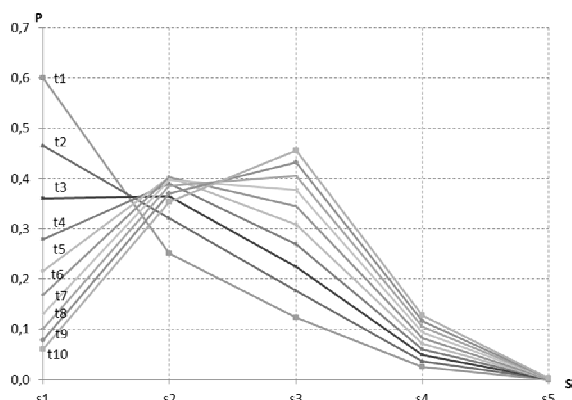


Рисунок 2.2 – Динамика векторов вероятностей состояний сложной системы

Для демонстрации возможностей PALS при исследовании структурно-сложной системы рассмотрим мостиковую структуру, представленную на рисунке 2.3, которая описывает самую простую из класса структурно-сложных систем, но несмотря на небольшое число компонентов $K = \{K_i\}, i = \overline{1,5}$, имеющую различные варианты семантической интерпретации [7], [9].

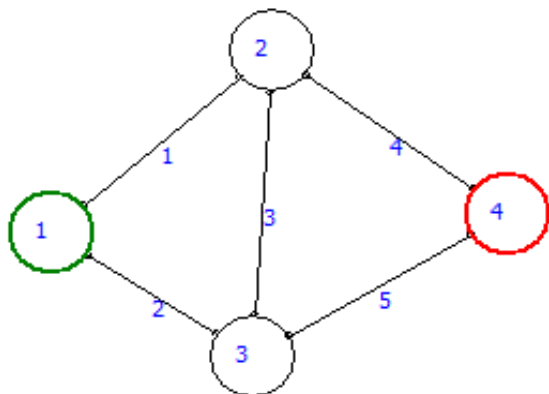


Рисунок 2.3 – Граф структурно-сложной системы

Будем полагать, что компоненты системы могут находиться в одном из трёх несовместных состояний

$$S = \{S_j\}, j = \overline{1,3},$$

характеризующих степень надежности их функционирования. Вероятности нахождения компонентов в одном из возможных состояний задаются векторами

$$P^i = (p_1^i, p_2^i, p_3^i), \sum_{j=1}^3 p_j^i = 1, i = \overline{1,5}.$$

С использованием программной системы автоматизации вероятностно-алгебраического моделирования PALS, были получены результирующие вектора вероятностей, характеризующие надежность функционирования исследуемой системы

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, p_3^s), \sum_{j=1}^3 p_j^s = 1, i = \overline{1,5}.$$

Значения исходных векторов вероятностей компонентов и результаты расчётов вектора вероятностей системы представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Значения векторов вероятностей, характеризующих состояния надежности компонентов и системы в целом

Компонент системы	Состояние		
	S_1	S_2	S_3
K_1	0,571732	0,327014	0,101254
K_2	0,580346	0,21846	0,201194
K_3	0,537201	0,276372	0,186427
K_4	0,58994	0,312036	0,098024
K_5	0,565624	0,28514	0,149236
Система	0,618937	0,341519	0,039544

Следует отметить, что для определения вероятностных характеристик состояний мостиковой структуры использовалась методика сведения структурно-сложной системы со многими состояниями к совокупности бинарных моделей. Применение указанной методики актуально для оценки вероятностных характеристик надежности систем с большим числом компонентов, имеющих множество уровней надежности, что позволяет значительно уменьшить размерность систем и расширить границы их исследования.

Заключение

Компьютерная система вероятностно-алгебраического моделирования обеспечивает комплексный подход к решению задачи расчёта статических и динамических вероятностных характеристик сложных систем, который обеспечивается автоматизацией основных этапов метода ВАЛМ [5]: подготовки исходных данных, первичного моделирования вероятностного

изменения компонентов, формирования алгебраической модели исследуемой системы, построения расчётной вероятностной формы модели, динамического управления параметрами на очередной итерации моделирования, графического отображения результатов и их статистической обработки.

Реализованные методы расчёта в составе системы PALS взаимосвязаны и корректно дополняют друг друга, обеспечивая эффективное решение важных практических задач, например:

– моделирования и расчёта вероятностных характеристик надёжности, пропускной способности, эффективности, стоимости, износа систем в результате вероятностного изменения состояний их компонентов;

– выявление причин, которые могли привести к изменению текущего состояния системы (например, аварии, снижению эффективности и другие);

– выработки, обоснования и оптимизации различных проектных, эксплуатационных и управленческих решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимей, И.В.* Имитационное моделирование на ЭВМ / И.В. Максимей. – М. : Радио и связь, 1988. – 232 с.

2. *Нозик, А.А.* Программный комплекс «АР-БИТР» для моделирования, расчета надежности и безопасности систем / А.А. Нозик, А.С. Можжев // В информационном сборнике: «Монтаж и наладка средств автоматизации и связи». – 2007. – № 2. – С. 32–40.

3. *Relex-программа анализа надёжности, безопасности, рисков* / В.С. Викторова [и др.] // Надёжность – 2003. – № 4 (7). – С. 42–64.

4. *RISK Spectrum PSA Professional 1.20* / Theory Manual. RELCON AB, 1998. – 57 p.

5. *Сукач, Е.И.* Проектирование функционально-сложных систем на основе вероятностно-алгебраического моделирования / Е.И. Сукач // Проблемы управления и информатики. – № 2. – 2011. – С. 46–59.

6. *Сукач, Е.И.* Методика вероятностно-алгебраического моделирования структурно-сложных систем / Е.И. Сукач // Пятая научно-практическая конференция «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС'2010», 21–25 июня 2010 г. – Киев : Институт математических машин и систем. – 2010. – С. 151–153.

7. *Рябинин, И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.

8. *Сукач, Е.И.* Вероятностно-алгебраическое моделирование характеристик надёжности механических систем / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, В.Л. Мережа // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 75–79.

9. *Соложенцев, Е.Д.* Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике / Е.Д. Соложенцев. – СПб. : Издательский дом «Бизнес-пресса», 2004. – 216 с.

Поступила в редакцию 19.04.11.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Допускается сквозная нумерация рисунков и таблиц. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. Through numbering of figures and tables is possible. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).