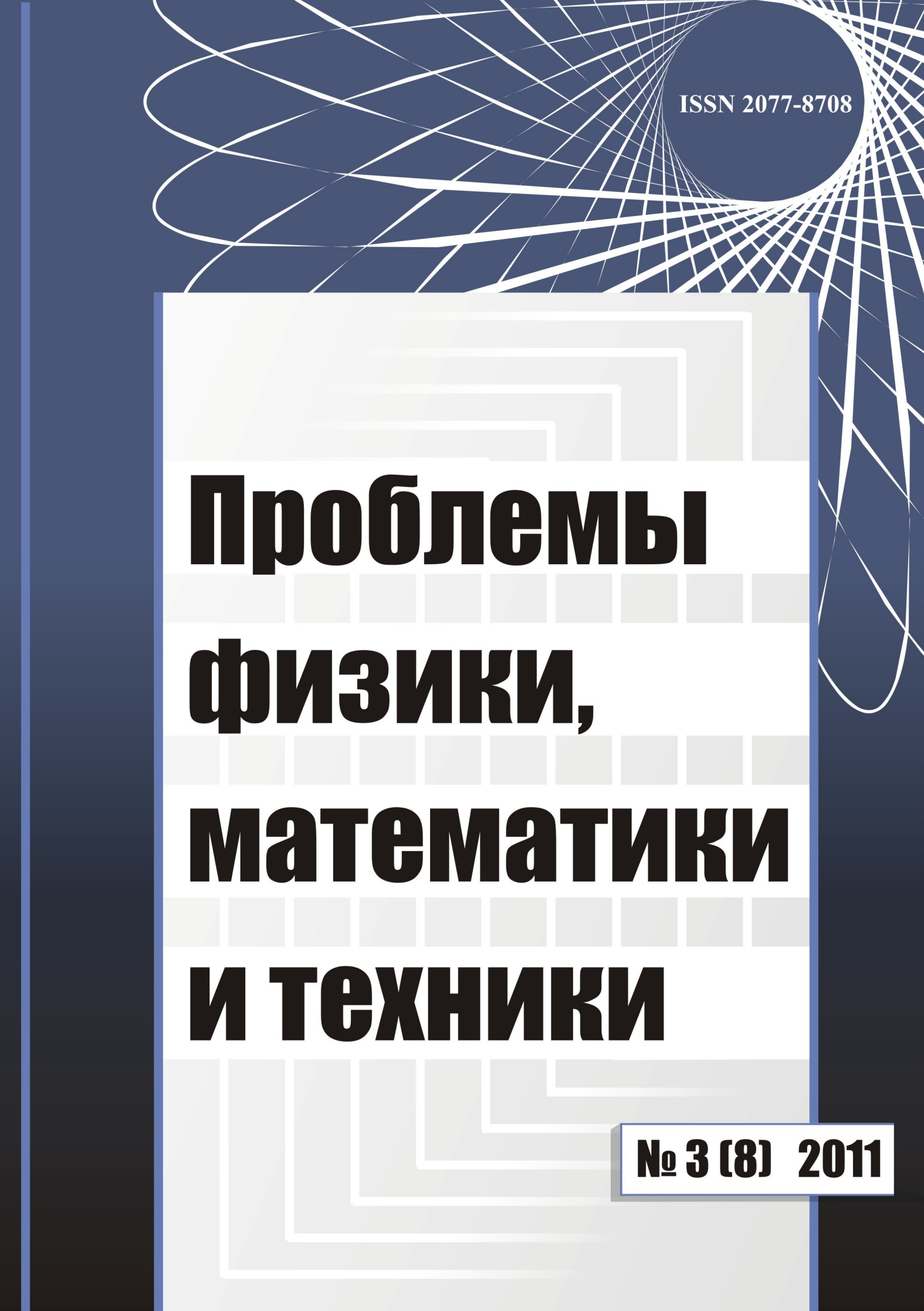




ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№ 3 (8) 2011

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (8) 2011

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Андреев В.В., Бабич К.С. Квантовые и релятивистские эффекты для двухчастичных систем с корнелльским потенциалом.....	7
Васькевич В.В., Гайшун В.Е., Коваленко Д.Л., Сидский В.В. Защитные золь-гель покрытия с гидрофобными свойствами.....	15
Гуделев В.Г., Кулак Г.В., Матвеева А.Г., Николаенко Т.В. Лазерное возбуждение импульсов продольных и сдвиговых ультразвуковых волн в твердых телах в ближней зоне.....	20
Малютина-Бронская В.В., Поликанин А.М., Залесский В.Б., Семченко А.В., Сидский В.В., Гайшун В.Е. Получение гетероструктур $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$ золь-гель методом.....	24
Самофалов А.Л., Семченко И.В., Хахомов С.А. Моделирование и исследование искусственных анизотропных структур с большой киральностью в СВЧ диапазоне.....	28
Ярмоленко М.А., Рогачев А.А., Рогачев А.В., Горбачев Д.Л. Кинетические особенности диспергирования кремнийорганических соединений в вакууме и молекулярная структура покрытий, осажденных из летучих продуктов диспергирования.....	32

МАТЕМАТИКА

Андреева Д.П., Скиба А.Н. Конечные группы с заданными максимальными цепями длин ≤ 3	39
Бедюк Н.В. Обобщенный стохастический интеграл по непрерывному мартингалу.....	50
Дыба Р.В. Теорема Нехари на компактных абелевых группах с линейно упорядоченной группой характеров.....	57
Жизневский П.А. Элементы высоты 3 решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.....	61
Коржик Р.И., Жогаль С.П. Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга.....	69
Мартынов И.П., Парманчук О.Н., Пецевич В.М. Об одной перекрестной системе двух дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве.....	74
Старовойтов А.Н. Система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием и катастрофическими сбоями.....	78
Тавгень О.И., Ду Цзюньхуа, Лю Сшуньянь. Унипотентность образа представления группы F_2 при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы с малыми клетками Жордана.....	81
Царев А.А. О недистрибутивности решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций...	84
Якубович О.В., Боярович Ю.С., Летунович Ю.Е., Ворошилов Д.Е. Применение сети Джексона к моделированию гарантийного обслуживания сельскохозяйственной техники.....	89

ИНФОРМАТИКА

Ратобыльская Д.В. Выбор рационального варианта организации транспортной сети сообщения на основе вероятностно-алгебраического моделирования.....	93
Сукач Е.И. Подходы к снижению размерности многокомпонентных структурно-сложных систем со многими состояниями при оценке их надёжности.....	99
Шилько С.В., Кузьминский Ю.Г., Борисенко М.В. Математическая модель и программная реализация мониторинга сердечно-сосудистой системы.....	104
Якимов Е.А., Демиденко О.М., Албкеират Д.М. О восстановлении шумовой составляющей в последовательностях данных методом сингулярного спектрального анализа.....	113

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):

- **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
- **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Д. Д. Павловец, Г. Н. Петухова*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 20.09.11. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,9. Уч.-изд. л. 12,1. Тираж 100 экз. Заказ № 453.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 3 (8) 2011

CONTENTS

PHYSICS

Andreev V.V., Babich K.S. Quantum and relativistic effects for two particle systems with the cornell potential	7
Vaskevich V.V., Gaishun V.E., Kovalenko D.L., Sidsky V.V. Protective sol-gel coating with hydrophobic properties	15
Gudelev V.G., Kulak G.V., Matveeva A.G., Nikolaenko T.V. Laser excitation of longitudinal and shear ultrasound waves pulses in solid state bodies in a near zone	20
Malyutina-Bronskaya V.V., Polikanin A.M., Zalesskiy V.B., Semchenko A.V., Sidsky V.V., Gayshun V.E. Synthesis of heterostructures $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$ BY sol-gel method	24
Samofalov A.L., Semchenko I.V., Khakhomov S.A. Simulation and investigation of artificial anisotropic structures with high chirality in the microwave range	28
Yarmolenko M.A., Rogachev A.A., Rogachou A.V., Gorbochev D.L. Kinetic characteristics of dispersion of organosilicon compounds in vacuum and molecular structure of the coatings, deposited from volatile products of dispersion	32

MATHEMATICS

Andreeva D.P., Skiba A.N. Finite groups with given maximal chains of length ≤ 3	39
Bedziuk N.V. Generalized stochastic integral with respect to continuous martingale	50
Dyba R.V. The Nehari theorem for compact abelian groups with linearly ordered duals	57
Zhiznevsky P.A. Elements of the height 3 of the lattice of all τ -closed n -multiply ω -composition formations	61
Korzhik R.I., Zhogal S.P. Influence of delay on stationary states of the non-autonomous Van der Pol-Duffing oscillator	69
Martynov I.P., Parmanchuk O.N., Pecevich V.M. On a cross system of two differential equations with the Painleve property	74
Starovoitov A.N. Queueing system with batch arrivals, batch service and disasters	78
Tavgen O.I., Du Junhua, Liu Chunyan. The representation image unipotency of the group F_2 by mapping of primitive elements into unipotent matrices with small Jordan blocks	81
Tsarev A.A. On non-distributivity of the lattice of all n -multiply ω -composition formations	84
Yakubovich O.V., Boyarovich Y.S., Letunovich Y.E., Voroshilov D.E. Application of Jackson's network to modelling of the warranty service of agricultural techniques	89

INFORMATION SCIENCE

Ratobylskaya D.V. Choice of the rational variant of the organization of the transport network communicatoins on the basis of probability-algebraic simulation	93
Sukach E.I. Approaches to reducing the dimension of multicomponent of structurally complex multi-state systems in the assessment of reliability	99
Shilko S.V., Kuzminsky Yu.G., Borisenko M.V. Mathematical model and software for monitoring of cardiovascular system	104
Yakimau E.A., Demidenko O.M., Albkeirat D.M. On restoration of noise component in data sequences by a singular spectrum analysis method	113

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Data-bases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

УДК 539.12

КВАНТОВЫЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ С КОРНЕЛЬСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В.В. Андреев, К.С. Бабич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

QUANTUM AND RELATIVISTIC EFFECTS FOR TWO PARTICLE SYSTEMS WITH THE CORNELL POTENTIAL

V.V. Andreev, K.S. Babich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Представлен новый метод численного решения уравнений на связанные состояния элементарных частиц в импульсном представлении с корнельским потенциалом. Получена квадратурная формула, которая может использоваться для решения как интегральных уравнений, так и для численного расчета интегралов. Исследованы некоторые эффекты для двухчастичных квантовых систем с корнельским потенциалом. Для случая нерелятивистского уравнения Шредингера с корнельским потенциалом исследовано поведение волновых функций вблизи критического значения параметра кулоновского потенциала, а также зависимость критического значения при изменении параметра запирающей части потенциала.

Ключевые слова: связанные состояния, импульсное представление, квадратурная формула, корнельский потенциал, коллапс, волновая функция, уравнение Шредингера.

A numerical method for bound state equations with the Cornell potential in momentum space is represented. A new quadrature formula was obtained. The formula can be used for solving integral equations and for numerical integral computations as well. Some effects for two particle quantum systems with the Cornell potential were observed. For the case of non-relativistic Schrodinger equation with the Cornell potential the exploration of wave functions' behavior near the critical value of the Coulomb potential parameter was provided. A curve that characterizes the critical value dependence from the linear part parameter of potential was plotted.

Keywords: bound states, momentum space, quadrature formula, Cornell potential, collapse, wave function, Schrodinger equation.

Введение

Сегодня уже стала очевидной необходимость релятивистского описания связанных состояний. Современное состояние экспериментов требует учета релятивистских эффектов в теории связанных систем в широкой области: от мезонов до атомов. Эта необходимость продиктована существованием систем, состоящих из легких кварков (π, K -мезоны), наличием релятивистских эффектов в мезонах, содержащих один тяжелый кварк, вкладами релятивистских поправок в электрослабые характеристики.

При изучении энергетических характеристик водородоподобных систем актуальным является расчет различных релятивистских поправок, так как экспериментальные измерения таких величин проводятся с высокой точностью ($\delta \sim 10^{-13}$) [1], [2]. Корректность такого учета зависит от последовательности теоретического описания релятивистских систем.

Таким образом, при изучении различных эффектов следует выделить задачу поиска новых методов расчетов и развития математического аппарата, который позволил бы максимально упростить вычислительные схемы и добиться

результатов с высокой степенью точности, необходимой для экспериментов.

Целью данной работы является численное исследование некоторых эффектов, включая и релятивистские, возникающих в двухчастичных уравнениях (уравнение Шредингера и его полурелятивистского обобщения – уравнение Солпитера – Томпсона) с кулоновским и корнельским потенциалами. Основу исследования составляет оригинальная высокоточная методика решения интегральных уравнений с сингулярными ядрами, возникающими в задачах с потенциалами такого вида в импульсном представлении.

Достоинства использования импульсного представления для решения физических задач (уравнений для связанных состояний, задач рассеяния и др.) давно привлекали внимание исследователей [3], [4]. В импульсном пространстве, в отличие от координатного, отпадает необходимость дополнительных построений, связанных с определением релятивистского оператора кинетической энергии

$$T(k) = \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}.$$

Также относительно несложно получить релятивистский потенциал взаимодействия с

использованием соответствующей амплитуды упругого рассеяния частиц, составляющих систему [5], поскольку расчет изначально ведется в импульсном представлении, которое здесь возникает естественным образом.

Однако, проблемы использования импульсного пространства осложняются тем, что даже потенциалы взаимодействия простейшего вида в импульсном представлении приводят к интегралам с особенностями. Поэтому точность решения для целого ряда задач (кулоновский, корнелеский потенциалы) с учетом современных экспериментальных данных была относительно невысокой ($10^{-5} \div 10^{-6}$) [6], [7]. В этой связи необходимо создание методик, которые были бы относительно несложными в применении и давали результаты с необходимой для эксперимента точностью.

1 Уравнение для связанных состояний в импульсном представлении

Уравнение Шредингера в импульсном представлении для центрально-симметричных потенциалов после парциального разложения примет вид:

$$\frac{k^2}{2\mu} \varphi_l(k) + \int_0^\infty V_l(k, k') \varphi_l(k') k'^2 dk' = E \varphi_l(k), \quad (1.1)$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса; m_1, m_2 – массы конститuentов связанной системы; $\mathbf{k}$ – импульс относительного движения ($|\mathbf{k}| = k$); $\varphi_l(k)$ – радиальная часть фурье-образа волновой функции (ВФ) в координатном представлении; $V_l(k, k')$ – оператор l -той составляющей парциального разложения потенциала взаимодействия; E – энергия связи. Здесь и далее мы опускаем в индексах главное квантовое число n для сокращения записи.

Однако описание связанных состояний в импульсном представлении усложняется необходимостью решения интегрального уравнения (1.1), содержащего сингулярные члены, тип которых определяется видом $V_l(k, k')$.

Продemonстрируем данное утверждение на примере корнелеского потенциала

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r, \quad (1.2)$$

который в импульсном представлении имеет вид:

$$V_l(k, k') = -\frac{\alpha Q_l(y)}{\pi k k'} + \frac{\sigma Q'_l(y)}{\pi (k k')^2}, \quad (1.3)$$

α и σ – параметры кулоновской и линейной части потенциала соответственно.

Здесь величина y является комбинацией импульсов:

$$y = \frac{k^2 + k'^2}{2k k'}, \quad (1.4)$$

а функция $Q_l(y)$ – полином Лежандра 2-го рода:

$$Q_l(y) = P_l(y) Q_0(y) - w_{l-1}(y), \quad (1.5)$$

$$Q_0(y) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|; \quad (1.6)$$

$$w_{l-1}(y) = \sum_{n=1}^l \frac{1}{n} P_{n-1}(y) P_{l-n}(y).$$

где $P_l(y)$ – полиномы Лежандра.

С помощью (1.5), (1.6) находим, что производная $Q'_l(y)$ в (1.3) определяется соотношением

$$Q'_l(y) = P'_l(y) Q_0(y) + P_l(y) Q'_0(y) - w'_{l-1}(y), \quad (1.7)$$

$$Q'_0(y) = \frac{1}{1-y^2} = -\left(\frac{2kk'}{k'+k} \right)^2 \frac{1}{(k'-k)^2}. \quad (1.8)$$

Поскольку функция Q'_l сингулярная, в случае если $k = k'$, то и сам потенциал $V_l(k, k')$ также является сингулярным. Стандартные методики численного решения уравнения (1.1) с потенциалом (1.3) дают относительно невысокую точность [6], [7]. Ниже приведем вывод новой квадратурной формулы, которая даст возможность существенно повысить точность решения таких уравнений.

Подставляя выражение (1.3) в (1.1) и используя соотношения (1.5), (1.7), приходим к интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} & \left(E - \frac{k^2}{2\mu} \right) \varphi_l(k) = \\ & = \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^\infty [P'_l(y) Q_0(y) + P_l(y) Q'_0(y) - w'_{l-1}(y)] \varphi_l(k') dk' - \\ & - \frac{\alpha}{\pi k} \int_0^\infty [P_l(y) Q_0(y) - w_{l-1}(y)] \varphi_l(k') k' dk', \quad (1.9) \end{aligned}$$

в котором ядро содержит логарифмическую и полюсную сингулярности, связанные с видом $Q_0(y)$ и $Q'_0(y)$.

Полурелятивистское обобщение уравнения (1.9), (т. н. уравнение Томпсона [6] или бесспиновое уравнение Солпитера [8]), выполняется простой заменой оператора кинетической энергии $k^2/(2\mu)$ на релятивистское выражение, т. е.

$$\frac{k^2}{2\mu} \rightarrow \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} - m_1 - m_2. \quad (1.10)$$

При этом оператор потенциальной энергии не модифицируется.

2 Методика решения интегральных уравнений

Численное решение интегрального уравнения (1.9) может быть сведено к задаче на собственные значения матрицы, которая возникает при использовании квадратурных формул для интегралов, входящих в уравнение.

На первом этапе осуществляется переход от интервала интегрирования $[0, \infty]$ к «стандартному» $[-1, 1]$ с помощью замены переменных:

$$\int_0^\infty f(k) dk = \int_{-1}^1 f(k(t)) \frac{dk}{dt} dt. \quad (2.1)$$

Функция $t(k)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$t(k=0) = -1, \quad t(k=\infty) = 1 \quad (2.2)$$

и может быть выбрана в виде [6], [9]–[12]:

$$t(k) = \frac{k-c}{k+c} \quad (2.3)$$

или

$$t(k) = 1 - 2 \exp(-k/c), \quad t(k) = \frac{4(k/c)}{\pi} - 1, \quad (2.4)$$

где c – некоторый параметр, имеющий размерность величины k .

Стандартный подход, основанный на квадратурных формулах, приводит к аппроксимации интеграла (2.1):

$$\int_0^\infty f(k) dk \approx \sum_{j=1}^N \tilde{\omega}_j f(k_j), \quad (2.5)$$

где множители $\tilde{\omega}_j$ связаны с табличными весовыми множителями ω_j для области $[-1, 1]$ соотношением: $\tilde{\omega}_j = (dk/dt)_j \omega_j$, а N задает число узлов (число точек интегрирования).

В итоге интегральное уравнение вида (1.9) может быть сведено к задаче:

$$H_{ij} \varphi(k_j) = E \varphi(k_i), \quad (2.6)$$

где для получения собственных значений и векторов необходимо знать элементы матрицы H_{ij} .

И если для $i \neq j$ задача расчета элементов H_{ij} для кулоновского и линейного запирающего потенциалов не является сложной, то при $i = j$ ($k = k'$) напрямую это сделать не удастся вследствие наличия сингулярностей. Рассмотрим методы, позволяющие находить значения при $i = j$.

2.1 Методы решения уравнений с сингулярными ядрами

Наиболее часто используемый метод удаления сингулярности – это введение контрчлена (метод вычитания Ланде) [6], [9]. Данная процедура основана на интегральных равенствах [6], [13]:

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} Q_0(y) = \frac{\pi^2}{2}, \quad \int_0^\infty dk Q'_0(y) = 0. \quad (2.7)$$

Использование соотношений (2.7) приводит к модификации уравнения (1.9) (см. [6], [9]):

$$\begin{aligned} & \left(E - \frac{k^2}{2\mu} \right) \varphi_\ell(k) = \\ & = \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^\infty \{ Q'_0(y) [P_\ell(y) \varphi_\ell(k') - \varphi_\ell(k)] - \\ & - w'_{\ell-1}(y) \varphi_\ell(k') \} dk' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^\infty Q_0(y) \left[P'_\ell(y) \varphi_\ell(k') - \frac{\ell(\ell+1)}{2} \frac{k}{k'} \varphi_\ell(k) \right] dk' + \\ & + \ell(\ell+1) \frac{\pi\sigma}{4k} \varphi_\ell(k) + \frac{\alpha}{\pi k} \int_0^\infty w_{\ell-1}(y) \varphi_\ell(k') k' - \\ & - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty Q_0(y) \left[P_\ell(y) \frac{k'}{k} \varphi_\ell(k') - \frac{k}{k'} \varphi_\ell(k) \right] dk' + \\ & + \frac{\alpha\pi}{2} \varphi_\ell(k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Применение стандартных квадратурных формул для сведения уравнения (2.8) к задаче на собственные значения (2.6) приводит к тому, что для диагональных элементов матрицы H_{ij} сингулярности отсутствуют.

Недостатком данной методики является невысокая, с точки зрения современных экспериментальных требований, точность вычислений для кулоновского и линейного запирающего потенциалов. Даже сложная модификация данной методики [6] не приводит к существенному росту точности.

Другим методом решения, который заслуживает рассмотрения с нашей точки зрения, является полуспектральный метод Чебышева, предложенный в работе [14]. В этом подходе введены новые квадратурные формулы для интегралов путем выделения сингулярной части и ее переноса в квадратурные коэффициенты. Данные квадратурные коэффициенты вычислялись аналитически с использованием интерполяции на основе полиномов Чебышева $T_j(t)$. Кратко изложим методику получения таких весовых множителей.

Произвольная функция $f(t)$ на интервале $[-1, 1]$ может быть разложена по полиномам Чебышева 1-го рода $T_j(t)$:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N c_j T_{j-1}(t), \quad (2.9)$$

где c_j – спектральные коэффициенты

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{j-1}(t_i) f(t_i), \quad (2.10)$$

а t_i – нули полиномов соответствующей степени.

Штрих в формуле (2.9) здесь и далее означает, что первое слагаемое в сумме следует делить на 2.

Полином Чебышева 1-го рода степени N определяется формулой:

$$T_N(t) = \cos(N \arccos(t)). \quad (2.11)$$

Функция T_N имеет N нулей в интервале $[-1, 1]$, которые определяются аналитическим выражением

$$t_i = \cos[\pi(i-1/2)/N], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.12)$$

Таким образом, для функции $f(t)$ получаем:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) f(t_j), \quad (2.13)$$

$$\sigma_j(t) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) T_{i-1}(t).$$

В случае, когда функция $f(t)$ не имеет особенностей, с помощью (2.13) легко вычислить интеграл по стандартной квадратурной формуле:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=1}^N w_j f(t_j), \quad (2.14)$$

где весовые коэффициенты w_j имеют вид:

$$w_j = \int_{-1}^1 \sigma_j(t) dt = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \int_{-1}^1 T_{i-1}(t) dt. \quad (2.15)$$

В случае интегралов с особенностями из подынтегральной функции выделим сингулярную при $t = z$ часть $-g(t, z)$. Тогда для такого интеграла по аналогии с (2.14) и (2.15) можно записать, что

$$I = \int_{-1}^1 f(t) g(t, z) dt = \sum_{j=1}^N w_j(z) f(t_j), \quad (2.16)$$

$$w_j(z) = \int_{-1}^1 \sigma_j(t) g(t, z) dt = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \int_{-1}^1 T_{i-1}(t) g(t, z) dt. \quad (2.17)$$

Таким образом, для нахождения весовых коэффициентов $w_j(z)$ в (2.17) необходимо вычислить аналитически интеграл:

$$I_n(g(t, z)) = \int_{-1}^1 T_n(t) g(t, z) dt. \quad (2.18)$$

Посредством данной методики воспроизведем результат работы [14] (см. формулы (47)–(53) в [14]) для

$$g(t, z) = \frac{1}{t - z}, \quad |z| \leq 1. \quad (2.19)$$

Тогда, используя (2.17), находим, что весовые коэффициенты определяются соотношением:

$$w_j^C(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) I_{i-1} \left(\frac{1}{t - z} \right) \quad (2.20)$$

с

$$I_n \left(\frac{1}{t - z} \right) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{t - z} dt. \quad (2.21)$$

Преобразуем интеграл (2.21) посредством простого вычитания к виду

$$I_n \left(\frac{1}{t - z} \right) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) - T_n(z)}{t - z} dt + T_n(z) \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right|. \quad (2.22)$$

Используя свойства полиномов Чебышева,

$$\frac{T_n(t) - T_n(z)}{t - z} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) T_k(t) \quad (2.23)$$

и то, что

$$\int_{-1}^1 T_n(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n-1)(n+1)} \quad (2.24)$$

получим

$$I_n \left(\frac{1}{t - z} \right) = T_n(z) \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right| + R_n(z), \quad (2.25)$$

где

$$R_n(z) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} U_{n-1-i}(z) \left[\frac{(-1)^{i+1} - 1}{i^2 - 1} \right]. \quad (2.26)$$

Выражение (2.26), используемое в [14], является не очень удобным для программной реализации, поскольку случай $i = 1$ приходится вычислять отдельно. С помощью производящей функции для полиномов Чебышева можно получить более удобное соотношение для $R_n(z)$ в виде [15]:

$$R_n(z) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} T_k(z) \left[\frac{(-1)^{(n-k)+1} + 1}{(n-k)} \right]. \quad (2.27)$$

Таким образом, окончательно для весовых коэффициентов w_j^C имеем

$$w_j^C(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \left\{ T_{i-1}(z) \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right| + 2 \sum_{k=0}^{i-2} T_k(z) \left[\frac{(-1)^{(i-1-k)+1} + 1}{(i-1-k)} \right] \right\}. \quad (2.28)$$

Аналогичные вычисления в случае

$$g(t, z) = \ln |t - z|, \quad |z| \leq 1 \quad (2.29)$$

приводят к формуле

$$w_j^{Log}(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \int_{-1}^1 T_{i-1}(t) \ln |t - z| dt. \quad (2.30)$$

Аналитический расчет коэффициентов $w_j^{Log}(z)$ приводит к формулам (57), (58) и (60) работы [14], которые здесь не приводятся в силу громоздкости выражений.

Решение уравнения (1.9) с кулоновским потенциалом на основе (2.30) может быть проведено с относительной ошибкой $\delta \sim 10^{-12} \div 10^{-14}$, в отличие от методики с контрчленом, где такая ошибка составляет $\sim 10^{-4}$ [6], или с высокоточными весовыми коэффициентами $\delta \sim 10^{-7}$ [16].

Применение же данной методики для решения уравнения с линейным запирающим потенциалом (см. [12]) приводит к тому, что интегральное уравнение сводится к интегродифференциальному. Данная особенность приводит не только к усложнению вычислительной процедуры, но и к потере точности. Тогда относительные ошибки полуспектрального метода Чебышева и метода Ланде сравнимы и находятся в пределах $\delta \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$.

2.2 Комбинированная методика решения уравнения

Нами предложен новый способ для решения уравнения с линейным запирающим потенциалом на основе сочетания полуспектрального метода Чебышева [14] и процедуры введения

контрчлена [6], [7]. При этом исходное интегральное уравнение не сводится к интегро-дифференциальному, а точность расчетов существенно возрастает.

Использование методики введения в уравнение контрчленов приводит в случае запирающего потенциала к интегралу вида (см. (1.8) и (2.8))

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_\ell(t) - \varphi_\ell(z)}{(t-z)^2} dt. \quad (2.31)$$

Далее, используя полуспектральный метод Чебышева для $g(t, z) = 1/(t-z)^2$ (см. (2.16) (2.17)), приходим к новой квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_\ell(t) - \varphi_\ell(z)}{(t-z)^2} dt = \sum_{j=1}^N \omega_j^{Lin}(z) \varphi_\ell(t_j) \quad (2.32)$$

с весовыми коэффициентами

$$\omega_j^{Lin}(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) X_{i-1}(z), \quad (2.33)$$

где

$$X_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) - T_n(z)}{(t-z)^2} dt. \quad (2.34)$$

Найдем аналитическое выражение $\omega_j^{Lin}(z)$, выполняя операции, аналогичные тем, что привели к соотношению (2.28). Используя соотношение (2.23), имеем:

$$X_n(z) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{t-z} dt, \quad (2.35)$$

где входящий в выражение (2.35) интеграл уже известен. Посредством (2.25) и (2.27) получим, что

$$X_n(z) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) \left\{ T_k(z) \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + R_k(z) \right\}. \quad (2.36)$$

Для упрощения выражения (2.36) используем то, что

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) T_k(z) = \\ & = \lim_{x \rightarrow z} \frac{T_n(x) - T_n(z)}{x - z} = T'_n(z) = n U_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (2.37)$$

и $R_0(z) = 0$. Тогда аналитическое выражение для $X_n(z)$ приобретает вид:

$$X_n(z) = n U_{n-1}(z) \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + 4 \sum_{k=1}^{n-1} U_{n-1-k}(z) R_k(z). \quad (2.38)$$

Таким образом, если для интегралов уравнения (1.9) с логарифмической сингулярностью используются квадратурная формула (2.30), а для слагаемых с полюсной сингулярностью – соотношение (2.32), то уравнение остается интегральным, в отличие от [12], а задача на собственные значения не содержит громоздких слагаемых, связанных с введением контрчленов.

Применим нашу методику для решения уравнения в импульсном пространстве с корнелским потенциалом (1.3). Поскольку даже в случае нерелятивистского уравнения нет точных решений, то для сравнения точности вычислений используем данные работы [17], где расчеты проделаны в координатном представлении.

В таблице 1 дается сравнение результатов из [17] с нашими результатами, полученными с применением комбинированной методики. Величины, по которым проводится сравнение, связаны с обычными параметрами уравнения (1.9) следующими соотношениями:

$$\lambda = \alpha \left(\frac{4\mu^2}{\sigma} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon = E \left(\frac{2\mu}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Из таблицы 1 видно, что предлагаемая нами методика эффективна даже при малом числе N и с высокой точностью $\delta \sim 10^{-11} \div 10^{-12}$ воспроизводит результаты работы [17].

3 Квантовые и релятивистские эффекты

Применим разработанную нами методику для исследования некоторых эффектов, возникающих в квантовых связанных системах. Для численных расчетов используем систему с равными массами $m_1 = m_2 = 1,37$ ГэВ (аналог кварк-антикварковой $c\bar{c}$ – системы).

Таблица 1 – Сравнение результатов численного решения уравнения Шредингера с корнелским потенциалом в координатном и импульсном представлении. Численный расчет в работе [17] проводился на сетке с числом узлов $N = 300000$. Также приводится оценка погрешности вычислений, выполненная авторами работы [17].

λ	N	$\varepsilon(1s)$ (метод этой работы)	N	$\varepsilon(1s)$ [17]	$\Delta\varepsilon$
0,0	100	2,338 107 410 459 784	300 000	2,338 107 410 458 750	1,0E–12
0,2		2,167 316 208 772 692		2,167 316 208 771 731	1,0E–12
0,4		1,988 503 899 750 148		1,988 503 899 749 943	9,6E–13
0,6		1,801 073 805 647 306		1,801 073 805 646 145	8,5E–13
0,8		1,604 408 543 236 034		1,604 408 543 235 973	6,6E–13
1,0		1,397 875 641 659 084		1,397 875 641 659 578	3,8E–13
1,2		1,180 833 939 742 701		1,180 833 939 744 863	2,1E–14

3.1 Релятивизация кинетической энергии

Один из простейших релятивистских эффектов можно оценить путем замены оператора кинетической энергии $k^2/2\mu$ на релятивистское выражение (1.10). Тогда получаем уравнение вида:

$$\left[\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} - (m_1 + m_2) \right] \varphi_\ell(k) + \int_0^\infty V_\ell(k, k') \varphi_\ell(k') k'^2 dk' = E \varphi_\ell(k). \quad (3.1)$$

Сравнение численных расчетов энергии связи для нерелятивистского уравнения Шредингера (1.9) и его релятивистского обобщения уравнения Томпсона (3.1) приведены в Таблице 2.

Таблица 2 – Сравнение результатов численного решения уравнения Томпсона (3.1) и уравнения Шредингера (1.9) с корнелльским потенциалом в импульсном представлении. Число узлов в сетке $N = 250$. Массы кварков $m_1 = m_2 = 1,37$ ГэВ. Параметр $\sigma = 0,19$ ГэВ².

α	N	$E(1s)$ Ур. Томпсона	$E(1s)$ Ур. Шредингера	$\delta E, \%$
0,0000	250	0,679762395	0,695760875	2,30
0,0932		0,625832014	0,644937788	2,96
0,1864		0,568477222	0,591727825	3,93
0,2796		0,507164386	0,535953430	5,37
0,3728		0,441227549	0,477430886	7,58
0,4661		0,369819564	0,415971985	11,10
0,5593		0,291837111	0,351385934	16,95
0,6525		0,205800023	0,283481410	27,40

Анализ расчетных данных показывает, что абсолютная разница и процентный вклад между собственными значениями уравнений Томпсона и Шредингера растет с увеличением параметра кулоновской части потенциала α . Отметим, что аналогичное поведение имеет место и при решении уравнений (1.1) и (3.1) вариационным методом, поскольку

$$\sqrt{k^2 + m^2} < \frac{k^2}{2m} + m. \quad (3.2)$$

3.2 Критическое значение параметра α

В квантовых системах с кулоновским потенциалом существует критическое значение параметра $\alpha_{cr.}$, при котором энергетический спектр не имеет физических решений. Так, например, для уравнения Шредингера только с кулоновским потенциалом, где известно точное решение, это значение может быть найдено аналитически.

Для случая равных $m_1 = m_2$ условие того, что энергия связи становится больше, чем сумма масс частиц, составляющих связанную систему, запишется в виде

$$-\frac{m\alpha^2}{4n^2} + 2m = 0, \quad (3.3)$$

откуда и находим

$$\alpha_{cr.} = 2\sqrt{2} n^2. \quad (3.4)$$

В работе [18] (см. также ссылки в [19]) было показано, что и релятивистское обобщение уравнения Шредингера – бесспиновое уравнение Солпитера будет также иметь критическое значение.

Применяя разработанную методику численных расчетов, найдем $\alpha_{cr.}$ для уравнения Шредингера с корнелльским потенциалом (1.9) и исследуем зависимость критических значений от параметра записания σ . Отметим, что такие эффекты ранее не исследовались. Результаты вычислений зависимости $\alpha_{cr.} = \alpha_{cr.}(\sigma)$ представлены на рисунке 1. Область изменения $\sigma = 0,1 \div 1$ ГэВ² выбрана таким образом, чтобы включить большинство кварковых моделей [10], [20], [21].

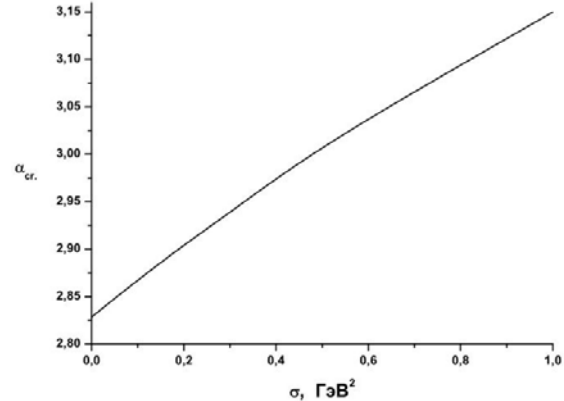


Рисунок 1 – Зависимость критического значения α_{crit} от параметра линейного записания σ для уравнения Шредингера

Для уравнения Шредингера с корнелльским потенциалом возникает эффект «увеличения» α_{crit} до значения в диапазоне $2,82 < \alpha < 3,15$, что, очевидно, связано с добавкой запирающего слагаемого к кулоновскому потенциалу, вклад от которого необходимо «перекрыть», увеличивая α .

3.3 Коллапс волновых функций

С существованием критических значений параметров потенциалов взаимодействия тесно связано явление, которое называют коллапсом волновых функций. При коллапсе волновые функции локализуются в области r , близкой к нулю, что, соответственно, в импульсном пространстве приводит равномерному распределению по k .

На рисунке 2 представлены графики волновых функций основного состояния для уравнения Шредингера с корнелльским потенциалом

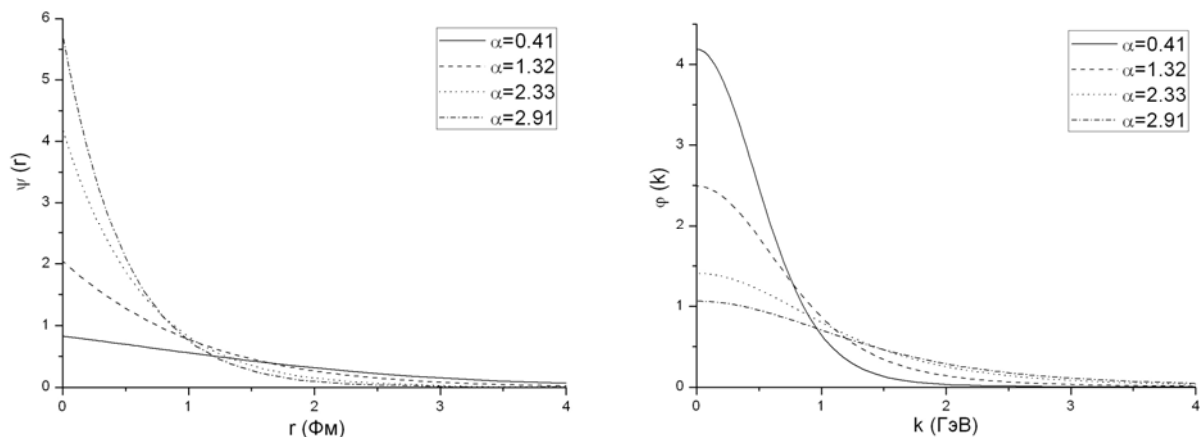


Рисунок 2 – ВФ основного состояния для уравнения Шредингера с корнеловским потенциалом

($\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$) для различных значений α в координатном и импульсных представлениях. Легко заметить, что по мере приближения к критическому значению $\alpha = 2,92$, волновая функция (в координатном представлении) проявляет тенденцию к локализации в области $r \sim 0$.

Заключение

На основе нового прецизионного метода решения уравнений в импульсном представлении с корнеловским потенциалом исследован эффект релятивизации кинетической энергии квантовой системы. Показано, что для полурелятивистского варианта уравнения происходит уменьшение энергии связи по сравнению с нерелятивистским.

Найдено, что для основного состояния критические значения параметра кулоновской части корнеловского потенциала α_{crit} увеличиваются с ростом параметра запирающего σ (см. рисунок 1). Для этой системы исследовано поведение волновых функций основного состояния близи критических значений. Показано, что для критических значений α_{crit} наступает явление коллапса ВФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Phase-Coherent Measurement of the Hydrogen 1S–2S Transition Frequency with an Optical Frequency Interval Divider Chain* / T. Udem [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – Oct 1997. – Vol. 79, № 14. – P. 2646–2649.
2. *High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment* / W. Liu [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 82. – P. 711–714.
3. *Bete, H.A. Quantum Mechanics of One and Two-Electron Atoms* / H.A. Bete, E.E. Salpeter. – Berlin–Göttingen–Heidelberg : Springer-Verlag, 1957. – P. 1232–1242.
4. *Eyre, D. Solving momentum space integral equations for quarkonia spectra with confining*

potentials / D. Eyre, J.P. Vary // *Phys. Rev.* – 1986. – Vol. D34. – P. 3467–3471.

5. *Lucha, W. Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states* / W. Lucha, H. Rupprecht, F.F. Schoberl // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.

6. *Tang, A. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space* / A. Tang, J.W. Norbury // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. E63. – P. 066703.

7. *Norbury, J.W. Confining potential in momentum space* / J.W. Norbury, D.E. Kahana, K. Maung Maung // *Can. J. Phys.* – 1992. – Vol. 70. – P. 86–89.

8. *Salpeter, E. E. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms* / E.E. Salpeter // *Phys. Rev.* – 1952. – Vol. 87, № 2. – P. 328–343.

9. *Bielefeld, S. On technically solving an effective QCD Hamiltonian* [Electronic resource] / S. Bielefeld, J. Ihmels, H.-C. Pauli. – 1999. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9904241>. – Date of access: 14.01.2008.

10. *Savkli, C. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism* / C. Savkli, F. Gross // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. C63. – P. 035208.

11. *van Iersel, M. Techniques for solving bound state problems* [Electronic resource] / M. van Iersel, C. van der Burgh, B.L. Bakker. – 2000. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0010243>. – Date of access: 24.01.2005.

12. *Deloff, A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited* / A. Deloff // *Annals Phys.* – 2007. – Vol. 322. – P. 2315–2326.

13. *Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е переработанное изд. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.

14. *Deloff, A. Semi-spectral Chebyshev method in Quantum Mechanics* / A. Deloff // *Annals Phys.* – 2007. – Vol. 322. – P. 1373–1419.

15. *Андреев, В.В. Новая квадратурная формула для интегралов с особенностями в задачах*

на связанные состояния / В.В. Андреев, К.С. Бабич // В сб. науч. трудов «Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности» / Институт физики НАН Беларуси. – Вып. 7. – Минск : Институт физики НАН Беларуси, 2011. – С. 216–222.

16. Андреев, В.В. Водородоподобная система в релятивистской гамильтоновой динамике / В.В. Андреев, В. Андреев, Т.В. Шишкина // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), часть 1. – С. 13–17.

17. Kang, D. Precise Numerical Solutions of Potential Problems Using Crank-Nicholson Method / D. Kang, E. Won // J. Comput. Phys. – 2008. – Vol. 227. – P. 2970–2976.

18. Herbst, I. Spectral Theory of the Operator $\sqrt{p^2 + m^2} - \frac{ze^2}{2}$ / I. Herbst // Commun. Math. Phys. – 1977. – Vol. 53. – P. 285–294.

19. Lucha, W. Relativistic Coulomb problem: Energy levels at the critical coupling constant analytically / W. Lucha, F.F. Schoberl // Phys. Lett. – 1996. – Vol. B387. – P. 573–576.

20. Godfrey, S. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics / S. Godfrey, N. Isgur // Phys. Rev. – 1985. – Vol. D32. – P. 189–231.

21. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовоплевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель : УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.

Поступила в редакцию 09.09.11.

УДК 677.633

ЗАЩИТНЫЕ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПОКРЫТИЯ С ГИДРОФОБНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В.В. Васькевич, В.Е. Гайшун, Д.Л. Коваленко, В.В. Сидский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

PROTECTIVE SOL-GEL COATING WITH HYDROPHOBIC PROPERTIES

V.V. Vaskevich, V.E. Gaishun, D.L. Kovalenko, V.V. Sidsky

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе рассматривается возможность создания защитных SiO_2 покрытий на основе золь-гель метода путем гидролиза металлоорганических соединений кремния в водно-спиртовой смеси. Исследуется реология приготовленных пленкообразующих растворов в зависимости от времени и условий хранения раствора. Описаны оптимальные параметры нанесения и термообработки для получения однородных покрытий. Исследуется механическая стойкость к истиранию как основной вид испытания покрытий на прочность и адгезию к поверхности подложки. Анализируются свойства гидрофобности полученных покрытий в зависимости от состава и температуры обработки.

Ключевые слова: золь-гель технология, реология, термообработка, защитные покрытия, гидрофобные свойства.

In the paper the authors consider the possibility of protective SiO_2 coatings based on sol-gel method by hydrolysis of organometallic compounds of silicon in water-alcohol mixture. We study the rheology of film-forming solutions prepared according to the time and storage conditions of the solution. We describe the optimal parameters of application and heat treatment to obtain homogeneous coatings. The mechanical resistance to abrasion as the main type of coatings tested for strength and adhesion to the substrate surface is investigated. The authors give analysis of the properties of water repellency of coatings obtained depending on the composition and treatment temperature.

Keywords: sol-gel technology, rheology, heat treatment, protective coatings, hydrophobic properties.

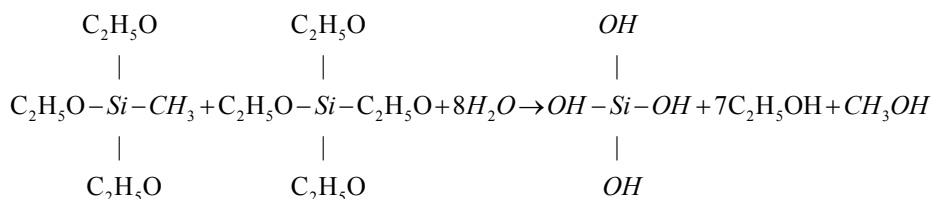
Введение

Защитные покрытия являются самыми востребованными покрытиями. В настоящее время существует широчайший выбор таких покрытий, получаемых вакуумными либо химическими методами [1]–[5]. Золь-гель метод имеет преимущества, так как он не требует энергоемкого, дорого оборудования, является гораздо более экономичным и экологически чистым и позволяет получать материалы сложного химического состава и структуры, а также покрытия особой чистоты с необходимыми свойствами. К основным характеристикам защитных покрытий можно отнести: адгезию, прочность, стойкость к агрессивным средам, а также гидрофобность. Защитные пленки, обладающие гидрофобными свойствами, могут выступать в качестве антикоррозионных покрытий [6]–[8].

В данной работе рассматривается методика синтеза защитных SiO_2 покрытий золь-гель методом, исследуются механические и гидрофобные свойства полученных покрытий.

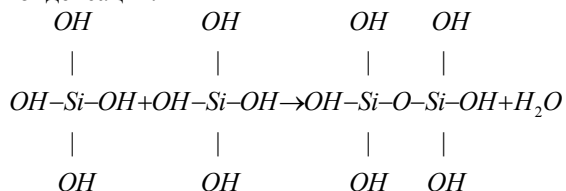
1 Методика эксперимента

Получение коллоидного раствора кремневой кислоты основано на реакции гидролиза эфиров ортокремневой кислоты. Добавление к кремневым эфирам небольших количеств воды приводит к образованию поликремневых эфиров. В работе рассматривается синтез пленкообразующих растворов из тетраэтилортосиликата (TЭОС , $\text{Si}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$) и метилтриэтоксисилана (МТЭС , $\text{CH}_3\text{Si}(\text{C}_2\text{H}_5\text{O})_3$). В исходном состоянии, а также в органических растворителях указанные соединения полимерных цепочек не образуют. Для золь-гель превращений необходимы молекулы воды или неорганические соединения с ОН-группами, которые инициируют реакции гидролиза и поликонденсации. В работе для проведения реакции гидролиза перечисленных выше кремниевых соединений использовали воду. Таким образом при гидролизе происходит замещение алкильной группы ОН-группой:



Образовавшиеся молекулы гидроксила кремния ($\text{Si}(\text{OH})_4$) взаимодействуют между собой, образуя цепочки, а из них затем и трехмерную сетчатую структуру посредством $\equiv\text{Si}-\text{O}-\text{Si}\equiv$ связей. Гидролиз ведут в присутствии спирта. Следует, однако, учитывать то обстоятельство, что при длительном хранении таких растворов происходит полимеризация кремневой кислоты.

Во время созревания золя происходит поликонденсация:



Эти превращения происходят при относительно низких температурах – около $20\text{--}25^\circ\text{C}$. Структура образующегося коллоидного раствора определяется типом и концентрацией катализатора, органическим растворителем и температурой проведения золь-гель перехода.

В данной работе защитные покрытия были синтезированы по следующей схеме (рисунок 1).

Пленкообразующий раствор был приготовлен следующим образом. Требуемое количество ТЭОСа смешивали с требуемым количеством МТЭСа, заливали этиловым спиртом и перемешивали. Затем добавляли дистиллированную воду и азотную кислоту. Известно, что непосредственно после растворения ТЭОСа и МТЭСа в водно-спиртовой смеси раствор еще не является пленкообразующим. Свежеприготовленный раствор, совершенно свободный от следов кислоты, при нанесении его на поверхность стекла испаряется без всякого осадка. При смешивании всех исходных компонент происходило нагревание раствора до температуры $\sim 40^\circ\text{C}$. После завершения процесса гидролиза температура золя опускалась до комнатной. Для созревания раствора

его выдерживали при температуре окружающей среды ($22 \pm 2^\circ\text{C}$) в течение 2–3 дней. Время созревания раствора может быть сокращено введением в растворы катализаторов – незначительных добавок кислот. Наличие кислоты в растворе определяет не только скорость процесса созревания, но и качество получаемых пленок. В работе использовалось соотношение 65 моль МТЭС к 28 молям ТЭОС. Именно такое соотношение позволяет добиться необходимых гидрофобных свойств получаемых покрытий. В работе в качестве катализатора была выбрана азотная кислота. Это обосновано тем, что срок созревания растворов составляет 2–3 дня, а срок его хранения увеличивается до 8–10 месяцев.

Нанесение золя на подложку возможно различными методами, такими как: метод окунания, метод аэрозольного распыления и метод центробежного ускорения. Основными параметрами, по которым производится выбор метода нанесения, являются форма и размер подложки, на которой необходимо получить покрытие. Так как в данной работе образцы представляют собой металлические квадратные подложки с длинной стороны от 40 до 60 мм, был выбран центробежный метод нанесения покрытий. Этот метод является оптимальным при получении покрытий на небольших подложках, так как обеспечивает минимальный расход пленкообразующего раствора и обеспечивает равномерную толщину покрытий.

После нанесения золя на поверхность подложек образцы были помещены в печь, где были нагреты до температуры от 100 до 800°C , затем извлекались и остывали на воздухе. Высокотемпературная обработка, после которой происходит полное уплотнение пленок, оказывает существенное влияние на структуру золь-гель пленок и их гидрофобные свойства.

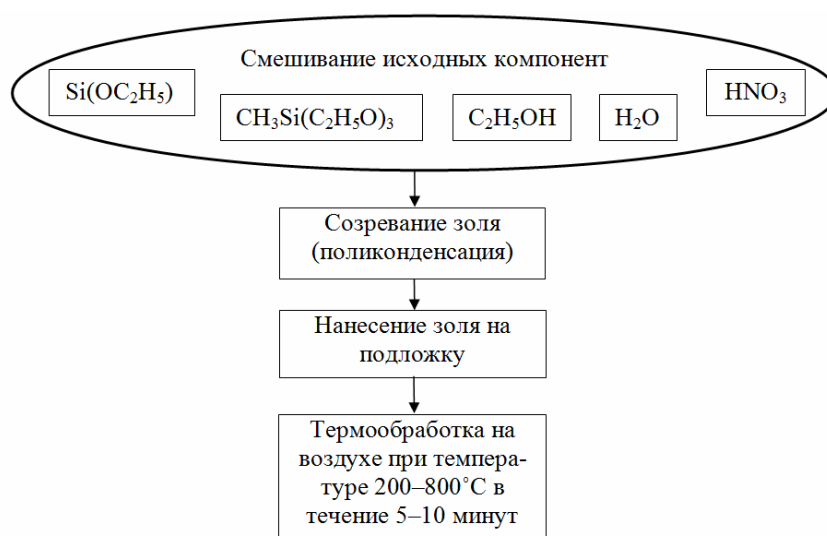


Рисунок 1 – Блок-схема синтеза защитных золь-гель покрытий

2 Исследование вязкости пленкообразующих растворов

Важной характеристикой, влияющей на качество получаемых золь-гель методом покрытий, является вязкость исходного пленкообразующего раствора. Большинство пленкообразующих растворов с увеличением времени хранения становятся более вязкими, вследствие чего синтезированные из них покрытия получаются более толстыми и в процессе термообработки разрушаются на поверхности подложки. Очень важной задачей является синтез пленкообразующих растворов, которые могли бы быть пригодными для получения покрытий в течение длительного времени.

В данной работе проведены исследования динамической вязкости с помощью ротационного вискозиметра «REOTEST 2.1» с использованием цилиндрической системы в диапазоне скоростей сдвига от 46,8 до 1312 с^{-1} . Измерения проводили при температуре 20 $^{\circ}\text{C}$.

По результатам измерений динамической вязкости построили график зависимости эффективной динамической вязкости от времени хранения золя (рисунок 2).

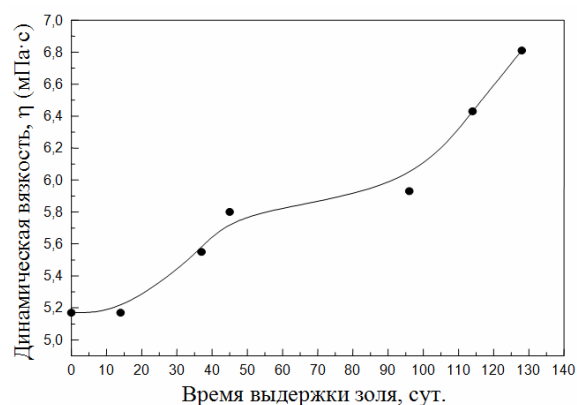


Рисунок 2 – График зависимости эффективной динамической вязкости от времени хранения золя

Проанализировав данный график, можно сделать вывод, что динамическая вязкость пленкообразующих растворов незначительно увеличивается с течением времени: от 5,2 мПа·с для свежего золя до 6,8 мПа·с для золя, хранившегося более 130 суток. Притом это увеличение происходит неравномерно. Стоит отметить, что новый золь не изменяет своей вязкости в первые 10 суток.

Как известно, пленкообразующий раствор обладает способностью формировать прочные и однородные покрытия только после определенного времени выдержки. Это время зависит непосредственно от состава и соотношения компонент. Оптимальным временем для синтеза покрытий можно считать 10 суток после приготовления нового золя.

3 Исследование механической стойкости к истиранию

Для определения механической прочности тонких защитных пленок чаще всего применяют склерометрический метод и метод истирания. Наиболее подходящим методом определения механической прочности защитных пленок является метод, основанный на определении стойкости пленок к истиранию. Это ближе к реальным условиям как изготовления разнообразных изделий с тонкими покрытиями, так и их эксплуатации.

В данной работе механическая прочность полученных защитных покрытий может быть охарактеризована сопротивляемостью к истиранию. При этом пленка постепенно стирается, утончается и, наконец, снимается совсем. Если адгезия незначительная и плотность небольшая, то пленка снимается при малейшем прикосновении истирающего материала.

Прочность покрытий определялась методом истирания резиновым наконечником, изготовленным из пищевой резины средней плотности, через батистовую прокладку при следующих параметрах:

- частота вращения, мин^{-1} – 100,
- нагрузка на наконечник, г – 200,
- расстояние от оси вращения, мм – 5.

Ниже приводятся данные по механической стойкости покрытий к истиранию по описанной выше методике (таблица 1). Механическая стойкость определялась количеством циклов истирания до момента полного удаления пленки с поверхности подложки, либо до 5000 циклов истирания, что свидетельствует о высокой прочности полученного покрытия.

Таблица 1 – Механическая стойкость пленок к истиранию в зависимости от температуры обработки пленок

№ образца	Температура обработки, $^{\circ}\text{C}$	Время термообработки, мин	Механическая стойкость, циклы истирания
1	100	5	570
2	200	5	1400
2	300	5	2700
4	400	5	5000
5	500	5	5000
6	600	5	5000
7	700	5	5000
8	800	5	5000

По полученным результатам можно сделать вывод, что на прочность и адгезионные свойства покрытий существенное влияние оказывает температура термообработки. При температуре обработки до 200 $^{\circ}\text{C}$ из покрытия происходит полное удаление адсорбированной воды, однако данной температуры недостаточно для полного

удаления органических остатков и растворителя, вследствие чего покрытие менее стойкое. При температуре обработки 300⁰С происходит окончательный гидролиз и разложение промежуточных продуктов гидролиза и органических остатков. При обработке выше 400⁰С происходит полная дегидратация и окончательное формирование оксида. Все покрытия, подвергнутые такой термообработке, прошли испытание и показали прочность выше 5000 циклов истирания.

4 Исследование гидрофобных свойств

Гидрофобные свойства покрытий характеризуются энергией взаимодействия молекулы жидкости с приповерхностным слоем молекул твердого тела U_{12} , которая рассчитывается по формуле:

$$U_{12} = \frac{q_2 \mu_2}{2N_A} \cdot (1 + \cos \theta),$$

где q_2 – удельная теплота парообразования жидкости капли, μ_2 – молярная масса жидкости капли, N_A – постоянная Авогадро, θ – краевой угол.

Так как q_2, μ_2 – это постоянные, зависящие только от рода жидкости, а N_A – постоянная величина, то энергия взаимодействия U_{12} зависит от изменения краевого (контактного) угла расположенной на этом покрытии капли на границе раздела трех сред [9]–[10].

Краевой угол можно также непосредственно определить по методу «сидячей капли». То есть капля имеет сферическую форму, и краевой угол рассчитывается по формуле:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{h}{r}, \quad (4.1)$$

где θ – краевой угол, h – высота капли, r – радиус капли.

Выразим из формулы (4.1) краевой угол через высоту и радиус капли:

$$\theta = \left(\arctg \frac{h}{r} \right) \cdot 2. \quad (4.2)$$

Таким образом, для определения гидрофобных свойств на поверхности полученных покрытий с помощью дозатора осаждали каплю размером 0,5 мкл и делали снимок (рисунок 3).

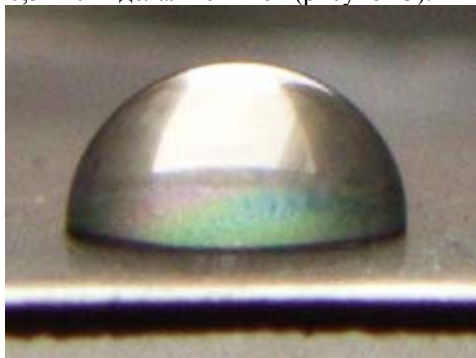


Рисунок 3 – Фотография капли воды на поверхности защитного покрытия, отожженного при температуре 500⁰С

Полученную фотографию обрабатывали, рассчитывая отношение высоты капли к её радиусу по формуле (4.2), находя краевой угол. Результаты расчета краевого угла представлены на графике (рисунок 4).

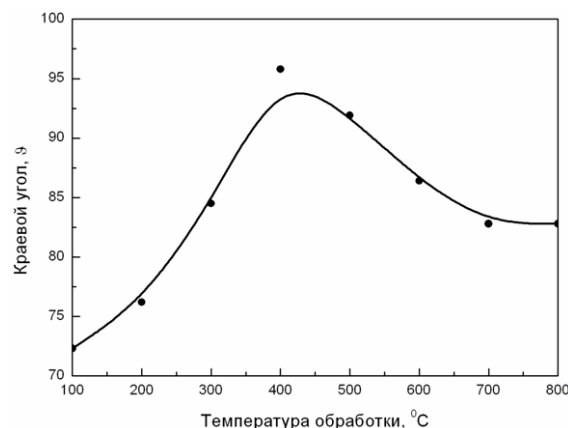


Рисунок 4 – График зависимости краевого угла от температуры отжига

Из графика видно, что краевой угол и, следовательно, энергия взаимодействия зависит от температуры обработки. Максимальные гидрофобные свойства проявляют покрытия, термообработанные при $T = 400^{\circ}\text{C}$. При малых температурах обработки гидрофобные свойства хуже из-за присутствия в пленке органических остатков и растворителя. А при больших температурах происходит разглаживание поверхности, в результате чего гидрофобные свойства проявляются в меньшей степени.

Заключение

Защитные покрытия, синтезированные золь-гель методом, характеризуются высокой стойкостью и хорошей адгезией к металлическим, стеклянным и керамическим поверхностям. Полученные в ходе выполнения работы покрытия, прошедшие термообработку выше 400⁰С, отличаются высокой стойкостью, более 5000 циклов истирания. Кроме того, установлено, что температура отжига влияет на гидрофобные свойства полученных покрытий. Отмечено, что максимальные гидрофобные свойства проявляются у покрытий, которые термообработаны при температуре 400⁰С.

ЛИТЕРАТУРА

1. *CVD diamond films as protective coatings on titanium alloys* / P. Gannon [et al.] // International Journal of Refractory Metals and Hard Materials. – 1998. – Vol. 16, № 3. – P. 217–222.
2. *Advanced PVD protective coatings for SOFC interconnects* / T. Grogler [et al.] // International Journal of Hydrogen Energy. – 2008. – Vol. 33, № 14. – P. 3991–4000.
3. *Protective Zr-containing SiO₂ coatings resistant to thermal cycling in air up to 1400°C* / J. Musil

[et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2009. – Vol. 203, № 10/11. – P. 1502–1507.

4. Lasorsa, C.A. Protective $\text{Si}_x\text{O}_y\text{C}_z$ coatings on steel prepared by plasma activated chemical vapour deposition / C.A. Lasorsa, P.M. Perillo, P.J. Morando // Surface and Coatings Technology. – 2010. – Vol. 204, № 16/17. – P. 2813–2816.

5. Investigations on B-doped SiO_2 thermal protective coatings by hybrid sol-gel method / X. Zhao [et al.] // Thin Solid Films. – 2011. – Vol. 519, № 15. – P. 4849–4854.

6. Shi-Ing Huang. Study on the hydrophobic surfaces prepared by two-step sol-gel process / Shi-Ing Huang, Yi-Ju Shen, Hui Chen // Applied Surface Science. – 2009. – Vol. 255, № 15. – P. 7040–7046.

7. Facile preparation of super-hydrophobic and super-oleophilic silica film on stainless steel mesh via sol-gel process / H. Yang [et al.] // Applied Surface Science. – 2010. – Vol. 256, № 13. – P. 4095–4102.

8. Design and investigation of photo-induced super-hydrophilic materials for car mirrors / P. Eiamchai [et al.] // Materials & Design. – 2009. – Vol. 30, № 9. – P. 3428–3435.

9. Адамсон, А. Физическая химия поверхностей / А. Адамсон. – М. : Мир, 1979. – 568 с.

10. Моррисон, С. Химическая физика поверхности твердого тела / С. Моррисон. – М. : Мир, 1980. – 488 с.

Поступила в редакцию 08.09.11.

УДК 534.142

ЛАЗЕРНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПРОДОЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

В.Г. Гуделев¹, Г.В. Кулак², А.Г. Матвеева², Т.В. Николаенко²¹Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск²Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

LASER EXCITATION OF LONGITUDINAL AND SHEAR ULTRASOUND WAVES PULSES IN SOLID STATE BODIES IN A NEAR ZONE

V.G. Gudelev¹, G.V. Kulak², A.G. Matveeva², T.V. Nikolaenko²¹B.I. Stepanov Institute of Physics NASB, Minsk²I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr

Исследованы особенности оптико-акустического возбуждения акустических импульсов продольных и сдвиговых ультразвуковых волн в ближней зоне Френеля для дифракции на отверстии прямоугольной формы. Установлено некоторое увеличение амплитуды и уменьшение длительности акустического импульса при переходе из ближней зоны Френеля в дальнюю зону Фраунгофера. Показано, что при смещении от центра отверстия в зоне Френеля амплитуда акустического импульса уменьшается и длительность увеличивается; при переходе в область геометрической тени амплитуда импульса значительно уменьшается.

Ключевые слова: лазерное возбуждение, ультразвуковая волна, длительность и амплитуда импульса, зона дифракции, твердое тело.

The peculiarities of the optical-acoustical excitation of the acoustical pulse of longitudinal and shear ultrasonic waves for the near Fresnel zone and acoustical diffraction on the rectangular opening are investigated. Some enhancement of the acoustical pulse amplitude and reduction of the duration under transition from the nearest Fresnel zone to the far Fraunhofer zone are stated. It has been shown that under displacement from the center of the opening in the Fresnel zone the amplitude of acoustical pulse is reduced and duration is enhanced. The pulse amplitude is reduced significantly under transition to the geometrical shadow.

Keywords: laser excitation, ultrasonic waves, duration and amplitude of pulse, diffraction zone, solid state body.

Введение

Среди источников ультразвука в твердых телах оптико-акустические имеют ряд преимуществ: отсутствие контакта со средой, возможность лёгкого изменения геометрических параметров оптико-акустической антенны и диапазона излучаемых частот [1]. В работах [1], [2] для целей неразрушающего контроля теоретически и экспериментально исследовано оптико-акустическое возбуждение гиперзвука в режиме термоупругости и лазерного испарения для дальней зоны излучения (зона Фраунгофера). Показано, что наибольшие амплитуды смещений, генерируемые оптико-акустическим источником, достигаются в условиях лазерного испарения. В условиях лазерного испарения происходит поглощение света в плазме и образование бегущей навстречу лазерному импульсу ударной звуковой волны, за фронтом которой образуется область повышенного давления, которая воздействует на поверхность металла. При этом величина импульса силы на поверхность металла практически не зависит от рода материала, а давление достигает ~ 100 МПа для длительности импульса $\tau \sim 10$ нс [3], [4]. В настоящей работе с использованием тензорной функции Грина для

уравнения Ламе исследовано оптико-акустическое возбуждение импульсов высокочастотных ультразвуковых (УЗ) волн в ближней и дальней зоне дифракции.

1 Теоретические результаты и обсуждение

При падении на поверхность твердого тела светового импульса длительностью τ возбуждается УЗ излучение с шириной спектра $\Delta\Omega \sim 1/\tau$ и центральной частотой Ω ($\Delta\Omega \ll \Omega$), которая имеет порядок ~ 1 ГГц при используемых длительностях световых импульсов. Для маски прямоугольной формы в области

$$-a < x' < a, \quad -b < y' < b$$

на поверхности твердого тела возникает равномерно распределенный импульс давления p_f . УЗ поле за областью воздействия является результатом дифракции на прямоугольном отверстии. Геометрическая схема возбуждения УЗ волны представлена на рисунке 1.

Уравнение Ламе, описывающее возбуждение монохроматической ультразвуковой волны за счет распределенной объемной силы $\vec{f}(\vec{r}')$,

действующей на поверхность твердого тела, имеет вид [5], [6]:

$$\hat{L}\vec{u} = -\vec{f}\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1.1)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция. Предполагается в дальнейшем, что в рамках линейной теории вектор УЗ смещений $\vec{u} \sim \exp(-i\Omega t)$. Оператор $\hat{L}$ – задаётся соотношением:

$$\hat{L} = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{graddiv} + \rho \Omega^2, \quad (1.2)$$

где λ, μ – постоянные Ламе.

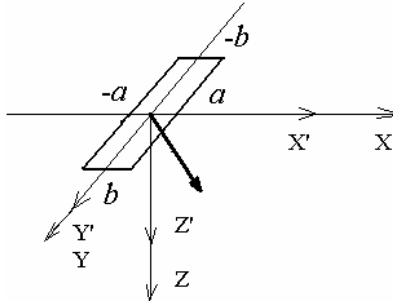


Рисунок 1 – Схема возбуждения гиперзвука полоской прямоугольной формы

Решение стационарного уравнения (1.1) с учетом (1.2) имеет вид [5], [6]:

$$u_j(\vec{r}) = \int G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}') f_j(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (1.3)$$

где G_{ij} – компоненты тензорной функции Грина ($i, j=1 \div 3$); $\vec{r}'$ – произвольные внешние параметры, связанные с объемом области лазерного воздействия на поверхность металла.

Компоненты тензорной функции Грина задаются соотношениями:

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho\Omega^2} \left\{ \delta_{ij} k_s^2 \frac{e^{ik_s R}}{R} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{e^{ik_l R}}{R} - \frac{e^{ik_s R}}{R} \right] \right\}. \quad (1.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad k_l = \frac{\Omega}{v_l}, \quad k_s = \frac{\Omega}{v_s},$$

где $v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – фазовые скорости

продольной и сдвиговой УЗ волн (ρ – плотность материала звукопровода).

При описании дифракции в ближней зоне в выражениях (1.3), (1.4) следует положить [7]:

$$R = z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}, \quad (1.5)$$

где $|x - x'| \ll z$, $|y - y'| \ll z$.

Обычно одна из сторон полоски возбуждения значительно больше другой (например, $b \gg a$), тогда возбуждается продольная УЗ волна с вектором смещений вблизи оси Z и сдвиговая волна, поляризованная под малым углом к оси X. Подставив выражение (1.5) в (1.3) и (1.4) и

выполнив интегрирование по области отверстия, получим приближенное выражение для частотного спектра амплитуд смещений акустического импульса продольной (U_l) и сдвиговой (U_s) составляющей в зоне дифракции Френеля вида:

$$U_{l,s}(x, y, z, \Omega) = \frac{P_f}{4\pi\rho v_{l,s}^2 k_{l,s}} \left\{ \left[C(u_{1,2}^{l,s}) - iS(u_{1,2}^{l,s}) \right] - \left[C(u_{1,2}^{l,s}) - iS(u_{1,2}^{l,s}) \right] \cdot \left\{ \left[C(v_{1,2}^{l,s}) - iS(v_{1,2}^{l,s}) \right] - \left[C(v_{1,2}^{l,s}) - iS(v_{1,2}^{l,s}) \right] \right\} \right\}, \quad (1.6)$$

где

$$u_{1,2}^{l,s} = \sqrt{\frac{k_{l,s}}{2z}} \left(x \pm \frac{a}{2} \right), \quad v_{1,2}^{l,s} = \sqrt{\frac{k_{l,s}}{2z}} \left(y \pm \frac{b}{2} \right),$$

причем $C(t)$, $S(t)$ – косинус- и синус-интегралы Френеля; $k_{l,s} = \frac{\Omega}{v_{l,s}}$, где $v_{l,s}$ – фазовая скорость продольной (сдвиговой) УЗ волны. Точное решение задачи Ламе о возбуждении акустических волн с поверхности твердого тела в интегральной форме приведено в работе [8]. Однако исследование возбуждения акустических импульсов на их основе сопряжено с большими вычислительными трудностями.

Временная форма акустического импульса дается соотношением [1], [2]:

$$\tilde{U}_{l,s}(\tilde{t}_{l,s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{l,s}(\Omega) F(\Omega) e^{-i\Omega \tilde{t}_{l,s}} d\Omega, \quad (1.7)$$

где $\tilde{t}_{l,s} = t - \frac{z}{v_{l,s}}$; $F(\Omega) = \tau_a \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-\tau_a^2 \Omega^2}{4}\right)$ –

частотный спектр акустического импульса в направлении оси Z. Длительность акустического импульса τ_a определяется особенностями поглощения энергии светового импульса поверхностью металла.

Поток мощности УЗ волны распределяется в пространстве и во времени сложным образом и рассчитывается по формулам:

$$P_{l,s} = \frac{1}{2} \rho v_{l,s} \Omega^2 \tilde{U}_{l,s}^2(x, y, z, t).$$

Будем исследовать амплитуду смещения продольной УЗ волны, нормированную на ее максимальное значение, то есть $\eta_l = \frac{\tilde{U}_l}{\tilde{U}_{l,\max}}$.

Исследована зависимость от времени нормированной амплитуды η_l акустического импульса в ближней зоне дифракции, когда величина «волнового размера» отверстия

$\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{\Lambda z}} \gg 1$, и в дальней зоне, когда $\tilde{a} \ll 1$

(a – ширина области лазерного воздействия, Λ – длина УЗ волны, z – расстояние до источника вглубь материала) [9]. Ранее показано [2],

что распределение звукового поля в окрестности отверстия является неоднородным. При уменьшении параметра $\tilde{a}$ (увеличении z) в центральной области отверстия появляется максимум интенсивности звука, а боковые максимумы интенсивности уменьшаются. Это означает переход из ближней зоны дифракции (зона Френеля) в область дальнего поля (зона Фраунгофера).

Подставив выражения (1.6) в (1.7) и выполнив интегрирование численными методами, получим временную форму акустического импульса продольной (η_l) ультразвуковой волны. При численных расчетах применялся алгоритм быстрого преобразования Фурье и метод сплайн-интерполяции.

2 Результаты расчетов

Численные расчеты проводились для продольной УЗ волны и материала, выполненного из стали (Fe). При этом полагалось $p_f = 10$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м³, $\nu_l = 5100$ м/с, $\tau_a = 10^{-6}$ с.

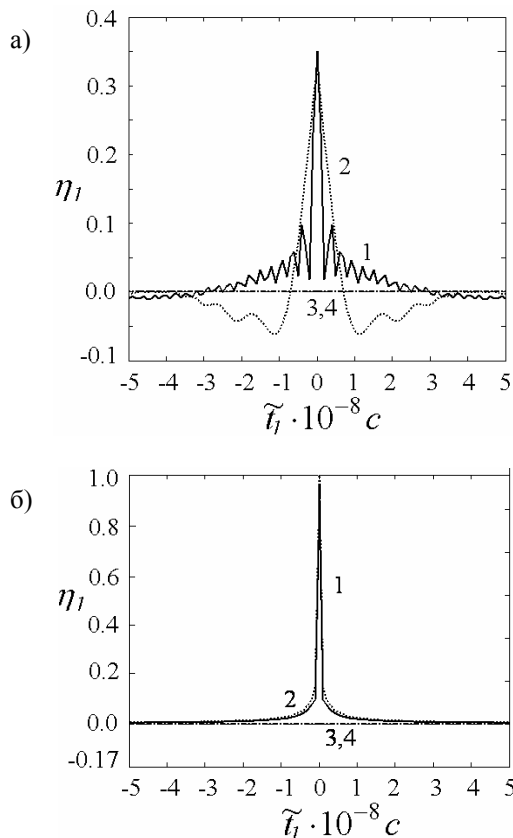


Рисунок 2 – Зависимость нормированной амплитуды смещения продольных УЗ волн η_l от времени $\tilde{t}_l$ для больших (а) и малых (б) волновых размеров при различных координатах x : 1 – 0; 2 – 0,1; 3 – 0,3; 4 – 0,5 см ($\nu_l = 5100$ м/с, $a = 0,1$ см, $p_f = 10$ МПа, $\tau_a = 10^{-6}$ с, $\tilde{a} = 560$ (а), $\tilde{a} = 0,56$ (б)).

На рисунке 2 представлена форма нормированной амплитуды акустического импульса η_l

продольных УЗ волн для падающего гауссового светового импульса длительностью $\tau = 10^{-9}$ с. При этом световой импульс преобразуется в акустический импульс меньшей длительности, распространяющийся в том же направлении [1], [4]. Полагалось, что область лазерного возбуждения имеет форму узкой щели. Тогда в выражении (1.6) можно использовать лишь второй множитель, а третий опустить. В таком случае дифракция ультразвука происходит в плоскости XZ . Из рисунка следует, что длительность акустического импульса при переходе из зоны Френеля (а) в зону Фраунгофера (б) уменьшается. Следует отметить, что при смещении области наблюдения вдоль оси X (в пределах отверстия) амплитуда импульса в зоне Френеля несколько уменьшается, а в зоне Фраунгофера увеличивается; длительность импульса в зоне Френеля увеличивается, а в зоне Фраунгофера остается практически неизменной. При смещении в область геометрической «тени» амплитуда импульса для любых волновых размеров значительно уменьшается. Из выражений (1.6), (1.7) следует, что особенности возбуждения импульсов сдвиговых УЗ волн качественно не отличаются от случая возбуждения продольных УЗ волн.

Заключение

Показано, что при смещении области наблюдения вдоль оси X (в пределах отверстия) амплитуда импульса в зоне Френеля несколько уменьшается, а в зоне Фраунгофера – увеличивается; длительность импульса в зоне Френеля увеличивается, а в зоне Фраунгофера остается практически неизменной. При смещении в область геометрической тени за отверстием амплитуда импульса для любых волновых размеров значительно уменьшается. Полученные результаты показывают, что изучение формы акустического импульса позволяет выполнить оптико-акустическое диагностирование твердых тел, включая металлы, в ближней и дальней зоне дифракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Experimental Study of Laser-Generated Shear Waves Using Interferometry* / S.Y. Zang [et al.] // Res. Nondestr. Eval. – 1990. – Vol. 2. – P. 143–155.
2. *Опτικο-акустическое возбуждение гиперзвука в твердых телах в ближней зоне* / В.Г. Гуделев [и др.] // Лазерная и оптико-электронная техника : сб. науч. статей / Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь ; отв. ред. И.С. Манак. – Мн. : 2008. – Вып. 11. – С. 52–58.
3. *Гуделев, В.Г. Лазерное возбуждение импульсов продольных и сдвиговых ультразвуковых волн в твердых телах* / В.Г. Гуделев, Г.В. Кулак, А.Г. Матвеева // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 7–9.

-
4. Влияние процесса плавления на акустический отклик соединений CdTe GaAs при импульсном лазерном облучении / А. Байдуллаева [и др.] // ФТП. – 2008. – Т. 42, № 3. – С. 286–290.
5. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау. – М. Наука, 1987. – 244 с.
6. Муратиков, К.Л. О формировании изображений неоднородных объектов лазерными фотоакустическими методами / К.Л. Муратиков // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30. – В. 22. – С. 58–64.
7. Кайно Г. Акустические волны. Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов / Г. Кайно. – М. : Мир, 1990. – 652 с.
8. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев. : Наукова думка, 1981. – 284 с.
9. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. – М. : Наука, 1978. – 543 с.

Поступила в редакцию 10.05.11.

УДК 538.915; 681.7.064

ПОЛУЧЕНИЕ ГЕТЕРОСТРУКТУР $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМВ.В. Малютина-Бронская¹, А.М. Поликанин¹, В.Б. Залесский²,
А.В. Семченко², В.В. Сидский², В.Е. Гайшун²¹Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, ГомельSYNTHESIS OF HETEROSTRUCTURES $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$ BY SOL-GEL METHODV.V. Malyutina-Bronskaya¹, A.M. Polikanin¹, V.B. Zaleskiy²,
A.V. Semchenko², V.V. Sidskiy², V.E. Gayshun²¹B.I. Stepanov Institute of Physics NASB, Minsk²F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе рассматривается анализ вольт-амперных, вольт-фарадных характеристик структур $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$, полученных золь-гель методом с использованием различных исходных веществ, таких как нитрат цинка, хлорид цинка и ацетат цинка. Рассчитана плотность дефектов на границе раздела ZnO/Si с использованием Мотт-Шоттки зависимостей $C^2(U)$. Определен основной механизм проводимости – токи, ограниченные пространственным зарядом. Показано, что пленки, полученные с использованием ацетата цинка, обладают фоточувствительностью.

Ключевые слова: золь-гель, ZnO , вольт-фарадные характеристики, вольт-амперные характеристики.

The analysis of voltage-current and voltage-farad characteristic of $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$ -structures are described. $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$ -structures are synthesized by sol-gel method with using of zinc nitrate, chloride and acetate as initials. The defects density on the ZnO/Si boundary by Mott-Shottky relationship $C^2(U)$ is calculated. The main conductivity mechanism (space-charge limited current) is determined. It is shown that sol-gel films synthesized from zinc acetate have good photosensitivity.

Keywords: sol-gel, ZnO , voltage-current and voltage-farad characteristic.

Введение

Оксид цинка (ZnO) привлекает пристальное внимание исследователей из-за своих уникальных свойств и разнообразных возможностей применений в электронике – в излучателях света в ультрафиолетовом диапазоне, пьезоэлектрических устройствах, химических сенсорах и спинтронике [1], [2]. Благодаря некоторым достоинствам этого широкозонного полупроводника ($E_g = 3.4$ эВ при $T = 300\text{K}$) имеются перспективы его использования в оптоэлектронике, фотопреобразователях и т. п. Особый интерес вызывает также решение проблем интеграции ZnO с Si, что может открыть возможности реального совмещения уникальных функциональных способностей этих материалов и кремниевой технологии.

Для получения оксида цинка используются различные методы: молекулярно-лучевая эпитаксия, осаждение из газовой фазы, импульсное лазерное напыление, электрохимическое осаждение [3]–[10]. Золь-гель метод имеет преимущества перед другими способами получения пленок ZnO , так как он простой и используется недорогое оборудование.

В настоящей работе исследуются свойства SiO_2/ZnO пленок в зависимости от использования различных исходных веществ для их получения золь-гель методом.

1 Методика эксперимента

В данной работе пленки ZnO на кремнии были синтезированы по следующей схеме. Хлорид цинка (образец № 1) или нитрат цинка (образец № 2) вводились в исходный золь, синтезированный из следующих исходных веществ: тетраэтилортосиликат, этиловый спирт, дистиллированная вода и соляная кислота. Образец № 3 был синтезирован с использованием ацетата цинка по схеме, представленной на рисунке 1.

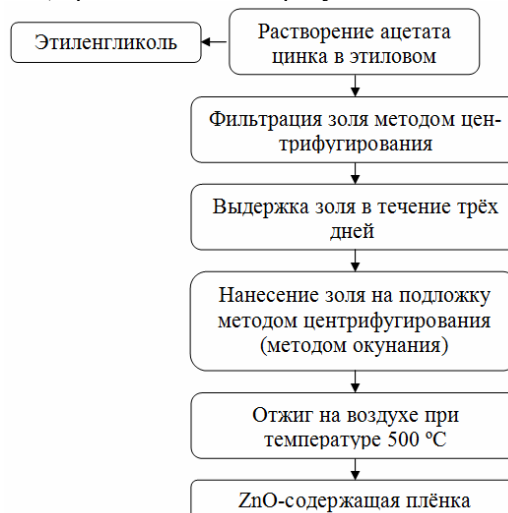


Рисунок 1 – Блок-схема синтеза плёнки, содержащей ZnO

После завершения процесса гидролиза температура золь опускалась до комнатной температуры. Для созревания раствора его выдерживали при температуре окружающей среды ($20\text{--}25^\circ\text{C}$) в течение 3–5 дней. Золь наносился на пластину монокристаллического кремния методом центрифугирования со скоростью 2000 об/мин. После нанесения золь пластины прошли ступенчатую термообработку при 100°C в течение 10 минут, а затем отжиг в атмосфере кислорода при температуре 400°C в течение 20 минут. В ходе термообработки происходит испарение растворителя и усиление поликонденсационных процессов, образование пространственной структуры кремнийорганического полимера. Измерения вольт-фарадных характеристик (ВФХ) при частотах 1 кГц, 100 кГц и 1 МГц, а также вольт-амперных характеристик (ВАХ) производились на измерителе иммитанса Е7-20 при комнатной температуре с использованием ртутного зонда. Измерения ВАХ и ВФХ для образца № 3 проводились как в темноте, так и при освещении лампой накаливания.

2 Результаты и их обсуждение

На рисунках 2, 3 и 4 представлены ВФХ и ВАХ структур $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$, полученных с использованием хлорида цинка, нитрата цинка и ацетата цинка, соответственно. Типичные ВФХ структур $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$ представляют собой кривые, характерные для высокочастотных ВФХ классических МДП-структур с рядом особенностей: емкость обогащения зависит от частоты тестового сигнала; на всех зависимостях в области модуляции емкости наблюдается особенность в виде максимума, величина этого максимума зависит от частоты тестового сигнала.

Значительный вклад в электропроводность вносит поверхностная и межзеренная электропроводность, а так же дефектность кристаллической решетки. Поэтому электропроводность оксидов металлов является структурно-чувствительным свойством. Все это приводит к размытию уровня прилипания (если он один) или к наличию различных групп уровней прилипания с размытым спектром по энергии. Поэтому проявление этого максимума в области обеднения мы связываем с всей совокупностью глубоких центров.

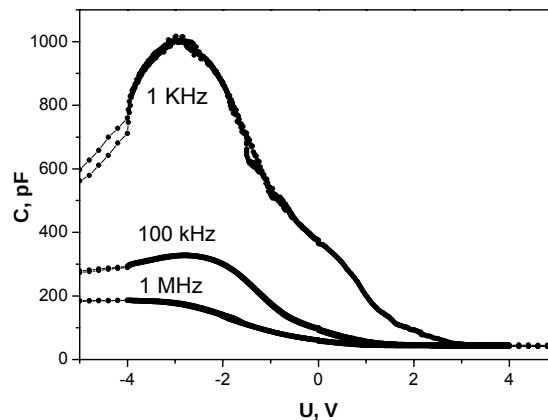
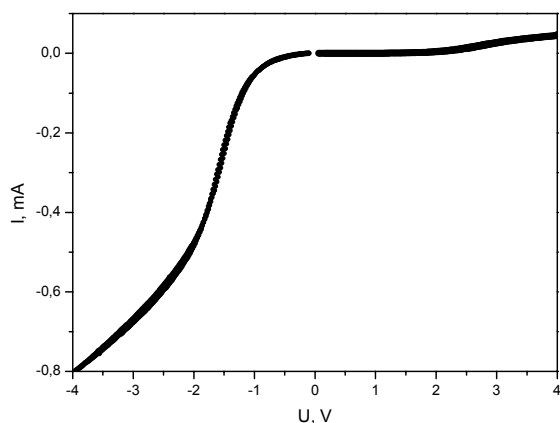


Рисунок 2 – ВАХ и ВФХ структур $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$, полученных с использованием хлорида цинка (образец № 1)

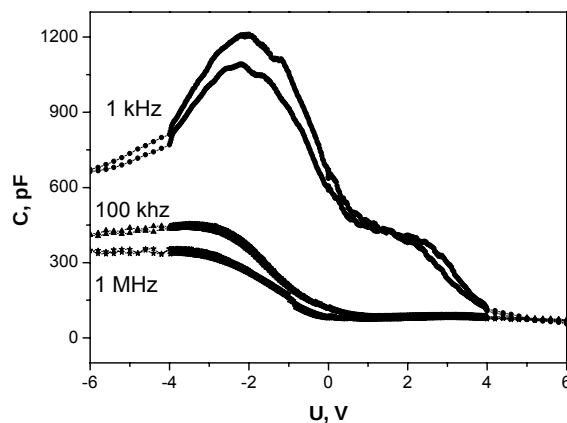
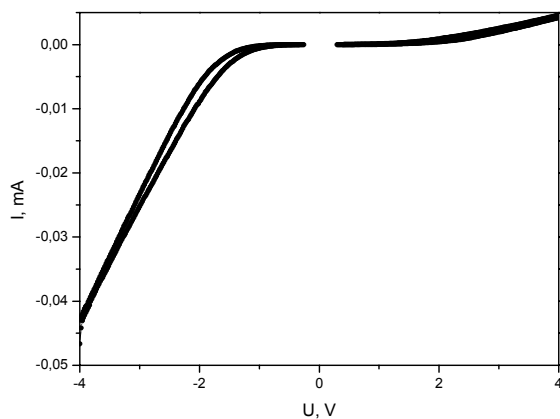
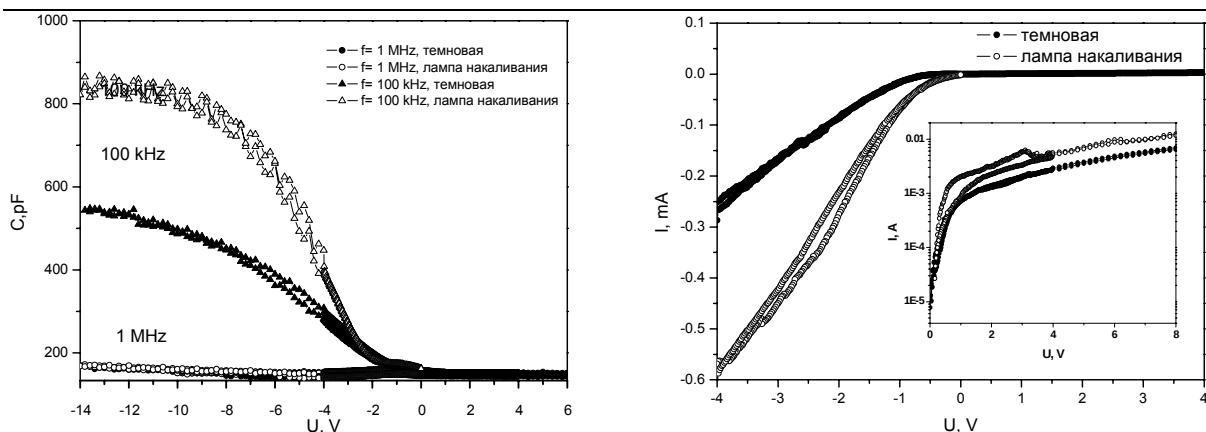


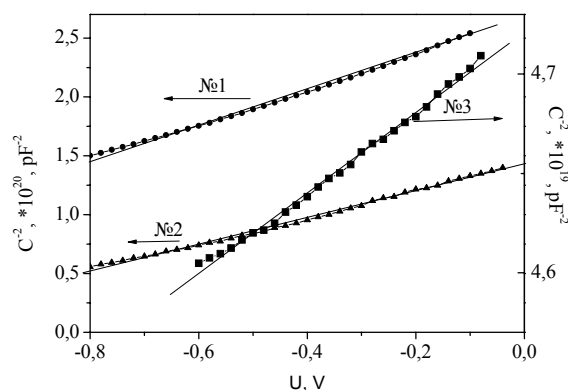
Рисунок 3 – ВАХ и ВФХ структур $\text{SiO}_2/\text{ZnO}/\text{Si}$, полученных с использованием нитрата цинка (образец № 2)

Рисунок 4 – ВФХ и ВАХ SiO₂/ZnO/Si, полученных с использованием ацетата цинка (образец № 3)

Изменение частоты тестирующего сигнала приводит к смещению ВФХ, что может быть вызвано влиянием образования на границе раздела ZnO/Si высокоомного слоя, обусловленного избыточной концентрацией цинка.

Для расчета концентрации примеси в полупроводнике можно воспользоваться зависимостью $C^{-2} = f(U)$ измеренных на частоте 1 МГц (рисунок 5) [11]. В этих координатах зависимости должны быть прямыми линиями. Тогда по тангенсу угла наклона прямых линий определяется концентрация примеси:

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{d\left(\frac{C_{ox}}{C_{ox}/C_{min} - 1}\right)}{dU} = \left[\frac{qN_i\epsilon_s\epsilon_0}{2}\right]^{-1}.$$

Рисунок 5 – ВФХ ZnO/Si, измеренные при частоте тестового сигнала $f=1$ МГц

Потенциальный барьер перехода определяется путем пересечения зависимости $C^{-2} = f(U)$ с осью напряжений. Для исследуемых структур были получены следующие значения потенциального барьера перехода и концентрации донорной примеси: $U_d=1.7$ эВ и $N_i=1.2 \cdot 10^{15}$ см⁻³ для образца № 1, $U_d=1.05$ эВ и $N_i=1.5 \cdot 10^{15}$ см⁻³ для образца № 2 и $U_d=0.64$ эВ и $N_i=8.2 \cdot 10^{16}$ см⁻³ для образца № 3. Значения,

полученные для потенциального барьера, больше работы выхода между Si и ZnO (0, 45 эВ).

Из соотношения

$$U_d = \frac{e^2 N_s^2}{8\epsilon\epsilon_0 N_i},$$

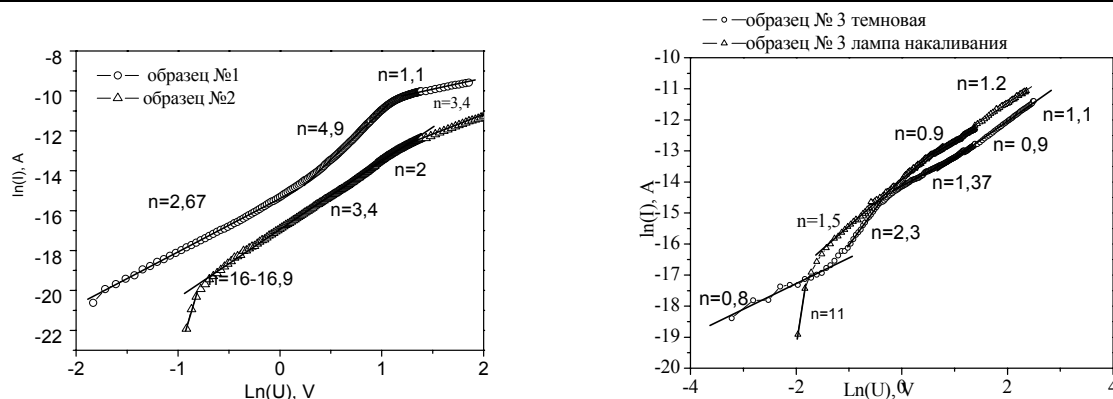
используя полученные данные, можно посчитать плотность поверхностных состояний [11]. Плотность поверхностных состояний составила $1.2 \cdot 10^{13}$ см⁻², $9.5 \cdot 10^{14}$ см⁻² и $3.2 \cdot 10^{12}$ см⁻² для образца № 1, образца № 2 и образца № 3 соответственно.

С целью исследования механизмов протекания тока в структуре измерялись ВАХ, представленные на рисунках 1–3. Из полученных данных фоточувствительностью как при прямом, так и при обратном смещении обладает только образец № 3, полученный с использованием ацетата цинка. Из ВАХ, представленных в логарифмических координатах (рисунок 6), следует, что как прямые, так и обратные ветви имеют линейные участки, а также наблюдается зависимость $I \sim U^n$, где n меняется в достаточно широких пределах. Такое поведение может быть объяснено теорией ТОПЗ (токами, ограниченными пространственным зарядом) при наличии уровней прилипания.

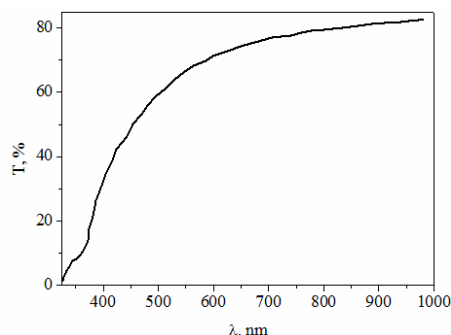
Кроме того, для образца № 3 на стекле был измерен спектр пропускания в спектральном диапазоне от 325 нм до 1000 нм, показанный на рисунке 7. Как можно видеть из рисунка, полученные пленки пропускают свет на уровне 80% в достаточно широком диапазоне. Основное поглощение происходит в коротковолновой области, что характерно для пленок ZnO. Наблюдение оптической интерференции на кривой пропускания свидетельствует об однородности полученной пленки.

Заключение

Таким образом, структуры ZnO/Si, синтезированные золь-гель методом, характеризуются наличием потенциального барьера.

Рисунок 6 – Прямые ветви ВАХ структур ZnO/Si

Изменение состава золь при получении пленок влияет на изменение электрических параметров структуры, таких как высота потенциального барьера и плотность поверхностных состояний. Для исследуемых структур были получены следующие значения потенциального барьера перехода: $U_d=1.7$ эВ, $U_d=1.05$ эВ и $U_d=0.64$ эВ для пленок, полученных с использованием хлорида цинка, нитрата цинка и ацетата цинка, соответственно. Значения, полученные для потенциального барьера, больше работы выхода между Si и ZnO (0,45 эВ). Установлено, что основным механизмом проводимости исследованных структур являются токи, ограниченные пространственным зарядом. Пленки, полученные с использованием ацетата цинка, проявляют фоточувствительные свойства и обладают хорошим пропусканием в широком спектральном диапазоне. Итак, пленки ZnO/Si , синтезированные золь-гель методом с использованием ацетата цинка в качестве исходного компонента, имеют перспективу использования в оптоэлектронике.

Рисунок 7 – Спектр пропускания пленок SiO_2/ZnO на стекле

ЛИТЕРАТУРА

1. McGlynn, E. Effect of polycrystallinity on the optical properties of highly oriented ZnO grown by pulsed laser deposition / E. McGlynn, J. Fryar, G. Tobin // *Thin Solid Films*. – 2004. – Vol. 485, №1–2. – P. 330–335.
2. Look, D.C. Recent advances in ZnO materials and devices / D.C. Look // *Mater.Sci.Eng. B*. – 2001. – Vol. 80, № 1–3. – P. 383–385.

3. Wu, M.-S. Growth of ZnO thin films on interdigital transducer/Corning 7059 glass substrates by two-step fabrication methods for surface acoustic wave applications / M.-S. Wu, W.-C. Shin, W.-H. Tsai // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 1998. – Vol. 31. – P. 943–947.

4. Nakamura, K. ZnO Film Growth on (0112) LiTaO₃ by Electron Cyclotron Resonance-Assisted Molecular Beam Epitaxy and Determination of Its Polarity / K. Nakamura, T. Shoji, K. Hee-Bong // *Jpn. J. Appl. Phys. Part 2 : Lett.* – 2000. – Vol. 39. – P. 534–536.

5. Gyani, A.K. On the use of basic zinc acetate $\text{Zn}_4\text{O}(\text{CH}_3\text{CO}_2)_6$ as a novel precursor for the deposition of ZnO by low-pressure metallo organic chemical vapour deposition: their characterization by low energy electron induced X-ray emission spectroscopy / A.K. Gyani, O.F.Z. Khan, P.O. Brien // *Thin solid films*. – 1989. – Vol. 182. – P. L1.

6. Preparation and characterization of ZnO films by an evaporating method / J. Ma [et al.] // *J. Vac. Sci. Technol.* – 1995. – Vol. A13. – P. 92–95.

7. Nassern, S. Optoelectrical and structural properties of evaporated indium oxide thin films / S. Nassern, M. Iqbal, K. Hussani // *Sol. Energy Materials and Solar Cells*. – 1993. – Vol. 31. – P. 155–157.

8. Transparent and Conductive ZnO Thin Films Prepared by Atmospheric-Pressure Chemical Vapor Deposition Using Zinc Acetylacetonate / T. Minami [et al.] // *Jpn. J. Appl. Phys., Part 2: Lett.* – 1994. – Vol. 33. – P. 743–746.

9. Paraguay, F.D. Growth, structure and optical characterization of high quality ZnO thin films obtained by spray pyrolysis / F.D. Paraguay, W.L. Estrada, D.N.R. Acosta // *Thin Solid Films*. – 1999. – Vol. 350. – P. 192–196.

10. Kamalasanan, M.N. Sol-gel synthesis of ZnO thin films / M.N. Kamalasanan, S. Chandra // *Thin Solid Films*. – 1996. – Vol. 288. – P. 112–115.

11. Bing-Ce, L. Effects of grain boundary barrier in ZnO/Si heterostructures / L. Bing-Ce // *Chin. Phys. Lett.* – 2009. – Vol. 26, № 11. – P. 117101.

Поступила в редакцию 02.09.11.

УДК 621.396

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР С БОЛЬШОЙ КИРАЛЬНОСТЬЮ В СВЧ ДИАПАЗОНЕ

А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

SIMULATION AND INVESTIGATION OF ARTIFICIAL ANISOTROPIC STRUCTURES WITH HIGH CHIRALITY IN THE MICROWAVE RANGE

A.L. Samofalov, I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В СВЧ диапазоне проведено моделирование киральных свойств образца искусственной среды, состоящей из медных спиралей. Сравнение рассчитанных значений угла поворота плоскости поляризации волны, прошедшей через искусственную структуру, с экспериментальными результатами позволило сделать вывод, что предложенная модель качественно описывает свойства искусственной структуры с большой киральностью в СВЧ диапазоне.

Ключевые слова: композитные среды, киральность, спиральный элемент, поворот плоскости поляризации.

The simulation of chiral properties of a sample of the artificial medium consisting of copper helices in the microwave range has been carried out. Comparison of calculated values of the angle of rotation of the polarization plane of the wave transmitted through artificial structure with the experimental results led to the conclusion that the proposed model qualitatively describes the properties of the artificial structure with a high chirality in the microwave range.

Keywords: composite media, chirality, helical element, the plane of polarization.

Введение

В работе [1] на примере образца, разработанного авторским коллективом из Института физики полупроводников Сибирского отделения РАН, проведено численное моделирование киральных свойств искусственной анизотропной структуры, образованной микроспиральями с углом подъема 53° , формируемыми из напряженных нанопленок [2]–[4]. Показано, что такая искусственная периодическая структура может проявлять значительные киральные свойства в терагерцевом диапазоне частот электромагнитного поля. Получены аналитические выражения для диэлектрической, магнитной и киральной восприимчивостей структуры при условии сильных гиротропных свойств. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов. В итоге сделан вывод, что предложенная модель удовлетворительно описывает свойства искусственной структуры с большой киральностью в ТГц диапазоне.

В предлагаемой статье показана возможность использования данного метода расчета применительно к искусственным материалам в СВЧ диапазоне, что позволяет определить ряд физических параметров этих материалов.

1 Моделирование

Используя аналитическое выражение для киральной восприимчивости из статьи [1], проведем моделирование в СВЧ диапазоне

киральных свойств образцов искусственной среды, состоящей из медных спиралей с параметрами:

1) $N_6 = 1$, $r = 6.5 \cdot 10^{-3}$ м, $\alpha = 35^\circ$, $L = 0.05$ м, $H = 0.0288$ м, $d = 9 \cdot 10^{-4}$ м;

2) $N_6 = 1$, $r = 4.7 \cdot 10^{-3}$ м, $\alpha = 53^\circ$, $L = 0.05$ м, $H = 0.04$ м, $d = 9 \cdot 10^{-4}$ м,

где N_6 – число витков спирали, r – радиус витка, α – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали, L – длина медной проволоки (соответствует условию главного частотного резонанса), H – высота спирали (в данном случае она равна шагу спирали), d – диаметр медной проволоки.

Количество спиралей в образцах, толщина и длина проволоки, из которой изготовлены спирали, в обоих случаях одинаковы, при этом спирали с углом подъема $\alpha = 35^\circ$ являются левосторонними, а спирали с $\alpha = 53^\circ$ – правосторонними. Фотографии изготовленных экспериментальных образцов двумерных решеток приведены на рисунках 1–2.

Параметры спирали в образце 1 получены на основании модели молекулярной оптической активности. Нами была проведена аналогия между спиралевидной молекулой и металлической спиралью и использован метод электродинамического подобия. При этом не учитывалась возможная зависимость входного сопротивления металлической спирали от угла подъема.

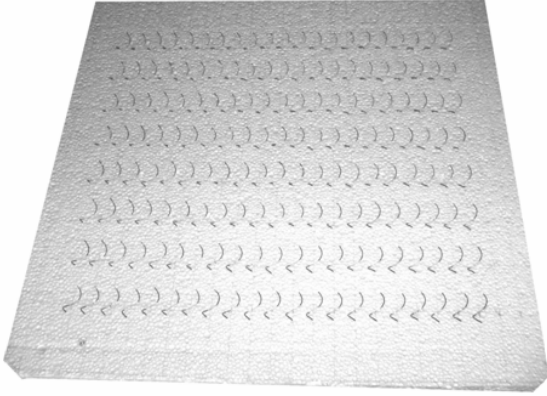


Рисунок 1 – Искусственный образец, содержащий левосторонние одновитковые спирали с углом подъема 35°



Рисунок 2 – Искусственный образец, содержащий правосторонние одновитковые спирали с углом подъема 53°

Угол подъема спирали в образце 2 равен 53 градусам, он получен исходя из аналитической модели, приведенной в работе [5]. На основе этой модели рассчитан оптимальный угол подъема спирали, который гарантирует максимальные значения угла поворота плоскости поляризации. Расчет показал, что для одновитковой спирали оптимальный угол подъема составляет 53 градуса. В работе [5] использована формула для входного сопротивления канонической спирали, состоящей из плоского кругового витка и двух прямолинейных проводников. Варьировалось соотношение между радиусом витка и длиной плеч канонической спирали. Тем самым, зависимость входного сопротивления реальной спирали от угла ее подъема учтена в работе [5] приближенным образом.

Зависимость параметра киральности κ' от частоты для среды с сильными киральными свойствами с учетом его частотной дисперсии имеет вид [1]:

$$\kappa' = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} B \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega \tilde{A}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \tilde{A}^2} \left(1 + \frac{q\omega r^2}{2} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \kappa \right),$$

где

$$\frac{1}{A} = \frac{2Ne^2}{\pi m_e} \frac{\tau}{r^2 q^2 + 1}, \quad B = \frac{r^2 q}{2} \omega,$$

$$\tilde{A} = \frac{\rho N_0 N_s e^2}{m_e}, \quad N = N_0 N_s N_h V_h, \quad V_h = \pi r_0^2 L,$$

$$\tau = j \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\rho}{\pi r^2 S_{np} \sin \alpha} 2\alpha_{me}, \quad N_s = \frac{2\Delta}{r_0}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}},$$

где e – заряд электрона, m_e – масса электрона, r – радиус спирали, q – удельное кручение спирали, ω – частота падающего излучения, ρ – удельное сопротивление металла, N_0 – объемная концентрация электронов проводимости в металле, N_s – доля скин-слоя в объеме спирали, r_0 – радиус проволоки, N_h – концентрация спиралей, V_h – объем проволоки, из которой изготовлена одна спираль, τ – коэффициент ослабления поля внутри металла, S_{np} – площадь сечения проводника, α – угол подъема спирали. α_{me} – магнито-электрическая восприимчивость, используемая в материальных уравнениях для отдельной спирали:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha_{ee} \mathbf{E} - j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha_{em} \mathbf{H},$$

$$\mathbf{m} = \alpha_{mm} \mathbf{H} + j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \alpha_{me} \mathbf{E}.$$

Здесь α_{ee} и α_{mm} – тензоры диэлектрической и магнитной восприимчивости, $\alpha_{em} = \alpha_{me}^T$ – псевдотензор, характеризующий киральные свойства спирали, символ T означает транспонирование, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. При записи этих выражений полагается, что электрическое и магнитное поле являются монохроматическими, и их зависимость от времени описывается функцией $\exp(j\omega t)$, как принято в радиофизике [1].

В нашем случае удельное сопротивление меди $\rho = 1.673 \cdot 10^{-8}$ Ом·м [6], объемная концентрация электронов проводимости в меди определялась как $N_0 = \rho_m N_A / M$, где $\rho_m = 8920$ кг/м³ – плотность меди [6], N_A – число Авогадро, M – молярная масса меди.

Как следует из дисперсионных соотношений Крамерса – Кронига [7], в окрестности резонансной частоты действительная и мнимая части магнитоэлектрической восприимчивости спирали α_{me} являются величинами одного порядка. Следовательно, коэффициент ослабления электромагнитного поля внутри металлической спирали τ имеет одинаково значимые действительную и мнимую части. Одной из задач данного исследования является определение коэффициента τ , который связан с входным сопротивлением спирали. Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования (рисунок 3) позволяет найти значение комплексной

величины τ отдельной спирали и значение кирального параметра α_{me} для всего образца:

1) образец, содержащий левосторонние одновитковые спирали с углом подъема 35° – $\tau = 5.105 \cdot 10^{-5} + j \cdot 2.552 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{me} = -1.1 + j \cdot 2.2$;

2) образец, содержащий правосторонние одновитковые спирали с углом подъема 53° – $\tau = 12.48 \cdot 10^{-5} + j \cdot 2.495 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{me} = 1.1 - j \cdot 5.5$.

При этом доля скин-слоя в объеме спирали на резонансной частоте (3 ГГц) составляет $N_s = 4.754 \cdot 10^{-5}$.

Если скин-эффект является ярко выраженным и толщина скин-слоя значительно уступает линейным размерам сечения проводника, то поверхность проводника можно рассматривать как плоскую [7]. В этом случае для коэффициента τ справедливо следующее выражение [1]:

$$\tau = (1 + j) \sqrt{2\varepsilon_0 \rho \omega}.$$

В этом случае численное значение коэффициента τ для обоих образцов на резонансной частоте (3 ГГц) составляет $7.471 \cdot 10^{-5} + j \cdot 7.471 \cdot 10^{-5}$.

Определение данных параметров необходимо для проведения дальнейших исследований по созданию безотражательных покрытий, а также метаматериалов с отрицательным преломлением электромагнитных волн на основе спиральных элементов.

Используя значение комплексного параметра киральности κ' , можно определить частотную зависимость угла поворота плоскости

поляризации волны, прошедшей через структуру, для наблюдателя, смотрящего навстречу волне:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \operatorname{Re}(\kappa') z_0,$$

где z_0 – толщина структуры (в нашем случае $z_0 = 2r$), $\operatorname{Re}(\kappa')$ – действительная часть комплексного параметра киральности [1].

Множитель $\frac{1}{2}$ в данной формуле учитывает

анизотропные свойства исследуемой искусственной структуры, в которой все спирали ориентированы вдоль одной оси. При этом киральные свойства структуры характеризуются тензором κ'_{ij} , все компоненты которого равны нулю, кроме компоненты κ'_{11} .

Полученная аналитически частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации волны, прошедшей через искусственную структуру, показана на рисунке 3 штриховой кривой.

Если структура образована спиралями с левосторонним кручением ($q < 0$), то для частот, более низких по отношению к резонансной, получаем $\operatorname{Re}(\kappa') < 0$ и $\varphi < 0$. Таким образом, для этих частот имеет место поворот плоскости поляризации волны против часовой стрелки, если смотреть навстречу волне.

Сравнение экспериментальных графиков и результата моделирования зависимости угла поворота плоскости поляризации СВЧ волны при ее взаимодействии с образцами искусственной анизотропной двумерной решетки, состоящей из

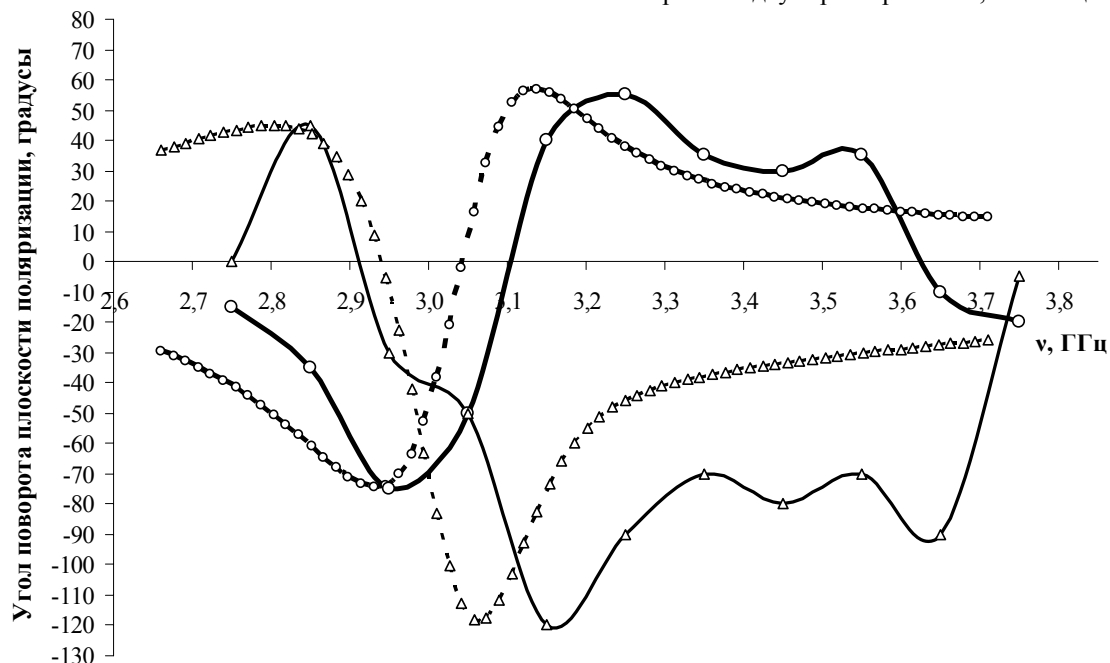


Рисунок 3 – Сравнение результатов экспериментального исследования и математического моделирования. Сплошной кривой показана экспериментальная зависимость угла поворота плоскости поляризации от частоты, штриховой – результат моделирования;

значком о обозначены кривые, относящиеся к образцу, состоящему из спиралей с углом подъема 35° , значком Δ – к образцу, состоящему из спиралей с углом подъема 53°

одновитковых металлических спиральных элементов с углом подъема 35^0 и 53^0 , позволяет сделать вывод, что предложенная модель качественно описывает свойства искусственной структуры с большой киральностью в СВЧ диапазоне. Направление поворота плоскости поляризации волны, рассчитанное на основании предложенной модели, соответствует направлению поворота, наблюдаемому во время эксперимента (рисунок 3). Полученное теоретически значение частоты, соответствующее изменению направления вращения плоскости поляризации на противоположное, совпадает, в пределах погрешности измерения, с экспериментальным результатом.

Заключение

На основе аналитического выражения для киральной восприимчивости, полученного ранее и апробированного в терагерцевом диапазоне частот [1], проведено моделирование киральных свойств изготовленных образцов искусственной структуры в СВЧ диапазоне. Из сравнения экспериментальных данных и результатов моделирования найдены значения коэффициента ослабления поля внутри отдельной металлической спирали и значение кирального параметра $a_{\text{те}}$ этой спирали, а также действительной части кирального параметра κ' всего образца. Показано, что предложенная модель качественно описывает свойства искусственной структуры с большой киральностью в СВЧ диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью / И.В. Семченко [и др.] // Кристаллография. – 2011. – Т. 56. – № 3. – С. 404–411.
 2. *Free-standing and overgrown InGaAs/GaAs nanotubes, nanohelices and their arrays* / V.Ya. Prinz [et al.] // Physica E. – 2000. – Vol. 6. – P. 828.
 3. *Fabrication of metamaterials on the basis of precise microand nanoshells* / E.V. Naumova [et al.] // In Proc. Metamaterials 2007, Rome, Italy. – 2007. – P. 74.
 4. *Terahertz-range chiral metamaterials based on helices made of metal-semiconductor nanofilms* / E.V. Naumova [et al.] // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2009. – Vol. 45, № 4. – P. 292.
 5. *Effective electron model of the wire helix excitation at microwaves: first step to optimization of pitch angle of helix* / I.V. Semchenko [et al.] // In Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials. NATO Science Series II. – 2003. – Vol. 89. – P. 245–256.
 6. *Таблицы физических величин*. Справочник; под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
 7. *Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред* / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ) – проект № Ф11МС-005.*

Поступила в редакцию 07.09.11.

УДК 678.743.41:620.197:621.793

**КИНЕТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ДИСПЕРГИРОВАНИЯ
КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ В ВАКУУМЕ
И МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА ПОКРЫТИЙ, ОСАЖДЕННЫХ
ИЗ ЛЕТУЧИХ ПРОДУКТОВ ДИСПЕРГИРОВАНИЯ**

М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, А.В. Рогачев, Д.Л. Горбачев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**KINETIC CHARACTERISTICS OF DISPERSION OF ORGANOSILICON
COMPOUNDS IN VACUUM AND MOLECULAR STRUCTURE
OF THE COATINGS, DEPOSITED FROM VOLATILE
PRODUCTS OF DISPERSION**

M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, A.V. Rogachou, D.L. Gorbochev

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Показано, что особенности кинетики электронно-лучевого диспергирования кремнийорганических соединений и молекулярной структуры слоев, осажженных из образовавшейся при диспергировании газовой фазы, обусловлены процессами химического взаимодействия, протекающими в зоне действия потока электронов на мишень. При диспергировании в условиях плазменной активации газовой фазы формируются слои, имеющие меньшую плотность углеводородных фрагментов и большую плотность ненасыщенных связей. Установлена возможность образования высокодисперсных композиционных покрытий на основе кремнийорганических соединений, молекулярная структура которых имеет заметные отличия от структуры исходных компонент.

Ключевые слова: кремнийорганическое соединение, электронно-лучевое диспергирование, морфология, молекулярная структура, композиционное покрытие.

It is shown that the kinetic characteristics of electron-beam dispersion of organosilicone compounds and molecular structure of the layers, deposited from the gas phase, which was formed under dispersion, are conditioned by the processes of chemical interaction, occurring in the area of electron stream towards the target. Under dispersion in plasma activation of gas phase environment the layers with lower density of hydrocarbon fragments and higher density of unsaturated bonds are formed. The possibility of the formation of highly dispersed composite coatings based on organosilicone compounds is found. The molecular structure of the organosilicone compounds has notable differences from the structure of the original components.

Keywords: organosilicone compound, electron-beam dispersion, morphology, molecular structure, composition coating.

Введение

Кремнийорганические покрытия, обладающие комплексом высоких физико-механических свойств, представляют огромный практический интерес, и разработка методов, оптимизация технологических приемов их формирования, создание на их основе композиционных систем является весьма актуальной задачей [1]. Известно, что их формирование осуществляется, как правило, из растворов при условиях и режимах, обеспечивающих сушку слоев и проведение реакций полимеризации [2]. Из-за значительного различия в теплофизических режимах и условий переработки исходных компонент не представляется возможным формирование растворными методами кремнийорганических слоев, наполненных, например, органическими полимерами. Высокая температура при проведении полимеризации ограничивает также перечень материалов, использующихся в качестве подложек. Отметим, что покрытия, получаемые растворным методом, имеют низкую равномерность при их

формировании на неоднородной поверхности; из-за различия в поверхностном натяжении имеет место образование наплывов или же утонение слоя раствора. Такие покрытия, как правило, содержат дефекты, обусловленные выделением в процессе полимеризации низкомолекулярных соединений (воды).

Указанные выше ограничения определяют необходимость разработки новых методов синтеза кремнийорганических покрытий, в частности из газовой фазы [3]. В числе таких методов наибольший интерес представляет метод формирования покрытий из летучих продуктов электронно-лучевого диспергирования, характеризующийся высокой технологичностью и возможностью регулирования в широких пределах состава, структуры и свойств осажженных слоев [4].

Главной целью настоящей работы является определение основных кинетических закономерностей диспергирования кремнийорганических соединений и их смесей с полимерами, изучение

молекулярной структуры и морфологии однокомпонентных кремнийорганических покрытий и композиционных полимер- и металлосодержащих слоев на их основе.

1 Методика исследования

Покрытия формировали из активной газовой фазы, генерируемой электронно-лучевым диспергированием порошка полимера или механической смеси порошков полимеров в вакууме [5]. Процесс осаждения покрытий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере $\approx 5 \cdot 10^{-3}$ Па с помощью устройства, представленного на рисунке 1.

В качестве источника электронов использовался электронно-лучевой прожектор с катодом прямого накала, позволяющий формировать пучки с плотностью тока $I = 50 \div 500$ А/м², энергией частиц $E = 0,1 \div 2,5$ кэВ, площадью пятна $S = (1 \div 5) \cdot 10^{-4}$ м². Прожектор устанавливался в электронно-лучевой испаритель с возможностью поворота луча на 180°. Для поворота луча применялось постоянное магнитное поле, создаваемое электромагнитом. Поток электронов направлялся на тигель с диспергируемым материалом.

Диспергированию подвергались однокомпонентные порошки полиметилфенилсилоксана (К-42) и полиметилсилоксана (КО-8120), полиуретана марки Десмопан 385 (ПУ), политетрафторэтилена (ПТФЭ, ГОСТ 10007-80) и смеси данных порошков. При осаждении молибденсодержащих композиционных слоев в состав материала тигля вводилась соль молибдена.

В процессе электронно-лучевого диспергирования полимеров давление в факеле продуктов электронно-лучевого диспергирования может достигать значений до 100 Па [4], что позволяет создать в летучих продуктах тлеющий разряд, подав на сетчатый электрод переменный потенциал относительно земли. Плотность тока разряда при реализации данной схемы нанесения составляла 5 А/м². Тлеющий разряд горел на всем

промежутке «тигель – заземленный алюминиевый подложкодержатель». Схема плазменной обработки продуктов диспергирования в процессе формирования покрытий представлена на рисунке 1, б. Осаждение покрытий осуществлялось в условиях контроля давления летучих продуктов диспергирования в камере с помощью ионизационного датчика, скорости роста покрытия (кварцевого измерителя толщины покрытия и скорости осаждения) и температуры в зоне диспергирования.

В ряде случаев сформированные покрытия подвергались обработке пучком ионов аргона при помощи плазменного источника «Радикал». Энергия ионов составляла 3 кэВ, плотность потока $J = 1,2$ А/м², время обработки $t = 5$ минут.

Температура поверхности мишени в зоне действия потока электронов измерялась непосредственно в процессе диспергирования с помощью радиационного пирометра IPE 140 (ИРАС). Излучение выводилось из вакуумной камеры через окно, выполненное из кристалла KRS-5.

Толщина формируемых слоев контролировалась непосредственно в процессе осаждения с помощью кварцевого измерителя толщины и не превышала 0,5 мкм.

Исследование структуры покрытий, формируемых из активной газовой фазы, производили ИК-Фурье спектрофотометром Vertex-70 (Bruker) с использованием стандартной МНПВО приставки. В качестве отражающей призмы применяли кристалл KRS-5 (угол при основании – 45°).

Материалами подложек для проведения ИК-спектроскопических исследований служили пленки металлизированного лавсана. Покрытия осаждали на металлизированную сторону.

Морфология покрытий изучалась методами атомно-силовой микроскопии (АСМ) с помощью измерительного комплекса «НАНОТОП-203».

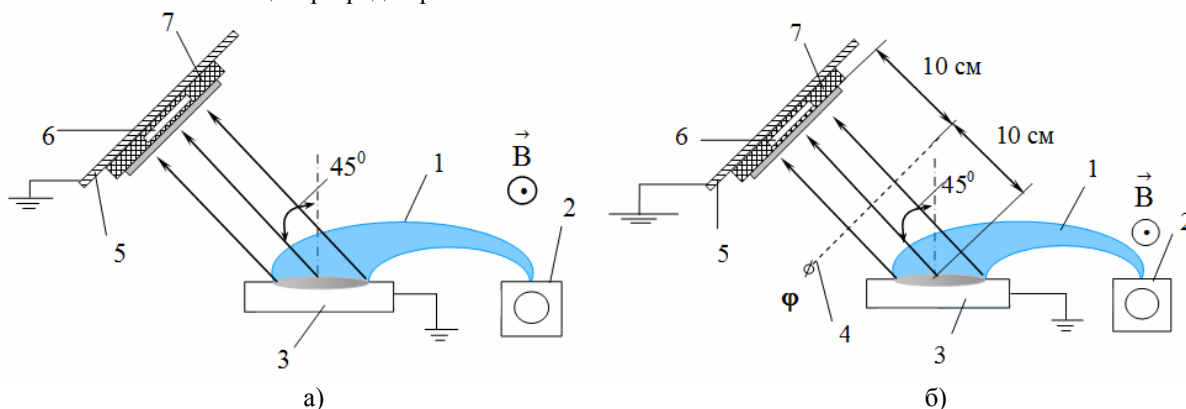


Рисунок 1 – Схемы устройства для нанесения покрытий без плазменной активации газовой фазы (а) и при ее активации (б): 1 – электронный луч; 2 – электронно-лучевой испаритель с поворотом на 180°; 3 – тигель; 4 – сетчатый электрод; 5 – держатель; 6 – кварцевый измеритель толщины; 7 – подложка

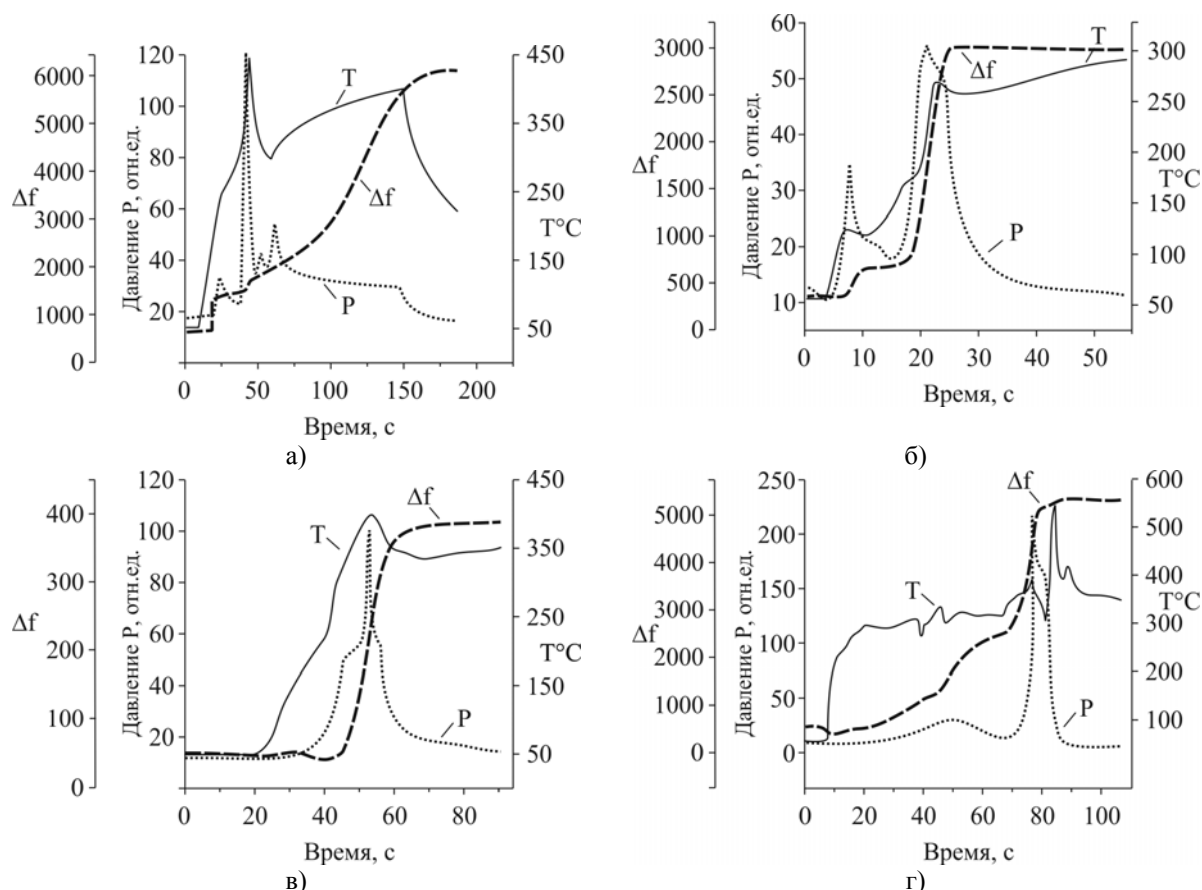


Рисунок 2 – Изменение давления в камере (P), массы покрытия (Δf) и температуры мишени (T) в процессе электронно-лучевого диспергирования порошка К-42 (а), КО-812 (б), смеси порошков КО-812 и ПУ (в), ПУ (г)

2 Результаты исследований и их обсуждение

Кинетические зависимости скорости роста покрытия, давления в камере и температуры в зоне электронно-лучевого диспергирования кремнийорганических соединений, полиуретана и их смесей представлены на рисунке 2.

Анализ представленных данных позволяет заключить, что, как и в случае электронно-лучевого диспергирования ПТФЭ [6], процесс взаимодействия потока электронов с кремнийорганическими соединениями имеет 3 основные стадии: начальный период, на котором в материале мишени накапливают термо- и радиационно-стимулированные изменения, затем стадия, отличающаяся резким повышением давления летучих продуктов диспергирования и осаждением покрытия, и третья стадия – снижение и стабилизация давления в камере, температуры в тигле и скорости роста покрытия. Параметры, характеризующие эти стадии, зависят от природы материала мишени. Заметное изменение массы покрытия на основе К-42 наблюдалось при достижении температуры в тигле выше 250°C , покрытия на основе КО-812 – выше 120°C . В случае электронно-лучевого диспергирования порошка ПУ рост полимерного слоя наблюдается

при температуре в тигле выше 250°C , а композиционного слоя – при нагреве тигля до значения выше 200°C .

В зависимости от природы материала в тигле несколько изменяется характер кинетических зависимостей; при диспергировании составной мишени ПУ – КО-812 отсутствуют резкие изменения давления летучих продуктов на начальных стадиях процесса и индукционный период (первая стадия) является более продолжительным. Установленные кинетические эффекты можно объяснить активным влиянием на процессы диспергирования смеси порошков кремнийорганической смолы и полиуретана протекающих в тигле химических реакций под действие электронов.

Определены особенности молекулярной структуры осажденных покрытий. Из рисунка 3 видно, что в ИК спектре покрытия присутствуют все полосы поглощения, характерные для ИК спектра исходного кремнийорганического соединения. Появление новых полос, отсутствующих в ИК спектре смолы, обнаружить не удалось. Отличия в спектрах порошка и покрытия проявляются в различном соотношении оптических плотностей отдельных полос поглощения.

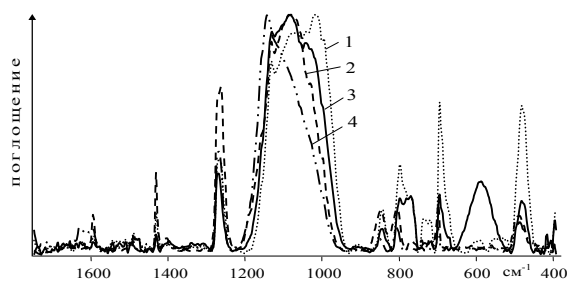


Рисунок 3 – ИК спектры: 1 – порошок кремнийорганической смолы К-42; 2 – покрытие К-42; 3 – порошок смолы К-42, оставшийся в тигле после диспергирования; 4 – покрытие К-42, сформированное в условиях плазменной активационной обработки продуктов диспергирования

Так, для порошка значения соотношения оптических плотностей полос 1131 см^{-1} и 1259 см^{-1} и полос 1259 см^{-1} , 1080 см^{-1} соответственно равны – 0,47 и 0,42. Для покрытия – 0,78 и 0,70, а порошка тигля – 0,35 и 0,33. Поглощение вблизи 1259 см^{-1} соотносят с деформационными колебаниями $\text{Si}-\text{CH}_3$, при 1080 см^{-1} – с валентными колебаниями $\text{Si}-\text{O}$, при 1131 см^{-1} – с колебаниями $\text{Si}-\text{C}_6\text{H}_5$ [7], [8]. Плазменная активационная обработка продуктов диспергирования приводит к существенному изменению значений оптической плотности практически всех полос поглощения. Наиболее заметно это в области $1200\div 900\text{ см}^{-1}$ (рисунок 3). В указанном частотном интервале проявляются валентные колебания $\text{Si}-\text{O}$ групп (вблизи 1080 см^{-1}) и колебания $\text{Si}-\text{C}_6\text{H}_5$ групп (вблизи 1130 см^{-1}). Плазменный разряд приводит к перераспределению в молекулярной структуре покрытия соотношения $\text{Si}-\text{C}_6\text{H}_5$ и $\text{Si}-\text{O}$ групп. В целом, плазменная обработка оказывает значительное влияние на структурную организацию молекул в покрытии: инициирует деструкцию углеводородных фрагментов кремнийорганической смолы (соотношение значений оптических плотностей полос 1131 см^{-1} и 1269 см^{-1} для покрытий, сформированных в условиях плазменной активации, – 0,35), а также образование ненасыщенных связей (уширение полосы поглощения в области $1650\div 1600\text{ см}^{-1}$ (плоскостные колебания скелета $\text{C}=\text{C}$)). Следует отметить появление в ИК спектре покрытия, сформированного в условиях активационной обработки, широкой слабоинтенсивной полосы поглощения в области $1750\div 1700\text{ см}^{-1}$ (валентные колебания $\text{C}=\text{O}$ группы). Появление указанной полосы может быть следствием взаимодействия свободных радикалов, образовавшихся под действием разряда, с кислородом воздуха.

В ИК спектре порошка кремнийорганической смолы, оставшегося в тигле после диспергирования, появляется интенсивная полоса поглощения при 600 см^{-1} , отсутствующая в спектрах покрытия и исходного кремнийорганического

порошка. Ее наличие может свидетельствовать о протекании в зоне диспергирования электронно-стимулированных химических процессов.

Анализ ИК спектров формируемых покрытий и исходных полимеров дает основание считать, что наблюдаемые изменения в молекулярной структуре обусловлены механизмом электронно-лучевого диспергирования кремнийорганической смолы. Так как процесс воздействия электронов на полимер является достаточно неравновесным, то в поверхностных слоях тигля с достаточно большой вероятностью протекают разрывы всех связей, в том числе $\text{Si}-\text{CH}_3$, $\text{Si}-\text{O}$, $\text{Si}-\text{C}_6\text{H}_5$. При этом образовавшиеся в результате отщепления боковых групп радикалы могут вступать в реакции сшивки с образованием связей $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$, которые характеризуются более высокой энергией (энергия связей $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$, $\text{Si}-\text{C}_6\text{H}_5$, $\text{Si}-\text{CH}_3$ равна 445, 310 и 314 кДж/моль соответственно [9]). Отметим, что поток летучих частиц диспергирования формируют молекулярные фрагменты, которые способны десорбироваться при температуре тигля. Поэтому в газовую фазу и переходят частицы, имеющие меньшую энергию адсорбции, т. е. с большим количеством сохранившихся боковых групп. Данные представления объясняют установленные кинетические особенности диспергирования кремнийорганических смол: в процессе электронной обработки в тигле протекают процессы сшивки, которые и определяют снижение интенсивности диспергирования на третьей стадии процесса.

В процессе отжига покрытия в вакууме протекают интенсивные процессы отщепления боковых групп, образование $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$ связей. Регистрируемые при этом изменения в ИК спектре покрытия аналогичны изменениям, наблюдаемым в ИК спектре исходного кремнийорганического порошка, подвергнутого отжигу (рисунок 4).

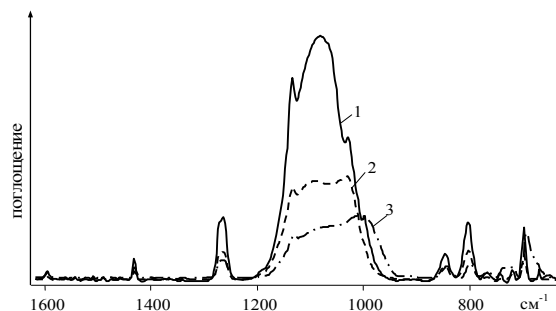


Рисунок 4 – ИК спектры: 1 – исходное покрытие К-42; 2 – покрытие после отжига ($T = 400^\circ\text{C}$, $t = 30\text{ мин.}$); 3 – порошок после отжига ($T = 400^\circ\text{C}$, $t = 30\text{ мин.}$)

В большой степени аналогичные изменения регистрируются и при анализе молекулярной структуры покрытий, полученных диспергированием кремнийорганической смолы КО-812. В ИК спектре покрытия (рисунок 5) наибольшее

значение оптической плотности характерно для полосы при 1270 см^{-1} , которую можно соотнести с деформационными колебаниями $\text{Si}-\text{CH}_3$ [7], [8].

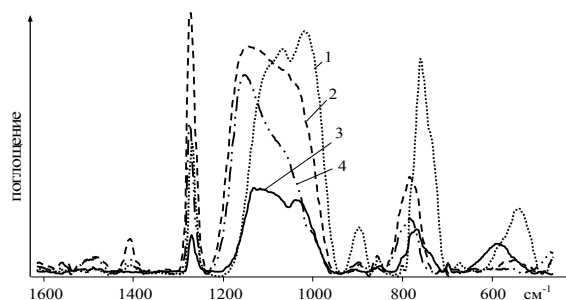


Рисунок 5 – ИК спектры: 1 – порошок кремнийорганической смолы КО-812; 2 – покрытие из КО-812; 3 – порошок смолы КО-812, оставшийся в тигле после диспергирования; 4 – покрытие КО-812, сформированное в условиях плазменной активационной обработки продуктов диспергирования

Для исходного кремнийорганического порошка наибольшее значение оптической плотности характерно для полосы при 1020 см^{-1} , в то время как значение оптической плотности полосы при 1270 см^{-1} практически в 2 раза меньше. В ИК спектре покрытия наблюдается уширение полос поглощения в области $1200\div 900\text{ см}^{-1}$, а также смещение максимума поглощения в высокочастотную область.

Плазменная обработка летучих продуктов диспергирования приводит к снижению значения оптической плотности полосы при 1270 см^{-1} ИК спектра (отщеплению метильных групп), а также к уменьшению ширины полос поглощения в частотном интервале $1200\div 900\text{ см}^{-1}$. Влияние плазменного разряда на молекулярную структуру формируемых кремнийорганических покрытий К-42 и КО-812 имеет много общих черт, что указывает на единый для этих соединений механизм электронно-лучевого диспергирования и плазменной активации летучих продуктов.

Установлено, что электронно-лучевое диспергирование смеси порошков кремнийорганических смол и полиуретана в вакууме позволяет формировать композиционные покрытия. ИК спектр таких покрытий формируют полосы поглощения, характерные как для исходного покрытия ПУ, так и для покрытия К-42 (рисунок 6).

При этом в ИК спектре покрытия наблюдается заметное перераспределение оптической плотности полос и смещение их положения. Общей характерной особенностью является относительное увеличение интенсивности практически всех полос поглощения в коротковолновой части спектра (в области, большей 1300 см^{-1}), что, в целом, может быть следствием протекания в зоне диспергирования процессов химического

взаимодействия, инициированных электронным воздействием.

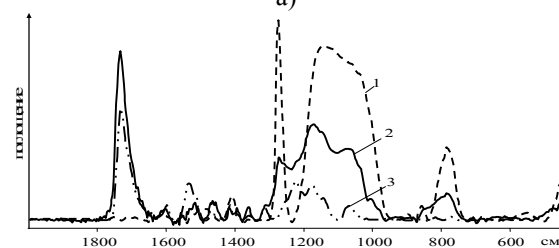
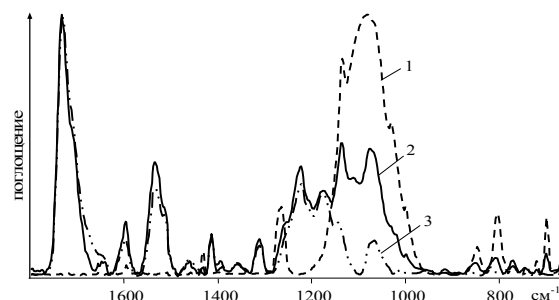


Рисунок 6 – ИК спектры: а) 1 – исходное покрытие К-42, 2 – композиционное покрытие ПУ-К42 (1:1), 3 – покрытие ПУ; б) 1 – исходное покрытие КО812; 2 – композиционное покрытие ПУ-КО-812 (1:1); 3 – покрытие ПУ

Установленные закономерности электронно-лучевого диспергирования и формирования молекулярной структуры, вывод о значительном влиянии химических процессов, протекающих в зоне действия потока электронов, на состояние покрытия открывают определенные возможности синтеза систем, в том числе и композиционных, путем воздействия на кинетику и характер процессов взаимодействия в зоне диспергирования.

Представленные на рисунке 7 ИК спектры иллюстрируют возможность формирования электронно-лучевым диспергированием композиционных покрытий на основе ПТФЭ и К-42 и металлосодержащих тройных систем.

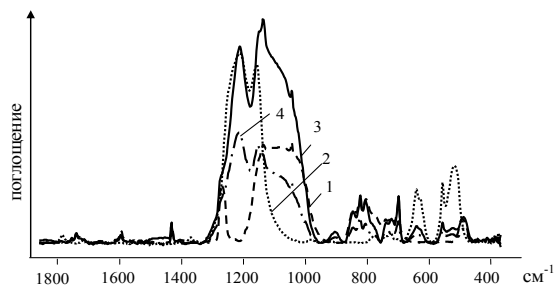


Рисунок 7 – ИК-спектры: 1 – покрытие К-42; 2 – покрытие ПТФЭ; 3 – композиционное покрытие ПТФЭ-К-42 (1:1); 4 – композиционное покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием смеси порошков ПТФЭ-К-42 – $\text{Mo}(\text{CO})_6$ в массовом соотношении (1:1:1)

Анализ показывает, что представленные спектры композиционных систем нет оснований рассматривать как линейную суперпозицию спектров отдельных компонент. В частности, в ИК спектрах композиционных покрытий регистрируется полоса поглощения при 904 см^{-1} . Ее появление может быть связано с образованием двойных ненасыщенных связей или же с отщеплением C_6H_5 – групп [7]. Отличия ИК спектра трехкомпонентного покрытия от ИК спектра покрытия ПТФЭ-К-42 (1:1) проявляются в

частотной области $1300\ldots 1000\text{ см}^{-1}$. Фиксируемые изменения могут быть следствием более интенсивной деструкцией при диспергировании кремнийорганической смолы при добавлении в тигель соли молибдена.

Отметим, что формируемые композиционные слои имеют высокодисперсную структуру. На рисунке 8 представлены результаты АСМ-исследования кремнийорганических покрытий, подвергнутых травлению ионным пучком Ar^+ .

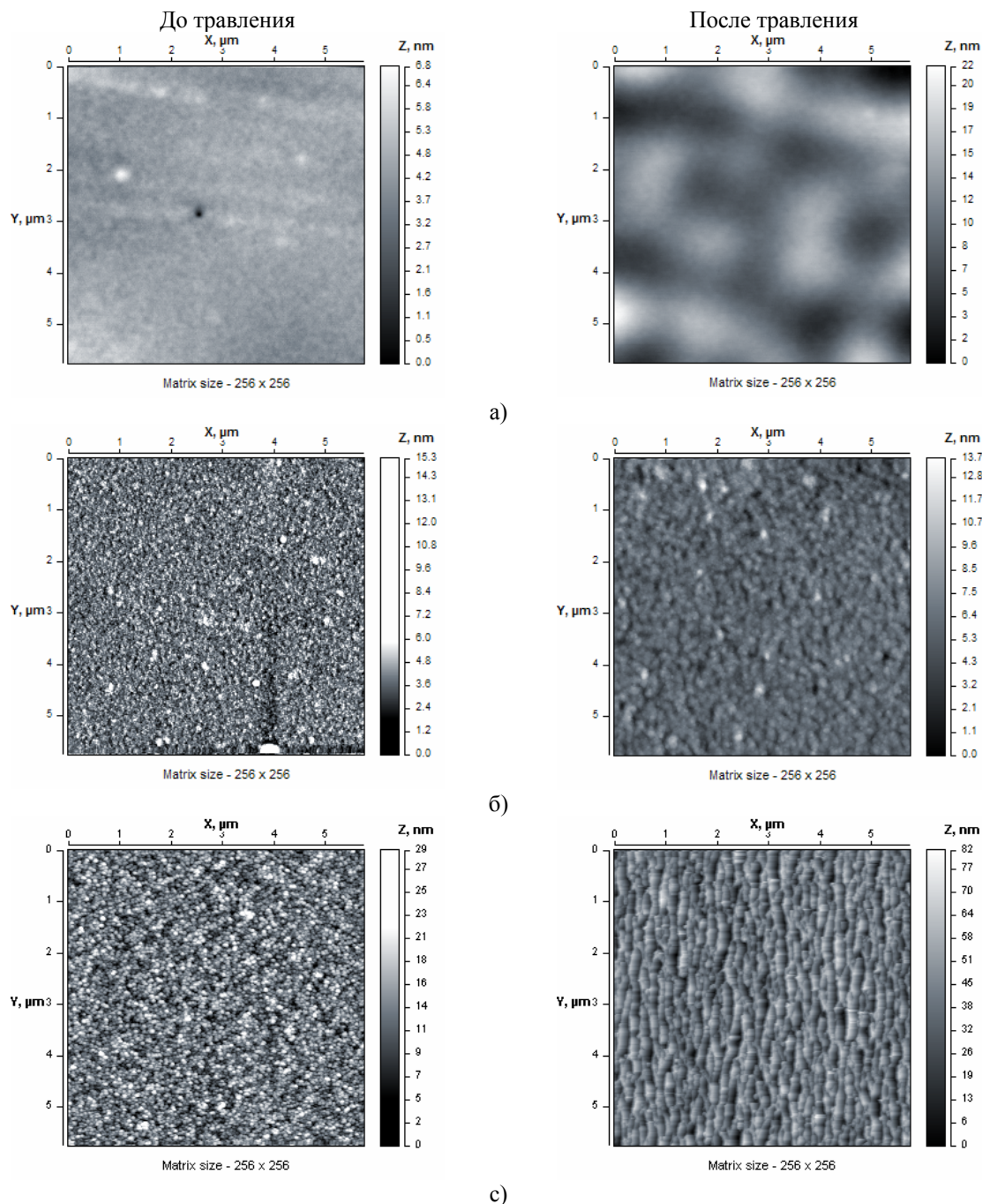


Рисунок 8 – АСМ-изображения покрытий, сформированных в результате электронно-лучевого диспергирования порошков К-42 (а), механических смесей порошков К-42+ПТФЭ в массовом соотношении (1:1) (б), К-42 + ПТФЭ + $\text{Mo}(\text{CO})_6$ в массовом соотношении (1:1:1) (с)

Введение в состав покрытия молибдена приводит к формированию более однородной структуры, некоторому увеличению размера структурных образований, которые хорошо проявляются при ионном травлении.

Заключение

Определены особенности электронно-лучевого диспергирования кремнийорганических соединений и молекулярная структура однокомпонентных и композиционных покрытий, осажденных из летучих продуктов диспергирования в условиях их плазменной активации и при ее отсутствии. При диспергировании в условиях плазменной активации газовой фазы осаждаются слои, имеющие меньшую плотность углеводородных фрагментов и большую плотность ненасыщенных связей. Показано, что установленные особенности кинетики диспергирования и морфологии могут быть объяснены значительным влиянием на кинетику диспергирования, состав покрытия и его молекулярную структуру процессов химического взаимодействия, протекающих в зоне действия потока электронов на мишень.

Установлена возможность формирования методом электронно-лучевого диспергирования высокодисперсных композиционных покрытий на основе кремнийорганических соединений, осаждение которых другими методами не возможно из-за различия в теплофизических режимах и условий переработки исходных компонент. Молибденсодержащие кремнийорганические слои имеют высокую структурную однородность, и их молекулярное строение отличается от строения молекул исходных компонент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камарицкий, Б.А. Физико-химические основы синтеза олиго и полиорганосилсесквиоксанов : дис. ... д-ра хим. наук : 02.00.04 / Б.А. Камарицкий. – М., ИХФ АН БССР, 1989.

2. Тоньшин, А.М. Технология, строение и свойства кремнийорганических диэлектриков – полиорганосилсесквиоксанов / А.М. Тоньшин, Б.А. Камарицкий, В.Н. Спектор // Успехи химии. – 1983. – Т. 52. – С. 1365–1409.

3. Ткачук, Б.В. Получение тонких полимерных пленок из газовой фазы / Б.В. Ткачук, В.М. Колотыркин. – М. : Химия, 1977. – 216 с.

4. Казаченко В.П. Кинетика электронно-лучевого диспергирования полимеров в вакууме, структура, свойства покрытий, полученных осаждением летучих продуктов : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 02.00.04 / В.П. Казаченко ; НИФХИ. – М., 1992. – 26 с.

5. Егоров, А.И. Физико-химические закономерности процессов массопереноса при плазменно-химическом окрашивании и аппретировании полиэтилентерефталата : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 01.04.19 / А.И. Егоров ; ИММС НАНБ. – Гомель, 1999. – 22 с.

6. Казаченко, В.П. Закономерности диспергирования политетрафторэтилена потоком электронов средних энергий / В.П. Казаченко, А.В. Рогачев // Химия высоких энергий. – 1999. – Т. 33. – № 4. – С. 270–273.

7. Беллами, Л. Инфракрасные спектры сложных молекул / Л. Беллами. – М. : Мир, 1963. – 592 с.

8. Казицына, Л.А. Применение УФ-, ИК- и ЯМР- спектроскопии в органической химии : учеб. пособие для вузов / Л.А. Казицына, Н.Б. Куплетская. – М. : «Высш. школа», 1971. – 264 с.

9. Химическая энциклопедия : в 5 т. / редкол. : И.Л. Кнунянц (гл. ред.) [и др.]. – М. : Сов. энцикл. – Т. 2 : Даффа-Меди. – 1990. – 671 с.

Поступила в редакцию 06.09.11.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ЦЕПЯМИ ДЛИНЫ ≤ 3

Д.П. Андреева, А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FINITE GROUPS WITH GIVEN MAXIMAL CHAINS OF LENGTH ≤ 3

D.P. Andreeva, A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе получено описание конечной группы, у которой в каждой ее максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа, а также описание конечной группы, у которой все ее 3-максимальные подгруппы субнормальны (S -квазинормальны).

Ключевые слова: силовская подгруппа, группа Шмидта, n -максимальная подгруппа, нильпотентная группа, максимальная цепь длины n , разрешимая группа, S -квазинормальная подгруппа, субнормальная подгруппа.

A description of a finite group with the property that every its maximal chain of length 3 contains a proper S -quasinormal subgroup, and a description of a finite group with the property that every its 3-maximal subgroup is subnormal (S -quasinormal) are obtained.

Keywords: Sylow subgroup, Schmidt group, n -maximal subgroup, nilpotent group, maximal chain of length n , soluble group, S -quasinormal subgroup, subnormal subgroup.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными. Символ G_p обозначает некоторую силовскую p -подгруппу группы G для некоторого простого числа p . Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой (или второй максимальной подгруппой) группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т. д. Максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида

$$E_n < E_{n-1} < \dots < E_1 < E_0 = G,$$

где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, n$.

Связь между n -максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении были получены Редеем [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хуппертом, установившим в работе [2] сверхразрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является

нормальной в G , коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более, чем на два (не обязательно различных) простых числа. Эти результаты получили свое дальнейшее развитие и в работе Л.Я. Полякова [3], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В работе [4] Агравалем была доказана сверхразрешимость группы при условии, что все ее 2-максимальные подгруппы S -квазинормальны (подгруппа H группы G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). В более поздней работе [5] М. Асааду удалось усилить отмеченные выше результаты Хупперта, рассматривая лишь строго n -максимальные подгруппы для $n = 2, 3$. Заметим попутно, что в работе П. Флавелла [6] была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащих строго 2-максимальную подгруппу, и описаны группы, в которых эта граница достигается. Естественным развитием упомянутых выше результатов стала работа А. Манна [7], в которой автор анализировал строение групп, в которых каждая n -максимальная подгруппа субнормальна.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. В недавней публикации [8] Ли Широнг получил классификацию

ненильпотентных групп, каждая 2-максимальная подгруппа которой является TI -подгруппой. В работе [9] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [10]–[12] Го Веньбинем, Ли Баоджуном, А.Н. Скибой и К.П. Шамом были получены новые характеристики сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В работе [13] получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а в работе [14] получено описание групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами.

В связи с отмеченными выше результатами, Л.А. Шеметковым в 2005 году на Гомельском городском алгебраическом семинаре был поставлен следующий вопрос: что можно сказать о строении конечной группы G , если в каждой ее максимальной цепи длины n имеется собственная субнормальная в G подгруппа?

Понятно, что в нильпотентной группе все ее подгруппы субнормальны. Нетрудно также показать, что ненильпотентные группы, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа, являются группами Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами (см. лемму 1.1). Решение задачи в случае $n = 3$ дает приведенная ниже теорема.

В дальнейшем p , q и r – простые делители порядка группы G ($p \neq q$), P , Q и R обозначают некоторые силовскую p -подгруппу, силовскую q -подгруппу и силовскую r -подгруппу группы G , соответственно.

Теорема А. В том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа, когда G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является группой одного из следующих типов:

I. $G = P \rtimes Q$, где либо G – группа Шмидта с $|\Phi(P)| \leq p$ и $|Q : Q_G| = q$, либо выполняется одно из следующих условий:

(1) P является минимальной нормальной подгруппой в G и $|Q : Q_G| = q^2$;

(2) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|Q : Q_G| = q$ и любая максимальная подгруппа из Q , отличная от Q_G , является циклической;

(3) $G = G^{\text{nt}} \rtimes M$, где G^{nt} – минимальная нормальная подгруппа группы G , $M = M_p \rtimes Q$ – представитель единственного класса нильпотентных ненормальных максимальных подгрупп

группы G , $|M_p| = p$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа и $|Q : Q_G| = q$.

II. $G = P \rtimes (QR)$, где $P = G^{\text{nt}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа, $|Q : Q_G| = q$ и либо R нормальна в G либо $|Q| = q$;

III. $G = P \rtimes Q = PA$, $|\Phi(P)| = p$, $A = \Phi(P) \rtimes Q$ – представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G , A – группа Шмидта и $|Q : Q_G| = q$;

IV. $\Phi(P) = 1$, G является подпрямым произведением ненормальных максимальных подгрупп A и B , где $A = A_p \rtimes Q$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, A_p – минимальная нормальная подгруппа в G и $|Q : Q_G| = q$; $B = B_p \rtimes Q$ и либо B – нильпотентная группа и $|B_p| = p$, $B_p \leq Z(G)$, либо $B \cong A$;

V. $G = P \rtimes (QR)$ и G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются ненормальная холловская r' -подгруппа A , ненормальная холловская p' -подгруппа L и нормальная в G подгруппа M с $|G : M| = q$. Кроме того, выполняются следующие условия:

(i) A – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и $|Q : Q_G| = q$;

(ii) L либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, либо нильпотентной группой;

(iii) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$ и либо R нормальна в G , либо $|Q| = q$.

Доказательство данной теоремы является очень сложным. В нашей работе мы рассмотрим некоторые приложения теоремы А, дающей описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа.

1 Предварительные результаты

Лемма 1.1 [15, теорема 2]. Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа;

(2) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная S -квазинормальная в G подгруппа;

(3) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа;

(4) G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Лемма 1.2 [7, лемма 3]. Пусть $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . В том и только в том случае каждая n -максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда каждая n -максимальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$.

Лемма 1.3 [16, гл. VII, теорема 6.18]. Если G – группа Шмидта, то

(1) $G = P \rtimes \langle a \rangle$, где P и $\langle a \rangle$ – силовские p -подгруппа и q -подгруппа группы G соответственно;

(2) G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P \langle a^q \rangle$ и $P' \langle a \rangle$;

(3) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G , причем, если $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, то p^α сравнимо с единицей по модулю q ;

(4) если P абелева, то она элементарна.

Лемма 1.4 [17, теорема 1]. Пусть $A \leq G$. Если A S -квазинормальна в G , то A субнормальна в G .

Лемма 1.5 [7, теорема 6]. Пусть M – максимальная подгруппа группы G . Если L субнормальна в G и $L \subseteq M$, то $L \subseteq M_G$.

Лемма 1.6 [18, предложение B]. Пусть H – нильпотентная подгруппа группы G . Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) H S -квазинормальна в G ;

(2) каждая силовская подгруппа группы H S -квазинормальна в G .

Лемма 1.7 [18, лемма A]. Пусть $A \leq G$. Если A S -квазинормальна в G и A – p -группа, то $O^p(G) \subseteq N_G(A)$.

2 Основные результаты

Одним из приложений теоремы А является следующая теорема, описывающая группы у которых каждая 3-максимальная подгруппа субнормальна.

Теорема 2.1. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда либо G нильпотентна, либо G – группа одного из следующих типов:

I. $G = P \rtimes Q$ – группа Шмидта, где либо $P' = 1$, либо $|P'| = p$;

II. G – бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:

(1) $G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , Q – циклическая группа и $P \rtimes \Phi(Q)$ – группа Шмидта;

(2) $G = (P \rtimes Q_1) \times C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $|C_q| = q$ и PQ_1 – группа Шмидта;

(3) $G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = q$, $P \langle a \rangle$ и $P \langle b \rangle$ – группы Шмидта;

(4) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, $p > 2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;

(5) $G = (P \rtimes Q_1)C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ ($\beta \in \mathbb{N}$), PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1 , изоморфной C_q ;

(6) $G = P \rtimes Q$, где $\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G , обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;

(7) G – подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;

(8) $G = (P_1 \times C_p) \rtimes Q$, где P_1 – минимальная нормальная p -подгруппа группы G , $|C_p| = p$, P_1Q – группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p, Q] = 1$;

III. G – группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя p, q, r и которая является группой одного из следующих видов:

(i) $G = (P \times R) \rtimes Q$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы группы G , Q – циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = P \rtimes (R \times Q)$, где $|R| = r$, $|Q| = q$ и $P = F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Необходимость. Согласно условию, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является субнормальной в G . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа. Тогда G является группой одного из типов, описанных в теореме А. Кроме того, по лемме 1.1, каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Будем предполагать, что G – ненильпотентная группа и $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma > 3$ для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предположим, что G является группой типа I в теореме А.

Если $G = P \rtimes Q$ является группой Шмидта, то G – группа типа I.

Предположим, что G не является группой Шмидта, P – минимальная нормальная подгруппа группы G и выполняется условие (1). Пусть Q – циклическая группа и Q_1 – максимальная подгруппа в Q . Тогда PQ_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому PQ_1 либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Если PQ_1 является нильпотентной группой, то Q_1 нормальна в PQ_1 . С другой стороны, Q_1 нормальна в Q . Значит, Q_1 является нормальной подгруппой группы G и, следовательно, $Q_1 = Q_G$, т. е. $|Q:Q_G| = q$. Полученное противоречие показывает, что PQ_1 является группой Шмидта, т. е. G – группа типа II (1).

Предположим теперь, что Q – нециклическая группа. Пусть Q_1 и Q_2 – различные максимальные подгруппы из Q . Ввиду условия, каждая 3-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G . А так как Q_G является 2-максимальной подгруппой в Q , то Q_1 и Q_2 несубнормальны в G и, кроме того, $Q_G \leq Q_1$ и $Q_G \leq Q_2$. Следовательно, $Q_G = Q_1 \cap Q_2$. Так как Q_1 и Q_2 несубнормальны в G , PQ_1 и PQ_2 являются группами Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. По основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_1 \times Q_2$, где либо $|Q_1| = q$, либо $|Q_2| = q$. Значит, $Q_G = 1$ и поэтому $|Q_1| = |Q_2| = q$. Следовательно, G является группой типа II (3).

Пусть теперь выполняется условие (2). Очевидно, что в этом случае, PQ_G является нильпотентной группой. Пусть $L \neq Q_G$ – максимальная подгруппа из Q . Тогда L несубнормальна и циклическа. Значит, PL является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Если Q – абелева группа, то по основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_G \times L$ и $|L| = q$. Значит, G – группа типа II (2).

Пусть теперь Q – неабелева группа и $|Q| = q^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$). Если $q = 2$ и $\beta = 3$, то, ввиду [19, V, теорема 4.4], Q изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$, $a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a \rangle$, $\langle a^2 \rangle \langle b \rangle$ и $\langle a^2 \rangle \langle ab \rangle$ и

поэтому подгруппы вида $\langle a^2 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle ab \rangle$ являются 2-максимальными подгруппами в Q . Так как P – минимальная нормальная подгруппа в G , то Q является максимальной подгруппой в G . Тогда подгруппы $\langle a^2 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle ab \rangle$ являются 3-максимальными в группе G . В силу условия и леммы 1.2, каждая из этих подгрупп содержится в группе $F(G)$, что невозможно. Следовательно, Q изоморфна группе кватернионов порядка 8. Тогда в силу $q = 2$ и леммы 1.3 (3) (4) мы имеем $|P| = p$, и поэтому G является группой типа II (4).

Если теперь $q = 2$ и $\beta > 3$, либо q – нечетное простое, то, по [19, V, теорема 4.4], Q изоморфна одной из групп: $M_\beta(q)$, D_β , Q_β или S_β (см. [19, С. 190–191]). Если Q изоморфна одной из групп D_β , Q_β или S_β , то в силу [19, V, теорема 4.3] факторгруппа $Q/Z(Q)$ изоморфна группе $D_{\beta-1}$. В этом случае факторгруппа $Q/Z(Q)$ имеет точно две максимальные нециклические подгруппы. Следовательно, группа Q имеет по крайней мере две нециклические 2-максимальные подгруппы и поэтому в группе Q существует по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы. Это означает, что в группе G существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2 , которые содержат P и не являются группами Шмидта. Тогда M_1 и M_2 являются нильпотентными нормальными подгруппами в G и поэтому группа $G = M_1 M_2$ нильпотентна, противоречие. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп: D_β , Q_β или S_β .

Таким образом, группа Q изоморфна группе $M_\beta(q) = \langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1, a^b = a^{1+q^{\beta-2}} \rangle$ (см. [19, С. 190]). В этом случае группа G имеет вид $G = (P \rtimes Q_1) \rtimes C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G , $Q_1 = \langle a \rangle$, $|a| = q^{\beta-1}$, $C_q = \langle b \rangle$, $|b| = q$, PQ_1 – группа Шмидта и $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$.

Пусть C – множество всех подгрупп группы G , изоморфных подгруппе C_q . Предположим, что для некоторой подгруппы C_1 из C выполняется $[P, C_1] \neq 1$. Это влечет, что подгруппа PC_1 является группой Шмидта. Тогда PC_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому $|Q| = q^2$, что противоречит неабелевости Q . Таким образом, G является группой типа II (5).

Заметим, что если выполняется условие (3), то G является группой типа II (8).

Предположим теперь, что G является группой типа II в теореме А. Если R нормальна в G , то G является группой типа III (i). Если R ненормальна в G , то G – группа типа III (ii).

Очевидно, что если G является группой типа III в теореме А, то G – группа типа II (6).

Пусть теперь, G является группой типа IV в теореме А. Очевидно, если B – группа Шмидта, то G является группой типа II (7). Если же B – нильпотентная группа, то G является группой типа II (8).

Допустим, что G – группа типа V в теореме А. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_1Q_G , где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P . По условию, P_1Q_G является субнормальной подгруппой в G . Следовательно, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Поэтому $P_1 = 1$. Следовательно, $|P| = p$.

Если R не является нормальной подгруппой в G , то $|Q| = q$. Тогда, $|G| = pqr$, что противоречит нашему исходному предположению о группе G . Если же R нормальна в G , то G является группой типа III (i).

Достаточность. Предположим, что G – группа одного из типов I–III теоремы. Покажем, что каждая 3-максимальная подгруппа из G является субнормальной. Ввиду леммы 1.2 для этого достаточно показать, что каждая 3-максимальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в каждом из случаев I–III теоремы это верно. Теорема доказана.

С помощью теоремы А докажем следующую теорему, дающую описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа.

Теорема 2.2. В том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S -квазинормальная в G подгруппа, когда G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является группой одного из следующих типов:

I. $G = P \rtimes Q$, где либо G – группа Шмидта с $|\Phi(P)| \leq p$ и $|Q:Q_G| = q$, либо выполняется одно из следующих условий:

(1) P является минимальной нормальной подгруппой в G и $|Q:Q_G| = q^2$;

(2) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|Q:Q_G| = q$ и любая максимальная подгруппа L из Q , отличная от Q_G , является циклической и $|L:L_G| = q$;

(3) $G = G^n \rtimes M$, где G^n – минимальная нормальная подгруппа группы G , $M = M_p \rtimes Q$ –

представитель единственного класса нильпотентных ненормальных максимальных подгрупп группы G , $|M_p| = p$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа и $|Q:Q_G| = q$.

II. $G = P \rtimes (QR)$, где $P = G^n$ является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа, $|Q:Q_G| = q$ и либо R нормальна в G либо $|Q| = q$;

III. $G = P \rtimes Q = PA$, $|\Phi(P)| = p$, $A = \Phi(P) \rtimes Q$ – представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G , A – группа Шмидта и $|Q:Q_G| = q$;

IV. $\Phi(P) = 1$, G является подпрямым произведением ненормальных максимальных подгрупп A и B , где $A = A_p \rtimes Q$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, A_p – минимальная нормальная подгруппа в G и $|Q:Q_G| = q$; $B = B_p \rtimes Q$ и либо B – нильпотентная группа и $|B_p| = p$, $B_p \leq Z(G)$, либо $B = A$;

V. $G = P \rtimes (QR)$ и G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются ненормальная холловская r' -подгруппа A , ненормальная холловская p' -подгруппа L и нормальная в G подгруппа M с $|G:M| = q$. Кроме того, выполняются следующие условия:

(i) A – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и $|Q:Q_G| = q$;

(ii) L либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, либо нильпотентной группой;

(iii) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$ и либо R нормальна в G , либо $|Q| = q$.

Доказательство. Необходимость. Согласно лемме 1.4, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа. Значит, G является группой одного из типов, описанных в теореме А.

Заметим также, что если G – группа типа I (2), то любая максимальная не S -квазинормальная в G подгруппа L из Q является циклической. Значит, если L_1 – максимальная подгруппа из L , то L_1 является S -квазинормальной подгруппой в G . А так как L_1 характеристична в L , то L_1 нормальна в Q . Кроме того, L_1 нормальна в PL_1 , так как, по лемме 1.4, L_1 субнормальна в G и, следовательно, субнормальна в PL_1 . Поэтому, по лемме 1.5, $L_1 = L_G$, что влечет $|L:L_G| = q$.

Достаточность. Прежде всего заметим, что в нильпотентной группе каждая подгруппа является S -квазинормальной. Предположим, что G – ненильпотентная группа.

Пусть G является группой типа I. Предположим вначале, что G – группа Шмидта и $\Phi(P)=1$. Тогда, по лемме 1.3 (2), G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и PQ_G . Так как PQ_G является нормальной подгруппой группы G и максимальной подгруппой в Q является Q_G , то в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что G – группа Шмидта и $|\Phi(P)|=p$. Тогда, по лемме 1.3 (2), G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $\Phi(P)Q$ и PQ_G . Очевидно, что PQ_G является нормальной подгруппой группы G . Кроме того, подгруппа Q является максимальной подгруппой в $\Phi(P)Q$, а нормальная в G подгруппа Q_G является максимальной в Q . Значит, и в этом случае, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим теперь, что G не является группой Шмидта и P – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда Q является максимальной подгруппой группы G и Q ненормальна в G , так как G – ненильпотентная группа. Пусть $|Q:Q_G|=q^2$. Тогда PQ_G является 2-максимальной подгруппой группы и PQ_G нормальна в G . Кроме того, Q_G является 3-максимальной подгруппой группы G . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа. Пусть теперь $|Q:Q_G|=q$ и любая максимальная подгруппа L из Q , отличная от Q_G , является циклической. Так как $|L:L_G|=q$, то в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Заметим, если же G является группой типа I (3), то, очевидно, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Пусть теперь G – группа типа II. Очевидно, что любая максимальная подгруппа M группы G нормальна в G , если $P \leq M$. Значит, будем считать, что $P \not\leq M$. Кроме того, так как P является минимальной нормальной подгруппой группы G , то $M \cap P = 1$. Поэтому M – холловская p' -подгруппа группы G и $M = Q^x R^y$ для

некоторых x и $y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $M = QR$. Так как $|R|=r$ и Q – циклическая группа, то M имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и RQ_G . Если R – нормальная подгруппа группы G , то RQ_G также является нормальной подгруппой группы G . Если же R не является нормальной подгруппой в G , то условие теоремы выполняется, так как Q_G является максимальной подгруппой в RQ_G . Кроме того, Q_G также является максимальной подгруппой в Q . Значит, если G является группой типа II, то в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что G является группой типа III. Так как A является представителем единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G , то достаточно показать, что в каждой максимальной цепи длины два группы A имеется собственная субнормальная в G подгруппа. Так как A является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то по лемме 1.3 (2), A имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и $\Phi(P)Q_G$. Заметим, что так как $\Phi(P)$ является нормальной подгруппой в G , то $\Phi(P)Q_G$ – нормальная подгруппа группы G . Кроме того, по условию, Q_G – максимальная подгруппа в Q . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Пусть теперь G – группа типа IV. Как и выше, можно показать, что в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через подгруппу A , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим, что B – нильпотентная группа. Из того, что $|B_p|=p$ вытекает, что Q является максимальной подгруппой в B . Так как подгруппа B максимальна в G и $B_p < N_p(B_p)$, то $N_G(B_p) = G$. Значит, подгруппа B_p , а вместе с ней и максимальная подгруппа $B_p Q_G$ из B нормальны в G . Следовательно, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через B , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M с $|G:M|=p^b$ для некоторого натурального числа b и $M \neq A^x$, $M \neq B^y$ для всех $x, y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq M$. Так как P

нормальна в G , то $M = M_p \rtimes Q$. Заметим также, что M_p нормальна в G , так как P – абелева группа. Заметим, что так как $M \neq A^x$, то $M \cap A_p = 1$. Действительно, допустим, что имеет место обратное. Тогда $M_p \cap A_p \neq 1$ и $M_p \cap A_p$ – нормальная подгруппа в G , что влечет $M_p \cap A_p = A_p$, т. е. $A_p \subseteq M$. Тогда $A \subseteq M$ и поэтому $A = M$, противоречие. Значит, $M \cap A_p = 1$. Так как A – максимальная подгруппа в G и $G = AB$, то $A \neq B$. Кроме того, так как $A = A_p \rtimes Q$ и $B = B_p \rtimes Q$, то $B_p \not\subseteq A$. Значит, $G = B_p \rtimes A$. Тогда $P = B_p \times A_p$. А так как $|B_p| = p$, то $|P : A_p| = p$. Следовательно, из того, что $M \cap A_p = 1$, вытекает $|M_p| = p$. Заметим, что представителями двух классов максимальных подгрупп в M являются подгруппа Q и нормальная в G подгруппа $M_p Q_G$. Следовательно, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через M , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим теперь, что B – группа Шмидта. Так как $B \simeq A$, то B – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и поэтому в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через подгруппу B , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M с $|G : M| = p^c$ для некоторого натурального числа c и $M \neq A^x$, $M \neq B^y$ для всех $x, y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq M$. Так как P нормальна в G , то $M = M_p \rtimes Q$. Заметим также, что M_p нормальна в G , так как P – абелева группа. Аналогично вышеприведенным рассуждениям, можно показать, что $M_p \cap A_p = 1$ и $M_p \cap B_p = 1$. Значит, из G -изоморфизма следует, что $P/A_p \simeq B_p A_p/A_p \simeq B_p$ и $P/A_p \simeq M_p A_p/A_p \simeq M_p$. Следовательно, M_p – минимальная нормальная подгруппа в G . Заметим также, что M_p является минимальной нормальной подгруппой в M , поскольку $PM = G$ и P – абелева группа. Значит, представителями двух классов максимальных подгрупп в M являются подгруппа Q и нормальная в G подгруппа $M_p Q_G$. Таким образом, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через M , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим теперь, что G – группа типа V. Как и выше, можно показать, что в каждой

максимальной цепи длины три группы G , проходящей через подгруппу A , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим вначале, что L – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. По лемме 1.3 (2), представителями двух классов максимальных подгрупп в L являются нормальная в G подгруппа RQ_G и подгруппа Q , максимальная подгруппа которой нормальна в G . Значит, и в этом случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим теперь, что L является нильпотентной группой. В этом случае представителями двух классов максимальных подгрупп в L являются нормальная в G подгруппа RQ_G и подгруппа Q . Значит, в этом случае, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через L имеется собственная нормальная в G подгруппа. Теорема доказана.

В работе [20] Ю.В. Луценко и А.Н. Скиба доказали следующую теорему.

Теорема 2.3. *В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной в G , когда группа G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G изоморфна $SL(2, 3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:*

- (1) G – группа Шмидта;
- (2) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, $|Q| = q^\beta$ ($\beta \geq 3$); группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$; $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$;
- (3) $G = P \rtimes Q$, где P – циклическая группа порядка p^2 , обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;
- (4) $G = (P_1 \times P_2) \rtimes Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, $P_1 Q$ – группа Шмидта и группа $P_2 Q$ либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;
- (5) $G = (P \rtimes Q)R$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы группы G , $|P| = p$, $|R| = r$, Q – циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.

Используя теорему А, мы дадим короткое доказательство этой теоремы.

Доказательство. Необходимость. Согласно условию, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной в G . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S -квазинормальная в G подгруппа. Тогда, по лемме 1.4, G

является группой одного из типов, описанных в теореме А. Кроме того, так как каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной в G , то, по лемме 1.4, каждая 3-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G . Значит, по лемме 1.1, каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Будем предполагать, что G – ненильпотентная группа и $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma > 3$ для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предположим, что G является группой типа I в теореме А.

Пусть $G = P \rtimes Q$ – группа Шмидта и $|\Phi(P)| = 1$, т. е. P является абелевой группой. Пусть $|Q| > q$. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу $P_1 Q_2$, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа в Q . По условию, $P_1 Q_2$ является S -квазинормальной подгруппой в G . Следовательно, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Поэтому $P_1 = 1$. Следовательно, $|P| = p$ и G является группой типа (1).

Пусть теперь $|Q| = q$. В этом случае каждая 2-максимальная подгруппа P_2 из P является 3-максимальной подгруппой в G . Тогда, по условию, P_2 является S -квазинормальной подгруппой в G . Следовательно, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_2 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Значит, $P_2 = 1$. Следовательно, $|P| = p^2$ и поэтому $|G| = p^2 q$, что противоречит нашему исходному допущению о группе G .

Предположим теперь, что $|\Phi(P)| = p$. Пусть $|Q| > q$. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу $P_1 Q_2$, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа в Q . По условию, $(P_1 Q_2)Q = Q(P_1 Q_2)$ и поэтому $P_1 Q$ является подгруппой в G . Ввиду леммы 1.3 (2), $\Phi(P)Q$ является максимальной подгруппой в G и поэтому $P_1 = \Phi(P)$. Следовательно, P является циклической группой, что противоречит неабелевости P .

Пусть теперь $|Q| = q$. Понятно, что каждая 2-максимальная подгруппа P_2 из P является 3-максимальной подгруппой в G . Тогда, по условию, $P_2 Q = Q P_2$ и поэтому $P_2 Q$ является подгруппой в G . Допустим, что $P_2 \not\leq \Phi(P)$. Тогда $P_2 \Phi(P)Q$ является подгруппой в G и поэтому,

ввиду максимальности $\Phi(P)Q$ в G , получаем либо $P_2 \Phi(P)Q = \Phi(P)Q$, либо $P_2 \Phi(P)Q = G$. Понятно, что второй случай не имеет места. Следовательно, $P_2 \Phi(P)Q = \Phi(P)Q$ и поэтому $P_2 \leq \Phi(P)$. Если $P_2 < \Phi(P)$, то P является абелевой группой, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $P_2 = \Phi(P)$ и поэтому $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P . Ввиду рассматриваемого случая P не является циклической группой. Значит, согласно [21; III, теоремы 8.2 и 8.4] имеет место $|\Phi(P)| = 2$ и P изоморфна группе кватернионов Q_8 порядка 8. Так как при этом $|P/\Phi(P)| = 4$, то $4 \equiv 1 \pmod{q}$. Это влечет $q = 3$ и поэтому группа G изоморфна группе $SL(2, 3)$.

Теперь предположим, что $G = P \rtimes Q$ не является группой Шмидта, P – минимальная нормальная подгруппа в G и выполняется условие (1).

Пусть x – произвольный элемент из Q такой, что $|x| = q^{\beta-2}$, где $\beta \geq 3$. Тогда, поскольку $|Q| = q^\beta$, то x содержится в некоторой максимальной подгруппе Q_1 группы Q . Ясно, что PQ_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому либо PQ_1 нильпотентна, либо PQ_1 – группа Шмидта с $|P| = p$ и $|Q_1| = q^{\beta-1}$. Очевидно, что в обоих случаях элемент x централизует группу P и поэтому $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$. Очевидно, что в этом случае, G – группа типа (2).

Предположим теперь, что выполняется условие (2) и $q = 2$, $\beta = 3$. Тогда, по [19; V, теорема 4.4], Q изоморфна либо группе Q_8 , либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$, $a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a \rangle$, $\langle a^2 \rangle \langle b \rangle$ и $\langle a^2 \rangle \langle ab \rangle$ и поэтому подгруппы вида $\langle a^2 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle ab \rangle$ являются 3-максимальными подгруппами в G . Известно, что диэдральная группа D обладает свойством $\Omega_1(D) = D$ (см. [19; V, теорема 4.3]). Это означает, что одна из подгрупп порядка 2 диэдральной группы, например $\langle ab \rangle$, не содержится в Q_8 . Значит, эта подгруппа не является S -квазинормальной в G , но является 3-максимальной подгруппой в G . Полученное противоречие показывает, что $Q \cong Q_8$. Следовательно, G снова является группой типа (2).

Если теперь либо $q = 2$ и $\beta > 3$, либо q – нечетное простое, то, по [19; V, теорема 4.4], в

первом случае Q изоморфна одной из групп $M_\beta(2)$, D_β , Q_β или S_β , а во втором Q изоморфна группе $M_\beta(q)$ (см. [19; С. 190–191]). Если Q изоморфна одной из групп D_β , Q_β или S_β , то, по [19; V, теорема 4.3], факторгруппа $Q/Z(Q)$ изоморфна $D_{\beta-1}$. Но в группе $D_{\beta-1}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы и поэтому группа Q имеет по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы, что противоречит условию. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп D_β , Q_β или S_β . Таким образом, группа Q изоморфна $M_\beta(q)$ и поэтому G снова является группой типа (2).

Пусть теперь выполняется условие (3). Очевидно, что максимальная в G подгруппа $G^{\text{от}} \rtimes Q$ является группой Шмидта и, следовательно, $|G^{\text{от}}| = p$. Откуда следует, что G является группой типа (4).

Предположим теперь, что G является группой типа II в теореме А.

Так как $|R| = r$, то PQ – максимальная подгруппа группы G . Значит, PQ либо нильпотентна, либо является группой Шмидта. Пусть P_1 – некоторая максимальная подгруппа группы P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа группы Q . Тогда P_1Q_2 является 3-максимальной подгруппой в G . По условию, P_1Q_2 является S -квазинормальной подгруппой в G . Тогда, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Значит, $|P| = p$. Если R не является нормальной подгруппой в G , то $|Q| = q$. Тогда, $|G| = pqr$, что противоречит нашему исходному предположению о группе G . Если же R нормальна в G , то G является группой типа (5).

Пусть теперь G является группой типа III в теореме А.

Предположим вначале, что P – неабелева группа. Пусть P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа в P . Так как $|Q:Q_G| = q$, то P_2Q_G является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому, по условию, $(P_2Q_G)Q = Q(P_2Q_G)$. Следовательно, P_2Q является подгруппой в G . Допустим, что $P_2 \not\leq \Phi(P)$. Тогда $P_2\Phi(P)Q$ является подгруппой в G и поэтому, ввиду максимальной $\Phi(P)Q$ в G , получаем либо $P_2\Phi(P)Q = \Phi(P)Q$, либо $P_2\Phi(P)Q = G$. Понятно, что второй случай не имеет места. Следовательно, $P_2\Phi(P)Q = \Phi(P)Q$ и поэтому $P_2 = \Phi(P)$. Следовательно, $\Phi(P)$ является единственной

2-максимальной подгруппой в P . Ввиду рассматриваемого случая P не является циклической группой. Значит, согласно [21; III, теоремы 8.2 и 8.4] имеет место $|\Phi(P)| = 2$ и P изоморфна группе Q_8 . Но $\Phi(P)Q = \Phi(P) \rtimes Q$ – группа Шмидта, что невозможно.

Теперь предположим, что P – абелева группа.

Допустим, что $|Q| > q$. Пусть P_1 – некоторая максимальная подгруппа группы P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа группы Q . Тогда P_1Q_2 является 3-максимальной подгруппой в G . По условию, $(P_1Q_2)Q = Q(P_1Q_2)$ и поэтому P_1Q является подгруппой в группе G . Тогда, ввиду максимальной подгруппы $\Phi(P)Q$ в группе G , мы имеем $\Phi(P)Q = P_1Q$. Это означает, что $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P и поэтому P – циклическая группа порядка p^2 . Так как $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$ и группа G не является нильпотентной, то $G/\Phi(P)$ – сверхразрешимая группа Шмидта. Поскольку, каждая максимальная подгруппа группы G , содержащая силовскую q -подгруппу группы G , является сверхразрешимой группой Шмидта, то максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Следовательно, G – группа типа (3).

Предположим теперь, что $|Q| = q$. Пусть P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа в P . Тогда P_2 является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому P_2Q – подгруппа группы G . Рассуждая аналогично, как и выше, можно показать, что $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P . Поэтому, ввиду абелевости, P является циклической группой. Это в свою очередь влечет $|G| = p^2q$, что противоречит нашему исходному допущению о группе G .

Допустим теперь, что G – группа типа IV в теореме А. Пусть S_1 – некоторая максимальная подгруппа в A_p . Так как $|Q:Q_G| = q$, то S_1Q_G является 3-максимальной подгруппой в G . По условию, S_1Q_G является S -квазинормальной подгруппой в G . Тогда, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, S_1 нормальна в G , что противоречит минимальности A_p . Значит, $S_1 = 1$ и поэтому $|A_p| = p$. Если B – группа Шмидта, то, очевидно, что $|B_p| = p$. Значит, G – группа типа (4).

Допустим, что G – группа типа V в теореме А. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_1Q_G , где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P . По условию, P_1Q_G является S -квазинормальной подгруппой в G .

Следовательно, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Поэтому $P_1 = 1$. Следовательно, $|P| = p$.

Если R не является нормальной подгруппой в G , то $|Q| = q$. Тогда, $|G| = pqr$, что противоречит нашему исходному предположению о группе G . Если же R нормальна в G , то G является группой типа (5).

Достаточность. Прежде всего заметим, что в нильпотентной группе каждая подгруппа является S -квазинормальной.

Предположим теперь, что G является не-нильпотентной группой с $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – простые (необязательно различные) числа и $\alpha + \beta + \gamma > 3$.

Допустим, что G изоморфна группе $SL(2, 3)$. В этом случае $G = P \rtimes Q$ является группой Шмидта, где $P \cong Q_8$ и Q – группа порядка 3. Рассмотрим максимальную подгруппу $\Phi(P)Q^x$ группы G . Так как $|\Phi(P)| = 2$ и $|Q| = 3$, то 2-максимальная подгруппа группы $\Phi(P)Q^x$ является единичной нормальной подгруппой в G . Теперь рассмотрим максимальную подгруппу P группы G . Так как P является группой кватернионов порядка 8, то $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой группы P . Понятно, что подгруппа $\Phi(P)$ нормальна в G и поэтому каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной.

Предположим, что G – группа типа (1). Легко показать, что в этом случае каждая 3-максимальная подгруппа нормальна в G .

Допустим теперь, что G является группой типа (2). Покажем, что в этом случае группа G удовлетворяет одному из условий:

- (а) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, Q – циклическая группа и $P \rtimes \Phi(Q)$ – группа Шмидта;
- (б) $G = (P \rtimes Q_1) \times C_q$, где $|P| = p$, $|C_q| = q$ и PQ_1 – группа Шмидта;
- (в) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, $p > 2$ и $Q \cong Q_8$;
- (г) $G = (P \rtimes Q_1)C_q$, где $|P| = p$, $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1 C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$, PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1 , изоморфной C_q .

Так как, по условию, $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$, то в группе G имеется ненильпотентная максимальная подгруппа H . Понятно, что H содержит P и поэтому $H = P \rtimes Q_1$, где Q_1 – некоторая максимальная подгруппа в Q . Ввиду условия, каждая максимальная подгруппа группы Q_1

централизует P . Это в свою очередь влечет, что каждая максимальная подгруппа группы H является нильпотентной и поэтому H – группа Шмидта.

Если теперь группа Q циклическая, то G является группой типа (а). Предположим, что Q является абелевой, но нециклической группой. Тогда $Q = Q_1 \times C_q$, где $|C_q| = q$. Ввиду условия, $[P, C_q] = 1$ и поэтому G является группой типа (б).

Пусть теперь Q изоморфна группе Q_8 . Тогда, очевидно, G является группой типа (с). Осталось рассмотреть случай, когда Q изоморфна группе $M_\beta(q)$. Из того, что G имеет максимальную подгруппу Шмидта $H = P \rtimes Q_1$ и строения группы $M_\beta(q)$, получаем

$$G = (P \rtimes Q_1)C_q,$$

где $|P| = p$, $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1 C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$, PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$. Поскольку, ввиду условия, $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1 , изоморфной C_q , то в этом случае G является группой типа (д).

Таким образом, в случае, когда G является группой типа (2), для нее выполняется одно из условий (а)–(д).

Если G является группой типа (а), то 3-максимальными подгруппами в G являются подгруппы Q_2 и PQ_3 , где Q_2 и Q_3 – 2-максимальная и 3-максимальная подгруппы в Q , соответственно. Очевидно, что каждая из этих подгрупп нормальна в G .

Предположим теперь, что G – группа типа (с). Легко видеть, что в этом случае каждая 3-максимальная подгруппа нормальна в G .

Пусть теперь G является группой типа (д). Покажем индукцией по $|G|$, что каждая 3-максимальная подгруппа T группы G S -квазинормальна. Допустим вначале, что $T \cap Q_1^x \neq 1$ для некоторого $x \in G$. Тогда Q_1^x имеет собственную подгруппу Z такую, что $Z \leq T$ и $|Z| = q$. Так как PQ_1^x – группа Шмидта, то $Z \leq C_G(P)$ и поэтому Z нормальна в G . Так как $Z \leq \Phi(PQ_1)$, то PQ_1/Z является группой Шмидта. Легко заметить, что группа G/Z удовлетворяет и всем остальным условиям, описанным в случае (д), и поэтому G/Z является группой типа (д). Так как $|G/Z| < |G|$, ввиду $|Z| \neq 1$, и T/Z является 3-максимальной подгруппой в G/Z , то, по выбору G , T/Z S -квазинормальна в G/Z . Тогда, по лемме 1.4 (2), T S -квазинормальна в G , что противоречит выбору группы G .

Следовательно, $T \cap Q_1^x = 1$ для всех $x \in G$. Так как группа G является q -нильпотентной, то, по лемме 1.6, $|Q_1|$ делит $|G:T|$ и, по лемме 1.5, либо $|G:T| = q^3$, либо $|G:T| = pq^2$.

Допустим, что верен первый случай. Тогда либо $|Q_1| = q^3$, либо $|Q_1| = q^2$. Если $|Q_1| = q^2$, то $T = P$ является S -квазинормальной в G , что противоречит выбору группы G . Если $|Q_1| = q^3$, то $T = PC_q$. Ввиду условия $[P, C_q] = 1$, легко показать, что группа C_q S -квазинормальна в G . Но тогда и группа T является S -квазинормальной в G , что противоречит выбору группы G .

Теперь предположим, что $|G:T| = pq^2$. Так как при этом $|Q_1|$ делит $|G:T|$, то $T \simeq C_q$. Аналогично, как и выше, можно показать, что T снова является S -квазинормальной в G . Полученное противоречие показывает, что каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной.

Аналогично рассматривается случай, когда G является группой типа (b).

В случае, когда G – группа одного из типов (3), (4) или (5), непосредственной проверкой легко убедиться, что каждая 3-максимальная подгруппа является нормальной в G . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Redei, L.* Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen / L. Redei // Acta Math. – 1950. – Vol. 84. – P. 129–153.
2. *Huppert, B.* Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. *Поляков, Л.Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Минск : Наука и техника. – 1966. – С. 75–88.
4. *Agrawal, R.K.* Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
5. *Asaad, M.* Finite groups some whose n -maximal subgroups are normal / M. Assad // Acta Math. Hung. – 1989. – Vol. 54. – № 1. – P. 9–27.
6. *Flavell, P.* Overgroups of second maximal subgroups / P. Flavell // Arch. Math. – 1995. – Vol. 64. – P. 277–282.
7. *Mann, A.* Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
8. *Shirong, Li.* Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI -groups / Li Shirong // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – 2000. – Vol. 100A. – № 1. – P. 65–71.
9. *Guo, X.Y.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2003. – Vol. 181. – P. 297–308.
10. *Guo, W.* X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
11. *Baojun, Li.* New characterizations of finite supersoluble groups / Li Baojun, A.N. Skiba // Science in China Series A: Mathematics. – 2008. – Vol. 50. – № 1. – P. 827–841.
12. *Guo, W.* Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
13. *Guo, W.* The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 2446–2456.
14. *Го, В.* Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами / В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86. – № 3. – С. 350–359.
15. *Ковалькова, Д.П.* Конечные группы с заданными системами S -квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.Н. Скиба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 35–43.
16. *Doerk, K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992.
17. *Kegel, O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 87. – P. 205–221.
18. *Schmid, P.* Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – V. 207. – № 1. – P. 285–293.
19. *Gorenstein, D.* Finite groups / D. Gorenstein. – New York : Chelsea, 1980.
20. *Луценко, Ю.В.* О конечных группах, в которых каждая 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа обобщенно перестановочна со всеми силовскими подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Укр. мат. журнал. – 2009. – Т. 61. – № 12. – С. 1630–1639.
21. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin : Heidelberg, New York : Springer, 1967.

Поступила в редакцию 24.03.11.

УДК 519.21

ОБОБЩЕННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПО НЕПРЕРЫВНОМУ МАРТИНГАЛУ

Н.В. Бедюк

Белорусский государственный университет, Минск

GENERALIZED STOCHASTIC INTEGRAL WITH RESPECT TO CONTINUOUS MARTINGALE

N.V. Bedziuk

Belarusian State University, Minsk

В алгебре обобщенных случайных процессов рассматривается процесс, задаваемый стохастическим интегралом по непрерывному мартингалу. Найдены условия, при которых рассматриваемый обобщенный процесс ассоциирует обычный случайный процесс. Описан общий вид указанного случайного процесса.

Ключевые слова: алгебра обобщенных случайных процессов, мартингал, стохастический интеграл.

Stochastic integral with respect to continuous martingale is considered in the algebra of generalized stochastic processes. The sufficient conditions when the above generalized stochastic process associates an ordinary stochastic process are formulated. The explicit form of the ordinary stochastic process is described.

Keywords: algebra of generalized stochastic processes, martingale, stochastic integral.

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях экономики, биологии, физики и техники. В зависимости от предметной области, используются различные определения стохастического интеграла [1]–[4], что существенно влияет на методику исследования. Перспективным направлением в изучении стохастических дифференциальных уравнений, на наш взгляд, является подход с точки зрения алгебры обобщенных случайных процессов [5], который позволяет охватить различные определения стохастического интеграла и, таким образом, проводить исследование стохастических дифференциальных уравнений с единых позиций.

С практической точки зрения важно знать при каких условиях элемент алгебры обобщенных случайных процессов соответствует обычному случайному процессу. Такие условия позволяют переходить от единой теории обобщенных случайных процессов к частным случаям, предлагая более детальное описание динамики моделируемой системы.

Мы работаем в алгебре обобщенных случайных процессов, построенной в [5]. Элементами данной алгебры являются классы эквивалентности на множестве последовательностей случайных процессов. В работе [5] также вводится обобщенный дифференциал $d_{\tilde{h}}$ для обобщенного процесса. Указанные конструкции позволяют ввести в алгебре обобщенных случайных процессов обобщенный стохастический интеграл

$$\tilde{I}_t = \int_0^t f(\tilde{V}_s) d_{\tilde{h}} \tilde{V}_s \quad (0.1)$$

и стохастические уравнения в дифференциалах

$$d_{\tilde{h}} \tilde{x}_t = f(\tilde{x}_t) d_{\tilde{h}} \tilde{V}_t. \quad (0.2)$$

И стохастический интеграл, и стохастические уравнения в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов рассматривались ранее для довольно широкого класса обобщенных случайных процессов. В работах [6], [7] интеграл и уравнения исследовались для обобщенного случайного процесса $\tilde{V}$, который соответствует или ассоциирует броуновское движение B_t . В работе [8] вместо броуновского движения B_t был рассмотрен процесс Леви L_t . В обоих случаях связь обобщенного дифференциала $d_{\tilde{h}}$ с обобщенным процессом $\tilde{V}$ задает вид обычного случайного процесса, который соответствует обобщенному стохастическому интегралу $\tilde{I}_t$ из (0.1) или решению $\tilde{x}_t$ обобщенного стохастического уравнения в дифференциалах (0.2).

Задача данной работы исследовать стохастический интеграл (0.1), в случае, когда $\tilde{V}$ ассоциирует непрерывный квадратично-интегрируемый мартингал M_t . Ключевым отличием данного исследования от указанных выше является то, что квадратичная вариация $\langle M \rangle_t$ процесса M_t также является случайным процессом, тогда как для броуновского движения B_t и процесса Леви L_t она детерминирована. Используя

обобщенный стохастический интеграл (0.1), мы описываем различные типы интегралов по непрерывным квадратично-интегрируемым мартингалам и соответствующие им случайные процессы, вид которых задается связью между обобщенным дифференциалом $d_{\tilde{h}}$ и обобщенным процессом $\tilde{V}$.

1 Обобщенный стохастический интеграл

Приведем построение алгебры обобщенных случайных процессов и обобщенных стохастических дифференциалов из [5].

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Фильтрация $\mathbb{F}$ задается потоком сигма-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Рассмотрим множество последовательностей случайных процессов на $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ с гладкими траекториями, то есть $(V_t^n)_{n=1}^\infty$, где $V_t^n \in C^\infty(\mathbb{R})$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Отношение эквивалентности на множестве таких последовательностей зададим следующим образом: $(V_t^n)_{n=1}^\infty \sim (W_t^n)_{n=1}^\infty$ если существует N , такое что для любого $n > N$ и для любого t верно $P(V_t^n \neq W_t^n) = 0$. Множество описанных классов эквивалентности образует алгебру обобщенных случайных процессов. Элементы данной алгебры будем обозначать $\tilde{V} = [(V_t^n)_{n=1}^\infty]$.

Обобщенный дифференциал $d_{\tilde{h}}$ для обобщенного процесса $\tilde{V}$ вводится следующим образом

$$d_{\tilde{h}} \tilde{V}_t = [(V_{t+h_n}^n - V_t^n)_{n=1}^\infty],$$

где $\tilde{h}$ положительное бесконечно малое обобщенное число, а именно

$$\tilde{h} \in H = \left\{ [(h_n)_{n=1}^\infty] : h_n \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \right\}.$$

Введем теперь обобщенный стохастический интеграл вида (0.1). Так как нас интересует значение $\tilde{I}_t$ для $t \in \mathbb{R}$, мы вводим обобщенный интеграл следующим образом

$$\int_0^t f(\tilde{V}_s) d_{\tilde{h}} \tilde{V}_s = \tilde{I}_t = [(I_t^n)_{n=1}^\infty]. \quad (1.1)$$

Для $\tilde{h} = [(h_n)_{n=1}^\infty]$ введем

$$s_0^n = \{t/h_n\} h_n, \quad s_k^n = s_0^n + kh_n \text{ и } m_t^n = [t/h_n],$$

где $\{y\}, [y]$ обозначают дробную и целую часть числа y , соответственно, тогда

$$I_t^n = \sum_{k=0}^{m_t^n-1} f(V_{s_k^n}^n) (V_{s_{k+1}^n}^n - V_{s_k^n}^n).$$

Определение 1.1. Будем говорить что обобщенный случайный процесс $\tilde{I}_t$ ассоциирует случайный процесс I_t в некотором топологическом пространстве, если $\lim_{n \rightarrow \infty} I_t^n = I_t$ в этом пространстве.

Исследуем вид процесса I_t , ассоциируемого обобщенным случайным процессом (1.1). Тем самым мы опишем различные типы стохастических интегралов, которые соответствуют обобщенному стохастическому интегралу (1.1).

2 Основные результаты

Обобщенный процесс $\tilde{M}$ ассоциирует непрерывный квадратично-интегрируемый мартингал M , причем

$$\tilde{M}_t = [(M_t^n)_{n=1}^\infty], \text{ где } M_t^n = (M * \rho_n)_t.$$

Дельта-последовательность ρ_n обладает следующими свойствами: $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n \geq 0$, $\text{supp } \rho_n \subset [0; 1/n]$, $\int_0^{1/n} \rho_n(s) ds = 1$. Введем функцию

$$F_n(x) = \int_x^{1/n} \rho_n(u) du, \quad x \in \mathbb{R},$$

тогда

$$M_t^n = \int_0^{1/n} M_{t+s} \rho_n(s) ds = \int_0^{t+1/n} F_n(s-t) dM_s. \quad (2.1)$$

Рассмотрим обобщенный стохастический интеграл

$$\tilde{I}_t = \int_{0+}^t f(\tilde{M}_s) d_{\tilde{h}} \tilde{M}_s = [(I_t^n)_{n=1}^\infty]. \quad (2.2)$$

Для упрощения обозначений мы будем рассматривать I_t^n из (2.2), опуская связь между h и n , то есть $t_0 = \{t/h\} h$, $t_k = t_0 + kh$, $m_t = [t/h]$ и

$$I_t^n = \sum_{k=0}^{m_t-1} f(M_{t_k}^n) (M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n). \quad (2.3)$$

Для описания случайного процесса I_t , ассоциированного обобщенным процессом $\tilde{I}_t$, необходимо рассмотреть предельное поведение суммы (2.3) при $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$.

Везде далее будем рассматривать $t \in \mathbf{T} = [0, T]$. Введем случайную меру μ_{nh}

$$\mu_{nh}(t, B) = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{1}_B(t_k) \int_{t_k}^{t_k+h+1/n} [F_n(s-t_k-h) - F_n(s-t_k)]^2 d\langle M \rangle_s, \quad (2.4)$$

где B борелевское множество, а $\langle M \rangle$ – квадратичная вариация мартингала M [9, гл. II, §2].

Теорема 2.1. Пусть функция $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, мартингал M непрерывен и квадратично-интегрируем. Если последовательность мер μ_{nh} из (2.4) сходится слабо, почти везде по Ω и в $L^1(\mathbf{T})$ при $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, то предельная мера μ не зависит от t , и обобщенный стохастический интеграл $\tilde{I}_t$ из (2.2) ассоциирует случайный процесс I_t в $L^1(\mathbf{T})$ и по вероятности, причем I_t имеет следующий вид

$$I_t = \int_0^t f(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f'(M_s) (d\langle M \rangle_s - \mu(ds)).$$

Замечание 2.1. В случае если M броуновское движение, $d\langle M \rangle_s = ds$ и сходимость мер μ_{nh} равносильна сходимости числовой последовательности

$$K(n, h) = \int_{\substack{0 \leq s, t \leq 1/n \\ |s-t| \leq h}} \left(1 - \frac{|s-t|}{h}\right) \rho_n(s) \rho_n(t) ds dt.$$

Если $K(n, h) \rightarrow \theta$ при $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, то $\theta \in [0, 1]$ и предельная мера имеет вид $\mu(du) = \theta du$. Тогда ассоциированный процесс I_t задается следующим образом

$$I_t = \int_0^t f(M_s) dM_s + \frac{1-\theta}{2} \int_0^t f'(M_s) d\langle M \rangle_s.$$

Полученные результаты согласуются с работой [7].

Замечание 2.2. Если $nh \rightarrow \infty$, то для произвольного квадратично-интегрируемого непрерывного мартингала M

$$I_t = \int_0^t f(M_s) dM_s,$$

то есть мера $\mu(ds)$ совпадает с мерой $d\langle M \rangle_s$ и обобщенный стохастический интеграл ассоциирует интеграл Ито.

3 Вспомогательные утверждения

В силу определения (2.1), несложно видеть, что M_t^n является процессом с непрерывными траекториями и для любого $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbf{T}$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} M_t^n = M_t$. Сформулируем необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1. Для произвольного $u, t \in \mathbf{T}$ верно

$$\left| \int_0^u [F_n(s-t-h) - F_n(s-t)] dM_s \right| \leq \max_{\substack{|s_1-s_2| \leq h+1/n \\ 0 \leq s_1, s_2 \leq u}} |M_{s_1} - M_{s_2}|.$$

Доказательство. Используя интегрирование по частям и вид F_n получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^u [F_n(s-t-h) - F_n(s-t)] dM_s \right| = \\ & = \left| M_u \int_u^{+\infty} (\rho_n(s-t-h) - \rho_n(s-t)) ds + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^u M_s (\rho_n(s-t-h) - \rho_n(s-t)) ds \right| = \\ & = \left| \int_0^{+\infty} M_{s \wedge u} (\rho_n(s-t-h) - \rho_n(s-t)) ds \right| = \\ & = \left| \int_0^{+\infty} (M_{(s+h) \wedge u} - M_{s \wedge u}) \rho_n(s-t) ds \right| \leq \\ & \leq \max_{\substack{s_1, s_2 \in [t, t+h+1/n] \\ 0 \leq s_1, s_2 \leq u}} |M_{s_1} - M_{s_2}| \int_t^{t+1/n} \rho_n(s-t) ds \leq \\ & \leq \max_{\substack{|s_1-s_2| \leq h+1/n \\ 0 \leq s_1, s_2 \leq u}} |M_{s_1} - M_{s_2}|. \end{aligned}$$

Лемма 3.2. Если мера μ_{nh} слабо сходится к мере μ для почти всех $\omega \in \Omega$ и в $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ при

$n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, то предельная мера μ не зависит от t .

Доказательство. Мера μ_{nh} слабо сходится к мере μ для почти всех $\omega \in \Omega$ и в $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$, значит для любой непрерывной g верно

$$\int_0^T \left| \int_0^T g(t, u) \mu_{nh}(t, du) - \int_0^T g(t, u) \mu(t, du) \right| dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$.

Из определения (2.4) меры μ_{nh} следует что μ_{nh} является h -периодической функцией по t , а тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_0^T \int_0^T g(t, u) \mu_{nh}(t, du) dt = \\ & = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^L \int_0^h \int_0^T g(t+kh, u) \mu_{nh}(t, du) dt = \\ & = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^T \left(\sum_{k=0}^L g(t+kh, u) h \right) \mu_{nh}(t, du) dt. \end{aligned}$$

По определению интеграла

$$\left(\sum_{k=0}^L g(t+kh, u) h \right) \rightarrow \int_0^T g(s, u) ds,$$

значит

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^T \left(\sum_{k=0}^L g(t+kh, u) h \right) \mu_{nh}(t, du) dt = \\ & = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^T \int_0^T g(s, u) ds \mu_{nh}(t, du) dt = \\ & = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_0^T \int_0^T g(s, u) \frac{1}{h} \int_0^h \mu_{nh}(t, du) dt ds. \end{aligned}$$

Обозначим $\nu_{nh}(du) = \frac{1}{h} \int_0^h \mu_{nh}(t, du) dt$. Очевидно

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_0^T \int_0^T g(s, u) \frac{1}{h} \int_0^h \mu_{nh}(t, du) dt ds = \\ & = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_0^T \int_0^T g(s, u) \nu_{nh}(du) ds. \end{aligned}$$

По условию данный предел сходится для любых непрерывных функций g . Рассматривая функции g , зависящие только от u , получаем, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_0^T g(u) \nu_{nh}(du)$$

существует для любых непрерывных g . Значит, последовательность мер $\nu_{nh}(du)$ слабо сходится к некоторой мере $\nu(du)$. То есть мы имеем, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_0^T \int_0^T g(s, u) \nu_{nh}(du) ds = \int_0^T \int_0^T g(s, u) \nu(du) ds.$$

В силу единственности предела получаем, что предельная мера μ совпадает с ν . Значит, μ не зависит от t .

Замечание 3.1. Явный вид предельной меры $\mu(du)$ можно получить, исследуя предельное поведение последовательности мер $\nu_{nh}(du)$.

Для $l = 1, 2, \dots, m_l$ введем обозначение $V_l^n = \sum_{k=0}^{l-1} [M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2$. Докажем несколько вспомогательных утверждений для ограниченного мартингала.

Лемма 3.3. Если мартингал M и его квадратичная вариация $\langle M \rangle_t$ ограничены константой B , то для любого фиксированного $t \in \mathbf{T}$ справедлива оценка

$$E(V_{m_l}^n)^2 \leq 9B^2(1+2B).$$

Доказательство. По определению

$$(V_{m_l}^n)^2 = \left(\sum_{k=0}^{m_l-1} [M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 \right)^2 = \sum_{k=0}^{m_l-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} ([M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 [M_{t_{j+1}}^n - M_{t_j}^n]^2).$$

Введем функцию

$$J_{t_k}(u) = \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] dM_s. \quad (3.1)$$

В силу представления (2.1) и вида F_n для $v \geq t + 1/n$ верно

$$[M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n] = \int_{t_k}^{t_{k+1}+1/n} [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] dM_s = J_{t_k}(v).$$

Тогда

$$(V_{m_l}^n)^2 = \sum_{k=0}^{m_l-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v) \quad \text{и}$$

$$E(V_{m_l}^n)^2 = \sum_{k=0}^{m_l-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} E(J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v)).$$

Из вида (3.1) следует, что $J_{t_k}(u)$ является мартингалом, более того, по формуле Ито $J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v) = \int_0^v d(J_{t_k}^2(u) J_{t_j}^2(u))$, где

$$\begin{aligned} d(J_{t_k}^2(u) J_{t_j}^2(u)) &= 2J_{t_k}(u) J_{t_j}(u) dJ_{t_k}(u) + \\ &+ 2J_{t_k}^2(u) J_{t_j}(u) dJ_{t_j}(u) + J_{t_j}^2(u) d\langle J_{t_k} \rangle_u + \\ &+ J_{t_k}^2(u) d\langle J_{t_j} \rangle_u + 4J_{t_k}(u) J_{t_j}(u) d\langle J_{t_k}, J_{t_j} \rangle_u. \end{aligned}$$

Применяя математическое ожидание, получаем

$$\begin{aligned} E(J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v)) &= E \int_0^v J_{t_j}^2(u) d\langle J_{t_k} \rangle_u + \\ &+ E \int_0^v J_{t_k}^2(u) d\langle J_{t_j} \rangle_u + \\ &+ 4E \int_0^v J_{t_k}(u) J_{t_j}(u) d\langle J_{t_k}, J_{t_j} \rangle_u. \end{aligned} \quad (3.2)$$

По определению $J_{t_k}(u)$ верно

$$\begin{aligned} \langle J_{t_k} \rangle_u &= \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)]^2 d\langle M \rangle_s, \\ \langle J_{t_k}, J_{t_j} \rangle_u &= \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] \times \\ &\times [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] d\langle M \rangle_s. \end{aligned}$$

Суммируя выражения (3.2) по j, k , получаем, что

$$E(V_{m_l}^n)^2 = 2G_1 + 4G_2,$$

где

$$G_1 = E \int_0^v \sum_{k=0}^{m_l-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] dM_s \right)^2 \times \\ \times [F_n(u - t_{k+1}) - F_n(u - t_k)]^2 d\langle M \rangle_u,$$

$$G_2 = E \int_0^v \sum_{k=0}^{m_l-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] dM_s \times \\ \times \int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] dM_s \times \\ \times [F_n(u - t_{k+1}) - F_n(u - t_k)] [F_n(u - t_{j+1}) - F_n(u - t_j)] d\langle M \rangle_u.$$

Так как для любого w и $x \in \mathbb{R}$ верно $0 \leq [F_n(x - w) - F_n(x)] \leq 1$, то

$$[F_n(x - w) - F_n(x)]^2 \leq [F_n(x - w) - F_n(x)].$$

Используя данный факт и ограниченность $\langle M \rangle$, получаем, что

$$\begin{aligned} G_1 &\leq E \int_0^v \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] dM_s \right)^2 \right) \times \\ &\times \left(\sum_{k=0}^{m_l-1} [F_n(u - t_{k+1}) - F_n(u - t_k)] \right) d\langle M \rangle_u \leq \\ &\leq E \left[\sum_{j=0}^{m_l-1} \left(\langle M \rangle_v \max_{0 \leq u \leq v} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] dM_s \right)^2 \right) \right] \leq \\ &\leq B \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} E \max_{0 \leq u \leq v} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] dM_s \right)^2 \right). \end{aligned}$$

В силу неравенства Дуба [9, с. 36] выполняется $E \max_{0 \leq u \leq v} (J_{t_j}(u))^2 \leq 4E(J_{t_j}(v))^2$, тогда

$$\begin{aligned} G_1 &\leq 4B \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} E \left(\int_0^v [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] dM_s \right)^2 \right) = \\ &= 4B \sum_{j=0}^{m_l-1} E \left(\int_0^v [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)]^2 d\langle M \rangle_s \right) \leq \\ &\leq 4BE \int_0^v \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \right) d\langle M \rangle_s \leq 4B^2. \end{aligned}$$

Действуя аналогично для G_2 и используя лемму 3.1, получаем

$$\begin{aligned} G_2 &\leq E \max_{\substack{|s_1 - s_2| \leq h + \frac{1}{n} \\ 0 \leq s_1, s_2 \leq u}} |M_{s_1} - M_{s_2}|^2 \times \\ &\times \int_0^v [F_n(s - t) - F_n(s - t_0)]^2 d\langle M \rangle_u \leq 4B^3. \end{aligned}$$

Объединяя неравенства для G_1 и G_2 , получаем требуемое утверждение.

Лемма 3.4. Если мартингал M и его квадратичная вариация $\langle M \rangle_t$ ограничены константой B , то для любого фиксированного $t \in \mathbf{T}$ верно

$$E \left(\sum_{k=1}^{m_l-1} ([M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 - \mu_{nh}([t_k, t_{k+1}])) \right)^2 \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$.

Доказательство. Введем функцию

$$I_k(u) = \int_0^u [F_n(s-t_k-h) - F_n(s-t_k)] d\langle M \rangle_s. \quad (3.3)$$

В силу определения (2.4) меры μ_{nh} несложно видеть, что для любого k

$$\mu_{nh}([t_k, t_{k+1})) = I_k(v), \text{ где } v \geq t + 1/n.$$

Более того, в лемме 3.3 показано, что для J_{t_k} , заданной (3.1), верно $\langle J_{t_k} \rangle_u = I_k(u)$. Тогда

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k=1}^{m_i-1} ([M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 - \mu_{nh}([t_k, t_{k+1}))) \right)^2 &= \\ &= E \left(\sum_{k=1}^{m_i-1} (J_{t_k}^2(v) - I_k(v)) \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{m_i-1} \sum_{j=1}^{m_i-1} (E J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v) + E I_{t_k}(v) I_{t_j}(v) - \\ &\quad - E J_{t_k}^2(v) I_{t_j}(v) - E I_{t_k}(v) J_{t_j}^2(v)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Используя формулу Ито, можно показать, что выражение (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k=1}^{m_i-1} ([M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 - \mu_{nh}([t_k, t_{k+1}))) \right)^2 &= \\ &= 4 \sum_{k=1}^{m_i-1} \sum_{j=1}^{m_i-1} E \int_0^v J_{t_k}(u) J_{t_j}(u) d\langle J_{t_k}, J_{t_j} \rangle_u. \end{aligned}$$

Учитывая вид F_n и ограниченность $\langle M \rangle$, применим неравенство Коши-Буняковского и лемму 3.1, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_i-1} \sum_{j=1}^{m_i-1} E \int_0^v J_{t_k}(u) J_{t_j}(u) d\langle J_{t_k}, J_{t_j} \rangle_u &\leq \\ &\leq BE \max_{\substack{|s_1-s_2| \leq h + \frac{1}{n} \\ 0 \leq s_1, s_2 \leq v}} |M_{s_1} - M_{s_2}|^2. \end{aligned}$$

В силу ограниченности и равномерной непрерывности M на $[0, v]$ по теореме Лебега

$$E \max_{\substack{|s_1-s_2| \leq h + \frac{1}{n} \\ 0 \leq s_1, s_2 \leq v}} |M_{s_1} - M_{s_2}|^2 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0.$$

Таким образом, требуемая сходимость доказана.

4 Доказательство основных результатов

Лемма 4.1. Пусть функция $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, непрерывный квадратично-интегрируемый мартингал M и его квадратичная вариация $\langle M \rangle_t$ ограничены константой B . Если последовательность мер μ_{nh} из (2.4) сходится слабо, почти везде по Ω и в $L^1(\mathbf{T})$ при $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$, то предельная мера μ не зависит от t , и обобщенный стохастический интеграл $\tilde{I}_t$ из (2.2) ассоциирует случайный процесс I_t в $L^1(\mathbf{T})$ и в $L^1(\Omega)$, причем I_t имеет следующий вид

$$I_t = \int_0^t f(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f'(M_s) (d\langle M \rangle_s - \mu(ds)).$$

Доказательство. По условию $f \in C_B^1(\mathbb{R})$,

значит, $F(y) = \int_0^y f(x) dx$ дважды непрерывно-дифференцируема и по формуле Тейлора верно

$$F(x) = F(x_0) + f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f'(\xi)(x - x_0)^2,$$

где точка $\xi \in [x_0, x]$. Рассмотрим $\{t_k\}$ разбиение отрезка $[0, t]$ с шагом h , зафиксируем $\omega \in \Omega$ и в качестве точек x и x_0 рассмотрим $M_{t_{k+1}}$ и M_{t_k} .

Тогда

$$\begin{aligned} F(M_{t_{k+1}}) - F(M_{t_k}) &= \\ &= f(M_{t_k})[M_{t_{k+1}} - M_{t_k}] + \frac{1}{2} f'(\xi)[M_{t_{k+1}} - M_{t_k}]^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Обозначим ξ через $\overline{M}_{t_k}$, тогда

$$M_{t_{k+1}} \wedge M_{t_k} \leq \overline{M}_{t_k} \leq M_{t_{k+1}} \vee M_{t_k}.$$

Рассматривая сумму выражений вида (4.1), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{M_t} f(x) dx - \int_0^{M_{t_0}} f(x) dx &= F(M_t) - F(M_{t_0}) = \\ &= \sum_{k=0}^{m_i-1} [F(M_{t_{k+1}}) - F(M_{t_k})] = \\ &= \sum_{k=0}^{m_i-1} f(M_{t_k})[M_{t_{k+1}} - M_{t_k}] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m_i-1} f'(\overline{M}_{t_k})[M_{t_{k+1}} - M_{t_k}]^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поступая аналогично (4.2) для $M_{t_{k+1}}^n$ и $M_{t_k}^n$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{M_t^n} f(x) dx - \int_0^{M_{t_0}^n} f(x) dx &= \\ &= \sum_{k=0}^{m_i-1} f(M_{t_k}^n)[M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m_i-1} f'(\overline{M}_{t_k}^n)[M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Учитывая равенства (4.3) и (4.2), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m_i-1} f(M_{t_k}^n)[M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n] - \int_0^t f(M_s) dM_s &= \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} f(M_{t_k})[M_{t_{k+1}} - M_{t_k}] - \int_0^t f(M_s) dM_s \right) + \\ &\quad + \left(\int_0^{M_t^n} f(x) dx - \int_0^{M_t} f(x) dx \right) + \left(\int_0^{M_{t_0}^n} f(x) dx - \int_0^{M_{t_0}} f(x) dx \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} f'(\overline{M}_{t_k}^n)[M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} f'(\overline{M}_{t_k}^n)[M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 \right) = \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + \frac{1}{2} J_4 - \frac{1}{2} J_5. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя доказательство формулы Ито [9, С. 76–77], можно показать, что при $h \rightarrow 0$ верно $J_1 \rightarrow 0$, $J_4 \rightarrow \int_0^t f'(M_s) d\langle M \rangle_s$ в $L^1(\Omega)$. В силу сходимости $M^n \rightarrow M$, ограниченности f и M , теорема Лебега влечет $J_2 \rightarrow 0$, $J_3 \rightarrow 0$ в $L^1(\Omega)$. Покажем, что $J_5 \rightarrow \int_0^t f'(M_s) \mu(ds)$ в $L^1(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$. Мера μ – предел мер μ_{nh} , заданных (2.4), и в силу леммы 3.2 не зависит от t .

Обозначим

$$J'_5 = \sum_{k=0}^{m_t-1} f'(M_{t_k}) [M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2,$$

$$J''_5 = \sum_{k=0}^{m_t-1} f'(M_{t_k}) \mu_{nh}([t_k, t_{k+1})).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и лемму 3.3, получаем

$$E |J_5 - J'_5| \leq$$

$$\leq E \left(\sup_k |f'(\overline{M}_{t_k}^n) - f'(M_{t_k})| \sum_{k=0}^{m_t-1} [M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 \right) \leq$$

$$\leq \left(E \sup_k |f'(\overline{M}_{t_k}^n) - f'(M_{t_k})|^2 \right)^{1/2} \left(E (V_{m_t}^n)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 9B^2(1+2B) \left(E \sup_k |f'(\overline{M}_{t_k}^n) - f'(M_{t_k})|^2 \right)^{1/2}.$$

Так как f' непрерывна и $M^n \rightarrow M$, то

$$\sup_k |f'(\overline{M}_{t_k}^n) - f'(M_{t_k})|^2 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0.$$

По условию и f' и M ограничены, тогда по теореме Лебега

$$\int_0^T E |J_5 - J'_5| dt \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0.$$

В силу ограниченности f'

$$E(J'_5 - J''_5)^2 \leq$$

$$\leq C^2 E \left(\sum_{k=0}^{m_t-1} ([M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 - \mu_{nh}([t_k, t_{k+1}))) \right)^2.$$

По лемме 3.4 верно $E(J'_5 - J''_5)^2 \rightarrow 0$, а значит, и $E |J'_5 - J''_5| \rightarrow 0$. Так как по условию μ_{nh} слабо сходится к μ почти везде по Ω и в $L^1(T)$, то по лемме 3.2 предельная мера μ не зависит от t и

$$\int_0^T E \left| J''_5 - \int_0^t f'(M_s) \mu(ds) \right| dt =$$

$$= E \int_0^T \left| \int_0^t f'(M_s) [\mu_{nh}(t, ds) - \mu(ds)] \right| dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$. Объединяя полученные оценки, приходим к выводу, что

$$E \int_0^T \left| J_5 - \int_0^t f'(M_s) \mu(t, ds) \right| dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$.

Объединяя полученные предельные выражения для J_1 , J_2 , J_3 , J_4 , J_5 из (4.4), получаем, что лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Для произвольного непрерывного квадратично-интегрируемого мартингала M введем последовательность моментов остановки

$$\sigma_m = \inf\{t : |M_t| > m \text{ или } |\langle M \rangle_t| > m\}.$$

Обозначим процесс, остановленный в момент σ_m , через $M_t^{\sigma_m} = M_{t \wedge \sigma_m}$. По построению $\sigma_m \nearrow \infty$, поэтому $M_t^{\sigma_m} \rightarrow M_t$ и $\langle M^{\sigma_m} \rangle_t \rightarrow \langle M \rangle_t$ для любого $t \in T$ и почти всех $\omega \in \Omega$. Мера μ_{nh} совпадает с мерой $\mu_{nh}^{\sigma_m}$, заданной по остановленному процессу $M_t^{\sigma_m}$, для любого фиксированного t и интервала (a, b) , если $b < \sigma_m - h - \frac{1}{n}$. По условию последовательность мер μ_{nh} сходится к мере μ , значит в силу леммы 3.2 предельная мера μ не зависит от $t \in T$. Тогда последовательность мер $\mu_{nh}^{\sigma_m}$ по остановленному процессу также сходится к мере μ^{σ_m} , не зависящей от $t \in T$, причем

$$\mu^{\sigma_m}(a; b) = \mu(a \wedge \sigma_m; b \wedge \sigma_m).$$

Очевидно, $\mu^{\sigma_m} \rightarrow \mu$ при $m \rightarrow \infty$ поточечно по t и ω . Введем обозначение

$$H_{nh}(t) = \sum_{k=0}^{m_t-1} f(M_{t_k}^n) (M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n) -$$

$$- \int_0^t f(M_s) dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t f'(M_s) (d\langle M \rangle_s - \mu(ds)).$$

Необходимо показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P \left(\int_0^T |H_{nh}(t)| dt > \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$.

Введем аналогичное обозначение для остановленного процесса $M_t^{\sigma_m}$

$$H_{nh}^{\sigma_m}(t) = \sum_{k=0}^{m_t-1} f(M_{t_k}^{\sigma_m}) (M_{t_{k+1}}^{\sigma_m} - M_{t_k}^{\sigma_m}) -$$

$$- \int_0^t f(M_s^{\sigma_m}) dM_s^{\sigma_m} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t f'(M_s^{\sigma_m}) (d\langle M^{\sigma_m} \rangle_s - \mu^{\sigma_m}(ds)).$$

Тогда справедливо

$$H_{nh}(t) = H_{nh}^{\sigma_m}(t) + \left(\sum_{k=0}^{m_t-1} f(M_{t_k}^n) (M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n) - \right.$$

$$- \sum_{k=0}^{m_t-1} f(M_{t_k}^{\sigma_m}) (M_{t_{k+1}}^{\sigma_m} - M_{t_k}^{\sigma_m}) \left. \right) -$$

$$- \left(\int_0^t f(M_s) dM_s - \int_0^t f(M_s^{\sigma_m}) dM_s^{\sigma_m} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\int_0^t f'(M_s) d\langle M \rangle_s - \int_0^t f'(M_s^{\sigma_m}) d\langle M^{\sigma_m} \rangle_s \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\int_0^t f'(M_s) \mu(ds) - \int_0^t f'(M_s^{\sigma_m}) \mu^{\sigma_m}(ds) \right). \quad (4.5)$$

Для ограниченного процесса M_t с ограниченной квадратичной вариацией $\langle M \rangle$ в силу леммы 4.1 имеет место сходимость в $L^1(\Omega)$ и $L^1(T)$, значит, справедлива и сходимость по вероятности. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$, для любых $m = 1, 2, \dots$ верно

$$P\left(\int_0^T |H_{nh}^{\sigma_m}(t)| dt > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $M_t^{\sigma_m}$ совпадает с M_t и $\langle M^{\sigma_m} \rangle_t$ совпадает с $\langle M \rangle_t$ для $t < \sigma_m$, то для других слагаемых в выражении (4.5) верны следующие оценки

$$\begin{aligned} & P\left(\int_0^T \left| \sum_{k=0}^{m-1} f(M_{t_k}^n)(M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k=0}^{m-1} f(M_{t_k}^{\sigma_m})(M_{t_{k+1}}^{\sigma_m} - M_{t_k}^{\sigma_m}) \right| dt > \varepsilon\right) \leq P(\sigma_m < 2T), \\ & P\left(\int_0^T \left| \int_0^t f(M_s) dM_s - \int_0^t f(M_s^{\sigma_m}) dM_s^{\sigma_m} \right| dt > \varepsilon\right) \leq \\ & \leq P(\sigma_m < T), \\ & P\left(\int_0^T \left| \int_0^t f'(M_s) d\langle M \rangle_s - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^t f'(M_s^{\sigma_m}) d\langle M^{\sigma_m} \rangle_s \right| dt > \varepsilon\right) \leq P(\sigma_m < T), \\ & P\left(\int_0^T \left| \int_0^t f'(M_s) \mu(ds) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^t f'(M_s^{\sigma_m}) \mu^{\sigma_m}(ds) \right| dt > \varepsilon\right) \leq P(\sigma_m < T). \end{aligned}$$

По условию $P(\sigma_m < T) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Значит, переходя к пределу сначала при $n \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$, а потом при $m \rightarrow \infty$, выражение (4.5) влечет требуемое предельное соотношение

$$P\left(\int_0^T |H_{nh}(t)| dt > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \\ \text{при } n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели обобщенный стохастический интеграл вида (0.1) по обобщенному случайному процессу, ассоциирующему квадратично-интегрируемый непрерывный мартингал. В зависимости от связи между обобщенным дифференциалом d_h и обобщенным

случайным процессом, обобщенный стохастический интеграл ассоциирует различные стохастические интегралы, вид которых определяет теорема 2.1. Полученные результаты востребованы при изучении стохастических уравнений в дифференциалах вида (0.2) для непрерывных мартингалов. Обобщенный случайный процесс, являющийся решением уравнения (0.2), ассоциирует обычный случайный процесс. Вид этого случайного процесса напрямую зависит от общего вида стохастического интеграла, который и построен в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Itô, K. Stochastic integral / K. Itô. // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1944. – Vol. 20. – P. 519–524.
2. Fisk, D.L. Quasi-martingales and stochastic integrals / D.L. Fisk // Tech. Rep. – Vol. 1, Dept. Math. Michigan State Univ. – 1963.
3. Стратонович, Р.Л. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений / Р.Л. Стратонович // Вестник Московского ун-та. – 1964. – Т. 1. – С. 3–12.
4. Ogawa, S. On a Riemann definition of the stochastic integral. I, II / S. Ogawa // Proc. Japan Acad. – 1970. – Vol. 46, № 21. – P. 153–157, 158–161.
5. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 17–22.
6. Лазакович, Н.В. Некоторые аппроксимации стохастических θ -интегралов / Н.В. Лазакович, С.П. Сташулёнок, О.Л. Яблонский // Литовский матем. сборник. – 1999. – Т. 39, № 2. – С. 248–256.
7. Lazakovich, N.V. On the approximation of the solutions of stochastic equations with θ -integrals / N.V. Lazakovich, A.L. Yablonski // Stochastics and Stochastics Reports. – 2004. – Vol. 76, № 2. – P. 135–145.
8. Лазакович, Н.В. Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский // Теория вероятностей и ее применения. – 2005. – Т. 50, № 4. – С. 711–732.
9. Ватанабэ, С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда – М.: Наука, 1986. – 445 с.

Поступила в редакцию 26.04.11.

УДК 517.983.24

ТЕОРЕМА НЕХАРИ НА КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННОЙ ГРУППОЙ ХАРАКТЕРОВ

Р.В. Дыба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE NEHARI THEOREM FOR COMPACT ABELIAN GROUPS WITH LINEARLY ORDERED DUALS

R.V. Dyba

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Теорема Нехари для классических ганкелевых операторов обобщается на случай компактных абелевых групп с линейно упорядоченной группой характеров.

Ключевые слова: компактная абелева группа, линейно упорядоченная группа, оператор Ганкеля, пространство Харди.

The Nehari theorem for classical Hankel operators is generalized to compact abelian groups with linearly ordered duals.

Keywords: compact abelian group, linearly ordered group, Hankel operator, Hardy space.

Введение

Операторы Ганкеля представляют собой один из важнейших классов операторов в пространствах голоморфных функций, имеющий интересные приложения к проблеме моментов, ортогональным полиномам, теории рациональной аппроксимации и другим важным разделам анализа, а также теории прогнозирования и теории управления (см., например, [1], [2]). Одно из равносильных определений ганкелева оператора состоит в том, что в некотором ортонормированном базисе он имеет (вообще говоря, бесконечную) ганкелеву матрицу, т. е. матрицу, элементы которой зависят лишь от суммы индексов. После открытия символа ганкелева оператора теория таких операторов в значительной степени свелась к изучению зависимости свойств оператора от геометрических и аналитических характеристик его символа. Таким образом, в этой теории (так же, как и в теории тёплицевых операторов [1]–[3]) тесно взаимодействуют методы теории функций и функционального анализа. Классическая теорема Нехари [4] дает критерий ограниченности ганкелева оператора в терминах его матрицы. В дальнейшем эта важная теорема подвергалась различным обобщениям и модификациям. В настоящей заметке будет доказано обобщение теоремы Нехари на случай компактных абелевых групп с линейно упорядоченной группой характеров.

1 Вспомогательные сведения и результаты

Пусть G – компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара dx . Обозначим через X группу характеров группы G (т. е. группу

непрерывных гомоморфизмов из G в одномерный тор $\mathbf{T}$). Будем предполагать, что X является линейно упорядоченной группой, т. е. в ней введено отношение линейного порядка, согласованное с групповой операцией. Обозначим через X_+ положительный конус группы X , а через X_- – отрицательный. Другими словами,

$$X_+ = \{\chi \in X \mid \chi \geq 1\},$$

$$X_- = \{\chi \in X \mid \chi \leq 1\}.$$

Множества X_+ и X_- являются подполугруппами группы X , причем

$$X = X_+ \cup X_-, \quad X_+ \cap X_- = \{1\},$$

где 1 обозначает единичный характер группы G .

«Крышкой» будем обозначать преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$. Таким образом,

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx, \quad \chi \in X.$$

Определение 1.1. Пространство Харди $H^2(G)$ над G определяется следующим образом:

$$H^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \hat{f}(\chi) = 0 \quad \forall \chi \in X_- \setminus \{1\}\}.$$

Обозначим через $H_-^2(G)$ ортогональное дополнение пространства Харди в $L^2(G)$. Тогда

$$H_-^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \hat{f}(\chi) = 0 \quad \forall \chi \in X_+\}.$$

При этом X_+ является ортонормированным базисом пространства $H^2(G)$, а $X_- \setminus \{1\}$ – ортонормированным базисом пространства $H_-^2(G)$ (легко проверить, что эти системы ортонормированы и максимальны в соответствующих пространствах).

Определение 1.2. Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$. Оператором Ганкеля (ганкелевым оператором) назовем оператор $H_\varphi: H^2(G) \rightarrow H^2(G)$, определяемый равенством

$$H_\varphi = P_- M_\varphi,$$

где $P_-: L^2(G) \rightarrow H_-^2(G)$ – оператор ортогонального проектирования, а

$$M_\varphi: L^2(G) \rightarrow L^2(G), f \mapsto \varphi f$$

– оператор умножения на φ . Функцию φ будем называть символом оператора H_φ .

Классические ганкелевы операторы соответствуют случаю $G=\mathbf{T}$, $X=\mathbf{Z}$. С точки зрения обобщений интерес представляет уже случай двумерного тора $G=\mathbf{T}^2$, где группа характеров $X=\mathbf{Z}^2$ наделена лексикографическим порядком.

Определение 1.3. Рассмотрим пространство $H^\infty(G) := \{f \in L^\infty(G) \mid fH^2(G) \subset H^2(G)\}$.

Известно (см. [3]), что $H^\infty(G)$ есть банахова алгебра, содержащая аналитические полиномы (т.е. линейные комбинации элементов из X_+).

Для доказательства основного результата понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1.1. Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$. Справедливы следующие утверждения:

1) оператор Ганкеля с символом φ ограничен;

$$2) H_\varphi = H_{\varphi+\psi} \Leftrightarrow \psi \in H^\infty(G);$$

$$3) \|H_\varphi\| \leq \text{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)).$$

Доказательство. 1) Оператор M_φ ограничен в $L^2(G)$, так как для любой функции $f \in L^2(G)$

$$\begin{aligned} \|M_\varphi f\|_2 &= \|\varphi f\|_2 = \left(\int_G |\varphi(t)|^2 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \left(\int_G |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_\infty \|f\|_2. \end{aligned}$$

Поэтому оператор $H_\varphi = P_- M_\varphi$ также ограничен.

2) Для любых $f \in H^2(G)$ и $\varphi, \psi \in L^\infty$ имеем

$$H_{\varphi+\psi} f = P_- (\varphi f + \psi f),$$

а также

$$H_{\varphi+\psi} f = P_- ((\varphi + \psi)f) = P_- (\varphi f) + P_- (\psi f).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} H_\varphi = H_{\varphi+\psi} &\Leftrightarrow (\forall f \in H^2(G)) P_- (\psi f) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall f \in H^2(G)) \psi f \in H^2(G) \Leftrightarrow \psi \in H^\infty(G). \end{aligned}$$

3) Для любых $\psi \in H^\infty(G)$ и $f \in H^2(G)$ имеем

$$\begin{aligned} \|H_\varphi f\|_2 &= \|H_{\varphi+\psi} f\|_2 = \|P_- ((\varphi + \psi)f)\|_2 \leq \\ &\leq \|(\varphi + \psi)f\|_2 \leq \|\varphi + \psi\|_\infty \|f\|_2. \end{aligned}$$

Тогда по определению нормы оператора $\|H_\varphi\| \leq \|\varphi + \psi\|_\infty$ для любого $\psi \in H^\infty(G)$, откуда следует, что

$$\|H_\varphi\| \leq \inf_{\psi \in H^\infty(G)} \|\varphi + \psi\|_\infty = \text{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2. Оператор Ганкеля H_φ удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям:

$$H_\varphi S_\chi = P_- S_\chi H_\varphi \quad \forall \chi \in X_+, \quad (1.1)$$

где $S_\chi = M_\chi \mid H^2(G)$.

Доказательство. Для любых $\varphi \in L^\infty$,

$\chi \in X_+$, $f \in H^2(G)$ имеем

$$H_\varphi S_\chi f = P_- M_\varphi (\chi f) = P_- (\varphi \chi f) = \varphi \chi f - P_+ (\varphi \chi f),$$

где $P_+ = I - P_-$. Ясно, что P_+ есть ортопроектор на подпространство $H^2(G)$ пространства $L^2(G)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} P_- S_\chi H_\varphi f &= P_- (\chi P_- (\varphi f)) = P_- [\chi \varphi f - \chi P_+ (\varphi f)] = \\ &= [\chi \varphi f - \chi P_+ (\varphi f)] - P_+ [\chi \varphi f - \chi P_+ (\varphi f)] = \\ &= \chi \varphi f - P_+ (\chi \varphi f) - \chi P_+ (\varphi f) + P_+ \chi P_+ (\varphi f). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\chi P_+ (\varphi f) \in H^2(G)$, а значит, $P_+ \chi P_+ (\varphi f) = \chi P_+ (\varphi f)$, лемма доказана.

Равенство (1.1) будем далее называть уравнением Ганкеля.

Определение 1.4. Ганкелевой формой называют комплексную билинейную форму вида

$$A(a, b) = \sum_{\mu, \nu \in X_+} k(\mu \nu) a(\mu) b(\nu), \quad (1.2)$$

где a, b, k – функции на X_+ . При этом функция k называется ядром формы A .

Если $|A(a, b)| \leq M < \infty \quad \forall a, b$ таких, что

$$\sum_{\mu \in X_+} |a(\mu)|^2 = \sum_{\nu \in X_+} |b(\nu)|^2 = 1,$$

то форма A называется ограниченной, а число M – константой ограниченности этой формы. Нормой формы A называют наименьшую из ее констант ограниченности.

Далее важную роль будет играть следующий результат.

Теорема 1.1 [5]. Ганкелева форма (1.2) на X_+ ограничена тогда и только тогда, когда ее ядро имеет вид

$$k(\chi) = \int_G \varphi(x) \chi(x) dx, \quad \chi \in X_+,$$

где $\varphi \in L^\infty(G)$. При этом $\|\varphi\|_\infty \leq M$, где M – константа ограниченности формы A .

В частности, из этой теоремы следует, что норма формы A равняется $\|\varphi\|_\infty$ для функции φ , удовлетворяющей указанным выше условиям.

Определение 1.5. Пусть L_1, L_2 – гильбертовы пространства, и пусть $H : L_1 \rightarrow L_2$ – ограниченный линейный оператор. *Обобщенными матричными элементами оператора H* называются скалярные произведения

$$\langle Hx, y \rangle, x \in B_1, y \in B_2,$$

где B_1, B_2 – ортонормированные базисы в L_1, L_2 соответственно.

Следующая простая лемма показывает, что оператор однозначно определяется своими матричными элементами.

Лемма 1.3. Пусть K и K_- – гильбертовы пространства, $H_1, H_2 : K \rightarrow K_-$ – ограниченные линейные операторы, X_+ – ортонормированный базис в K , X_- – ортонормированный базис в K_- . Если

$$\langle H_1 \chi, \eta \rangle = \langle H_2 \chi, \eta \rangle \quad \forall \chi \in X_+, \forall \eta \in X_-,$$

то $H_1 = H_2$.

Доказательство. Любой элемент $f \in K$ разлагается в ряд Фурье $f = \sum_{\chi \in X_+} f_\chi \chi$, причем

$$H_1 f = \sum_{\chi \in X_+} f_\chi H_1 \chi,$$

$$H_2 f = \sum_{\chi \in X_+} f_\chi H_2 \chi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle H_1 f, \eta \rangle &= \left\langle \sum_{\chi \in X_+} f_\chi H_1 \chi, \eta \right\rangle = \\ &= \sum_{\chi \in X_+} f_\chi \langle H_1 \chi, \eta \rangle = \sum_{\chi \in X_+} f_\chi \langle H_2 \chi, \eta \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{\chi \in X_+} f_\chi H_2 \chi, \eta \right\rangle = \langle H_2 f, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, $H_1 f = H_2 f$ для любого $f \in K$. Лемма доказана.

2 Основная теорема

Основным результатом данной заметки является следующее обобщение теоремы Нехари.

Теорема 2.1. Ограниченный оператор $H : H^2(G) \rightarrow H_-^2(G)$ является оператором Ганкеля, т. е. $H = H_\varphi$, $\varphi \in L^\infty(G)$, тогда и тогда, когда H удовлетворяет уравнению Ганкеля. При этом $\|H\| = \|\varphi\|_\infty = \text{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G))$.

Доказательство. Необходимость доказана в лемме 1.2. Докажем достаточность. Пусть H – ограниченный оператор, удовлетворяющий уравнению Ганкеля. Рассмотрим билинейную форму

$$A(f, g) := \langle Hf, \bar{g} \rangle \quad (f, g \in H^2(G)).$$

Пусть $f = \sum_{\chi \in X_+} a_\chi \chi$, $\bar{g} = \sum_{\xi \in X_+} \bar{b}_\xi \bar{\xi}$ – разложения в ряды Фурье. Тогда

$$Hf = \sum_{\chi \in X_+} a_\chi H\chi,$$

$$H\bar{g} = \sum_{\xi \in X_+} \bar{b}_\xi H\bar{\xi},$$

а потому

$$\begin{aligned} \langle Hf, \bar{g} \rangle &= \left\langle \sum_{\chi \in X_+} a_\chi H\chi, \sum_{\xi \in X_+} \bar{b}_\xi \bar{\xi} \right\rangle = \\ &= \sum_{\chi, \xi \in X_+} \langle H\chi, \bar{\xi} \rangle a_\chi \bar{b}_\xi. \end{aligned}$$

Так как оператор H удовлетворяет уравнению Ганкеля, то

$$\begin{aligned} \langle H\chi, \bar{\xi} \rangle &= \langle HS_\chi \mathbf{1}, \bar{\xi} \rangle = \langle P_-(S_\chi H\mathbf{1}), \bar{\xi} \rangle = \\ &= \langle S_\chi H\mathbf{1}, P_-(\bar{\xi}) \rangle = \langle S_\chi H\mathbf{1}, \bar{\xi} \rangle = \\ &= \langle \chi H\mathbf{1}, \bar{\xi} \rangle = \langle H\mathbf{1}, \overline{\chi\xi} \rangle = k(\chi\xi), \end{aligned}$$

где $k(\chi) := \langle H\mathbf{1}, \bar{\chi} \rangle$. Таким образом, $A(f, g)$ – ганкелева форма с ядром k . Докажем, что она ограничена. Действительно, для любых $f, g \in H^2(G)$ имеем

$$|A(f, g)| = |\langle Hf, \bar{g} \rangle| \leq \|Hf\|_2 \cdot \|g\|_2 \leq \|H\| \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Поэтому при $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$

$$|A(f, g)| \leq \|H\|.$$

Следовательно, форма A ограничена с константой ограниченности $\|H\|$. По теореме 1.1 существует функция $\varphi \in L^\infty(G)$ такая, что $\|\varphi\|_\infty \leq \|H\|$ и

$$k(\chi) = \int_G \varphi(x) \chi(x) dx, \chi \in X_+$$

(т. е. k – обратное преобразование Фурье функции φ). Тогда

$$\langle H\chi, \bar{\xi} \rangle = k(\chi\xi) = \int_G \varphi(x) \overline{\chi(x)\xi(x)} dx = \hat{\varphi}(\overline{\chi\xi}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle H_\varphi \chi, \bar{\xi} \rangle &= \langle P_-(\varphi \chi), \bar{\xi} \rangle = \langle \varphi \chi, P_-(\bar{\xi}) \rangle = \langle \varphi \chi, \bar{\xi} \rangle = \\ &= \int_G \varphi(x) \chi(x) \xi(x) dx = \hat{\varphi}(\overline{\chi\xi}). \end{aligned}$$

Теперь из леммы 1.3 следует, что $H = H_\varphi$.

Наконец, в силу леммы 1.1

$$\|H_\varphi\| \leq \text{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)) = \inf_{\psi \in H^\infty(G)} \|\varphi + \psi\|_\infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_\infty &\leq \|H\| = \|H_\varphi\| \leq \text{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)) = \\ &= \inf_{\psi \in H^\infty(G)} \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|H\| = \|\varphi\|_\infty = \text{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty)$, что и завершает доказательство теоремы.

Идущее ниже следствие теоремы 2.1 дает равносильное определение ганкелева оператора.

Следствие. Ограниченный оператор $H : H^2(G) \rightarrow H_-^2(G)$ будет ганкелевым, если и только если его обобщенные матричные элементы $\langle H\chi, \bar{\xi} \rangle$ зависят лишь от

$$\chi\xi \quad (\chi \in X_+, \xi \in X_+ \setminus \{\mathbf{1}\}).$$

Доказательство. Пусть обобщенные матричные элементы оператора H удовлетворяют

условиям следствия, т. е. $\langle H\chi, \bar{\xi} \rangle = a(\chi\xi)$, где a

– некоторая функция на X_+ , $\chi \in X_+$, $\xi \in X_+ \setminus \{1\}$.

Покажем, что H удовлетворяет уравнению Ганкеля, т. е.

$$HS_\chi f = P_- S_\chi Hf \text{ для любых } f \in H^2(G), \chi \in X_+.$$

Так как любая функция $f \in H^2(G)$ разлагается в ряд Фурье $f = \sum_{\chi \in X_+} f_\chi \chi$, то последнее равенство достаточно доказать для случая, когда f есть элемент базиса. В этом случае имеем $\forall \chi, \xi, \eta \in X_+$

$$\langle H\chi\xi, \bar{\eta} \rangle = a(\chi\xi\eta) \quad (\bar{\eta} \in X_- \cup \{1\}).$$

А с другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle P_-(\chi H\xi), \bar{\eta} \rangle &= \langle \chi H\xi, P_-(\bar{\eta}) \rangle = \\ &= \langle \chi H\xi, \bar{\eta} \rangle = \langle H\xi, \overline{\chi\eta} \rangle = a(\xi\chi\eta). \end{aligned}$$

Значит, оператор H ганкелев по теореме 2.1.

Обратно, если H ганкелев, то он удовлетворяет уравнению Ганкеля и, следовательно, для любых $\chi, \xi \in X_+$ имеем для обобщенных матричных элементов оператора H

$$\begin{aligned} \langle H\chi, \bar{\xi} \rangle &= \langle HS_\chi 1, \bar{\xi} \rangle = \langle P_-(S_\chi H1), \bar{\xi} \rangle = \\ &= \langle S_\chi H1, P_-(\bar{\xi}) \rangle = \langle S_\chi H1, \bar{\xi} \rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle \chi H1, \bar{\xi} \rangle = \langle H1, \overline{\chi\xi} \rangle,$$

что и завершает доказательство следствия.

Автор выражает благодарность профессору А.Р. Миротину за руководство данной работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пеллер, В.В. Операторы Ганкеля и их приложения / В.В. Пеллер. // Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2005. – 1028 с.
2. Nikolski, N.K. Operators, Functions and Systems: An Easy Reading / N.K. Nikolski // Amer. Math. Soc. – 2002. – Vol. I. – 461 с.
3. Миротин, А.Р. Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами / А.Р. Миротин // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 5. – С. 101–116.
4. Nehari, Z. On bounded bilinear forms / Z. Nehari // Ann. of Math. – 1957. – Vol. 65, № 2. – P. 153–162.
5. Wong, J. Note on Theorem of Nehari on Hankel forms / J. Wong // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – Vol. 24, № 1. – P. 103–105.

Поступила в редакцию 25.04.11.

УДК 512.542.6

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСОТЫ 3 РЕШЕТКИ τ -ЗАМКНУТЫХ n -КРАТНО ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

П.А. Жизневский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ELEMENTS OF THE HEIGHT 3 OF THE LATTICE OF ALL τ -CLOSED n -MULTIPLY ω -COMPOSITION FORMATIONS

P.A. Zhiznevsky

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получено описание элементов высоты 3 решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций. Установлена дистрибутивность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных подформаций некоторой τ -замкнутой n -кратно ω -композиционной формации $\mathfrak{F}$, имеющей высоту 3 в решетке всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.

Ключевые слова: конечная группа, формация, ω -композиционный спутник, τ -замкнутая n -кратно ω -композиционная формация, высота формации.

In this paper elements of the height 3 of the lattice $\mathcal{C}_{\omega_n}^{\tau}$ of all τ -closed n -multiply ω -composition formations are described.

It is proved that if $\mathfrak{F}$ is an element of the height 3 of the lattice $\mathcal{C}_{\omega_n}^{\tau}$, then the lattice of τ -closed n -multiply ω -composition subformations of $\mathfrak{F}$ is distributive.

Keywords: finite group, formation, ω -composition satellite, τ -closed n -multiply ω -composition formation, height of formation.

AMS 2000 Mathematics Subject Classification: 20D10.

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Используется терминология, принятая в [1]–[3].

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел. Тогда любую функцию вида $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называют ω -композиционным спутником. Для произвольного ω -композиционного спутника f полагают

$$CF_{\omega}(f) = \{G \mid G/R_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \pi(Com(G)) \cap \omega\},$$

где $Com(G)$ – множество всех абелевых композиционных факторов группы G , $R_{\omega}(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω -подгруппа группы G , $C^p(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$). Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ для некоторого ω -композиционного спутника f , то говорят, что она ω -композиционна, а f – ω -композиционный спутник этой формации.

Всякую формацию считают 0-кратно ω -композиционной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют

n -кратно ω -композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$ -кратно ω -композиционными формациями.

Подгрупповым функтором (см. [2]) называется всякое отображение τ , сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что:

$$1) G \in \tau(G);$$

2) для всякого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Для произвольных подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \leq \tau_2$ тогда и только тогда, когда $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G .

Подгрупповой функтор τ называется тривиальным, если для любой группы G имеет место $\tau(G) = \{G\}$. Символы s_{sn} и s_n соответственно обозначают такие подгрупповые функторы, что $s_{sn}(G)$ – множество всех субнормальных подгрупп группы G , а $s_n(G)$ – множество всех нормальных подгрупп группы G .

Напомним, что символом $c_{\omega_n}^\tau$ обозначается решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций, а через $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ – решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных подформаций некоторой τ -замкнутой n -кратно ω -композиционной формации $\mathfrak{F}$.

Формации, принадлежащие $c_{\omega_n}^\tau$ называют $c_{\omega_n}^\tau$ -формациями. Если все значения ω -композиционного спутника принадлежат решетке $c_{\omega_{n-1}}^\tau$, то такой спутник называют $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значным.

Если $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω -композиционных $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значных спутников формации $\mathfrak{F}$, то спутник $\bigcap_{i \in I} f_i$ называется минимальным ω -композиционным $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значным спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ -замкнутой n -кратно ω -композиционной не $\mathfrak{H}$ -формацией или, иначе, $\mathfrak{H}_{\omega_n}^\tau$ -критической, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной $c_{\omega_n}^\tau$ -подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Говорят, что группа G является τ -минимальной не $\mathfrak{H}$ -группой, если $G \notin \mathfrak{H}$, но классу $\mathfrak{H}$ принадлежит каждая собственная τ -подгруппа группы G .

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $c_{\omega_n}^\tau \text{form} \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех $c_{\omega_n}^\tau$ -формаций, которые содержат $\mathfrak{X}$. В частности, пишут $c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$.

Для произвольных непустых $c_{\omega_n}^\tau$ -формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таких, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ символом $\mathfrak{F}/_{\omega_n}^\tau \mathfrak{M}$ обозначается такая подрешетка решетки $c_{\omega_n}^\tau$, которая состоит из всех $c_{\omega_n}^\tau$ -формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты k решетки $c_{\omega_n}^\tau$, когда k – точная верхняя грань длин цепей

$$\emptyset = \mathfrak{F}_0 \subset (1) = \mathfrak{F}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_{k-1} \subset \mathfrak{F}_k = \mathfrak{F},$$

в которых $\mathfrak{F}_i$ – $c_{\omega_n}^\tau$ -формация при всех $i = 0, \dots, k$. Высоту $c_{\omega_n}^\tau$ -формации $\mathfrak{F}$ в решетке $c_{\omega_n}^\tau$ будем обозначать через $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие подгрупповые функторы τ , что $\tau \leq s_{sn}$.

1 Предварительные результаты

Лемма 1.1 [4, с. 28]. В любой модулярной решетке M отображения $\varphi_a : x \rightarrow x \wedge a$ и $\varphi_b : y \rightarrow y \vee b$ являются взаимно-обратными изоморфизмами между интервалами $[b, a \vee b]$ и $[a \wedge b, a]$.

Лемма 1.2 [5]. Тогда и только тогда $c_{\omega_n}^\tau$ -формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2 решетки $c_{\omega_n}^\tau$ ($n \geq 1$), когда $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$, где G – простая группа.

Лемма 1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^\tau$ -неприводимая формация ($n \geq 1$). Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной $c_{\omega_n}^\tau$ -формацией с единственной максимальной $c_{\omega_n}^\tau$ -подформацией.

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – множество всех собственных $c_{\omega_n}^\tau$ -подформаций формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^\tau$ -неприводимая формация, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольная $c_{\omega_n}^\tau$ -формация с условием: $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$ и, следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит выбору формации $\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{M}$ – максимальная $c_{\omega_n}^\tau$ -подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ найдется еще одна максимальная $c_{\omega_n}^\tau$ -подформация $\mathfrak{M}_1$. Так как $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит выбору $\mathfrak{M}_1$. Значит, $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная $c_{\omega_n}^\tau$ -подформация формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $c_{\omega_n}^\tau \text{form} G \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $c_{\omega_n}^\tau \text{form} G \subset \mathfrak{F}$. Тогда $c_{\omega_n}^\tau \text{form} G \subseteq \mathfrak{X}$. Поэтому

$$c_{\omega_n}^\tau \text{form} G \subseteq c_{\omega_n}^\tau \text{form} \mathfrak{X} = \mathfrak{M},$$

что противоречит выбору группы G . Следовательно, $c_{\omega_n}^\tau \text{form} G = \mathfrak{F}$ – однопорожденная $c_{\omega_n}^\tau$ -формация. Лемма доказана.

Лемма 1.4 [5]. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая нильпотентная насыщенная формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega_n}^\tau$ -критической формацией ($n \geq 1$), когда $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(G)$, что либо $\pi = \pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, либо $\pi \neq \emptyset$ и выполняется одно из следующих условий:

- 1) G – группа простого порядка
 $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(\mathfrak{H}))$;

2) $G=[P]Q$, где $P=C_G(P)$ – абелева p -группа, $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$ и $|Q|=q \neq p$, p и q – простые числа.

Лемма 1.5 [6]. Если G – простая группа, порядок которой не принадлежит ω , то $c_{\omega}^{\tau} \text{form} G = \text{form} G = \tau \text{form} G$.

Лемма 1.6 [7]. Пусть $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – непустая совокупность групп и $n \geq 1$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значный спутник f и справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, для всех $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega$;
- 3) $f(p) = \emptyset$, для всех $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$;
- 4) если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ и спутник h $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значен, то $f(p) = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A)=1)$, для всех $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega$ и $f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(A)=1)$.

Лемма 1.7. Если G – простая группа, порядок которой не принадлежит ω и $n \geq 1$, то $c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G = \dots = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G = \tau \text{form} G = \text{form} G$.

Доказательство. Проведем индукцию по n . При $n=0,1$ утверждение вытекает из леммы 1.5. Предположим, что $n > 1$ и утверждение леммы верно при $n-1$. Пусть $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G$ и f – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\text{form} G \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \text{form} G$ и пусть H – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \text{form} G$. Тогда H – монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\text{form} G}$. Предположим, что $\pi(\text{Com}(Q)) \cap \omega \neq \emptyset$. Тогда Q – абелева q -группа, где $q \in \omega$. Понятно, что $C^q(H) = Q$. Из леммы 1.6, получаем $H/C^q(H) = H/Q \in f(q) \neq \emptyset$. Но поскольку $q \in \omega$, то $q \notin \pi(\text{Com}(G))$ и, согласно лемме 1.6, $f(q) = \emptyset$. Противоречие. Значит, $\pi(\text{Com}(Q)) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $R_{\omega}(H) = 1$. Ввиду леммы 1.6 и предположения индукции получаем

$$H \simeq H/R_{\omega}(H) \in f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form} G = \text{form} G.$$

Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \text{form} G$. Таким образом,

$$c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G = \dots = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G = \tau \text{form} G = \text{form} G.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.8 [1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\mathfrak{F}$ p -композиционна для любого простого числа $p \notin \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$;

2) если $\emptyset \neq \omega_1 \subseteq \omega$ и $\mathfrak{F}$ – ω -композиционна, то $\mathfrak{F}$ – ω_1 -композиционна;

3) если $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ и формация $\mathfrak{F}$ является ω_i -композиционной для всех $i \in I$, то $\mathfrak{F}$ – ω -композиционна.

Напомним, что для произвольных ω -композиционных $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значных спутников f и h полагают $f \leq h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Лемма 1.9 [1]. Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω -композиционные $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

Лемма 1.10 [8, с. 18]. Любая подформация формации $\mathfrak{N}$ замкнута относительно подгрупп.

Лемма 1.11 [3, с. 81]. Пусть $A \in \text{form} G$, где G – конечная группа. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) экспонента группы A не превосходит экспоненту группы G ;

2) каждый главный фактор группы A изоморфен некоторому главному фактору группы G ;

3) каждый композиционный фактор группы A изоморфен некоторому композиционному фактору группы G ;

4) степень любого нильпотентного фактора группы A не превосходит наибольшую из степеней нильпотентных факторов группы G .

Лемма 1.12 [3, с. 175]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева формация, когда $\mathfrak{F} = \text{form} G$, где G – одна из следующих групп:

1) ненильпотентная монолитическая группа с таким цоколем P , что $P \not\subseteq \Phi(G)$ и факторгруппа G/P абелева;

2) группа кватернионов порядка 8;

3) неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p .

Лемма 1.13 [9]. Пусть $\mathfrak{F} = \text{form} A$ – формация, порожденная простой группой A . Тогда любая неединичная группа из $\mathfrak{F}$ имеет вид $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$, где $A_1 \simeq A_2 \simeq \dots \simeq A_r \simeq A$.

Лемма 1.14 [2]. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, $\mathfrak{M} = S_{\tau}(G)$. Тогда $\tau \text{form} \mathfrak{M} = \text{form} \mathfrak{M}$.

Лемма 1.15 [3, с. 40]. Пусть M и N – идеалы мультикольца A , причем $M \subseteq C_A(N)$. Тогда $[N](A/M) \in \text{form} A$.

Напомним, что через $H\mathfrak{X}$ обозначается множество всех гомоморфных образов всех групп из $\mathfrak{X}$.

Лемма 1.16 [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная непустая формация и пусть у каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$ -корадикал G^δ не имеет фраттиниевых G -главных факторов. Тогда, если A – монолитическая группа из $\text{form}\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, то $A \in H\mathfrak{X}$.

Лемма 1.17 [2, с. 41]. Пусть A – монолитическая группа с цоколем $R \not\subseteq \Phi(A)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \tau \text{form} A$ τ -неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ -замкнутая подформация $\mathfrak{M} = \tau \text{form}(\{A/R\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ -подгрупп группы A .

Лемма 1.18 [10]. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация. Тогда $\mathfrak{N}_\omega^n \mathfrak{F} = \underbrace{\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_\omega \dots \mathfrak{N}_\omega}_{n \text{ раз}} \mathfrak{F}$ является n -кратно ω -композиционной формацией.

Лемма 1.19 [11]. Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая наследственная формация и $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая формация.

Лемма 1.20 [2]. Для любой совокупности τ -замкнутых формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ имеет место $\tau \text{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i) = \text{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i)$.

Лемма 1.21 [4, с. 25]. Любая цепь является дистрибутивной решеткой.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Тогда и только тогда $c_{\omega_n}^\tau$ -формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки $c_{\omega_n}^\tau$ ($n \geq 1$), когда $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$, где G – одна из следующих групп:

- 1) $G = A_1 \times A_2$, где A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы;
- 2) G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{N}_p$ -группа с нефраттиниевым цоколем $P = G^{\mathfrak{N}_p} \neq G$, что $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$ и $p \in \omega$;
- 3) G – циклическая группа порядка p^2 , $p \notin \omega$;
- 4) G – неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;
- 5) G – монолитическая группа с нефраттиниевым цоколем $P \neq G$ таким, что $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, и найдется такая простая группа A , что $|A| \notin \omega$ и факторгруппа G/P , а также всякая неединичная группа из $\tau(G) \setminus \{G\}$ имеют вид $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $t \geq 1$, $A_1 \simeq A_2 \simeq \dots \simeq A_t \simeq A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки $c_{\omega_n}^\tau$. Предположим, что $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau$ -приводимая формация. Пусть $\mathfrak{M}$ – максимальная $c_{\omega_n}^\tau$ -подформация в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$ – собственная $c_{\omega_n}^\tau$ -подформация из $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{K}$. Ясно, что $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{K}) \leq 2$. Поскольку $c_{\omega_n}^\tau$ -формация высоты 1 в решетке $c_{\omega_n}^\tau$ – это формация единичных групп (1), а формация $\mathfrak{K} \neq (1)$, то $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{K}) = 2$. Значит, $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{M} = (1)$. Согласно лемме 1.1, имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}_{\omega_n}^\tau \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{K}_{\omega_n}^\tau \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{K}_{\omega_n}^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}) = \mathfrak{K}_{\omega_n}^\tau (1).$$

Тогда

$$h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F}) = h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{M}) + h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{K}) - 1.$$

Так как $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{K}) = 2$, то $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{M}) = 2$. Применяя теперь лемму 1.2, видим, что $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A_1$ и $\mathfrak{K} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A_2$, где A_i – простая группа, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{K}$, то A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы. Таким образом, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$ и относительно группы $G = A_1 \times A_2$ выполняется условие 1) теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau$ -неприводимая формация. Тогда по лемме 1.3 в $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$ имеется единственная максимальная $c_{\omega_n}^\tau$ -подформация $\mathfrak{M}$, причем $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{M}) = 2$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_{\omega_n}^\tau$ -критическая формация. По лемме 1.2, $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A$, где A – простая группа.

Пусть A – группа простого порядка $p \in \omega$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{N}_p)_{\omega_n}^\tau$ -критическая формация. По лемме 1.4, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$, где G такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{N}_p$ -группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{N}_p} \not\subseteq \Phi(G)$, что либо $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, либо G – группа простого порядка $q \in \omega$. Если G – группа простого порядка $q \in \omega$, то ввиду леммы 1.2, $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F}) = 2$. Противоречие. Значит, рассматриваемый случай невозможен. Поэтому, $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$. Если $G = P$, то снова по лемме 1.2 получаем $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F}) = 2$. Противоречие. Следовательно, $P \neq G$ и группа G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Пусть теперь A – простая группа, порядок которой не принадлежит ω . Тогда по лемме 1.7, $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A = \text{form} A$.

Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда G – монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{M}$ -группа с цоклем $P = G^{\mathfrak{M}}$ и $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G$.

Предположим, что $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega \neq \emptyset$. Тогда P – абелева p -группа, $p \in \omega$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ содержит две различные максимальные $c_{\omega_n}^{\tau}$ -подформации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_p$, что противоречит $c_{\omega_n}^{\tau}$ -неприводимости формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, такой случай невозможен.

Пусть теперь $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$. Поскольку $G/P \in \mathfrak{M} = \text{form} A$ и $\pi(\text{Com}(A)) \cap \omega = \emptyset$, то получаем, что $\pi(\text{Com}(G)) \cap \omega = \emptyset$. Тогда по лемме 1.8 формация $\mathfrak{F}$ и все ее подформации ω -композиционны. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная ω -композиционная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда $\pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega = \emptyset$. Ввиду примера 1 из [1] формация $\mathfrak{X}$ имеет ω -композиционный спутник r такой, что $r(a) = \emptyset$ для всех $a \in \omega$ и $r(\omega') = \mathfrak{X}$. Заметим, что все значения спутника r ω -композиционны. Значит, формация $\mathfrak{X}$ – n -кратно ω -композиционна. Итак, формация $\mathfrak{F}$ и все ее подформации n -кратно ω -композиционны. Следовательно, высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех τ -замкнутых формаций совпадает с ее высотой в решетке $c_{\omega_n}^{\tau}$, т.е. $h^{\tau}(\mathfrak{F}) = h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 3$.

Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна. Тогда по лемме 1.10 высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех формаций совпадает с ее высотой в решетке всех τ -замкнутых формаций, т.е. $h(\mathfrak{F}) = h^{\tau}(\mathfrak{F}) = h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 3$.

Допустим, что формация $\mathfrak{F}$ абелева. Тогда G – абелева монолитическая группа. Согласно основной теореме о конечных абелевых группах, G – циклическая примарная группа. Пусть $|G| = p^k$, где $p \notin \omega$ и $k \geq 0$. Тогда ввиду примера 5.3.3 [2] получаем, что $h(\mathfrak{F}) = k + 1$. Но по условию $h(\mathfrak{F}) = 3$. Следовательно, $k = 2$. Таким образом, G – циклическая группа порядка p^2 , где $p \notin \omega$, т.е. G удовлетворяет условию 3) теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ – нильпотентная неабелева формация. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также нильпотентна. Значит, A не может быть простой неабелевой группой. Поэтому A – группа простого порядка p , $p \notin \omega$ и формация $\mathfrak{M}$ – абелева. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева

формация. Согласно лемме 1.12 группа G – либо неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p ($p \notin \omega$), либо группа кватернионов порядка 8. В первой случае группа G удовлетворяет условию 4) теоремы. Пусть G – группа кватернионов порядка 8. Тогда в G имеется циклическая подгруппа M порядка 4. По лемме 1.10, $M \in \mathfrak{F}$. Тогда мы имеем цепь подформаций: $(1) \subset \text{form} Z_2 \subset \text{form} Z_4$, где Z_2 и Z_4 – циклические группы порядков 2 и 4 соответственно. Значит, $h(\text{form} Z_4) = 3$. Но $h(\mathfrak{F}) = 3$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \text{form} Z_4$. Получили противоречие, так как формация $\mathfrak{F}$ неабелева. Таким образом, данный случай невозможен.

Предположим теперь, что формация $\mathfrak{F}$ ненильпотентна. Допустим, что $P \not\subseteq \Phi(G)$. Так как $P = G^{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M} = \text{form} A$ и G – τ -минимальная не $\mathfrak{M}$ -группа, то ввиду леммы 1.13 получаем, что G удовлетворяет условию 5) теоремы. Пусть теперь $P \subseteq \Phi(G)$. Тогда P – абелева p -группа для некоторого простого числа p . Поскольку $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, то $p \notin \omega$. Пусть A – абелева группа. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Поскольку $G/P \in \mathfrak{M}$ и $P \subseteq \Phi(G)$, то в силу насыщенности формации $\mathfrak{N}$ получаем, что $G \in \mathfrak{N}$. Противоречие, так как $\mathfrak{F}$ ненильпотентная формация. Следовательно, A – простая неабелева группа. Теперь поскольку G – ω' -группа и τ -минимальная не $\mathfrak{M}$ -группа, то по лемме 1.14, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G = \text{form} G$. Рассмотрим группу $G_1 = [P](G/C_G(P))$. Согласно лемме 1.15, $G_1 \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\text{form} G_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $G_1 \notin \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F} = \text{form} G_1$. Таким образом, $G \in \text{form} G_1 \setminus \mathfrak{M}$. Поскольку $G_1^{\mathfrak{M}}$ не имеет фраттиниевых G_1 -главных факторов, то по лемме 1.16 G является гомоморфным образом группы G_1 . Но $G_1/P \in \mathfrak{M}$ и P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G_1 . Следовательно, $G \cong G_1$, что невозможно. Вновь полученное противоречие показывает, что данный случай невозможен.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условию 1) теоремы. Рассмотрим подформации $\mathfrak{F}_1 = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A_1$ и $\mathfrak{F}_2 = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A_2$. Если $A_1 = Z_p$ и $A_2 = Z_q$, где $p, q \in \omega$, то $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{N}_q$. Значит, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Если $p \in \omega$, $q \notin \omega$, то $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}_2 = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A_2$. По лемме 1.13 любая группа из $\mathfrak{F}_2$ имеет вид $H_1 \times \dots \times H_t$, где $t \geq 1$ и $H_1 \cong \dots \cong H_t \cong A_2$. Так как $p \neq q$, то $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Аналогично доказывается случай,

когда $p \notin \omega$, $q \in \omega$. Если $p \notin \omega$, $q \notin \omega$, то обе формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ состоят из прямых произведений групп, изоморфных A_1 и A_2 соответственно. Так как A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы, то $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Последнее выполняется и в случае, когда хотя бы одна из групп A_i является простой неабелевой группой, $i = 1, 2$.

Таким образом, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. По лемме 1.2, $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_1) = h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_2) = 2$. Согласно лемме 1.1, имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F}_2 /_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 /_{\omega_n}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_2 /_{\omega_n}^{\tau} (1).$$

Значит, $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_1) + h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_2) - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$.

Если для группы G выполняется условие 2) теоремы, то, по лемме 1.4, $\mathfrak{F} - (\mathfrak{N}_p)_{\omega_n}^{\tau}$ -критическая формация и, значит, $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть для группы G выполняется условие 3) теоремы. Тогда ввиду леммы 1.7 формация $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G = \text{form} G$ и всякая подформация из $\mathfrak{F}$ τ -замкнута и n -кратно ω -композиционна. Значит, $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = h(\mathfrak{F})$. Если M – максимальная подгруппа в G и $\mathfrak{M} = \text{form} M$, то $|M| = p$ и по лемме 1.2, $h(\mathfrak{M}) = 2$. Но ввиду леммы 1.11, $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация в $\mathfrak{F}$. Следовательно, $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = h(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть группа G удовлетворяет условию 4) теоремы. Так как $\mathfrak{F}$ – неприводимая формация, то по лемме 1.3 в $\mathfrak{F}$ имеется единственная максимальная подформация $\mathfrak{M} = \text{form} H$. Согласно лемме 1.12, $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева формация. Тогда формация $\mathfrak{M}$ – абелева. Если H – абелева группа экспоненты p^2 ($p \notin \omega$), то ввиду леммы 1.2, $h(\mathfrak{M}) > 2$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$, что невозможно, так как $\mathfrak{F}$ неабелева. Значит, $H = Z_p$ группа простого порядка $p \notin \omega$. Согласно лемме 1.2, $h(\mathfrak{M}) = h(\text{form} Z_p) = 2$. Поэтому $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = h(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 5) теоремы и пусть $\mathfrak{M}$ – формация всех таких групп, у которых порядки композиционных факторов не принадлежит ω . Формация $\mathfrak{M}$ является s_n -замкнутой. Следовательно, она s_n -замкнута. Поскольку мы рассматриваем только такие подгрупповые функторы τ , что $\tau \leq s_n$, то получаем, что формация $\mathfrak{M}$ τ -замкнута. Очевидно, что $G \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\tau \text{form} G \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 1.8, формация $\tau \text{form} G$, а также все ее подформации ω -композиционны. Ввиду

примера 1 из [1] формация $c_{\omega}^{\tau} \text{form} G$ имеет ω -композиционный спутник f такой, что $f(a) = \emptyset$ для всех $a \in \omega$ и $f(\omega') = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G$. Тогда формация $c_{\omega}^{\tau} \text{form} G$ – n -кратно ω -композиционна. Поэтому $\tau \text{form} G = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G = \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.17 формация $\mathfrak{F} = \tau \text{form} G$ является τ -неприводимой и в ней имеется единственная максимальная τ -замкнутая подформация $\tau \text{form}(\{G/P\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ -подгрупп группы G . Поскольку по условию G/P и произвольная неединичная группа из $\mathfrak{X}$ имеют вид $A_1 \times \dots \times A_t$, где $t \geq 1$ и $A_1 \simeq \dots \simeq A_t \simeq A$ – простая группа, порядок которой не принадлежит ω , то $\tau \text{form}(\{G/P\} \cup \mathfrak{X}) = \tau \text{form} A = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A$. Но так как по лемме 1.2 $h_{\omega_n}^{\tau}(c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A) = 2$, то $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 3$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает ряд следствий при различных τ, n и ω . Приведем лишь некоторые из них. Так при $n = 1$ из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1 (М.В. Задорожнюк [6]). *Тогда и только тогда τ -замкнутая ω -композиционная формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки c_{ω}^{τ} , когда $\mathfrak{F} = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы, либо G – такая монолитическая группа с цоколем $P \neq G$, что выполняется одно из следующих условий:*

- 1) $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, $P = G^{\mathfrak{N}_p}$ для некоторого простого числа $p \in \omega$ и все собственные τ -подгруппы группы G являются p -группами;
- 2) G – циклическая группа порядка p^2 , $p \notin \omega$;
- 3) G – неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;
- 4) $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, $P \not\subseteq \Phi(G)$ и найдется такая простая группа A , что $|A| \notin \omega$ и факторгруппа G/P , а также всякая неединичная группа из $\tau(G) \setminus \{G\}$ имеют вид $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $t \geq 1$, $A_1 \simeq A_2 \simeq \dots \simeq A_t \simeq A$.

В случае, когда τ – тривиальный подгрупповой функтор и $n = 1$, из теоремы 2.1 получаем

Следствие 2.2 (М.В. Задорожнюк [12]). *Тогда и только тогда ω -композиционная формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки всех ω -композиционных формаций, когда $\mathfrak{F} = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы, либо G – такая монолитическая группа с цоколем $P \neq G$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, $P = G^{\mathfrak{M}_p}$ для некоторого простого числа $p \in \omega$;

2) G – циклическая группа порядка p^2 , $p \notin \omega$;

3) G – неабелева группа порядка p^3 , простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;

4) $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, $P \not\subseteq \Phi(G)$ и G/P есть прямое произведение простых изоморфных групп порядка, не принадлежащего ω .

Теорема 2.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^\tau$ -формация высоты 3 в решетке $c_{\omega_n}^\tau$ ($n \geq 1$). Тогда решетка $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ ее $c_{\omega_n}^\tau$ -подформаций дистрибутивна.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^\tau$ -формация и $h_{\omega_n}^\tau = 3$. Тогда по теореме 2.1, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$, где G – одна из следующих групп:

1) $G = A_1 \times A_2$, где A_1 и A_2 – простые не-изоморфные группы;

2) G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{N}_p$ -группа с нефраттиниевым цоколем $P = G^{\mathfrak{M}_p} \neq G$, что $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$ и $p \in \omega$;

3) G – циклическая группа порядка p^2 , $p \notin \omega$;

4) G – неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;

5) G – монолитическая группа с нефраттиниевым цоколем $P \neq G$ таким, что $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$, и найдется такая простая группа A , что $|A| \notin \omega$ и факторгруппа G/P , а также всякая неединичная группа из $\tau(G) \setminus \{G\}$ имеют вид $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $t \geq 1$, $A_1 \simeq A_2 \simeq \dots \simeq A_t \simeq A$.

Пусть для группы G выполняется условие 1) и $\mathfrak{M}_1 = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A_1$, $\mathfrak{M}_2 = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A_2$. Предположим, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$. Пусть $A_1 = Z_p$ и $A_2 = Z_q$, где $p, q \in \omega$, $q \neq p$. Тогда $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{N}_q$. Противоречие. Значит, такой случай невозможен. Пусть $A_1 = Z_p$, $p \in \omega$ и $|A_2| \notin \omega$. Тогда по лемме 1.7, $\mathfrak{M}_2 = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A_2 = \text{form} A_2$. Значит, $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \text{form} A_2$. Но тогда $A_2 \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $|A_1| \notin \omega$ и $A_2 = Z_q$, $q \in \omega$. Пусть теперь $|A_1| \notin \omega$ и $|A_2| \notin \omega$. Тогда ввиду леммы 1.7 получаем $\text{form} A_1 = \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \text{form} A_2$. По лемме 1.13, $A_1 \simeq A_2$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$. Таким образом, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2)$ и $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = (1)$. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ – произвольная максимальная

$c_{\omega_n}^\tau$ -подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\}$. Так как $h_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{M}) = 2$, то по лемме 1.2, $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} A$, где A – простая группа. Положим $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$. Допустим, что $A \notin \mathfrak{X}$. Тогда $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$. Из лемм 1.18, 1.19 и 1.20, имеем

$$\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}_\omega^\tau \text{form} \mathfrak{X} = \mathfrak{N}_\omega^\tau \text{form} \mathfrak{X}.$$

Если $|A| \notin \omega$, то $A \in \text{form} \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}$ и по лемме 1.16 получаем, что $A \in \text{H} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Противоречие. Значит, данный случай невозможен. Пусть теперь $A = Z_p$, $p \in \omega$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. Пусть f – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Если $p \notin \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$, то ввиду леммы 1.6, $f(p) = \emptyset$. Но из $A \in \mathfrak{F}$ следует, что $1 \cong A / C^p(A) \in f(p) = \emptyset$. Противоречие. Поэтому $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $A \in \mathfrak{X}$. Значит, либо $A \simeq A_1$, либо $A \simeq A_2$. Поэтому либо $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$, либо $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2$. Очевидно, что в этом случае решетка $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ является дистрибутивной.

Пусть группа G удовлетворяет условию 2). Тогда формация $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} G$ неприводима в решетке $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ и ее единственной максимальной $c_{\omega_n}^\tau$ -подформацией является формация $\mathfrak{N}_p$. В этом случае решетка $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ является цепью. Поэтому, по лемме 1.21 решетка $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ дистрибутивна.

Если группа G удовлетворяет условию 3), то, ввиду леммы 1.11, формация $\mathfrak{M} = \text{form} M$, где $|M| = p \notin \omega$, является максимальной подформацией формации $\mathfrak{F}$. Но поскольку высота формации $\mathfrak{M}$ в решетке $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ равна 2, то решетка $C_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ является цепью. Следовательно, по лемме 1.16 эта решетка дистрибутивна.

Пусть группа G удовлетворяет условию 4). Ввиду леммы 1.3, в $\mathfrak{F}$ имеется единственная максимальная подформация $\mathfrak{M}$. Пусть $\text{form} Z_p$ – формация всех абелевых групп экспоненты, делящей p . Покажем, что $\mathfrak{M} = \text{form} Z_p$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \text{form} Z_p$. Пусть K – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \text{form} Z_p$. Тогда группа K монолитична. Следовательно, $K \in \text{form} Z_p$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \text{form} Z_p$.

Допустим, что $\text{form}Z_p \not\subseteq \mathfrak{M}$. Пусть M – группа минимального порядка из $\text{form}Z_p \setminus \mathfrak{M}$. Тогда группа M монолитична. Но так как группа M абелева, то она циклична. Таким образом, экспонента группы M равна p . Тогда, очевидно, $M \in \mathfrak{M}$. Полученное противоречие показывает, что $\text{form}Z_p \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{M} = \text{form}Z_p$. Таким образом, формация $\mathfrak{M}$ состоит из абелевых групп экспоненты, делящей p . Поскольку формация $\text{form}Z_p$ имеет высоту 2 в решетке $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$, то эта решетка является цепью. Согласно лемме 1.21 это означает, что решетка $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна.

Пусть теперь G удовлетворяет условию 5). Тогда формация $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией $\tau\text{form}G$, и каждая подформация формации $\mathfrak{F}$ является n -кратно ω -композиционной. Но по лемме 1.17 у формации $\tau\text{form}G$ имеется лишь единственная максимальная τ -замкнутая подформация $\tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/R\})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ -подгрупп группы G . Следовательно, ввиду условия теоремы, имеет место равенство

$$\tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/R\}) = \tau\text{form}A = c_{\omega_n}^{\tau}\text{form}A.$$

Но так как по лемме 1.2 высота формации $c_{\omega_n}^{\tau}\text{form}A$ в решетке $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ равна 2, то эта решетка является цепью. Снова по лемме 1.21 получаем, что решетка $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Теорема доказана.

Следствие 2.3 (М.В. Задорожнюк [13]). Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая ω -композиционная формация, являющаяся элементом высоты 3 решетки c_{ω}^{τ} . Тогда решетка $C_{\omega}^{\tau}(\mathfrak{F})$ ее τ -замкнутых ω -композиционных подформаций дистрибутивна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Белорусская наука, 1997. – 240 с.

3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.

4. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М. : Наука, 1984. – 568 с.

5. Жизневский, П.А. О критических частично композиционных формациях / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Вес. Нац. акад. наук. Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 3. – С. 44–49.

6. Задорожнюк, М.В. Об элементах высоты 3 решетки τ -замкнутых ω -композиционных формаций / М.В. Задорожнюк // Вестник Гродн. гос. ун-та. – 2008. – № 2. – С. 16–21.

7. Жизневский, П.А. О модулярности и индуктивности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.

8. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889с.

10. Жизневский, П.А. К теории кратно частично композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский. – Гомель, 2008. – 35 с. – (Препринт / ГГУ им. Ф. Скорины; № 30).

11. Сафонов, В.Г. Характеризация разрешимых однопорожденных totally насыщенными формациями конечных групп / В.Г. Сафонов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 185–191.

12. Кенько (Задорожнюк), М.В. О ω -композиционных формациях длины 3 / М.В. Кенько // Вес. Нац. акад. наук. Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2001. – № 1. – С. 22–25.

13. Задорожнюк, М.В. Элементы высоты 3 решетки всех τ -замкнутых ω -композиционных формаций / М.В. Задорожнюк. – Гомель, 2008. (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 8).

Поступила в редакцию 26.05.11.

УДК 517.9:530.182

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ-ДУФФИНГА

Р.И. Коржик, С.П. Жогаль

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

INFLUENCE OF DELAY ON STATIONARY STATES OF THE NON-AUTONOMOUS VAN DER POL-DUFFING OSCILLATOR

R.I. Korzhik, S.P. Zhogal

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Исследовано влияние запаздывания на динамические режимы укороченного уравнения неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга с внешним гармоническим воздействием. Выведено укороченное уравнение и построены карты динамических режимов для различных значений параметра, характеризующего запаздывание.

Ключевые слова: осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга, стационарные состояния, влияние запаздывания, укороченное уравнение, внешнее периодическое воздействие, критерий устойчивости Рауса-Гурвица, бифуркации.

The effect of delay on dynamical regimes of the abridged equation of the non-autonomous van der Pol-Duffing oscillator with an external harmonic influence was investigated. The abridged equation was derived and the maps of dynamical regimes for different values of the parameter characterizing the delay were presented.

Keywords: van der Pol-Duffing oscillator, stationary states, influence of delay, abridged equation, external periodic effect, Routh-Hurwitz stability criterion, bifurcation.

Введение

В работах [1], [2] исследованы динамические режимы функционирования осцилляторов Ван-дер-Поля и Дуффинга с запаздыванием и внешним периодическим воздействием.

Рассмотрим более общий случай неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга с запаздыванием в звене, соответствующему уравнению Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x}_t - (\lambda - \alpha x_{t-\delta}^2) \dot{x}_{t-\delta} + \omega_0^2 x_t + \beta x_t^3 = b \sin \omega t, \quad (0.1)$$

где $x_t = x(t)$, $x_{t-\delta} = x(t - \delta)$, параметр $\beta > 0$ введен по аналогии с параметром в осцилляторе Дуффинга, b, ω – амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия, $\delta \geq 0$ – запаздывание в звене Ван-дер-Поля.

1 Вывод укороченного уравнения

Как и в работах [1]–[3], решение этого уравнения будем искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой $A_t = A(t)$:

$$x_t = \operatorname{Re} \left(A_t e^{i\omega t} \right) = \frac{1}{2} A_t e^{i\omega t} + \frac{1}{2} A_t^* e^{-i\omega t}, \quad (1.1)$$

накладывая на искомое решение дополнительное условие

$$\dot{A}_t e^{i\omega t} + \dot{A}_t^* e^{-i\omega t} = 0.$$

После подстановки (1.1) в (0.1) и усреднения за период $\frac{2\pi}{\omega}$ получаем укороченное уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{A}_t + i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} A_t - \frac{\lambda A_t}{2} e^{-i\delta\omega} + \\ + \left(\frac{\alpha e^{i\delta\omega}}{8} - \frac{3i\beta}{8\omega} \right) |A_t|^2 A_t + \frac{b}{2\omega} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) можно свести к уравнению с меньшим числом параметров:

$$\dot{z}_\tau + i\Delta z_\tau - z_\tau e^{-i\theta} - \left(\mu i - \nu e^{-i\theta} \right) |z_\tau|^2 z_\tau + \varepsilon = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z_\tau = \frac{A_t}{\sqrt{\lambda\omega}}, \quad \Delta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{\omega\lambda\sqrt{\lambda\omega}}, \\ \theta = \delta\omega, \quad \mu = \frac{3\beta}{4}, \quad \nu = \frac{\alpha\omega}{4}. \end{aligned}$$

Функцию z_τ можно записать в виде $R_\tau e^{i\varphi_\tau}$, где R_τ и φ_τ некоторые функции действительного переменного τ , принимающие действительные значения.

Тогда, выделяя в (1.3) действительную и мнимую части, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{R} = \cos \theta (R - \nu R^3) - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = \sin \theta (\nu R^2 - 1) - \Delta + \mu R^2 + \frac{\varepsilon}{R} \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.4)$$

2 Построение и анализ бифуркационных диаграмм

При помощи критерия Рауса-Гурвица можно получить условие устойчивости стационарного состояния (R_0, φ_0) :

$$\begin{aligned} 0 < 3(2\mu\nu\sin\theta + \nu^2 + \mu^2)\xi_0^2 - \\ - 4((\Delta\nu + \mu)\sin\theta + \nu + \Delta\mu)\xi_0 + \\ + 2\Delta\sin\theta + \Delta^2 + 1, \\ 0 > (-4\nu\xi_0 + 2)\cos\theta, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\xi_0 = R_0^2$.

Само значение ξ_0 будет задаваться уравнением

$$\begin{aligned} (\nu^2 + \mu^2 + 2\mu\nu\sin\theta)\xi_0^3 - \\ - 2((\Delta\nu + \mu)\sin\theta + \nu + \Delta\mu)\xi_0^2 + \\ + (2\Delta\sin\theta + \Delta^2 + 1)\xi_0 = \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

На основе неравенств (2.1) и уравнения (2.2) построим линии бифуркации. На рисунке 1 приведены полученные линии в различных плоскостях параметров. Из рисунка видно, что получилось шесть различных областей.

Для описания поведения системы при различных значениях параметров возьмем в пространстве параметром некоторую точку и будем ее постепенно перемещать между областями. При пересечении жирной линии будет меняться

количество стационарных состояний. А при пересечении тонкой линии одно из стационарных состояний будет менять свою устойчивость на противоположную (устойчивое будет становиться неустойчивым, а неустойчивое – устойчивым).

На рисунке 2 приведены фазовые портреты для каждой из областей. Первой области соответствует режим функционирования системы с одним устойчивым состоянием. Если из первой области переместиться в пятую, то произойдет пересечение жирной линии, и мы попадем в область, в которой должно быть три стационарных состояния. Это подтверждается фазовым портретом. На нем видны два устойчивых состояния равновесия и одно седло. При перемещении из пятой области в четвертую происходит пересечение тонкой линии. Пересечение этой линии означает, что одно из стационарных состояний должно изменить свою устойчивость. На фазовом портрете можно в этом убедиться. На нем видно уже только одно устойчивое состояние и два неустойчивых, одно из которых – седло. Стационарных состояний по-прежнему остается три.

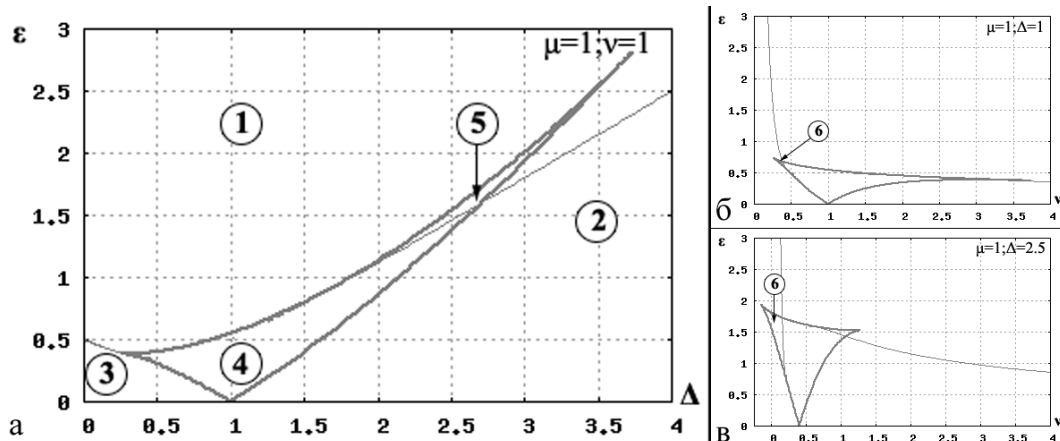


Рисунок 1 – Линии бифуркации при отсутствии запаздывания в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); \nu - \varepsilon(b, v)$

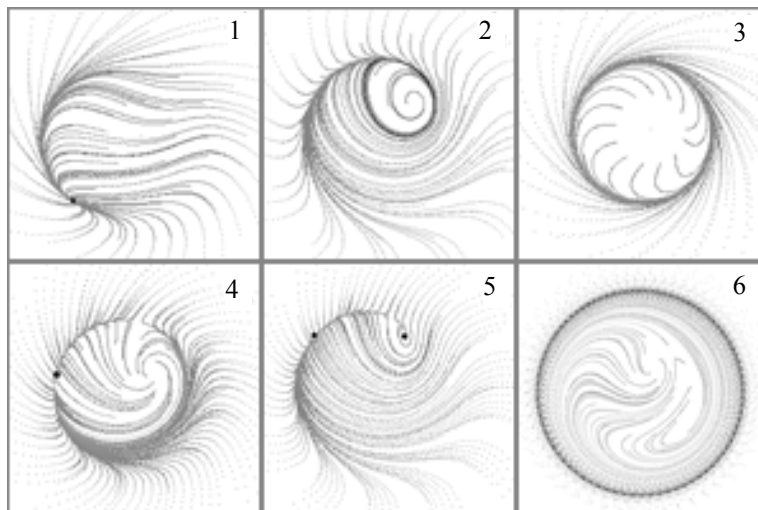


Рисунок 2 – Фазовые портреты для различных областей при отсутствии запаздывания

Если переместиться из четвертой области в шестую, то должна опять произойти смена устойчивости. Это видно по соответствующему фазовому портрету. На нем осталось одно седло и еще два неустойчивых состояния. Также на фазовом портрете виден устойчивый предельный цикл, внутри которого находятся все три стационарных состояния. При перемещении из шестой области в третью происходит пересечение жирной линии, следовательно, должно измениться количество стационарных состояний. В третьей области уже только одно неустойчивое

состояние равновесия, окруженное устойчивым предельным циклом.

Если начать изменять параметр $\theta = \delta\omega$ в пределах полуинтервала $[0, \pi/2)$, то это будет приводить к изменению линий бифуркации. Но различных областей по-прежнему будет шесть (если области 2 и 3 считать различными). На рисунках 3, 4 и 5 показаны бифуркационные диаграммы для различных значений параметра θ . Количество стационарных состояний и их устойчивость для каждой из областей будут такими же, как и при отсутствии запаздывания.

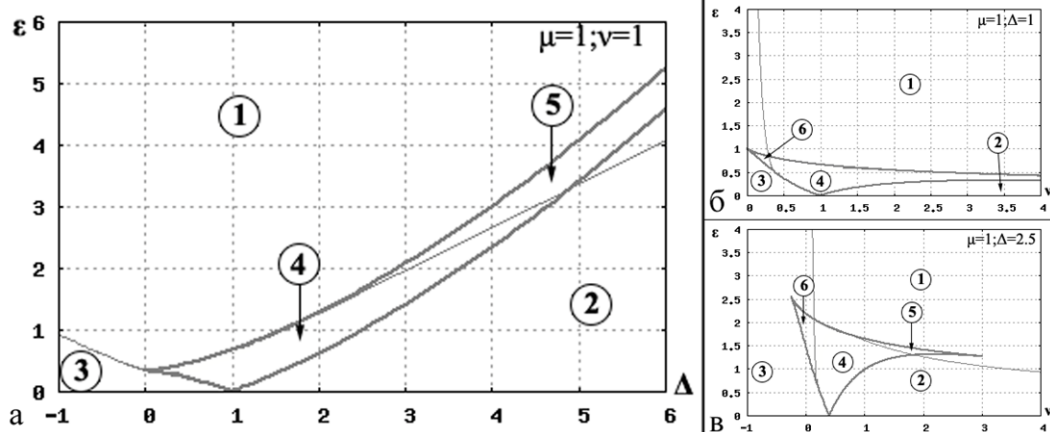


Рисунок 3 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/6$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); \nu - \varepsilon(b, \varepsilon)$

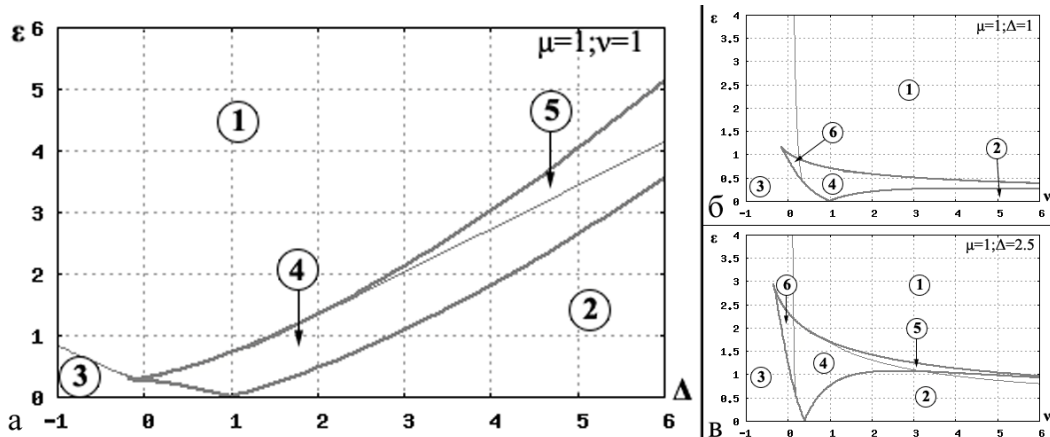


Рисунок 4 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/4$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); \nu - \varepsilon(b, \varepsilon)$

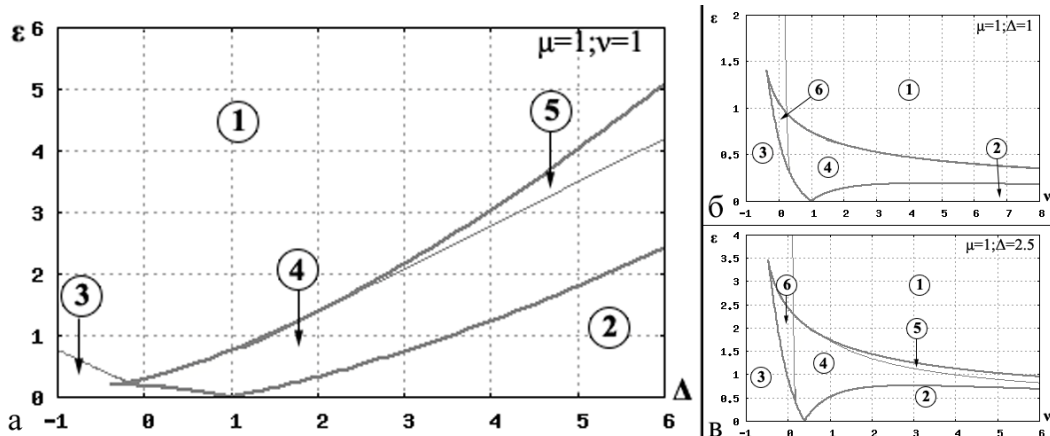
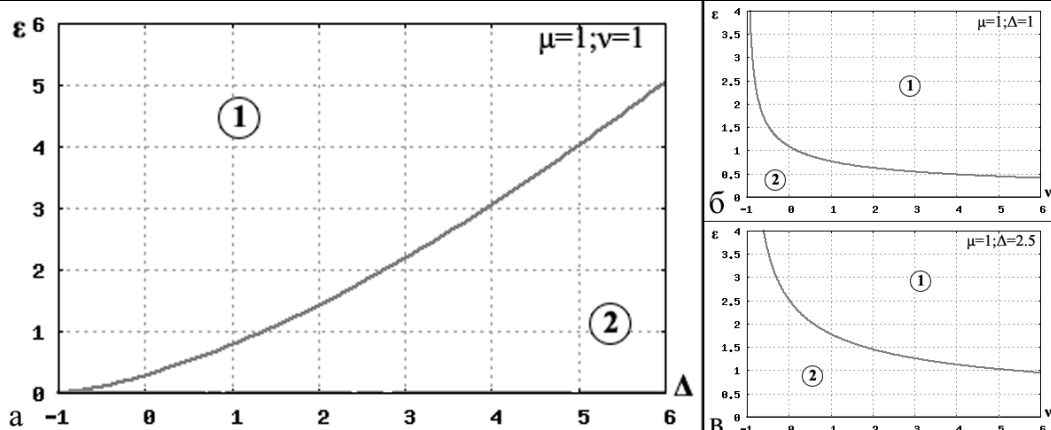
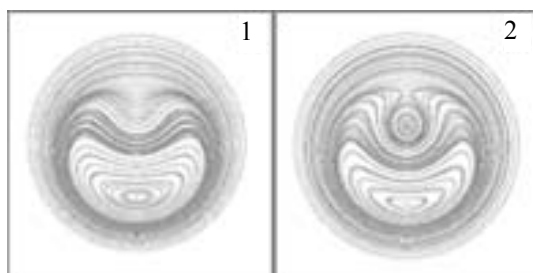
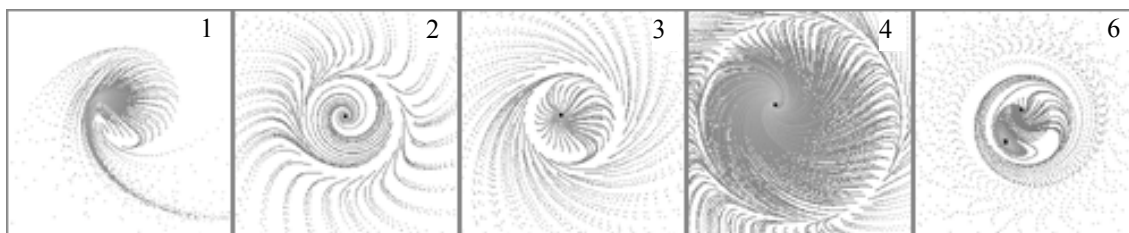


Рисунок 5 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/3$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); \nu - \varepsilon(b, \varepsilon)$

Рисунок 6 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/2$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); v - \varepsilon(b, \varepsilon)$ Рисунок 7 – Фазовые портреты для различных областей при $\theta = \pi/2$ Рисунок 8 – Фазовые портреты для различных областей при $\theta = 3$

При $\theta = \pi/2$ правая часть второго неравенства (2.1) всегда обращается в ноль. Поэтому среди стационарных состояний должен появиться центр. Бифуркационная диаграмма для такого значения параметра показана на рисунке 6, а фазовые портреты для каждой из областей приведены на рисунке 7.

Как видно из рисунка 7, в первой области имеется одно стационарное состояние типа центр. Во второй области три стационарных состояния – седло и два центра.

Для $\theta \in (\pi/2; \pi]$ бифуркационные диаграммы будут совпадать с диаграммами для $\theta = \pi/2$. Но в самих областях поведение системы будет отличаться.

В первой области будет одно стационарное состояние, но, в отличие от предыдущего случая, оно будет неустойчивым. Если из первой области переместиться в пятую, то произойдет пересечение жирной линии, и, следовательно, появится еще два стационарных состояния. Таким образом в пятой области будет три неустойчивых стационарных состояния, одно из которых – седло. При

перемещении в четвертую область пересекается тонкая линия и одно из состояний меняет свою устойчивость. Поэтому в четвертой области имеется одно устойчивое состояние и два неустойчивых, одно из них – седло.

В шестой области два устойчивых состояния и одно седло. Во второй и третьей областях по одному устойчивому состоянию, которые находятся внутри неустойчивого предельного цикла. Фазовые портреты для областей приведены на рисунке 8.

Заключение

В статье приведены и описаны только бифуркационные диаграммы для $\theta \in [0; \pi]$. При $\theta \in (\pi; 2\pi)$ диаграммы выглядят несколько по-другому, но количество областей остается прежним.

Также следует отметить, что параметр θ – не просто запаздывание δ в уравнении (0.1), а произведение запаздывания на частоту внешнего воздействия. Поэтому даже при небольшом запаздывании в исходном уравнении (0.1) при

различных частотах внешнего воздействия ω режимы функционирования системы могут быть различными.

Из полученных бифуркационных диаграмм также видно, что изменение запаздывания при неизменных остальных параметрах может приводить к изменению устойчивости стационарных состояний, а также к изменению их количества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коржик, Р.И. Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Известия Гомельского государственного

университета имени Франциска Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 206–210.

2. Коржик, Р.И. Влияние запаздывания в неавтономном осцилляторе Дуффинга на стационарные состояния укороченного уравнения / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П.М. Машэрава. – 2010. – № 5 (59). – С. 8–11.

3. Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – М. : Физматлит, 2002. – 292 с.

Поступила в редакцию 23.05.11.

УДК 517.925

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.М. Пецевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

ON A CROSS SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE PAINLEVE PROPERTY

I.P. Martynov, O.N. Parmanchuk, V.M. Peceovich

Y. Kupala Grodno State University, Grodno

В статье рассмотрена перекрестная система двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной и третьей степени относительно переменных. Найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений данной системы.

Ключевые слова: перекрестная система дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, особое решение, тест Пенлеве, резонансы.

The article deals with the cross-system of two differential equations of the second degree and third-degree derivative of the variables. The necessary and sufficient conditions having the Painleve property for solutions of this system are obtained.

Keywords: cross system of differential equations, property of Painleve, singular solution, test of Painleve, resonances.

Введение

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + \\ &+ y(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \\ y'^2 &= c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 + \\ &+ x(d_3 y^3 + d_2 y^2 + d_1 y + d_0), \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{0,3}$ – аналитические функции по t .

Исследованию систем вида (0.1) при определенных ограничениях на коэффициенты системы на предмет наличия свойства Пенлеве посвящены работы [1], [2]. В них выделены системы со свойством Пенлеве рассматриваемого типа. В [3] исследована система (0.1) в случае $a_3 \neq 0, b_0 = 0, b_3 = 0, |c_3| + |d_3| \neq 0, |b_2| + |b_1| \neq 0, |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0$. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых данная система при накладываемых ограничениях не имеет подвижных критических особых точек. В настоящей работе получим необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений системы (0.1) в случае, который еще не был исследован в работах [1]–[3].

Для исследования системы (0.1) нам требуется

Лемма [4]. Для того, чтобы уравнение

$$(x'' + A(t, x, x'))^n = B(t, x, x'),$$

где $n = 2, 3, \dots, A, B$ – рациональные по x, x' и

локально аналитические по t функции не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы A и B были полиномами по x' степени 2 и $2n$ соответственно.

1 Необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве для системы (0.1) при ограничениях (1.1)

Рассмотрим систему (0.1) в случае

$$\begin{aligned} b_3 &= 0, a_0 = Kb_0, b_0 \neq 0, \\ K &= \text{const}, a_3 \neq 0, \\ |c_3| + |d_3| &\neq 0, |b_2| + |b_1| + |b_0| \neq 0, \\ |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| &\neq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

и $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{0,3}$ – аналитические функции по t . Найдем необходимые и достаточные условия, при которых решения системы (0.1) при ограничениях (1.1) обладают свойством Пенлеве.

Построив уравнения для компонент x и y системы (0.1) с ограничениями (1.1) и требуя выполнения леммы, получим 34 соотношения между коэффициентами системы. Разрешив некоторые из них, выполнив линейные преобразования относительно x и y , замену независимой переменной t и переобозначая коэффициенты системы (однозначно определяемые через коэффициенты системы (0.1)), получим

$$\begin{aligned} x'^2 &= x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + y(x^2 + b_1 x + b_0), \\ y'^2 &= c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + x(c_3 y^2 + d_1 y + d_0), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $b_0 \neq 0, c_3 \neq 0$.

Для компоненты x из (1.2) построим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(2(x^2 + b_1x + b_0)x'x'' - \right. \\ & - (2x + b_1)x'^3 - (b_1'x + b_0')x'^2 - \\ & - (x^4 + 2b_1x^3 + (a_1 + a_2b_1 + 3b_0)x^2 + \\ & + 2a_2b_0x + a_1b_0)x' - (a_2' - b_1')x^4 - \\ & - (a_2b_1' - a_2'b_1 + b_0' - a_1')x^3 - (a_2b_0' - a_2'b_0 + \\ & + a_1b_1' - a_1'b_1)x^2 - (a_1b_0' - a_1'b_0)x \Big)^2 = \\ & = (x^2 + b_1x + b_0)(c_3x'^6 + A_0x'^4 + A_1x'^2 + A_2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где A_0, A_1, A_2 – полиномы по x третьей, шестой и восьмой степеней соответственно, с аналитическими по t коэффициентами, однозначно определяющимися через коэффициенты системы (1.2). Введем в уравнение (1.3) малый параметр ε по формулам $x = \varepsilon^{-2}X$, $t = t_0 + \varepsilon\tau$, при $\varepsilon = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$(2XX'' - 2X'^2 - X^3)^2 = c_3(X'^2 - X^3)^2. \quad (1.4)$$

Для однозначности решения уравнения (1.4) необходимо требовать [5] $c_3 = \left(\frac{2}{N_1}\right)^2$, где $N_1 \in \mathbb{Z}$.

С учетом этого условия для компоненты y из (1.2) построим уравнение, полагая в котором $y = \varepsilon^{-2}Y$, $t = t_0 + \varepsilon\tau$ при $\varepsilon = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$Y'' - \left(1 - \lambda \frac{N_1}{4}\right) \frac{Y'^2}{Y} = \frac{1}{N_1} \left(\frac{2}{N_1} + \lambda\right) Y^2,$$

где $\lambda^2 = 1$. Для однозначности решения последнего уравнения необходимо требовать [5] $\frac{N_1}{4} = \frac{1}{N_2}$, $N_2 \in \mathbb{Z}$. Учитывая это условие и то, что

$$N_1 \text{ и } N_2 \text{ целые, получим, что } c_3 \in \left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}.$$

Таким образом, система (1.2) примет вид

$$\begin{aligned} x'^2 &= x^3 + a_2x^2 + a_1x + y(x^2 + b_1x + b_0), \\ y'^2 &= c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + x(c_3y^2 + d_1y + d_0), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $b_0 \neq 0$, $c_3 \in \left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}$.

Построив уравнения для компонент x и y системы (1.5) и требуя выполнения леммы, выполнив линейные преобразования относительно x и y , замену независимой переменной t и переобозначая коэффициенты системы (однозначно определяемые через коэффициенты системы (1.2)), получим

$$\begin{aligned} x'^2 &= (x + y)(x^2 + b_1x + b_0), \\ y'^2 &= c_3(x + y)(y^2 + d_1y + d_0), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $b_0 \neq 0$, $c_3 \in \left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}$.

Для компоненты x из (1.6) построим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(2(x^2 + b_1x + b_0)x'' - (2x + b_1)x'^2 - \right. \\ & - (b_1'x + b_0')x' - (x^2 + b_1x + b_0)^2 \Big)^2 = \\ & = (x^2 + b_1x + b_0)c_3(x'^4 + \\ & + (x^2 + b_1x + b_0)(-2x + d_1)x'^2 + \\ & + (x^2 + b_1x + b_0)^2(x^2 - d_1x + d_0)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Требуя, чтобы общее решение уравнения

$$x'^4 + (x^2 + b_1x + b_0)(-2x + d_1)x'^2 + (x^2 + b_1x + b_0)^2(x^2 - d_1x + d_0) = 0$$

было особым решением (1.7) [6], получим, что необходимо чтобы d_0 , d_1 были постоянными.

С учетом этого для компоненты y из (1.6) построим уравнение

$$\begin{aligned} & c_3 \left(2(y^2 + d_1y + d_0)y'' - (2y + d_1)y'^2 - \right. \\ & - c_3(y^2 + d_1y + d_0)^2 \Big)^2 = (y^2 + d_1y + d_0)(y'^4 - \\ & - c_3(2y - b_1)(y^2 + d_1y + d_0)y'^2 + \\ & + c_3^2(y^2 - b_1y + b_0)(y^2 + d_1y + d_0)^2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Требуя, чтобы общее решение уравнения

$$y'^4 - c_3(2y - b_1)(y^2 + d_1y + d_0)y'^2 + c_3^2(y^2 - b_1y + b_0)(y^2 + d_1y + d_0)^2 = 0$$

было особым решением (1.8) [6], получим, что необходимо, чтобы b_0 , b_1 были постоянными.

Тогда уравнение (1.7) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(2(x^2 + b_1x + b_0)x'' - (2x + b_1)x'^2 - \right. \\ & - (x^2 + b_1x + b_0)^2 \Big)^2 = (x^2 + b_1x + b_0) \times \\ & \times c_3 \left(x'^4 + (x^2 + b_1x + b_0)(-2x + d_1)x'^2 + \right. \\ & + (x^2 + b_1x + b_0)^2(x^2 - d_1x + d_0) \Big). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Введем в уравнение (1.9) малый параметр ε по формулам $x = \varepsilon^{-2}X$, $t = \varepsilon\tau$ и при $\varepsilon = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \left(2XX'' - (2 - \sqrt{c_3})X'^2 - (1 + \sqrt{c_3})X^3 \right) \times \\ & \times \left(2XX'' - (2 + \sqrt{c_3})X'^2 - (1 - \sqrt{c_3})X^3 \right) = 0, \end{aligned}$$

которое распадается на два уравнения

$$\begin{aligned} 2XX'' - (2 - \sqrt{c_3})X'^2 - (1 + \sqrt{c_3})X^3 &= 0, \\ 2XX'' - (2 + \sqrt{c_3})X'^2 - (1 - \sqrt{c_3})X^3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Рассмотрим случай, когда $c_3 = 1$. Согласно методу резонансов, решение первого уравнения в (1.10) можно представить формальным рядом

$$X = \frac{4}{\tau^2} + \frac{L_{-1}}{\tau} + L_0 + L_1\tau + L_2\tau^2 + \dots,$$

где L_2 – произвольное. Тогда согласно [7], если уравнение (1.9) имеет решение, представимое рядом вида

$$x = \frac{4}{t^2} + \frac{l_{-1}}{t} + l_0 + l_1t + l_2t^2 + \dots,$$

то l_2 должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения резонансного условия

$$d_0 = \frac{1}{4}d_1^2. \quad (1.11)$$

Аналогично в случаях $c_3 = \frac{1}{4}$ и $c_3 = 4$ несложно убедиться, что для произвольности резонансных коэффициентов в решениях уравнения (1.9) необходимо требовать выполнения условия (1.11). Таким образом, систему (1.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x'^2 &= (x+y)(x^2 + b_1x + b_0), \\ y'^2 &= c_3(x+y)(y+H)^2, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $c_3 \in \left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}$, H, b_0, b_1 – постоянные.

Для компоненты y из (1.12) построим уравнение

$$\begin{aligned} c_3 \left(2(y+H)y'' - 2y'^2 - c_3(y+H)^3 \right)^2 &= \\ = \left(y'^4 - c_3(2y-b_1)(y+H)^2 y'^2 + \right. & \quad (1.13) \\ \left. + c_3^2(y+H)^4(y^2 - b_1y + b_0) \right). \end{aligned}$$

Введем малый параметр ε по формулам $y = \varepsilon^{-2}Y$, $t = \varepsilon\tau$, и при $\varepsilon = 0$ получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \left(2YY'' + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{c_3}} \right) Y'^2 - (c_3 + \sqrt{c_3})Y^3 \right) \times \\ \times \left(2YY'' + \left(-2 - \frac{1}{\sqrt{c_3}} \right) Y'^2 - (c_3 - \sqrt{c_3})Y^3 \right) = 0, \end{aligned}$$

которое распадается на два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} 2YY'' + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{c_3}} \right) Y'^2 - (c_3 + \sqrt{c_3})Y^3 &= 0, \\ 2YY'' + \left(-2 - \frac{1}{\sqrt{c_3}} \right) Y'^2 - (c_3 - \sqrt{c_3})Y^3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пусть $c_3=1$. Согласно методу резонансов решение первого уравнения в (1.14) можно представить формальным рядом

$$Y = \frac{4}{\tau^2} + \frac{P_{-1}}{\tau} + P_0 + P_1\tau + P_2\tau^2 + \dots,$$

где P_2 – произвольное. Тогда согласно [7], если уравнение (1.13) имеет решение, представимое

рядом вида $y = \frac{4}{t^2} + \frac{p_{-1}}{t} + p_0 + p_1t + p_2t^2 + \dots$, то p_2 должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения резонансного условия

$$b_0 = \frac{1}{4}b_1^2. \quad (1.15)$$

Аналогично в случаях $c_3 = \frac{1}{4}$ и $c_3 = 4$ не-

сложно убедиться, что для произвольности резонансных коэффициентов в решениях уравнения (1.13) необходимо требовать выполнения резонансного условия (1.15). Таким образом, систему (1.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x'^2 &= (x+y)(x+M)^2, \\ y'^2 &= c_3(x+y)(y+H)^2, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $c_3 \in \left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}$, H, M – постоянные.

Из (1.16) можно записать

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = \frac{(x+M)^2}{c_3(y+H)^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} (x+M)^{\sqrt{c_3}} &= C_1(y+H) \\ \text{или } (x+M)^{\sqrt{c_3}} &= \frac{C_2}{y+H}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Тогда из (1.17) при $c_3 = \frac{1}{4}$ соответственно

получим

$$x = C_1^2(y+H)^2 - M \quad \text{или} \quad x = \frac{C_2^2}{(y+H)^2} - M,$$

подставляя в (1.16), имеем

$$\begin{aligned} y'^2 &= \frac{1}{4} \left(C_1^2(y+H)^4 + (y-M)(y+H)^2 \right), \\ y'^2 &= \frac{1}{4} \left(C_2^2 + (y-M)(y+H)^2 \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

При $c_3 = 1$ из (1.17) имеем $x = C_1(y+H) - M$ или $x = \frac{C_2}{y+H} - M$, тогда соответственно из

$$\begin{aligned} y'^2 &= (C_1(y+H) + y - M)(y+H)^2, \\ y'^2 &= C_2(y+H) + (y-M)(y+H)^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

При $c_3 = 4$ из (1.17) запишем

$$y = \frac{1}{C_1}(x+M)^2 - H \quad \text{или} \quad y = \frac{C_2}{(x+M)^2} - H,$$

а из (1.16)

$$\begin{aligned} x'^2 &= \left(x - H + \frac{1}{C_1}(x+M)^2 \right) (x+M)^2, \\ x'^2 &= C_2 + (x-H)(x+M)^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Уравнения в (1.18)–(1.20) являются уравнениями Брио и Буке [8]. Последнее означает, что решения уравнений (1.18)–(1.20) обладают свойством Пенлеве, причем интегрируются в эллиптических функциях. Из структуры системы (1.16) и записанных выше соотношений следует, что и вторая компонента системы в соответствующих случаях интегрируется в эллиптических функциях. Таким образом, справедлива

Теорема. Для того, чтобы система (0.1) с ограничениями (1.1) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием x и y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к виду (1.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Парманчук, О.Н. Об одной перекрестной системе двух дифференциальных уравнений первого порядка и второй степени со свойством Пенлеве / О.Н. Парманчук, В.М. Пецевич, В.А. Пронько // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2008. – № 3. – С. 72–79.

2. Мартынов, И.П. Об одной системе двух дифференциальных уравнений второй степени со свойством Пенлеве / И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.М. Пецевич // Вестник ГрГУ. Серия 2.

Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2010. – № 2. – С. 9–17.

3. Парманчук, О.Н. Аналитические свойства решений одной перекрестной системы двух дифференциальных уравнений / О.Н. Парманчук // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2011. – № 2. – С. 35–41.

4. Березкина, Н.С. О системе двух дробно-линейных дифференциальных уравнений степени n со свойством Пенлеве / Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 1–6.

5. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков, 1939. – 718 с.

6. Cosgrove, C. Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 88. – P. 25–87.

7. О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т.Н. Ванькова [и др.] // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2008. – № 1. – С. 8–16.

8. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М.–Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

Поступила в редакцию 06.06.11.

УДК 519.2

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ, ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И КАТАСТРОФИЧЕСКИМИ СБОЯМИ**А.Н. Старовойтов***Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***QUEUEING SYSTEM WITH BATCH ARRIVALS, BATCH SERVICE AND DISASTERS****A.N. Starovoitov***Belarusian State University of Transport, Gomel*

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания, в которую заявки поступают группами случайного размера. На обслуживание также выбирается группа случайного размера. Кроме того, в систему поступает поток катастрофических сбоев. Катастрофический сбой полностью очищает очередь системы, если она не пуста, и не оказывает никакого влияния, если очередь пуста. Находится стационарное распределение процесса, описывающего поведение данной системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, групповое обслуживание, катастрофический сбой.

We consider a single-server queueing system with batch arrivals and batch service. Besides, the flow of the disaster enters the queueing system. The disaster completely clears the queue of the system if it is not empty, and renders no influence if the queue of the system is empty. Stationary distribution of the states of the process describing the queueing system behavior is found.

Keywords: queueing system, batch arrivals, batch service, disaster.

Введение

В работе [1] была рассмотрена система M/G/1 с простейшим потоком катастрофических сбоев. В [2] исследована аналогичная система M/M/1. В работах [3]–[5] изучены более общие модели систем массового обслуживания с различными предположениями относительно как потока заявок, потока катастрофических сбоев, так и обслуживания заявок. В работах [6]–[8] исследовались системы и сети массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок. В данной работе рассмотрена система массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок, аналогичная системе, рассмотренной в [8], в которую дополнительно поступает простейший поток катастрофических сбоев. Граф переходов процесса, описывающего поведение системы с групповым поступлением и групповым обслуживанием, сильно связан, что не позволяет в общем случае находить стационарное распределение вероятностей состояний. Поэтому в настоящей работе, следуя [8], накладываются ограничения на указанный процесс. А именно, требуется, чтобы он был обратимым.

В данной работе установлены необходимые и достаточные условия представления стационарного распределения системы массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием и потоком

катастрофических сбоев в форме смещенного геометрического распределения.

1 Постановка задачи

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания, в которую поступают группы заявок стационарным пуассоновским потоком с интенсивностью λ . Заявки также обслуживаются группами. Обслуживание групп является экспоненциальным с интенсивностью μ . Наряду с потоком обычных заявок в систему поступает стационарный пуассоновский поток катастрофических сбоев (катастроф) с интенсивностью λ^- . Катастрофический сбой, поступая в систему, полностью очищает очередь системы, если она не пуста, и не оказывает никакого влияния в противном случае. Процессы поступления заявок, поступления катастрофических сбоев и обслуживания заявок являются независимыми.

Обозначим X_i – количество заявок в i -й поступающей группе, Y_i – количество заявок в i -й группе, выбранной на обслуживание. Предполагается, что X_i , Y_i независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с функциями распределения $A(x)$, $B(x)$, вероятностями значений $a(k) = P\{X_i = k\}$, $b(k) = P\{Y_i = k\}$ и производящими функциями $\tilde{A}(x)$,

$\bar{B}(x)$ соответственно. Также предположим, что X_i и Y_i имеют конечные математические ожидания.

Обозначим $n(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , тогда $n(t)$ является марковским процессом с пространством состояний $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$.

Цель работы – найти стационарное распределение $p = \{p(n)\}$ вероятностей состояний процесса $n(t)$.

2 Основной результат

Лемма. Процесс $n(t)$ является эргодическим.

Доказательство. Марковский процесс $n(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование системы схематично можно представить как чередование периодов, когда система находится в свободном состоянии ($n(t) = 0$), и периодов занятости системы (в противном случае). Момент перехода системы в свободное состояние является моментом регенерации.

Пусть ξ_i – длительность i -го периода регенерации, $i \geq 1$. Тогда $\xi_i = \nu + \eta$, где ν – время пребывания системы в свободном состоянии (время до поступления в систему группы требований), η – длительность периода занятости. Поскольку поток групп заявок в систему – простейший с интенсивностью λ , то случайная величина ν имеет экспоненциальный закон распределения с параметром λ . А величина $\eta \leq \phi$, где ϕ – время до наступления катастрофического сбоя. Поток катастрофических сбоев также является простейшим с интенсивностью λ^- , поэтому ϕ имеет экспоненциальный закон распределения с параметром λ^- . Из сказанного следует, что математическое ожидание

$$M\xi_i = M\nu + M\eta \leq M\nu + M\phi = \lambda + \lambda^- < +\infty.$$

Таким образом, случайная величина ξ_i имеет абсолютно непрерывное распределение с конечным математическим ожиданием. Тогда из теоремы Смита для регенерирующих процессов [9] следует, что марковский процесс $n(t)$ является эргодическим. Лемма доказана.

Интенсивности переходов процесса $n(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} q(n, n+k) &= \lambda a(k), \quad \text{если } n \geq 0, \quad k \geq 1, \\ q(n, n-k) &= \mu b(k), \quad \text{если } n > k \geq 1, \\ q(n, 0) &= \lambda^- + \mu \bar{B}(n), \quad \text{если } n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\bar{B}(n) = 1 - b(1) - b(2) - \dots - b(n-1)$.

Известно [10], что вероятностное распределение $p = \{p(n)\}$ на $\mathbb{Z}_+$ является стационарным распределением марковского процесса $n(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода

$$q^R : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \setminus \{(n, n) : n \in \mathbb{Z}_+\} \rightarrow [0, \infty),$$

удовлетворяющая соотношениям:

$$\begin{aligned} p(n)q(n, n') &= p(n')q^R(n', n), \\ n, n' &\in \mathbb{Z}_+, \quad n \neq n' \end{aligned} \quad (2.2)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(n, k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^R(n, k), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.3)$$

Тогда функция q^R является функцией интенсивностей перехода обращенного по времени процесса $n(-t)$, который имеет то же стационарное распределение p , что и процесс $n(t)$ (в (2.1), и далее доопределим функцию q равенством $q(n, n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$).

Стационарное распределение p процесса $n(t)$ будем искать в виде смещенного геометрического распределения, т. е.

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0, \quad p(n) = (1-p_0)(1-c)c^{n-1}, \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где p_0 и c – некоторые числа из интервала $(0, 1)$.

Подставляя q из (2.1) и p из (2.4) в (2.2), найдем интенсивности переходов обращенного по времени процесса $n(-t)$:

$$\begin{aligned} q^R(0, n) &= \frac{(1-p_0)(1-c)c^{n-1}}{p_0} (\lambda^- + \mu \bar{B}(n)), \quad \text{если } n \geq 1, \\ q^R(n, n+k) &= \mu b(k)c^k, \quad \text{если } n \geq 1, \quad k \geq 1, \\ q^R(n, n-k) &= \lambda a(k)c^{-k}, \quad \text{если } n > k \geq 1, \\ q^R(n, 0) &= \frac{\lambda a(n)p_0}{(1-p_0)(1-c)c^{n-1}}, \quad \text{если } n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.1) и (2.5) в (2.3) при $n=0$, получим

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(1-p_0)(1-c)}{p_0} \lambda^- \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1} + \\ &+ \frac{(1-p_0)(1-c)}{p_0} \mu \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1} \bar{B}(k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

а при $n \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \lambda^- &= \lambda a(n) \frac{p_0}{(1-p_0)(1-c)c^{n-1}} + \\ &+ \lambda \sum_{k=1}^{n-1} a(n-k)c^{-(n-k)} + \mu \bar{B}(c). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выполняя преобразования в (2.6), получим

$$\lambda = \frac{(1-p_0)}{p_0} (\lambda^- + \mu(1-\bar{B}(c))),$$

откуда

$$\tilde{B}(c) = 1 - \frac{\lambda p_0 - \lambda^-(1-p_0)}{\mu(1-p_0)}. \quad (2.8)$$

Рассуждая далее аналогично как и в [8], получим, что если стационарное распределение в форме (2.4) существует, то необходимо выполняется неравенство

$$\frac{\lambda^-}{\lambda + \lambda^-} < p_0 < \frac{\lambda^- + \mu}{\lambda + \lambda^- + \mu}. \quad (2.9)$$

Умножая (2.7) на $(cz)^n$ и складывая по всем натуральным n , имеем

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu + \lambda^-) \frac{cz}{1-cz} = \\ & = \left[\frac{\lambda p_0 c}{(1-p_0)(1-c)} + \frac{\lambda cz}{1-cz} \right] \tilde{A}(z) + \frac{\mu cz}{1-cz} \tilde{B}(c), \end{aligned}$$

откуда с учетом (2.8) получим

$$\tilde{A}(z) = \frac{(1-c)z}{p_0 + z(1-c-p_0)} = \frac{(1-a)z}{1-az},$$

где $a = (p_0 + c - 1)/p_0$. Для того, чтобы $\tilde{A}(z)$ была производящей функцией вероятностного распределения, необходимо и достаточно, чтобы $0 \leq a < 1$. Тогда это распределение является геометрическим распределением с параметром a . Откуда следует, что $1 - c \leq p_0$.

Сопоставляя последнее неравенство с (2.9), получим, что для существования стационарного распределения в форме смещенного геометрического распределения (2.4) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\max \left\{ 1 - c, \frac{\lambda^-}{\lambda + \lambda^-} \right\} < p_0 < \frac{\lambda^- + \mu}{\lambda + \lambda^- + \mu}, \quad (2.10)$$

а размеры поступающих групп имели геометрическое распределение с параметром $a = (p_0 + c - 1)/p_0$.

Отметим, что в случае, когда $\max \{1 - c, \lambda^-/(\lambda + \lambda^-)\} = 1 - c$, левая часть (2.10) является нестрогим неравенством.

Пусть теперь p_0 выбрано таким образом, что выполняется неравенство (2.10), а размеры поступающих групп имеют геометрическое распределение с параметром $a = (p_0 + c - 1)/p_0$. Несложно понять, что распределение $p = \{p(n)\}$, определенное в (2.4), удовлетворяет (2.6) и (2.7), т. е. выполняется (2.3). Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Для того чтобы стационарное распределение марковского процесса $n(t)$ имело форму смещенного геометрического распределения (2.4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (2.10), а размеры поступающих групп имели геометрическое распределение с параметром $a = (p_0 + c - 1)/p_0$, где c – корень уравнения (2.8).

Заключение

В данной работе рассмотрена система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием и потоком катастрофических сбоев. На практике катастрофический сбой может представлять собой кратковременный выход из строя или недоступность обслуживающего прибора, например, вследствие отключения электроэнергии. Установлены необходимые и достаточные условия представления стационарного распределения вероятностей состояний процесса, описывающего поведение данной системы, в форме смещенного геометрического распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jain, G. A Pollaczek-Khinchine formula for M/G/1 queues with disasters / G. Jain, K. Sigman // J. Appl. Prob. – 1996. – № 33. – P. 1191–1200.
2. Chen, A. The M/M/1 queue with mass exodus and mass arrivals when empty / A. Chen, E. Renshaw // J. Appl. Prob. – 1997. – № 34. – P. 192–207.
3. Semenova, O.V. A queueing system with two operation modes and a disaster flow: its stationary state probability distribution / O.V. Semenova // Automation and Remote Control. – 2002. – Vol. 63, № 10. – P. 1597–1608.
4. Dudin, A. A BMAP/SM/1 queueing system with markovian arrival input of disasters / A. Dudin, S. Nishimura // J. Appl. Prob. – 1999. – № 36. – P. 868–881.
5. Dudin, A. A stable algorithm for stationary distribution calculation for a BMAP/SM/1 queueing system with markovian arrival input of disasters / A. Dudin, O. Semenova // J. Appl. Prob. – 2004. – № 41. – P. 547–556.
6. Miyazawa, M. Geometric product-form distribution for a queueing network with non-standard batch arrivals and batch transfers / M. Miyazawa, P.G. Taylor // Adv. Appl. Prob. – 1997. – Vol. 29, № 2. – P. 1–22.
7. Боярович, Ю.С. Стационарное распределение замкнутой сети массового обслуживания с групповыми переходами заявок / Ю.С. Боярович // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 11. – С. 80–86.
8. Малинковский, Ю.В. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений / Ю.В. Малинковский, Е. В. Коробейникова // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 43–56.
9. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004. – 772 с.
10. Kelly, F.P. Reversibility and stochastic networks / F.P. Kelly. – N.Y.: Wiley, 1979. – 230 p.

Поступила в редакцию 30.06.11.

УДК 512.547

УНИПОТЕНТНОСТЬ ОБРАЗА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ F_2 ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ ПРИМИТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УНИПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ С МАЛЫМИ КЛЕТКАМИ ЖОРДАНА

О.И. Тавгень¹, Ду Цзюньхуа², Лю Сцуньянь³¹Белорусский государственный университет, Минск²Институт естественных наук Цицикарского университета, Цицикар, Китай³Харбинский научно-технический университет, Харбин, Китай

THE REPRESENTATION IMAGE UNIPOTENCY OF THE GROUP F_2 BY MAPPING PRIMITIVE ELEMENTS INTO UNIPOTENT MATRICES WITH SMALL JORDAN BLOCKS

O.I. Tavgen¹, Du Junhua², Liu Chunyan³¹Belarusian State University, Minsk²College of Sciences of Qiqihar University, Qiqihar, China³Harbin University of Science and Technology, Harbin, China

Доказано, что образ представления свободной группы $F_2(x, y)$ в $GL(n, C)$ является унипотентной подгруппой, если $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для любого примитивного элемента p и $(\rho(\xi) - E)^2 = 0$, $(\rho(\eta) - E)^3 = 0$ для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η группы F_2 .

Ключевые слова: унипотентная подгруппа, примитивный элемент, представление группы.

It is proved that the representation image of the free group $F_2(x, y)$ in $GL(n, C)$ is an unipotent subgroup, when $(\rho(p) - E)^5 = 0$ for all primitive elements p and $(\rho(\xi) - E)^2 = 0$, $(\rho(\eta) - E)^3 = 0$ for some associated primitive elements ξ and η of the group F_2 .

Keywords: unipotent subgroup, primitive element, representation of group.

Введение

Пусть $F_2(x, y)$ – свободная группа с образующими x и y . Рассмотрим представление этой группы

$$\rho: F_2(x, y) \rightarrow GL(n, C),$$

при этом образующие и все примитивные элементы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы [1]. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ $\rho(F_2)$. В работах [2], [3] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц порядков $n \leq 5$. В работах [4]–[5] дан утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p) - E)^k = 0$, $k=3,4$, для любого примитивного элемента p . В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для

любого примитивного элемента p и соотношения

$$(\rho(\xi) - E)^2 = 0,$$

$$(\rho(\eta) - E)^3 = 0$$

для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η группы F_2 .

Теорема. Образ $F_2(x, y)$ относительно $\rho: F_2(x, y) \rightarrow GL(n, C)$ – унипотентная подгруппа в $GL(n, C)$ при условии $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для любого примитивного элемента p и

$$(\rho(\xi) - E)^2 = 0,$$

$$(\rho(\eta) - E)^3 = 0$$

для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η .

1 Предварительные результаты

Для доказательства теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1.1 [1]. Пусть p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2 . Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с p имеют вид $p^\alpha q^\varepsilon p^\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \pm 1$.

В дальнейшем обозначим

$$\rho(\xi) = A = H + E, \quad \rho(\eta) = B = T + E,$$

где ξ и η – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2 и

$$(\rho(\xi) - E)^2 = 0,$$

$$(\rho(\eta) - E)^3 = 0,$$

E – единичная матрица, $L(W)$ – длина слова W .

Лемма 1.2. Пусть $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для любого примитивного элемента p , то справедливо равенство $W(H, B) = 0$, если в слове $W(H, B)$ не менее пяти элементов H .

Доказательство. Поскольку

$$B^4 = 4B^3 - 6B^2 + 4B - E,$$

то можно считать, что в слове $W(H, B)$ нет элементов B^4 . Поскольку $B^m A$ – унитарные матрицы (см. лемму 1.1), то имеем

$$(B^m A - E)^5 = 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad \left(A - E + mTA + \frac{m(m-1)}{2} T^2 A \right)^5 = 0.$$

Из этого получаем $(a_0 + a_1 m + a_2 m^2)^5 = 0$, где

$$a_0 = A - E, \quad a_1 = TA - \frac{1}{2} T^2 A,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} T^2 A - \frac{1}{2} T^3 A.$$

Из $(a_0 + a_1 m + a_2 m^2)^5 = 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^{10} F'_k m^k = 0,$$

где $F'_0 = a_0^5$, $F'_1 = a_0^4 a_1 + a_0^2 a_1 a_0^3 + a_0^3 a_1 a_0^2 + a_1 a_0^4, \dots$, $F'_{10} = a_2^5$. Если взять $m = m_i$, $i = \overline{1, 11}$, не равными, то $F'_i = 0$, $i = \overline{0, 10}$.

Поскольку $A^m B$ – унитарные матрицы (см. лемму 1), то имеем $(A^m B - E)^5 = 0$. Отсюда $(B - E + mHB)^5 = 0$. Из этого получаем $\sum_{k=0}^5 F_k m^k = 0$. Если взять $m = m_i$, $i = \overline{1, 6}$, не равными, то $F_i = 0$, $i = \overline{0, 5}$. Из $F_1 = 0$ получаем $T^2 HT^2 = 0$, и

$$\begin{aligned} HF_1 H &= HB^2 HB^2 H - 2HB^2 HBH - \\ &- 2HBHB^2 H + 4HBHBH = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из $F_2 = 0$ получаем $F_2 \cdot T^2 = 0$, значит,

$$T^2 HTHT^2 = 0. \quad (1.2)$$

Из $F_2' = 0$ получаем

$$H \left(TA - \frac{1}{2} T^2 A \right) H \left(TA - \frac{1}{2} T^2 A \right) H = 0,$$

и следует

$$2HTHTH = HTHT^2 H + HT^2 HTH \quad (1.3)$$

или

$$6HBHBH = HB^2 HBH + HBHB^2 H. \quad (1.4)$$

Из (1.1), (1.4) получаем

$$HB^2 HB^2 H = 8HBHBH. \quad (1.5)$$

Умножив уравнение (1.3) справа на T^2 , получаем $2HTHTHT^2 = HTHT^2 HT^2 + HT^2 HTHT^2$, следовательно,

$$HTHTHT^2 = 0. \quad (1.6)$$

Из равенств $F_2' \cdot T = 0$, (1.2) и $T^2 HT^2 = 0$, получаем

$$THTHT^2 + THT^2 HT + T^2 HTHT = 0. \quad (1.7)$$

Умножив на H слева, (с помощью (1.6)) получаем

$$HTHT^2 HT + HT^2 HTHT = 0. \quad (1.8)$$

Умножив уравнение (1.3) справа на T , получаем $2HTHTHT = HTHT^2 HT + HT^2 HTHT$.

Из этого и (1.8) имеем $HTHTHT = 0$, т. е.

$$HBHBHB = HBHBH. \quad (1.9)$$

Аналогично имеем

$$BHBHBH = HBHBH. \quad (1.10)$$

Поэтому

$$8HBHBHB = 8BHBHBH = HB^2 HB^2 H. \quad (1.11)$$

Умножив уравнение (1.5) справа на $B^2 HBHB$, получаем

$$HB^2 HBHB^2 HBHB = 0. \quad (1.12)$$

Аналогично имеем

$$HBHB^2 HBHB^2 HB = 0.$$

Если в слове $W(H, B)$ не менее пяти элементов H , тогда

$$W(H, B) = \dots HB^{s_1} HB^{s_2} HB^{s_3} HB^{s_4} HB^{s_5} \dots$$

Пусть $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$, тогда $W(H, B) = 0$, если $s < 6$ (потому что $(HB)^4 = 0$).

Можно считать $s_i < 3$, $i = \overline{1, 5}$ (потому что $(B - E)^3 = 0$). Из (1.11) знаем, что в слове $W(H, B)$ нет $\dots HB^2 HB^2 H \dots$. Поэтому из (1.10), (1.11), (1.12) получаем $W(H, B) = 0$.

Лемма 1.2 доказана.

2 Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы. Берем любое слово $W(H, B)$. В $W(H, B)$ не менее одного элемента H . Тогда $(W(H, B))^5 = 0$ (см. лемму 1.2).

Отсюда получаем $\text{tr}W(H, B) = 0$. Берем любую матрицу $W(A, B)$ в подгруппе $\rho(F_2)$. Тогда $W(A, B) = B^k + \sum a_i W_i(H, B)$ в $W_i(H, B)$ не менее одного H . Поэтому

$$\text{tr}W(A, B) = \text{tr}B^k + a_i \sum \text{tr}W_i(H, B) = n + 0 = n.$$

Так как это равенство справедливо для любой матрицы C , то $\text{tr}C = \text{tr}C^2 = \dots = \text{tr}C^n = n$.

Отсюда следует, что C – унипотентная матрица. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магнус, В. Комбинаторная теория групп: представление групп в терминах образующих и соотношений / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М. : Наука, 1974.
2. Самсонов, Ю.Б. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ матрицами из $GL(n, C)$, $n=2,3,4$, при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы / Ю.Б. Самсонов, О.И. Тавгень // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 6. – С. 29–32.

3. Тавгень, О.И. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ в $GL(5, \mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы / О.И. Тавгень, Ян Синьсун // Вестник БГУ. Серия 1. – 2009. – № 3. – С. 74–79.

4. Тавгень, О.И. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ в $GL(n, C)$ при условии отображения примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малых размерностей / О.И. Тавгень, Ян Синьсун // Весник ВДУ. Серия 1. – 2010. – № 3 (57). – С. 48–53.

5. Тавгень, О.И. Унипотентность образа представления F_2 в $GL(n, C)$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малой размерности (II) / О.И. Тавгень, Ян Синьсун, Лю Сцуньянь // Весник ВДУ. Серия 1. – 2010. – № 6 (60). – С. 11–14.

Поступила в редакцию 30.05.11.

УДК 512.542

О НЕДИСТРИБУТИВНОСТИ РЕШЕТКИ ВСЕХ n -КРАТНО ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

А.А. Царев

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

ON NON-DISTRIBUTIVITY OF THE LATTICE OF ALL n -MULTIPLY ω -COMPOSITION FORMATIONS

A.A. Tsarev

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

Пусть $n \geq 0$ и ω – бесконечное множество простых чисел. Доказано, что решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций не является дистрибутивной при любом целом неотрицательном n .

Ключевые слова: конечная группа, формация групп, ω -композиционный спутник формации, недистрибутивная решетка.

Let $n \geq 0$ and ω be an infinite set of primes. It is proved that the lattice of all τ -closed n -multiply ω -composition formations is not distributive.

Keywords: finite group, formation of groups, ω -composition satellite of formation, non-distributive lattice.

Введение

В 1986 г. А.Н. Скибой [1] была установлена модулярность решетки всех (насыщенных) формаций. Впоследствии этот факт нашел много приложений в вопросах классификации насыщенных формаций (см. [2]–[4]) и был развит в работах других авторов. Это послужило мотивацией для нахождения модулярных и дистрибутивных решеток формаций иных типов (n -кратно насыщенных [2], p -насыщенных [5], n -кратно $\mathcal{E}$ -композиционных [6], тотально насыщенных [7], [8], τ -замкнутых тотально насыщенных [9], n -кратно Ω -канонических и n -кратно Ω -биканонических [10], Ω -расслоенных формаций мультиоператорных T -групп, обладающих композиционными рядами [11]).

В недавно опубликованных работах [12], [13] было доказано, что решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $c_{\omega_n}^{\tau}$ модулярна. Дополняя последний результат, в данной заметке мы докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $c_{\omega_n}^{\tau}$ не является дистрибутивной при любом целом неотрицательном n .

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать стандартную терминологию, принятую в [2], [3], [6].

1 Предварительные сведения

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Символы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_{p'}$ обозначают класс всех групп и класс всех p' -групп соответственно.

В произвольной группе G выберем систему подгрупп $\pi(G)$. Говорят, что τ – *подгрупповой функтор* (в смысле А.Н. Скибы [3]), если выполняются следующие условия:

1) $G \in \pi(G)$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \pi(A)$, $T \in \pi(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \pi(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \pi(A)$.

Если $\pi(G) = \{G\}$, то функтор τ называется *тривиальным*. Мы будем рассматривать лишь такие подгрупповые функторы τ , что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\pi(G)$, субнормальны в G . Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ -замкнутой* [3], если $\pi(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы G из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем символ ω означает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$.

Символом $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$. Символами $O_p(G)$ и $R_{\omega}(G)$ обозначаются наибольшая нормальная p -подгруппа группы G и наибольшая нормальная разрешимая ω -подгруппа группы G соответственно. Символ

$C^p(G)$ обозначает пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , у которых композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет главных факторов с таким свойством, то полагают $C^p(G) = G$). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\text{Com}^+(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$. В частности, для группы G символ $\text{Com}^+(G)$ обозначает класс всех простых абелевых групп A таких, что A изоморфна некоторому композиционному фактору группы G .

Пусть f – произвольная функция вида $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$. (1.1)

Следуя [6], сопоставим функции f класс групп

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и}$$

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(G))\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1.1), то $\mathfrak{F}$ называется ω -композиционной формацией с ω -композиционным спутником f .

Всякая формация считается 0-кратно ω -композиционной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n -кратно ω -композиционной [6], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$ -кратно ω -композиционными формациями.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и для любой полной решетки формаций Θ через $\Theta \text{form } \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех формаций из Θ , которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $\Theta \text{form } \{G\}$ пишут $\Theta \text{form } G$. Всякая формация такого вида называется *однопорожденной Θ -формацией*. Напомним, что спутник f называется Θ -значным, если все его значения принадлежат решетке Θ . Символом Θ^{ω_c} обозначается полная решетка формаций, обладающих Θ -значным ω -композиционным спутником (см. [6]).

Относительно включения $\subseteq$ совокупность всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $c_{\omega_n}^\tau$ является полной решеткой. Символом $c_{\omega_n}^\tau \text{form } \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. Для произвольных τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагают $\mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{F}_2 = c_{\omega_n}^\tau \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – совокупность ω -композиционных $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значных спутников. Через $\bigcap_{i \in I} f_i$ обозначают такой ω -композиционный

спутник m , что $m(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Через $\vee_{\omega_{n-1}}^\tau (f_i \mid i \in I)$ обозначают такой ω -композиционный спутник f , что

$$f(a) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} f_i(a) \right)$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, в частности,

$$(f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2)(a) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form} (f_1(a) \cup f_2(a)),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(a) \neq \emptyset$. Если же $f_i(a) = \emptyset$ для всех $i \in I$, то полагают $f(a) = \emptyset$.

Лемма 1.1 [6, лемма 2]. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω -композиционных $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.1 $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ – ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным*.

Лемма 1.2 [6, лемма 5]. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form } \mathfrak{X}$, где $n \geq 1$, $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{X}))$ и пусть f – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1) f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form} (G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X});$$

$$2) f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form} (G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \text{ для}$$

всех $p \in \pi$,

$$3) f(p) = \emptyset \text{ для всех } p \in \omega \setminus \pi,$$

$$4) \text{ если } \mathfrak{F} = CF_\omega(h) \text{ и спутник } h \text{ } c_{\omega_{n-1}}^\tau\text{-значен,}$$

то для всех $p \in \pi$ имеет место

$$f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form} (A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(A) = 1) \text{ и}$$

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form} (A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A) = 1).$$

Лемма 1.3 [14, лемма 2]. Пусть Z_p – группа простого порядка p и G – группа с $O_p(G) = 1$. Тогда база регулярного сплетения $T = Z_p \wr G$ совпадает с $C^p(T) = O_p(T)$.

Следуя [3], полную решетку формаций Θ^{ω_c} называют *индуктивной*, если для произвольного набора $\{\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i) \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ и для любого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних ω -композиционных Θ -значных спутников f_i имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}} (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega(\vee_\Theta (f_i \mid i \in I)).$$

Лемма 1.4 [13, теорема 2.1]. Решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $c_{\omega_n}^\tau$ индуктивна.

Лемма 1.5 [3, следствие 4.2.8]. Решетка всех τ -замкнутых n -кратно насыщенных формаций I_n^τ модулярна, но не дистрибутивна.

Полагают $f \leq h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Лемма 1.6 [6, лемма 6]. Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω -композиционные $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

Пусть Θ – полная решетка формаций. Формации, принадлежащие Θ , называют Θ -формациями [3]. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Группа G называется $\mathfrak{X}$ -группой, если $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$ -отделимой [3], если для любого терма $\xi(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых Θ -формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$ -группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \xi(\Theta \text{form } A_1, \dots, \Theta \text{form } A_m).$$

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству теоремы 4.1.16 из монографии [3].

Лемма 1.7. Решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $c_{\omega_n}^\tau$ $\mathfrak{B}$ -отделима.

Лемма 1.8 [3, лемма 4.2.4]. Пусть Θ – $\mathfrak{X}$ -отделимая решетка формаций, η – такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией $\mathfrak{F}$ содержит и все ее однопорожденные Θ -подформации вида $\Theta \text{form } A$, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда тождество $\xi_1 = \xi_2$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$ истинно в η , если оно выполняется для всех однопорожденных Θ -формаций из η .

2 Доказательство теоремы

Лемма 2.1. Пусть $n \geq 1$ и пусть f_i – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда $f = f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2$ – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значный спутник формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{F}_2$.

Доказательство. Пусть $h = f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2$, а f – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}$, и пусть

$$\pi_1 = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)) \text{ и}$$

$$\pi_2 = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{F})).$$

Нетрудно заметить, что $\pi_1 = \pi_2$.

Покажем, что $f = h$. Пусть $\pi = \pi_1 = \pi_2$. Ввиду леммы 1.2

$$\begin{aligned} f(\omega') &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \\ &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup \\ &\quad \cup c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)) = \\ &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(f_1(\omega') \cup f_2(\omega')) = \\ &= (f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2)(\omega') = h(\omega'). \end{aligned}$$

Если $p \in \pi$, то по лемме 1.2

$$\begin{aligned} f(p) &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \\ &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup \\ &\quad \cup c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)) = \\ &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(f_1(p) \cup f_2(p)) = (f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2)(p) = h(p). \end{aligned}$$

Если $p \in \omega \setminus \pi$, то согласно лемме 1.2 $f_i(p) = \emptyset$ для любого $i = 1, 2$. В этом случае

$$h(p) = (f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2)(p) = \emptyset = f(p).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть формация $\mathfrak{F}_i = c_{\omega_n}^\tau \text{form } B_i$, $i = 1, 2$, такова, что $B_i = Z_p \wr A_i$, $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, A_2)$, и пусть f_i и f – минимальные ω -композиционные $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значные спутники формаций $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $f(p) = f_1(p) \cap f_2(p)$.

Доказательство. Пусть $h = f_1 \cap f_2$. Тогда по лемме 1.1 $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$. Пусть $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, A_2)$. Покажем, что $f(p) = h(p)$. Ввиду леммы 1.2

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(A \mid A \in h(p), O_p(A) = 1).$$

Так как $p \notin \pi(A_1, A_2)$, то $O_p(A_1) = O_p(A_2) = 1$. По лемме 1.3 $B_i / C^p(B_i) = B_i / O_p(B_i) \cong A_i$, $i = 1, 2$. Значит, по лемме 1.2

$$f_i(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(B_i / C^p(B_i)) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form } A_i.$$

Так как $A_i \in \mathfrak{B}_{p'}$, то $f_i(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form } A_i \subseteq \mathfrak{B}_{p'}$. Тогда для любой группы $A \in f_i(p)$ имеет место $O_p(A) = 1$. Значит,

$$\begin{aligned} f(p) &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(A \mid A \in f_1(p) \cap f_2(p), O_p(A) = 1) = \\ &= c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(f_1(p) \cap f_2(p)) = f_1(p) \cap f_2(p) = h(p). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для всякого терма ξ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\omega_n}^\tau\}$ через $\bar{\xi}$ обозначается (см. [3]) терм сигнатуры

$\{\bigcap, \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau}\}$, получаемый из термина ξ заменой каждого вхождения символа $\vee_{\omega_n}^{\tau}$ символом $\vee_{\omega_{n-1}}^{\tau}$.

Лемма 2.3. Пусть $\xi(x_1, \dots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$, f_i – внутренний ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, где $i = 1, \dots, m$; $n \geq 1$. Тогда

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = CF_{\omega}(\bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ξ символов из $\{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$. Основание индукции (случай $r = 1$) вытекает из лемм 1.1 и 1.4.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi(x_1, \dots, x_m) = \xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$,

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$$

и лемма для термов ξ_1, ξ_2 выполняется. Тогда по индукции

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = CF_{\omega}(\bar{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})) \text{ и}$$

$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = CF_{\omega}(\bar{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).$$

Понятно, что оба спутника $\bar{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})$ и $\bar{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})$ внутренние. Значит, по индукции

$$\begin{aligned} \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) &= \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \Delta \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \\ &= CF_{\omega}(\bar{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}) \bar{\Delta} \bar{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})) = \\ &= CF_{\omega}(\bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)), \end{aligned}$$

где $\bar{\Delta} = \bigcap$, если $\Delta = \bigcap$, и $\bar{\Delta} = \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau}$, если $\Delta = \vee_{\omega_n}^{\tau}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть формация $\mathfrak{F}_i = c_{\omega_n}^{\tau} \text{ form } B_i$, $i = 1, \dots, m$, такова, что $B_i = Z_p \wr A_i$, $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, \dots, A_m)$, и f_i – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Пусть $\xi(x_1, \dots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$ и f – минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значный спутник формации $\mathfrak{F} = \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$. Тогда $f(p) = \bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)(p)$.

Доказательство. Пусть $h = \bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)$. Тогда по лемме 2.3 $\xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = CF_{\omega}(h)$. Пусть $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, \dots, A_m)$. Покажем, что $h(p) = f(p)$. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ξ символов из $\{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$.

Основание индукции (случай $r = 1$) вытекает из лемм 2.1 и 2.2.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi(x_1, \dots, x_m) = \xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\bigcap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$,

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$$

и лемма для термов ξ_1, ξ_2 выполняется. Тогда по индукции

$$h_1(p) = \bar{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(p) \text{ и}$$

$$h_2(p) = \bar{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(p),$$

где h_1, h_2 – минимальные ω -композиционные $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значные спутники формаций $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$ и $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$ соответственно. Значит, по индукции

$$\begin{aligned} f(p) &= h_1(p) \bar{\Delta} h_2(p) = \bar{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}) \bar{\Delta} \bar{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b}) = \\ &= \bar{\xi}_1(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)) \bar{\Delta} \bar{\xi}_2(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)) = \\ &= \bar{\xi}(f_1(p), \dots, f_m(p)) = \bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)(p) = h(p). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Проведем индукцию по n . Пусть $n = 0$. Тогда ввиду леммы 1.5 решетка всех τ -замкнутых формаций $c_{\omega_0}^{\tau}$ не является дистрибутивной.

Пусть $n > 0$ и решетка $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ не дистрибутивна. Предположим, что решетка $c_{\omega_n}^{\tau}$ дистрибутивна. Пусть A_1, A_2, A_3 – произвольные группы. Пусть формация $\mathfrak{F}_i = c_{\omega_n}^{\tau} \text{ form } B_i$, $i = 1, 2, 3$, такова, что $B_i = Z_p \wr A_i$, $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, A_2, A_3)$. Тогда

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F}_3) = (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) \vee_{\omega_n}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Пусть f, h, f_i – минимальные ω -композиционные $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значные спутники формаций $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F}_3)$, $\mathfrak{H} = (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) \vee_{\omega_n}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3)$ и $\mathfrak{F}_i$ соответственно. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, то по лемме 1.6 $f(p) = h(p)$.

Так как $p \notin \pi(A_1, A_2, A_3)$, то $O_p(A_i) = 1$ для всех $i = 1, 2, 3$. Тогда ввиду леммы 1.3 $B_i / C^p(B_i) = B_i / O_p(B_i) \cong A_i$ для всех $i = 1, 2, 3$. Значит, по лемме 1.2

$$f_i(p) = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } (B_i / C^p(B_i)) = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_i.$$

Следовательно, по лемме 2.4,

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_1 \cap$$

$$\begin{aligned} &\cap ((c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_2) \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} (c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_3)) = \\ &= (c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_1 \cap c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_2) \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} (c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_1 \cap \\ &\quad \cap c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{ form } A_3) = h(p). \end{aligned}$$

Тогда, ввиду лемм 1.7 и 1.8, решетка $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ дистрибутивна. Противоречие. Таким образом, при любых целых неотрицательных n решетка $c_{\omega_n}^{\tau}$ не является дистрибутивной. Теорема доказана.

В случае $n = 1$ из теоремы непосредственно вытекает

Следствие 2.1. Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех τ -замкнутых ω -композиционных формаций не дистрибутивна.

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, то справедливо

Следствие 2.2. Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех n -кратно ω -композиционных формаций не дистрибутивна при любом целом неотрицательном n .

При $n = 1$ для тривиального подгруппового функтора τ получаем

Следствие 2.3. Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех ω -композиционных формаций не дистрибутивна.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

Следствие 2.4. Решетка всех n -кратно композиционных формаций не дистрибутивна при любом целом неотрицательном n .

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получаем

Следствие 2.5. Решетка всех композиционных формаций не дистрибутивна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // В сб. : Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1986. – С. 135–149.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 254 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Guo, Wenbin. The theory of classes of groups / Wenbin Guo. – Beijing – New York –

Dordrecht – Boston – London : Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000. – 325 p.

5. Ballester-Bolínches, A. On lattices of p -local formations of finite groups / A. Ballester-Bolínches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.

6. Скиба, А.Н. Кратно $\mathcal{L}$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

7. Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.

8. Safonov, V.G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128.

9. Сафонов, В.Г. О модулярности решетки τ -замкнутых totally насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Украинский матем. журн. – 2006. – Т. 58, № 6. – С. 852–858.

10. Скачкова, Ю.А. Решетки Ω -расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 2. – С. 85–94.

11. Ведерников, В.А. Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп / В.А. Ведерников, Е.Н. Демина // Сибирский матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 990–1009.

12. Жизневский, П.А. О модулярности и индуктивности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / П.А. Жизневский // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.

13. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.

14. Скиба, А.Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – Гомель : Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – 1992. – Вып. 7. – С. 39–43.

Поступила в редакцию 15.08.11.

УДК 517.2

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТИ ДЖЕКСОНА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГАРАНТИЙНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ТЕХНИКИ

О.В. Якубович¹, Ю.С. Боярович¹, Ю.Е. Летунович¹, Д.Е. Ворошилов²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²ПО «Гомсельмаш», Гомель

APPLICATION OF JACKSON'S NETWORK TO MODELLING OF THE WARRANTY SERVICE OF AGRICULTURAL TECHNIQUES

O.V. Yakubovich¹, Y.S. Boyarovich¹, Y.E. Letunovich¹, D.E. Voroshilov²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Production Association «Gomselmash», Gomel

В работе рассматривается математическая модель процесса гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш», региональными дилерскими центрами, функционирование каждого центра описано сетью массового обслуживания. Найдены стационарное распределение вероятностей состояний сети и условия эргодичности, получены формулы для определения числовых характеристик стационарного функционирования сети.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, стационарное распределение, условия эргодичности, числовые характеристики.

The paper considers the mathematical model of the warranty service process of «Gomselmash» agricultural techniques provided by regional dealer centers. The service process of each center is described by a queueing network. The stationary distribution of conditions probabilities of the network and ergodicity conditions are found. Formulas for definition of numerical characteristics of network stationary functioning are received.

Keywords: queueing network, stationary distribution, ergodicity conditions, numerical characteristics.

Введение

В связи с тенденцией развития информатизации и компьютеризации различных сфер жизни общества, все большее внимание уделяется исследованию процессов накопления, хранения, обработки и передачи информации. Рассмотрение многих объектов систем передачи информации требует применения аппарата теории сетей массового обслуживания. Результаты исследований, полученные в рамках теории массового обслуживания, находят непосредственное применение при имитационном моделировании, в проектировании мультипрограммных вычислительных систем, анализе сетей передачи данных, а также при разработке методов повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей. Использование сложных математических моделей сетей открывает возможности эффективного конструирования и эксплуатации исследуемых систем.

Система гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш», основана на функционировании совокупности его независимых региональных дилерских центров (отделов технической эксплуатации и сервисного обслуживания по регионам), каждый из которых в соответствии с

теорией сетей массового обслуживания [1]–[3] может быть описан сетью массового обслуживания. В данной работе построена математическая модель функционирования отдельного дилерского центра, осуществляющего гарантийное обслуживание парка сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш».

Процесс поступления и обработки информационных сообщений об отказах в работе техники осуществляется следующим образом. Информационное сообщение об отказе в работе каждой отдельной сельскохозяйственной машины (в виде телеграммы, телетайпограммы, телефонограммы) от ее потребителя поступает в дилерский центр. После получения каждого из этих сообщений работники дилерского центра ставят их на контроль, передают эту информацию в бюро информации УТиСОП (управление технического и сервисного обслуживания продукции) ПО «Гомсельмаш» для регистрации и внесения в компьютерную базу данных об отказах техники и организуют работу выездной бригады работников дилерского центра по оперативному устранению отказа. По прибытию к потребителю представители организации-изготовителя в составе выездной бригады проводят техническую экспертизу отказавшего объекта. После оценки

ситуации специалисты выездной бригады на месте устраняют имеющуюся неисправность. При необходимости, они организуют доставку на место из дилерского центра необходимых запасных частей и (или) вызов специалистов, квалификация которых требуется для проведения ремонтных работ.

Таким образом, осуществляется передача данных в трехузловой открытой сети массового обслуживания, узлами в которой являются: служба дилерского центра, занимающаяся приемом, регистрацией и обработкой сообщений об отказах техники, выездная бригада работников дилерского центра, а также место ремонта сельскохозяйственных машин специалистами дилерского центра. Будем называть их соответственно первым, вторым и третьим узлами. Информационные сообщения об отказах и группы специалистов (выездные бригады), направляемые к месту ремонта, условимся называть заявками, а обработку информационных сообщений и ремонт техники – интерпретировать как обслуживание заявок.

1 Описание сети

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из трех узлов. Каждый узел представляет собой однолинейную систему массового обслуживания. Предполагается, что число мест для ожидания в узлах сети не ограничено. Предположим, что заявки поступают в сеть пуассоновским потоком интенсивности λ . Пусть $n_i(t)$ – количество заявок в i -ом узле в момент времени t , $i=1,2,3$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $n(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$, тогда $n(t)$ – случайный процесс с непрерывным временем и пространством состояний $X = \{(n_1, n_2, n_3) | n_i = 0, 1, 2, \dots, i=1, 2, 3\}$.



Рисунок 1 – Модель функционирования дилерского центра

С вероятностью 1 заявки входного потока направляются в очередь первого узла сети. Времена обслуживания заявок в узлах независимы, не зависят от процесса поступления и в i -ом узле имеют экспоненциальное с параметрами $\mu_i(n_i)$, $i=1,2,3$, если i -ый узел находится в состоянии n_i . После обслуживания в первом узле заявка с вероятностью 1 переходит во

второй, а после обслуживания во втором с вероятностью 1 – в третий. По завершении обслуживания в третьем узле заявка с вероятностью p возвращается во второй узел, а с вероятностью $1-p$ покидает сеть. При сделанных предположениях $n(t)$ – марковский процесс. На рисунке 1 изображена схема рассматриваемой модели.

2 Стационарное распределение вероятностей состояний сети

Обозначим через

$$\{P(n_1, n_2, n_3), (n_1, n_2, n_3) \in X\}$$

стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Если стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$ существует, то стационарные вероятности $P(n_1, n_2, n_3)$ удовлетворяют следующей системе уравнений глобального равновесия:

$$\begin{aligned} &P(n_1, n_2, n_3)[\lambda + \mu_1(n_1)I_{\{n_1 \neq 0\}} + \\ &+ \mu_2(n_2)I_{\{n_2 \neq 0\}} + \mu_3(n_3)I_{\{n_3 \neq 0\}}] = \\ &= P(n_1 - 1, n_2, n_3) \lambda I_{\{n_1 \neq 0\}} + \\ &+ P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3) \mu_1(n_1 + 1) I_{\{n_2 \neq 0\}} + \\ &+ P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1) \mu_2(n_2 + 1) I_{\{n_3 \neq 0\}} + \\ &+ P(n_1, n_2 - 1, n_3 + 1) \mu_3(n_3 + 1) I_{\{n_2 \neq 0\}} p + \\ &+ P(n_1, n_2, n_3 + 1) \mu_3(n_3 + 1)(1 - p), (n_1, n_2, n_3) \in X. \end{aligned}$$

Стационарное распределение вероятностей состояний $\{P(n_1, n_2, n_3), (n_1, n_2, n_3) \in X\}$ может быть найдено по теореме Джексона [1].

Обозначим через $\lambda \varepsilon_i$ полную интенсивность поступления заявок в i -ый узел ($i=1,2,3$). Система уравнений трафика принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda \varepsilon_1 = \lambda; \\ \lambda \varepsilon_2 = \lambda \varepsilon_1 + p \lambda \varepsilon_3; \\ \lambda \varepsilon_3 = \lambda \varepsilon_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Решив систему (2.1), получим

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1; \\ \varepsilon_2 = 1/(1 - p); \\ \varepsilon_3 = 1/(1 - p). \end{cases} \quad (2.2)$$

Стационарное распределение вероятностей состояний i -го ($i=1,2,3$) изолированного узла сети:

$$P_i(n_i) = P_i(0)(\lambda \varepsilon_i)^{n_i} \prod_{l=1}^{n_i} \mu_l^{-1}(l), \quad (2.3)$$

где $P_i(0) = \left(1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} (\lambda \varepsilon_i)^{n_i} \prod_{l=1}^{n_i} \mu_l^{-1}(l) \right)^{-1}$ находится

из условия нормировки, $\{\varepsilon_i, i=1, 2, 3\}$ – решение системы уравнений трафика (2.2).

Условия эргодичности для процесса, описывающего функционирование сети, имеют следующий вид:

$$\sum_{(n_1, n_2, n_3) \in X} \left| \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l) \cdot \lambda^{n_2} (1-p)^{-n_2} \times \right. \\ \left. \times \prod_{m=1}^{n_2} \mu_2^{-1}(m) \cdot \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{k=1}^{n_3} \mu_3^{-1}(k) \right| < \infty \quad (2.4)$$

или

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \left| \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l) \right| < \infty; \\ \sum_{n_2=0}^{\infty} \left| \lambda^{n_2} (1-p)^{-n_2} \prod_{l=1}^{n_2} \mu_2^{-1}(l) \right| < \infty; \\ \sum_{n_3=0}^{\infty} \left| \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{l=1}^{n_3} \mu_3^{-1}(l) \right| < \infty.$$

Теорема 2.1. При выполнении условий эргодичности (2.4) стационарное распределение вероятностей состояний сети

$$\{P(n_1, n_2, n_3), (n_1, n_2, n_3) \in X\}$$

представляет собой произведение стационарных распределений вероятностей состояний изолированных узлов:

$$P(n_1, n_2, n_3) = \prod_{i=1}^3 P_i(n_i),$$

где $P_i(n_i)$ определяется по формуле (2.3).

Таким образом, стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$P(n_1, n_2, n_3) = P(0, 0, 0) \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l) \lambda^{n_2} \times \\ \times (1-p)^{-n_2} \prod_{m=1}^{n_2} \mu_2^{-1}(m) \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{k=1}^{n_3} \mu_3^{-1}(k), \quad (2.5)$$

где

$$P(0, 0, 0) = \left(1 + \sum_{n_1=1}^{\infty} \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l) \right)^{-1} \times \\ \times \left(1 + \sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda^{n_2} (1-p)^{-n_2} \prod_{l=1}^{n_2} \mu_2^{-1}(l) \right)^{-1} \times \\ \times \left(1 + \sum_{n_3=1}^{\infty} \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{l=1}^{n_3} \mu_3^{-1}(l) \right)^{-1}.$$

3 Числовые характеристики стационарного функционирования сети массового обслуживания

Зная вид (2.5) стационарного распределения вероятностей состояний сети, можно вывести

формулы для нахождения характеристик стационарного функционирования сети:

1. Среднее число заявок в i -ом узле ($i=1,2,3$):

$$\bar{\xi}_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i P_i(n_i).$$

Среднее число заявок в первом узле в стационарном режиме находится по формуле:

$$\bar{\xi}_1 = \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1 P_1(n_1) = \\ = \left(1 + \sum_{n_1=1}^{\infty} \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l) \right)^{-1} \times \\ \times \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1 \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l). \quad (3.1)$$

Среднее число заявок во втором узле в стационарном режиме находится по формуле:

$$\bar{\xi}_2 = \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 P_2(n_2) = \\ = \left(1 + \sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda^{n_2} (1-p)^{-n_2} \prod_{l=1}^{n_2} \mu_2^{-1}(l) \right)^{-1} \times \\ \times \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 \lambda^{n_2} (1-p)^{-n_2} \prod_{l=1}^{n_2} \mu_2^{-1}(l). \quad (3.2)$$

Среднее число заявок в третьем узле в стационарном режиме находится по формуле:

$$\bar{\xi}_3 = \sum_{n_3=0}^{\infty} n_3 P_3(n_3) = \\ = \left(1 + \sum_{n_3=1}^{\infty} \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{l=1}^{n_3} \mu_3^{-1}(l) \right)^{-1} \times \\ \times \sum_{n_3=0}^{\infty} n_3 \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{l=1}^{n_3} \mu_3^{-1}(l). \quad (3.3)$$

2. Среднее число заявок в сети:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_3, \quad (3.4)$$

где $\bar{\xi}_i$ определяется с помощью (3.1)–(3.4).

3. Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди i -го узла ($i=1,2,3$):

$$\bar{\eta}_i = \sum_{n_i=2}^{\infty} (n_i - 1) P_i(n_i).$$

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди первого узла в стационарном режиме находится по формуле:

$$\bar{\eta}_1 = \sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 - 1) P_1(n_1) = \left(1 + \sum_{n_1=1}^{\infty} \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l) \right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 - 1) \lambda^{n_1} \prod_{l=1}^{n_1} \mu_l^{-1}(l). \quad (3.5)$$

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди второго узла в стационарном режиме находится по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{n}_2 &= \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_2 - 1) P_2(n_2) = \\ &= \left(1 + \sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda^{n_2} (1-p)^{-n_2} \prod_{l=1}^{n_2} \mu_l^{-1}(l) \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_2 - 1) \lambda^{n_2} (1-p)^{-n_2} \prod_{l=1}^{n_2} \mu_l^{-1}(l). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди третьего узла в стационарном режиме находится по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{n}_3 &= \sum_{n_3=1}^{\infty} (n_3 - 1) P_3(n_3) = \\ &= \left(1 + \sum_{n_3=1}^{\infty} \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{l=1}^{n_3} \mu_l^{-1}(l) \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{n_3=1}^{\infty} (n_3 - 1) \lambda^{n_3} (1-p)^{-n_3} \prod_{l=1}^{n_3} \mu_l^{-1}(l). \end{aligned} \quad (3.7)$$

4. Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в сети:

$$\bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3, \quad (3.8)$$

где $\bar{n}_i$ – среднее число заявок, ожидающих обслуживания в i -ом узле, определяемое с помощью (3.5)–(3.7).

5. Среднее время пребывания заявки в i -ом узле ($i = 1, 2, 3$):

$$\bar{V}_i = \frac{\bar{\xi}_i}{\lambda \varepsilon_i},$$

где $\bar{\xi}_i$ – среднее число заявок в i -ом узле, определяемое по формулам (3.1)–(3.4), $\{\varepsilon_i, i = 1, 2, 3\}$ – решение (2.2) системы уравнений трафика (2.1).

6. Среднее время ожидания заявки в i -ом узле ($i = 1, 2, 3$):

$$\bar{W}_i = \frac{\bar{n}_i}{\lambda \varepsilon_i},$$

где $\bar{n}_i$ – среднее число заявок, ожидающих обслуживания в i -ом узле, определяемое по

формулам (3.5)–(3.7), $\{\varepsilon_i, i = 1, 2, 3\}$ – решение (2.2) системы уравнений трафика (2.1).

7. Среднее время пребывания заявки в сети:

$$\bar{V} = \frac{\bar{\xi}}{\lambda},$$

где $\bar{\xi}$ – среднее число заявок в сети, определяемое с помощью (3.4).

8. Среднее время ожидания заявки в сети:

$$\bar{W} = \frac{\bar{n}}{\lambda},$$

где $\bar{n}$ – среднее число заявок, ожидающих обслуживания в сети, которое определяется по формуле (3.8).

Заключение

В работе проведен анализ системы гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш», основанной на функционировании совокупности его независимых региональных дилерских центров, при этом каждый из дилерских центров описан сетью массового обслуживания. Разработана математическая модель стохастической сети массового гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпущенных ПО «Гомсельмаш». Для разработанной математической модели сети массового обслуживания установлены условия эргодичности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний сети, найдены формулы для определения ряда числовых характеристик стационарного функционирования сети: среднего числа заявок в узлах и в сети; среднего числа заявок, ожидающих обслуживания в узлах и в сети; среднего времени пребывания и среднего времени ожидания заявок в узлах и в сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jackson, J.R. Networks of waiting lines / J.R. Jackson // Oper. Res. – 1957. – Vol. 5, № 4. – P. 518–521.
2. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М. : Изд-во физ.-мат.лит., 2004. – 772 с.
3. Бочаров, П.П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

Поступила в редакцию 30.06.11.

УДК 519.873+519.876

ВЫБОР РАЦИОНАЛЬНОГО ВАРИАНТА ОРГАНИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ СООБЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Д.В. Ратобыльская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

CHOICE OF THE RATIONAL VARIANT OF THE ORGANIZATION OF THE TRANSPORT NETWORK COMMUNICATIONS ON THE BASIS OF PROBABILITY-ALGEBRAIC SIMULATION

D.V. Ratobylskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Статья посвящена применению метода вероятностно-алгебраического моделирования для исследования вероятностных характеристик сложных систем. Содержит описание идеи метода и методологию вероятностно-алгебраического моделирования. В статье приведен пример описания модели транспортной сети и оценка организации сообщения средствами метода.

Ключевые слова: вероятностно-алгебраическая модель, моделирование, граф, транспортная сеть, сеть сообщения.

The paper is devoted to the application of the method of probability-algebraic simulation for research of probability characteristics of complex systems. It contains the description of the idea of the method and methodology of probability-algebraic simulation. In the paper the example of the description of the transport network model and estimation of the organization of communications is presented by method means.

Keywords: probability-algebraic simulation, modeling, graph, transport network, message network.

Введение

Широкое применение в исследовании и тестировании сложных технических производственных систем к настоящему времени получили методы теории графов.

Графовые модели как средство описания топологии и функциональных схем больших и структурно-сложных систем составляют методическую базу в решении задач оптимизации и планирования технологических процессов и сетевых структур. Вопросам разработки и применения данного класса методов, методик и базирующихся на них автоматизированных систем управления посвящено большое количество работ зарубежных авторов, среди которых можно отметить Р. Барлоу, И.М. Соболя, Д.А. Поспелова, И.А. Рябинина, А.А. Шальто, А.С. Можаяева, С. Меллора, В. В. Boehm.

Широкий класс систем, описываемых графами, составляют потоковые системы, к которым относят транспортные сети сообщения (ТСС) [1]. Организация и эксплуатация данного класса систем предусматривает, как правило, несколько вариантов исполнения предписанных им функций. Поэтому оценка их эксплуатационных характеристик включает рассмотрение различных вариантов организации функционирования сети.

С позиций анализа вероятностных характеристик исследуемого объекта для представления

потоковых систем применяются как статические, так и динамические модели. Для статического исследования характеристик используются аналитические методы и средства их автоматизации. Применение указанных методов ограничено числом возможных к рассмотрению состояний составных частей и системы в целом. В качестве примеров реализации можно выделить программные комплексы АРБИТР (ПК АСМ СЗМА – программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования) [2] и Relex Reliability Studio [3], представляющие модели исследуемого объекта в виде графа. Среди динамических моделей наиболее широко применимы методы, основанные на статистическом имитационном моделировании [4]. Данные методы и реализованные на их базе системы моделирования входят в состав крупных коммерческих проектов, как правило, носят узкоспециализированный характер и высокую стоимость.

Сочетанием статического и динамического моделирования, позволяющим учитывать множество изменяющихся во времени вероятностных характеристик участков сети (потоковой системы) и её структурную организацию, является метод вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) [5].

Приводимое в статье исследование направлено на решение задачи выбора рационального варианта организации ТСС, описываемой

графовой структурой. Анализ организации и функционирования системы основан на методе ВАЛМ, методика применения которого излагается в статье.

1 Критерий сравнения вариантов организации транспортной сети сообщения

С точки зрения оценки уровня организации функционирования ТСС, ключевым показателем является соотношение максимальной пропускной способности сети и качества обслуживания транспортного потока.

Пропускная способность сети (PR) указывает на максимально возможное количество единиц транспорта, которое она способна пропустить за выбранную единицу времени. Критерий качества обслуживания интегрального транспортного потока (W) определяется временем и стоимостью перемещения транспортных единиц и для обобщенной ТСС и задается следующим образом:

$$W^* = \delta_1 \cdot T^* + \delta_2 \cdot Q^*, \quad \sum_{i=1}^2 \delta_i = 1,$$

где $0 \leq \delta_j \leq 1$ являются весовыми коэффициентами важности соответственно времени (δ_1) и стоимости (δ_2) движения по сети, T – время перемещения транспорта по сети, Q – затраты на перемещение транспорта [1]. Верхний индекс у переменных означает их нормирование соответствующими максимальными величинам, необходимое для сведения критерия к скалярной величине изменяющейся на интервале $[0,1]$.

Указанные характеристики сети (пропускная способность, время перемещения, затраты) изменяются согласно заданным параметрам цепи Маркова и зависят от износа участков ТСС. По мере увеличения уровня износа дорог пропускная способность сети уменьшается, а материальные и временные затраты транспортных средств, движущихся по сети, увеличиваются.

Соотношение показателей максимальной пропускной способности и качества обслуживания, определяемое с учетом экспертных оценок дает показатель уровня организации ТСС, на основании которого в дальнейшем может производиться выбор либо структуры сети, либо схемы обслуживания, либо их комбинация. При решении задачи ранжирования вариантов организации и обслуживания ТСС, простым и показательным параметром является отношение показателя качества к потоку – эксплуатационная нагрузка

$$EN = \frac{W}{PR}.$$

Чем данный показатель выше, тем большие затраты приходится на единицу транспортного потока.

2 Идея метода вероятностно-алгебраического моделирования

Метод ВАЛМ представляет собой сочетание статического моделирования, отображающего процессы взаимного влияния структурных составляющих системы, и динамического моделирования, позволяющего оценить временную эволюцию отдельных компонентов и всей системы в целом.

Система формализуется в виде множества компонентов $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$, согласованное взаимодействие которых обеспечивает функционирование системы. Компоненты могут находиться в одном из множества состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, n}$, характеризующих исследуемые свойства системы (надёжность, пропускная способность и другие). Вероятности нахождения компонентов системы в каждом из состояний задаются векторами вероятностей:

$$P^i = (p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i), \quad \sum_{j=1}^n p_j^i = 1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Предполагается, что компоненты системы независимы и между ними могут быть установлены функциональные связи с учётом целей исследования, которые описываются набором функций $F = \{F_z\}$.

Элементы вектора вероятностей результирующего вектора p^3 , полученного в результате умножения векторов p^1 и p^2 , определяются по формуле:

$$p^3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Коэффициенты α_{ij}^k , называемые коэффициентами ВАЛМ, удовлетворяют следующим требованиям: $\sum_{k=1}^n a_{ijk} = 1, a_{ijk} \geq 0, \forall i, j, k$.

В случае детерминированных связей между компонентами исследуемой системы коэффициенты ВАЛМ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & k = F(i, j); \\ a_{ij}^k = 0, & k \neq F(i, j). \end{cases}$$

Основу метода моделирования составляет алгебраический аппарат [6]. Метод ВАЛМ реализует процесс формирования вектора вероятностей состояний системы по векторам вероятностей состояний составляющих систему компонентов с учётом установленных между ними связей [7].

3 Методика оценки вероятностных характеристик свойств транспортной сети сообщения

Определение вероятностных характеристик ТСС реализуется с использованием системы

вероятностно-алгебраического моделирования PALS (Probability-Algebraic Simulation), представленной в работе VI Международной конференции «Информационные системы и технологии» (Information Systems & Technologies – IST'2010). Методология применения системы определяется следующей последовательностью шагов.

На *шаге 1* выделяется множество элементарных участков исследуемой потоковой системы и связей между ними. В диалоговом режиме с использованием стандартных компонентов $K = \{K_i\}$ и библиотеки функций $F = \{F_z\}$ формируется графическая схема $G(F, K)$ исследуемой системы. Учитывая характерные особенности ТСС (сугубо параллельно-последовательный характер связей компонентов) графическая схема системы будет представлять собой дерево. Листьями дерева являются компоненты исследуемой системы, а узлами – функции, определяющие связи между компонентами системы.

На *шаге 2* на основе натурных экспериментов с прототипом потоковой системы или методом экспертных оценок реализуется подготовка параметров моделирования.

На *шаге 3* для каждого компонента задается количество состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, n}$ и начальные вектора вероятностей p^{i0} , характеризующие эти состояния:

$$P^{i0} = (p_1^{i0}, p_2^{i0}, \dots, p_n^{i0}), \sum_{j=1}^n p_j^{i0} = 1, i = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Для этой цели используются соответствующие средства ввода информации PALS, которые автоматически заносят в базу данных исходные данные.

На *шаге 4* осуществляется задание времени моделирования и выбор способа формирования значений векторов вероятностей, характеризующих изменение пропускной способности компонентов во времени:

$$P^{it} = (p_1^{it}, p_2^{it}, \dots, p_n^{it}), \sum_{j=1}^n p_j^{it} = 1, t = \overline{1, T}. \quad (3.2)$$

Одним из способов, определяющих динамическое изменение векторов вероятностей (3.2), является первичное моделирование с использованием марковской модели с дискретным временем и дискретными состояниями, переходная матрица которой имеет вид:

$$QK_i = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & \sum_{i=1}^2 p_i & \dots & p_{n-1} & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} p_{n-1} & p_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Возможен переход к рассмотрению процессов вероятностных изменений участков потоковой системы с восстановлением. В зависимости от стратегий восстановления компонентов выбирается одна из имеющихся параметризованных моделей Маркова. Параметры моделей определяются в результате алгоритмической обработки данных натурных экспериментов.

Альтернативным способом задания динамического изменения векторов вероятностей является описание элементов исходных векторов вероятностей (3.1) параметрическими функциями. Использование в качестве параметра функций времени позволяет управлять скоростью изменения вероятностных характеристик компонентов. Проведение статического моделирования, реализуемого одной итерацией, при параметрическом задании исходных векторов (3.1) позволяет сформировать результирующий вектор, характеризующий пропускную способность потоковой системы в символьном виде.

На *шаге 5* в соответствии с заданным временем моделирования проводится динамическое ВАЛМ, представляющее собой итерационный процесс, проводимый с учетом вероятностного изменения состояний компонентов. При этом неоднократно реализуется статическое моделирование, осуществляющее свёртку исходных векторов вероятностей состояний компонентов с учётом уровня вложенности функций и коэффициентов ВАЛМ.

На *шаге 6* по желанию пользователя результаты моделирования графически отображаются в виде временных диаграмм, представляющих изменение пропускной способности как отдельных участков, так и всей потоковой системы, либо в табличной форме экспортируются в электронные таблицы MS Excel.

На *шаге 7* (для случая исследования реальной функционирующей потоковой системы) осуществляется проверка адекватности построенной вероятностно-алгебраической модели реальному объекту. В PALS она автоматически проводится путём проверки близости средних значений откликов модели соответствующим характеристикам реальной потоковой сети. В случае отрицательных результатов осуществляется переход на шаг 4.

На *шаге 8* определяется влияние вероятностных характеристик пропускной способности участков потоковой сети на значение компонентов вектора откликов всей системы при её фиксированной структурной организации. С этой целью организуются модельные эксперименты, в которых, во-первых, варьируются значения векторов (3.1), что позволяет оценить влияние начального состояния участков системы на результирующее состояние всей сети. Во-вторых, для рассмотрения возможных режимов эксплуатации потоковой системы изменяются параметры

марковских моделей участков, описывающие вероятностное изменение исследуемых характеристик системы во времени.

На *шаге 9* исследуется влияние структурной организации потоковой системы при неизменных вероятностных значениях параметров компонентов на векторы откликов моделирования. При этом могут быть рассмотрены следующие случаи: введения новых участков, увеличивающих пропускную способность «узких мест» сети, обнаруженных при исследовании исходного структурного варианта сети; исключения участков, пропускная способность которых обращается в ноль в результате аварий (профилактического ремонта); рассмотрения альтернативного варианта структурной организации потоковой сети. Сравнение результирующих векторов пропускной способности сети для различных вариантов её структурной организации позволит выбрать лучший из них, а также оценить эффективность резервирования отдельных участков сети.

4 Пример анализа организации транспортной сети сообщения на основе ВАЛМ

Проведём исследование вероятностных характеристик организации ТСС методом ВАЛМ. Согласно методу на начальном этапе моделирования необходимо произвести полную формализованную постановку задачи моделирования, включающую разработку графической схемы модели системы $G(F, K)$; задание параметров изменения элементарных компонентов K системы во времени; задание критерия функционирования системы, определяемого допустимыми границами изменения контролируемых параметров. В качестве объекта исследования рассмотрим сеть, изображённую на рисунке 1.

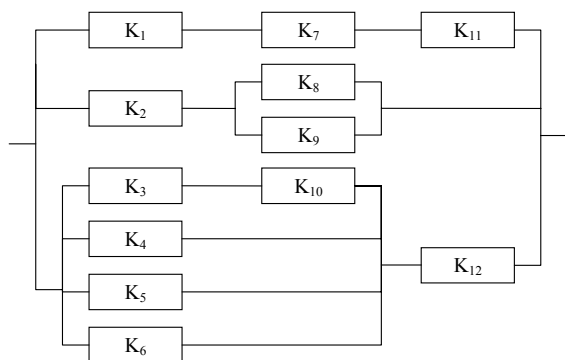


Рисунок 1 – Структура исследуемой транспортной сети сообщения

Представленная на рисунке графовая структура интерпретируется при ВАЛМ с учётом выделенных ключевых параметров организации сети – пропускной способности и качества обслуживания. Компонентами исследуемой системы являются участки дорог $K = \{K_i\}$, $i = \overline{1,12}$

которые в процессе эксплуатации подвергаются процессу накопления повреждений, определяющих уровень износа и пропускную способность.

Участки дорог описываются однотипным образом и характеризуются множеством состояний $S = \{S_j\}$, $j = \overline{1,10}$, соответствующих определённому уровню износа. Состояние S_1 описывает максимально новый участок, которому соответствует максимальная пропускная способность PR_1 и минимальное значение показателя временных и материальных затрат W_1 . Состояние S_{10} характеризует критический уровень накопления повреждений, при котором пропускная способность PR_{10} становится меньше допустимой ($PR_{10} < PR_d$), а затраты на перемещение превышают заданную величину ($W_{10} > W_d$). Остальные выделенные состояния необходимы для более детального рассмотрения износа сети.

Вероятностное изменение состояний участков дорог описывается марковскими процессами с дискретными состояниями и временем. Матрицы переходных вероятностей QK_i для всех компонентов различны и формируются в результате статистического анализа данных, характеризующих износ участков. Предполагается, что начальные значения вероятностей состояний износа участков носят случайный характер и задаются вектором $P^{i0} = (p_1, p_2, p_{10})$, $i = \overline{1,12}$.

Последующие этапы метода ВАЛМ реализуемые PALS состоят в построении алгебраической модели процесса функционирования системы (включающей композицию элементарных устройств модели и функций связи) с последующим преобразованием алгебраической модели в вероятностную форму и расчетом искомых показателей системы.

На рисунке 2 представлена графическая схема вероятностно-алгебраической модели ТСС.

В зависимости от исследуемых параметров функции, указанные на рисунке 2, задаются выражениями: при исследовании пропускной способности

$$F_1(i, j) = \min(i + j - 1, n), \\ F_2(i, j) = \max(i, j);$$

для расчета показателя качества функционирования сети

$$F_1(i, j) = \min(i, j), \quad F_2(i, j) = \min(i + j - 1, n).$$

Полученные в результате моделирования значения векторов вероятностей характеризуют износ отдельных участков и всей сети на заданном промежутке времени:

$$P^{it} = (p_1^{it}, p_2^{it}, \dots, p_{10}^{it}), \\ \sum_{j=1}^{10} p_j^i = 1, i = \overline{1,12}, t = \overline{1,100}.$$

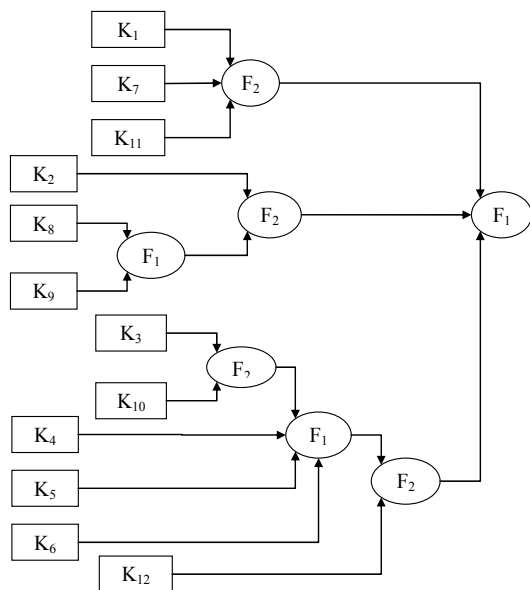


Рисунок 2 – Графическая схема вероятностно-алгебраической модели транспортной сети сообщения

Результаты моделирования распределения вероятностей нахождения сети в одном из множества состояний $\{S_1, \dots, S_{10}\}$ для показателей пропускной способности (PR) и качества функционирования (W) представлены в графическом виде на рисунках 3 и 4.

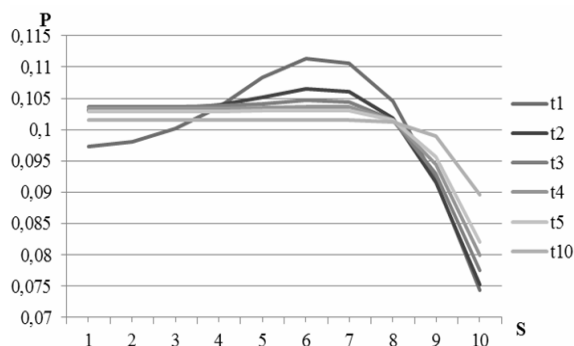


Рисунок 3 – Динамика изменения показателя пропускной способности транспортной сети сообщения

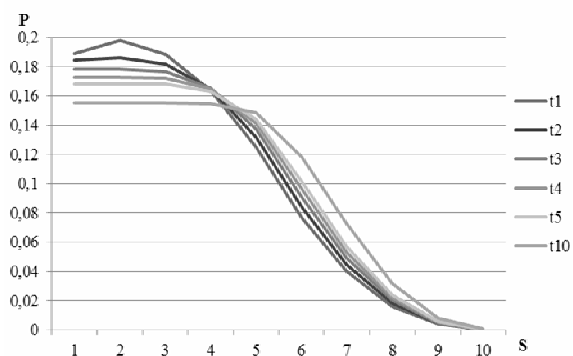


Рисунок 4 – Динамика изменения коэффициента стоимости обслуживания транспортной сети сообщения

Согласно цели приводимого исследования, необходимо рассмотреть и оценить несколько альтернатив организации обслуживания сети.

Предполагаем, что структура сети неизменна, то есть можем влиять на качество организации сети только путем изменения качества обслуживания ее структурных компонентов. Такая ситуация наиболее широко распространена на практике. Допустим так же, что задача определения уровня значимости (вкладов) элементов системы уже решена (решается на базе ЛВИ[8]). Для данной системы наибольший уровень значимости имеет компонент K_{12} . Тогда изменяя параметры обслуживания данного компонента (из имеющихся трех альтернативных вариантов) получим различные значения показателей пропускной способности, качества обслуживания и уровня организации ТСС.

Для определения и выбора наиболее рационального варианта обслуживания ТСС, исходя из базовых данных рассчитываем показатель эксплуатационной нагрузки (ЕН) для имеющихся альтернатив. Графики изменения с течением времени данных показателей для трех вариантов организации сети приведены на рисунке 5. Как видно из графиков, более рациональна организация обслуживания сети, рассматриваемая во второй альтернативе (v_2), поскольку показатель эксплуатационной нагрузки принимает в этом случае наименьшие значения.

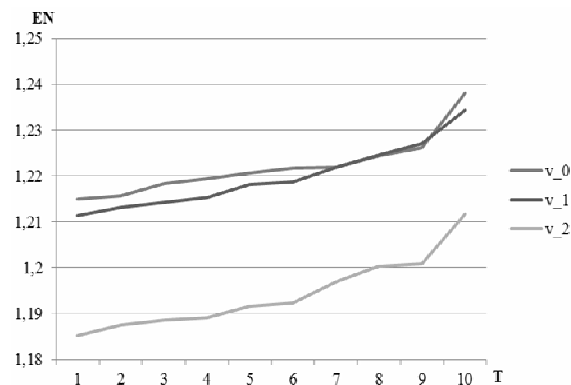


Рисунок 5 – Динамика изменение показателя эксплуатационной нагрузки различных вариантов организации обслуживания транспортной сети сообщения

Таким образом, оперируя данными о вероятности пребывания отдельных участков ТСС в определенном состоянии в конкретный момент времени и зная структуру сети, с помощью метода ВАЛМ возможно получение данных о состоянии всей системы в целом и динамике изменения ее характеристик. Изменение параметров моделирования износа участков позволяет решать задачи анализа работы сети в различных эксплуатационных режимах, судить о рациональности организации функционирования ТСС.

Заключение

Новый метод ВАЛМ, сочетающий в себе элементы динамического и статического моделирования, является универсальным средством исследования характеристик сложных систем, задаваемых с помощью графов. Опираясь на вероятностными величинами, он позволяет производить прогнозирование, отслеживать в динамике изменение исследуемых свойств системы.

Применение методики оценки организации ТСС с использованием ВАЛМ позволяет решать следующие задачи: статически и в динамике провести сравнительный анализ различных структурных вариантов системы; подобрать параметры компонентов, обеспечивающих необходимый уровень показателя эксплуатационной нагрузки; оценить влияние участков ТСС и их групп на параметры всей сети. Реализованная на базе метода программа PALS выполняет функции автоматизированной системы поддержки принятия решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вероятностно-алгебраическое моделирование потоковых систем* / Е.И. Сукач [и др.] // Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2010 [Электронный ресурс] : материалы II Международной научно-практической конференции. – Гродно, 2010. – 1 электр. компакт диск (CD-R). – 995 с. – Рус. – Деп. в ГУ «БелИСА» 24.05.2010 г., № Д201019.
2. *Программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования и расчета надежности и безопасности систем АРБИТР (ПК АСМ СЗМА), базовая версия 1.0*

[Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.szma.ru/pkasm.shtml>

3. *Relex Reliability Studio*. [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.relex.se/>

4. Бусленко, Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. – М. : Гл. редакция физ.-мат. литературы изд-ва «Наука», 1968. – 356 с.

5. Сукач, Е.И. Вероятностно-алгебраический метод моделирования сложных систем / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, В.Н. Кулага // Имитационное моделирование. Теория и практика. ИММОД-2009: материалы научно-практической конференции (Санкт-Петербург, 21–23 октября 2009 г.) В 2 т. Т. 1. – Санкт-Петербург, 2009. – С. 187–191.

6. Сукач, Е.И. Моделирование вероятностных характеристик сложных систем с использованием стохастических алгебр / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, В.Н. Кулага // Информационные системы и технологии (IST'2009) : материалы V Междунар. Конф-форума (Минск, 16–17 нояб. 2009 г.). В 2 ч. Ч. 1. / редкол. : Н.И. Листопад [и др.]. – Минск : Ф.Н. Вараксин, 2009. – С. 178–182.

7. *Computer modeling of the reliability of functionally complex systems* / E.I. Sukach [et al.] / Computer Data Analysis and Modeling: Complex Stochastic Data and Systems: Proc. Of the Ninth Intern.Conf., Minsk, Sept. 7–11, 2010. In 2 vol. Vol. 2. – Minsk : Publ. Center of BSU, 2010. – P. 198–202.

8. Рябинин, И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2007. – 276 с.

Поступила в редакцию 01.03.11.

УДК 519.876.5:62-192

ПОДХОДЫ К СНИЖЕНИЮ РАЗМЕРНОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СОСТОЯНИЯМИ ПРИ ОЦЕНКЕ ИХ НАДЁЖНОСТИ

Е.И. Сукач

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

APPROACHES TO REDUCING THE DIMENSION OF MULTICOMPONENT OF STRUCTURALLY COMPLEX MULTI-STATE SYSTEMS IN THE ASSESSMENT OF RELIABILITY

E.I. Sukach

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Описываются подходы для снижения размерности структурно-сложных систем при оценке их показателей надёжности. Для участков системы с параллельно-последовательным соединением компонентов предлагается применение вероятностно-алгебраического моделирования. Расчёт надёжности структурно-сложных систем со многими состояниями обеспечивается применением методики сведения моделей систем со многими состояниями к расчетным бинарным моделям.

Ключевые слова: надёжность многокомпонентной системы, структурно-сложная система, системы со многими состояниями, вероятностно-алгебраическое моделирование, вероятностные показатели надёжности.

In the paper the description of approaches to reduce the dimension of structurally complex systems on assessing their reliability is given. The use of probability-algebraic simulation for the parts of the system with a parallel-series connection of components is proposed. Calculation of reliability of structurally complex systems with many states is achieved by using methods of information system models with multi-state settlement to the binary model.

Keywords: reliability of a multicomponent system, structurally complex system, multi-state system, the probability-algebraic simulation, probabilistic reliability.

Введение

Оценка надёжности сложных систем, включающих множество компонентов с вероятностными параметрами функционирования, требует построения расчётных математических моделей, позволяющих описать структуру исследуемых систем в виде графа и наблюдать за изменением результирующих показателей системы в зависимости от изменения параметров компонентов. При этом сложность расчётов показателей надёжности определяется, во-первых, числом компонентов, выделенных в процессе декомпозиции исследуемой системы, а во-вторых, видом связей между этими компонентами. В том случае, если связи между компонентами представляются в виде параллельно-последовательных структур, то применение метода вероятностно-алгебраического моделирования обеспечивает точную оценку показателей надёжности системы при произвольном числе составляющих её компонентов [1].

Однако реальные объекты, как правило, довольно редко сводятся к представлению в виде параллельно-последовательных графовых структур. Часто они представляются структурами сетевого типа с циклами и неустранимой повторностью аргументов при их формализации. Кроме

этого, структурная сложность систем может быть обусловлена наличием множества несовместных состояний, выделенных для систем, имеющих простую структуру [2].

Разработке методов расчета показателей надёжности структурно-сложных систем (ССС) посвящено много работ, большинство которых ориентировано на рассмотрение двух состояний реальных объектов, а именно: состояние функционирования; состояние отказа. Например, для исследования мостиковой структуры применялись следующие подходы к расчету показателей надёжности:

- пренебрежение влиянием перемычек как абсолютно надежных либо отсутствующих;
- использование способа преобразования «мостик» в последовательно-параллельную структуру с помощью эквивалентного преобразования соединения треугольником в соединение звездой;
- использование логико-вероятностных методов (ЛВМ), основанных на идее построения функций работоспособности систем с использованием законов логики и оценки их вероятности с использованием теории вероятностей [3], [4];
- обращение к полному перебору всех возможных состояний.

Два первых подхода не позволяют получить точные значения показателей надёжности, что в ряде случаев, например, при оценке безопасности и рисков реальных сложных объектов, недопустимо.

Существенным ограничением двух других подходов при исследовании структурно-сложных систем является размерность системы, которая определяется числом составляющих ее компонентов. Рост числа компонентов приводит к экспоненциальной сложности задачи и ограничивает применение указанных методов не только для исследования структурно-сложных систем, но и для исследования систем простой структуры.

Анализ различных методов расчёта показателей надёжности структурно-сложных систем с тремя несовместными состояниями приводится в [5]. Отмечается, что увеличение числа компонентов значительно усложняет способы расчёта, которые в основном ориентированы на исследование конкретных структур. Переход к рассмотрению структурно-сложных систем со множеством несовместных состояний ещё больше повышает сложность вычислений. Для оценки показателей надёжности структурно-сложных систем в случае полного перебора требуется рассмотрение n^m вариантов, где n – число несовместных состояний, m – число компонентов системы.

По мнению И.А. Рябинина, высказанному в его монографии [3], отсутствие методов расчёта показателей надёжности систем с числом несовместных состояний более трёх объясняется отсутствием реальных объектов, которые могут находиться более чем в трёх состояниях. Несмотря на это, автор отмечает необходимость, актуальность и перспективность дальнейшего развития методов исследования надёжности систем с разным числом несовместных состояний у разных её компонентов. По существу, ограниченный характер исследований в этом направлении обусловлен несовершенством разработанных методов исследования и средств их автоматизации, поскольку увеличение числа несовместных состояний или изменение графовой структуры объекта приводит к усложнению расчётов или требует разработки новых методов.

Целью статьи является описание взаимно дополняющих подходов для понижения размерности структурно-сложных систем при оценке показателей их надёжности, которые реализуются поэтапным анализом структуры исследуемого объекта. На первом этапе сокращается число компонентов системы за счёт выделения множества полностью надёжных компонентов. На втором этапе выделяются участки исследуемой графовой структуры с параллельно-последовательными соединениями компонентов и реализуется вероятностно-алгебраическое моделирование с целью получения показателей надёжности выделенных участков. При этом исследуемая

графовая структура модифицируется путём преобразования каждого из найденных участков в одно ребро графа. Наконец, на третьем этапе, реализуется методика сведения моделей ССС с произвольным числом несовместных состояний к расчетным бинарным моделям.

1 Постановка задачи

Будем полагать, что структура исследуемой системы задается графом $G(N, K)$, где N – конечное множество вершин, K – множество ребер, для которых указаны пары вершин, которые это ребро соединяют. Из множества вершин графа выделим две вершины, определяющие вход в систему ($n_1 \in N$) и выход из нее ($n_2 \in N$).

Компонентам $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$, образующим в совокупности систему, поставим в соответствие ребра графа. Будем полагать, что компоненты системы характеризуются множеством несовместных состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{0, n}$. Число состояний может определяться по различным критериям. В общем случае, учитывая случайный характер происходящих с объектом изменений, число состояний может варьироваться в зависимости от выбранного числа значений исследуемого показателя надёжности. В случае оценки времени безотказной работы компонентов число состояний может задаваться количеством различных значений такой величины, как наработка компонента на отказ, которая может быть как непрерывной величиной (продолжительностью работы в часах и т. п.), так и целочисленной величиной (числом рабочих циклов и т. п.). Предполагается, что вероятности состояний известны и задаются векторами

$$P^i = (p_0^i, p_1^i, \dots, p_n^i), \sum_{j=0}^n p_j^i = 1, i = \overline{1, m}. \quad (1.1)$$

Ставится задача определения вектора вероятностей состояний показателя надёжности системы по вероятностям значений показателя надёжности ее компонентов:

$$P^s = (p_0^s, p_1^s, \dots, p_n^s), \sum_{j=0}^n p_j^s = 1. \quad (1.2)$$

2 Оценка показателей надёжности для параллельно-последовательных участков сложных систем

Как правило, в графе, представляющем реальную сложную систему, встречаются участки, соответствующие параллельному или последовательному соединению компонентов исследуемой системы. С целью понижения размерности окончательной расчётной модели реализуется пошаговый анализ графовой структуры с применением на каждой итерации вероятностно-алгебраического моделирования [1] для найденного последовательно-параллельного участка.

При нахождении последовательно соединённых ребер графа они преобразуются в одно ребро, которое характеризуется результирующим вектором вероятностей, вычисляемым по формуле:

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \quad (2.1)$$

где $i, j, k = \overline{1, n}$, а a_{ij}^k – коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования, которые определяются соотношениями:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & \text{если } k = \max(i, j); \\ a_{ij}^k = 0, & \text{если } k \neq \max(i, j). \end{cases} \quad (2.2)$$

При обнаружении параллельно соединённых ребер графа они сводятся в одно ребро, которое характеризуется результирующим вектором вероятностей исследуемого показателя надёжности, вычисляемого также по формуле (2.1), но с вероятностно-алгебраическими коэффициентами, определяемыми соотношениями вида:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & \text{если } k = \min(i, j); \\ a_{ij}^k = 0, & \text{если } k \neq \min(i, j). \end{cases} \quad (2.3)$$

Результатом данного этапа реализации взаимосвязанных подходов к снижению размерности CCC является эквивалентная графовая структура исследуемой системы $G_I(N_I, K_I)$, в которой полностью исключены параллельно-последовательные участки, а исходные вероятностные параметры компонентов пересчитаны с использованием вероятностно-алгебраических преобразований. При этом, очевидно, выполняются неравенства:

$$N_I \leq N, K_I \leq K. \quad (2.4)$$

Таким образом, получаем CCC, как правило, меньшей размерности, для расчёта надёжности которой возможно применение метода полного перебора или одного из методов ЛВМ, оптимизирующего решение задачи.

3 Расчет показателей надёжности структурно-сложной системы со многими состояниями

Объектом исследования является CCC со многими состояниями, образом которой является некоторая графовая структура, не содержащая параллельно-последовательных участков. Расчет будем производить с учетом показателей надёжности компонентов и схемы их соединения. Обозначим x_i веса ребер графа. Их значения задаются номерами состояний компонентов, принимающих вероятностные значения. В результате граф $G(N, K)$ является взвешенным, поскольку ребра имеют веса x_i и случайным, поскольку веса определяются вероятностной мерой (1.1). Таким образом, $G(N, K)$ можно рассматривать как случайную величину, значениями которой являются графы.

Для каждой реализации случайного графа определим свойство j -связности, которое означает наличие пути, соединяющего вершины $n_1, n_2 \in N$, в графе, в котором веса ребер удовлетворяют следующему условию:

$$\min_i(x_i) \geq j. \quad (3.1)$$

Будем считать, что CCC находится в j -м состоянии надёжности, если ее графическим образом является j -связный граф. Вероятностные значения показателя надёжности CCC определяются связностью случайного графа $G(N, K)$, которая является случайной величиной. Вероятностные значения связности случайного графа $G(N, K)$ формируются путем расчета значений и вероятностей связности возможных реализаций графа.

Рассмотрим CCC с двумя состояниями надёжности: S_0 (отказ) и S_1 (работа). При этом возможными значениями весов ребер графа $G(N, K)$ являются $x_i = 0 \vee 1$. Реализации случайного графа могут быть отнесены к одному из множеств: множеству графов $G_0 = \{G_0(N, K)\}$, которые являются 0-связными, и множеству графов $G_1 = \{G_1(N, K)\}$, которые являются 1-связными. Графы из множества G_0 описывают варианты реализации отказа CCC. Для графов из множества G_1 всегда существует путь, соединяющий начальную и конечную вершины, все ребра которого имеют веса $x_i = 1$ и отражают варианты реализации работы CCC.

Результирующее состояние CCC с двумя состояниями (работа, отказ), графическим образом которой является случайный граф, однозначно определяется логической функцией

$$y(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{l=1}^r \left[\bigwedge_{i \in \Pi_l} x_i \right], \quad (3.2)$$

где Π_l – множество номеров ребер, составляющих путь $l, l = \overline{1, r}$. При этом значения вектора вероятностей, характеризующего j -связность случайного графа $G(N, K)$ и, как следствие, описывающего показатель надёжности CCC, вычисляются по формуле

$$p_j^s = \sum_{l=1}^r \prod_{i \in \Pi_l} p_j^i, \quad j = \overline{0, 1}, \quad (3.3)$$

где p_j^i – вероятность j -го состояния i -го компонента; p_j^s – вероятность j -го состояния системы.

Число реализаций NS случайного графа $G(N, K)$ зависит от числа его ребер и числа возможных значений весов ребер. Для двух состояний показателя надёжности CCC $NS = 2^m$, где m – число ребер.

Перейдем к рассмотрению общего случая – оценке надёжности многокомпонентной CCC со многими состояниями $\{S_j\}, j = \overline{0, n}$. Будем полагать, что компоненты CCC характеризуются

множеством изменяющихся состояний $\{S_j\}, j = \overline{0, n}$. Первое состояние S_0 характеризует минимальное значение выбранного показателя надежности компонента, S_n определяет максимальное значение показателя надежности компонента, а остальные состояния $\{S_j\}, j = \overline{1, n-1}$ описывают некоторые промежуточные значения. Решить поставленную задачу можно двумя способами.

Первый способ. Как и в случае двух состояний CCC, вектор вероятностей состояний показателя надежности системы формируется на основе полного перебора всех реализаций описывающего систему случайного графа $G(N, K)$, которые образуются в результате рассмотрения комбинаций возможных детерминированных значений весов ребер. При этом для каждой q -й реализации ($q = \overline{1, NS}$) случайного графа $G(N, K)$ определяется уровень связности, позволяющий отнести граф к одному из множеств: $G_0 = \{G_0(N, K)\}, \dots, G_n = \{G_n(N, K)\}$.

Результирующее состояние CCC $S_k \in \{S_j\}, j = \overline{0, n}$, графическим образом которой является случайный граф, однозначно определяется функцией

$$y(x_1, \dots, x_m) = \max_{l=1}^{r_j} \left[\min_{i \in \Pi_l} x_i \right], \quad (3.4)$$

где Π_l – множество номеров ребер, составляющих путь $l, l = \overline{1, r_j}$, который определяет j -связность графа.

Вероятность j -связности случайного графа, описывающего j -е состояние показателя надежности CCC, определяется соотношением

$$p_j^s = \sum_{l=1}^{r_j} \prod_{i \in K_{lj}} p_j^i, j = \overline{0, n}, \quad (3.5)$$

где p_j^i – вероятность j -го состояния i -го компонента; p_j^s – вероятность j -го состояния системы.

Таким образом, все реализации случайного графа будут отнесены к некоторому множеству $G_z, z = \overline{0, n}$. Вероятность j -связности случайного графа $G(N, K)$, характеризующая j -е состояние показателя надежности исследуемой системы, будет определяться суммой вероятностей всех возможных реализаций случайного графа, имеющих свойство j -связности.

Отметим, что для получения вероятностной оценки надежности CCC в данном случае необходимо рассмотреть $NS = (n+1)^m$ реализаций случайного графа $G(N, K)$, где $(n+1)$ – число состояний; m – число ребер графа.

Второй способ. Пусть k – номер состояния ($k = \overline{0, n-1}$), которому соответствует пороговое значение показателя надежности, разделяющее

множество всех состояний надежности компонентов CCC на два множества:

$$\begin{aligned} S1 &= \{S_j\}, j = \overline{0, k}; \\ S2 &= \{S_j\}, j = \overline{k+1, n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В этом случае выделенные состояния компонентов будут отнесены к одному из множеств, таким образом они отобразятся в одно из обобщенных состояний $S1$ или $S2$. Очевидно, что вероятности обобщенных состояний i -го компонента при таком разбиении формируются следующим образом:

$$P^{i,k} = \left(\sum_{j=0}^k p_j^i, \sum_{j=k+1}^n p_j^i \right), i = \overline{1, m}, k = \overline{0, n-1}. \quad (3.7)$$

Образом модифицированной CCC является случайный граф $G(N, K)$, веса ребер которого принимают два значения ($x_i = 0 \vee 1$). Связность результирующего графа определяется логической функцией (3.2), а результирующие вероятностные значения связности вычисляются по формуле (3.3).

В силу того, что функции $\min$ и $\max$ являются естественным обобщением логических операций конъюнкции ($\wedge$) и дизъюнкции ($\vee$) при переходе от CCC с двумя состояниями к рассмотрению CCC со многими состояниями и сохраняют структуру введенных подмножеств $S1$ и $S2$, значения результирующего вектора вероятностей CCC будут удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} P^{s,k} &= (p_1^{s,k}, p_2^{s,k}), \\ p_1^{s,k} &= \sum_{j=0}^k p_j^s, p_2^{s,k} = \sum_{j=k+1}^n p_j^s. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если обозначить алгебру, порожденную функциями $\min$ и $\max, A(\max, \min, n+1)$, а булеву алгебру $B(\wedge, \vee, 2)$, то очевиден переход от алгебры, определенной на множестве $(n+1)$ -мерных векторов, к булевой алгебре. Заметим, что изменение $k = \overline{0, n-1}$ позволит сформировать значения результирующего вектора вероятностей (1.2).

Теорема. Пусть в CCC, графическим образом которой является случайный граф $G(N, K)$, где N – множество вершин, а K – множество ребер, которым соответствуют элементарные компоненты, составляющие систему, вероятности состояний i -го компонента при проведении k -го расчета задаются соотношениями (3.7).

Тогда результирующий вектор вероятностей состояний показателя надежности системы $P^s = (p_0^s, p_2^s, \dots, p_n^s)$ принимает следующие значения:

$$p_0^s = p_0^{s,1}, p_k^s = p_0^{s,k} - p_0^{s,k-1}, k = \overline{1, n-1}, \quad (3.9)$$

где $p_0^{s,i}$ определяется путем проведения $n-1$ расчета для системы этой же структуры, но с двумя обобщенными состояниями.

Очевидно, значения вектора вероятностей (1.2), полученные первым и вторым способом,

будут совпадать. Однако второй способ позволит значительно уменьшить время расчета за счет сокращения числа вариантов перебора реализаций случайного графа, описывающего вероятностное изменение показателя надежности ССС со многими состояниями.

Согласно второму способу разработана и реализована методика сведения модели многокомпонентной ССС со многими состояниями к совокупности бинарных моделей, сущность которой кратко описывается следующей последовательностью шагов:

Шаг 1. Организуется k -й шаг расчетов ($k = \overline{1, n-1}$) для заданной структуры системы, с двумя состояниями (бинарная модель). При этом вероятности состояний i -го компонента при проведении k -го расчета задаются соотношением (3.7).

Вычисления реализуются с использованием одного из методов ЛВМ (наращивания путей, рекуррентного алгоритма, алгоритма полного перебора) [4], позволяющих оценить надежность ССС по состояниям надежности компонентов с двумя состояниями компонентов (работа, отказ).

Шаг 2. Результаты расчетов, полученные с использованием совокупности бинарных моделей, автоматически обрабатываются программными средствами PALS [6]. При этом компоненты результирующего вектора вероятностей состояний системы (1.2) определяются соотношениями (3.9).

Заключение

Описанные и последовательно реализованные подходы позволяют получить точные оценки показателей надежности многокомпонентных ССС со многими состояниями. При этом, зачастую, существенное сокращение размерности решаемой задачи происходит на первом этапе, в результате оценки вероятностных показателей надежности участков ССС с параллельно-последовательным соединением. Далее, значительное сокращение сложности расчетов надежности системы происходит в результате сведения модели ССС со многими состояниями к совокупности бинарных моделей. Предложенный в статье подход позволяет сократить число вариантов полного перебора до 2^m и далее, используя элементарные алгебраические преобразования, получить оценки показателей надежности исследуемой ССС с n состояниями. Кроме этого, оценка надежности систем с использованием одного из ЛВМ на

очередных итерациях расчета бинарных моделей значительно упрощает получение точного решения и в целом сокращает сложность расчетов ССС со многими состояниями.

Практическим результатом подходов является возможность расчета надежности более широкого круга сложных систем, для которых логично рассмотрение множества состояний (больше 2), характеризующих их уровни надежности. При этом сложность расчетов не превышает сложности расчета эквивалентных графовых структур, описывающих системы с двумя состояниями. Наличие средств автоматизации, реализующих подходы, позволяет провести сравнительный анализ надежности систем различной конфигурации, оценить влияние параметров надежности отдельных компонентов на надежность системы, обосновать проектные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сукач, Е.И. Метод вероятностно-алгебраического моделирования надежности функционально-сложных систем / Е.И. Сукач // Информатика. – 2010. – № 3. – С. 18–30.
2. Можяев, А.С. Универсальный графоаналитический метод, алгоритм и программный модуль построения монотонных и немонотонных логических функций работоспособности систем / А.С. Можяев // Труды третьей Международной научной школы «Моделирование и Анализ Безопасности и Риска (МА БР – 2003)», август 20–23, 2003. – СПб. – 517 с.
3. Соложенцев, Е.Д. Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и экономике / Е.Д. Соложенцев. – СПб. : Изд. дом «Бизнес-пресса», 2006. – 530 с.
4. Рябинин, И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2007. – 276 с.
5. Диллон, Б. Инженерные методы обеспечения надежности систем / Б. Диллон, Ч. Сингх. – М. : Мир, 1984.
6. Сукач, Е.И. Компьютерная система вероятностно-алгебраического моделирования сложных систем со многими состояниями / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, А.Б. Демуськов // Математические машины и системы – №3. – 2011. – С. 32–39.

Поступила в редакцию 02.09.11.

УДК 616.713:616.12-089

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОНИТОРИНГА СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ

С.В. Шилько¹, Ю.Г. Кузьминский¹, М.В. Борисенко²

¹Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

MATHEMATICAL MODEL AND SOFTWARE FOR MONITORING OF CARDIOVASCULAR SYSTEM

S.V. Shilko¹, Yu.G. Kuzminsky¹, M.V. Borisenko²

¹V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute National Academy of Sciences of Belarus, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

Показаны возможности первичной диагностики сердечно-сосудистой системы на основе гидродинамической модели кровотока, реализованной в программном продукте BIODIS V2.2.

Ключевые слова: сердечно-сосудистая система, гемодинамика, давление, адаптивность, первичная диагностика, компьютерное моделирование, программное обеспечение.

The facilities of primary diagnostics of the heart and vascular system based on hydrodynamic model of the blood flow and realized in software BIODIS V2.2 have been demonstrated.

Keywords: cardiovascular system, hemodynamics, pressure, adaptivity, primary diagnosis, computer modeling, software.

Введение

В современном обществе наблюдается устойчивый рост уровня заболеваний системы кровообращения (СК), развивающихся часто у людей трудоспособного возраста. По статистике Министерства здравоохранения в ряду причин смертности первое место занимают болезни системы кровообращения, причем среди трудоспособного мужского населения этими заболеваниями вызван каждый третий случай летального исхода. Ввиду определяющей важности системы кровоснабжения, она защищена многоуровневой системой регуляции. В этой системе приспособительный ответ на физическую, психоэмоциональную нагрузку достигается комплексом регуляторных механизмов, взаимодополняющих и дублирующих друг друга. Отмеченная высокая адаптивная способность системы кровообращения является причиной того, что деструктивные изменения накапливаются в период донологического состояния (пограничного между здоровьем и болезнью), не проявляя себя клинически.

В этой связи необходима разработка метода и средств мониторинга параметров состояния СК для своевременного выявления донологических состояний и профилактики кардиопатологий. Это в первую очередь актуально для регулярного и массового обследования работников транспортной отрасли, силовых структур и спортсменов.

Тонометрия и последующий математический анализ результатов измерений на основе

теории течения вязких жидкостей позволяет разработать средства диагностики и получить важные объективные данные о состоянии сердца и сосудов, включая оценку адаптационных возможностей СК при различных нагрузках.

1 Особенности объекта моделирования

Сердечно-сосудистая система человека является весьма сложной и ее функционирование зависит от большого числа факторов. Она является трудно формализуемой предметной областью, в которой математические модели зачастую базируются на приближенных закономерностях.

Так называемые базовые (классические) модели отражают стремление исследователей к полному и подробному описанию строения, функционирования компонент системы и взаимодействия крови, сердца и сосудов, сосудов и окружающих биологических тканей, связи с другими системами жизнеобеспечения организма и т. д. [1]–[3], [5].

Тем не менее, механизмы функционирования сердечно-сосудистой системы еще далеки от окончательного понимания. К примеру, при создании базовых моделей необходимо дать формальное описание механизма регуляции кровообращения, что включает:

– саморегуляцию магистральных и прекапиллярных сосудов как функцию дефицита кислорода в тканях и других биохимических параметров (уровня кислотности, содержания адреналина и др.), мышечную регуляцию тока крови;

- центральную регуляцию (изменение периода сокращения сердца, рефлекторное влияние барорецепторов на периферическое сопротивление, влияние показателей артериального давления на тонус сосудов, рефлекторная регуляция тканевого кровотока);

- вегетативную регуляцию и гормональную регуляцию.

Моделирование СК имеет свою специфику: каждый организм индивидуален с точки зрения геометрии сети сосудов, состава крови, имеет собственные реакции на психофизиологические нагрузки. В известных моделях гемодинамики учитываются лишь некоторые из этих аспектов, отсутствуют методы оценки значимости отдельных факторов в общей системе регуляции, в особенности, при учете индивидуальности обследуемого [3], [7]. Чрезмерная концентрация внимания на частных механизмах функционирования и взаимодействия не способствует формированию синергетической модели системы [4].

С точки зрения теории моделирования, СК может быть отнесена к адаптивным консервативным интеллектуальным системам, при моделировании которых следует учитывать следующие особенности:

- невозможность изменения состава, структуры и связей компонент системы, то есть их «консервативность» (предполагается, что такие системы самодостаточны и идеально спроектированы);

- способность к адаптации путем перехода в различные состояния при изменении внешней среды;

- вариабельность реакций системы в однотипных условиях (межиндивидуальную и внутрииндивидуальную);

- наличие сложно организованного алгоритма принятия решений и передачи управляющих воздействий между компонентами;

- необходимость индивидуального представления при типичном составе и поведении компонент;

- трудность измерения характеристик в реальных условиях для анализа ситуации и построения математических моделей процессов из-за сложных и трудно разделяемых связей, отсутствия необходимых регистрирующих устройств при многообразии ситуаций и состояний [4].

2 Современные подходы к моделированию гемодинамики

Ввиду сложности рассматриваемой гидродинамической задачи, применение существующих моделей обычно ограничивается описанием фрагмента СК либо определенных условий ее функционирования [6], [11]. В настоящее время разрабатываются гибридные базовые модели, описывающие различные компоненты системы с применением 3-D и 2-D моделирования, 1-D

моделирования (выполняется усреднение многомерных моделей по поперечному направлению) и 0-D моделирование с сосредоточенными параметрами (выполняется усреднение по длине сосуда) [1], [2], [5], [6], [9], [10].

При трехмерном (3D) моделировании гемодинамики требуется численное решение нестационарных уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сложной и изменяемой во времени геометрии (задача о свободной границе). Так как это решение связано с огромными вычислительными затратами, многомерные модели для описания сердечно-сосудистой системы применяются в основном для детального изучения гемодинамики в локальной области, например, в зоне имплантации протезов, бифуркации или стеноза артерий и т. д.

Как отмечено выше, 3-D моделирование используется для детального описания кровотока в локальных областях [2], позволяя верно оценить изменение давлений и скорости течения крови в конкретной точке по времени. Однако в рамках указанных моделей закономерности быстрого изменения физиологически значимых параметров пока не могут быть формализованы. Детальное рассмотрение сложной системы артериальных сосудов также представляет значительные трудности.

Моделирование даже локальных отделов сердечно-сосудистой системы конкретного человека требует использования дорогостоящего предоперационного обследования с привлечением специального диагностического оборудования (ангиографов, приборов УЗИ и т. п.) и программных продуктов для численного гидродинамического анализа.

Сказанное подтверждает необходимость обоснованного выбора множества существенных составляющих модели.

3 О предлагаемом методе

Предлагаемый подход можно оценить как 0-D моделирование гемодинамики, при котором определение множества выходных параметров модели по ограниченному числу входных параметров приводит к следующим особенностям моделирования:

- использование методов линейного программирования на основе минимизации невязок;

- возможность учета высокоскоростных изменений физической нагрузки, кислотности, вязкости, стрессовой нагрузки, скорости пульсовой волны, деформации сосудов, систолического объема) [12]–[14].

На наш взгляд, целесообразно применить принцип обучаемости (индивидуальной настройки) программы по индивидуальным параметрам гемодинамики обследуемого. Математическим аппаратом здесь служит статистическая

обработка (включая кластерный анализ) для определения параметров выборки. С накоплением базы данных о состоянии артериальной системы индивидуума в различные временные промежутки и при различных нагрузках определяются показатели, нормальные для данного организма, а также определяется тип гемодинамики. Результаты компьютерной обработки модельных вариантов позволяют рассчитать искомые параметры и определить тенденции в функционировании сердечно-сосудистой системы.

Входными параметрами, составляющими вектор входной информации $\{X_i\}$ являются антропометрические данные. Вектор начальных условий моделирования $\{U_i\}$ – основные параметры состояния системы для 1-й реализации модели. На основании баз нормативных показателей и архива результатов моделирования конкретного лица производится расчет текущих показателей гемодинамики, прогнозируются реакции и адаптационные резервы при различных психофизиологических нагрузках.

В связи с вариабельностью (характеристики меняются во времени и пространстве в зависимости от многих факторов даже для конкретного человека), данные представляются в виде реляционных таблиц, где поля соответствуют различным признакам, а записи – либо разным объектам, либо последовательным во времени наблюдениям за одним и тем же объектом.

При моделировании предполагается ламинарное течение крови, как вязкой жидкости, в эластичных сосудах. К числу лабораторно определяемых параметров, оказывающих наибольшее влияние на частоту сердечных сокращений и давление, относятся: вязкость крови ρ , содержание гемоглобина Hb , показатель кислотного равновесия pH , адреналин, скорость распространения пульсовой волны C_v , начальная деформация и модуль упругости стенок сосудов E_d , и др.

Движение крови по сосудам происходит вследствие разности гидростатического давления в различных участках сосудистой системы. Разность давлений обеспечивается нагнетательной функцией сердца, изменением поперечного сечения сосудов и другими факторами. Так, в области аорты кровеносное русло имеет наименьшую площадь поперечного сечения 3–4 см². Суммарная площадь поперечного сечения капилляров, количество которых составляет $12 \cdot 10^8$ в большом круге кровообращения и в покое достигает 3000 см² (таблица 1). Значительная часть градиента давления приходится на мелкие артерии, артериолы, прекапиллярные сфинктеры, сфинктеры магистральных капилляров, являющиеся резистивными сосудами. Стенка этих сосудов содержит толстый слой циркулярно расположенных гладких мышечных клеток, при сокращении которого просвет сосуда может значительно уменьшаться, приводя к резкому повышению

гемодинамического сопротивления. Изменение сопротивления артериол меняет уровень давления крови в артериях. В случае увеличения сопротивления артериол отток крови из артерий уменьшается, и давление в них повышается. Снижение тонуса артериол увеличивает отток крови из артерий, что приводит к уменьшению артериального давления.

Таблица 1 – Суммарное поперечное сечение сосудов и давление в них

Показатель	Аорта	Магистральные артерии	Артериолы	Капилляры
Поперечное сечение, см ²	3,5–4	10	300	2500–3000
Давление (среднее), мм рт. ст.	120	80	40–60	15

Градиент давления крови, обусловленный вязким трением, можно рассчитать по известной зависимости Пуазейля для ламинарного режима:

$$\Delta p = 336 \frac{\nu q}{d^4} l,$$

где ν – кинематическая вязкость крови (сСт); q – секундный объем кровотока (л); d – диаметр сосуда (мм); l – длина сосуда (см).

Анализ изменений давления позволяет сделать следующие выводы относительно сосудов артериальной части сердечно-сосудистой системы:

1) разделение давлений на систолическое и диастолическое характерно для эластичных неактивных кровеносных сосудов, включая аорту и магистральные артерии;

2) под влиянием центральной нервной системы (ЦНС) и биохимических факторов (концентрация адреналина и др.) происходит значительное изменение диаметров мелких артерий, что вызывает заметное изменение эквивалентного диаметра сети кровеносных сосудов;

3) блокировка сфинктеров под управляющим воздействием ЦНС изменяет скорость течения и давление крови в артериальной части СК;

4) биохимическое воздействие на стенки крупных сосудов меняет их эластичность с последующим изменением скорости пульсовой волны, дилатации артерий и давлений;

5) значительные вариации давлений происходят в магистральных артериях, артериолах, сфинктерах, а потери давления в аорте и капиллярах относительно невелики.

Исходя из вышесказанного, представим градиент давления на пути от сердца до конца капилляра как сумму $\sum \Delta p$; секундный объем кровотока в сосуде

$$q = \frac{V_s \cdot n}{60 \cdot k},$$

где q , V_s – секундный и систолический объем; n – частота сердечных сокращений (ЧСС); κ – общее число активированных сосудов данного диаметра; линейная скорость кровотока $w = 2123 \frac{q}{d^2}$.

Объем кровотока на всех участках сосудистой системы в единицу времени, является постоянным. Линейная скорость движения крови обратно пропорциональна величине суммарного просвета данного отдела сосудистого русла. Средняя линейная скорость кровотока в аорте человека достигает 50 см/с, в капиллярах она равна 0,5 мм/с.

Высота фронта пульсовой волны на начальном участке аорты и его изменение в зависимости от расстояния от источника можно определить по формуле Жуковского

$$\Delta p_\phi = \frac{r \cdot w \cdot c}{1330},$$

где Δp_ϕ – динамическая компонента давления на фронте волны; r – плотность крови; c – скорость распространения пульсовой волны [7]. Потери фронта волны на расстоянии l от источника равны $\Delta p_l = e^{-0.7l \frac{n}{c \cdot 60}}$, где $\frac{n}{c \cdot 60}$ – длина волны.

Стенки кровеносных сосудов являются эластичными и их дилатацию при действии внутреннего давления можно описать зависимостью Пуазейля

$$d_p = \frac{d_0}{\sqrt{1 + \frac{1330 \cdot \Delta p}{r \cdot c^2}}},$$

где d_0 – первоначальный диаметр сосуда до дилатации.

Компьютерная модель, построенная на основе указанных выше соотношений в предположении ламинарного режима течения, позволяет проводить анализ кровотока в реальном времени.

Систолический объем является основным показателем насосной функции сердца, однако даже он не определяет однозначно состояние работы сердца и имеет индивидуальные отклонения. Физическая нагрузка влияет на ударный объем следующим образом

$$V_{sys}^w = V_{sys}^0 + \Delta V_{sys} \cdot \frac{W - W_0}{W_{0.5max} - W_0}.$$

Если нагрузка $W > W_{0.5max}$, ударный объем $V_{sys}^w = V_{sys}^{0.5max}$. При гипертрофии сердца увеличение ударного объема с ростом физической нагрузки не столь значительно.

Сердечный индекс – это сердечный выброс с коррекцией на размеры тела пациента (площадь поверхности тела) и поэтому более точно отражает функцию сердца.

Минутный объем кровотока определяется по методу Флика [7].

Разница содержания кислорода в артериальной и венозной крови (кислородный дифференциал) определяется по формуле $O_s = O_p + O_g$, где разница содержания кислорода в плазме O_p фиксирована и равна 0,2%, а разница содержания кислорода в гемоглобине O_g изменяется в интервале 4% – 70%.

В ряде случаев кислородный дифференциал может иметь недопустимые значения для спортсменов, что показывает наличие «заемного» кислорода (получение энергии без процесса окисления). Кислородный дифференциал является функцией нагрузки. Нагрузка существенно влияет на величину ударного объема сердечного выброса [14]. Рост стрессовой нагрузки ведет к увеличению содержания адреналина в крови с последующим ростом ЧСС и давлений. Наиболее часто причиной изменения кислородного дифференциала называют изменение параметра кислототно-щелочного баланса pH в сторону роста кислотности при увеличении нагрузки и снижении pH при снижении нагрузки. Содержание адреналина и изменение pH происходят наиболее быстро по сравнению с другими параметрами, влияющими на гемодинамику (рисунок 1). Кислотность и адреналин также влияют как на число блокированных сфинктеров, так и на эластичность сосудов.

Скорость распространения пульсовой волны зависит от модуля упругости сосудистой стенки и отношения толщины стенки к радиусу сосуда, поэтому данный показатель используют для характеристики эластичности и тонуса сосудистой стенки. При снижении растяжимости стенки с возрастом (вследствие атеросклероза сосудов) и при повышении тонуса мышечной оболочки сосуда скорость распространения пульсовой волны увеличивается. Накопленные экспериментальные и клинические данные показывают, что у адаптированного к мышечным нагрузкам организма вязкость цельной крови снижена. Снижение вязкости крови и повышение индекса транспорта кислорода взаимосвязаны с аэробной работоспособностью. У спортсменов, тренирующихся в силовых видах спорта без повышения аэробной работоспособности, снижение вязкости крови отсутствует [16].

4 Формализация и алгоритмизация модели

В общем виде модель может быть представлена $M = \{X, U, S, Y, S'\}$, где:

$\{X_i\}$ – вектор входной информации составляют антропометрические данные (рост, вес, возраст, пол);

$\{U_i\}$ – пространство векторов начальных условий моделирования, статистика значений нагрузки и соответствующих контролируемых параметров функционирования системы кровообращения (частота сердечных сокращений (ЧСС, мин⁻¹), систолическое артериальное

давление (АДс, мм рт. ст.) и диастолическое артериальное давление (АДд, мм рт. ст.);

$\{S_j\}$ – вектор рассматриваемых состояний системы;

$\{Y_k\}$ – вектор основных параметров состояния ССС человека для l реализации модели;

$\{S'_m\}$ – множество оценок состояний.

На выходе модели $\{Y_k\}$ и $\{S'_m\}$ – параметры состояния ССС и множество оценок состояния.

В ходе формализации задачи были выделены параметры, представленные в таблице 2. Входная информация и величины начальных условий моделирования расположены в верхних строках таблицы.

Взаимное влияние показателей гемодинамики показано на рисунке 1 и в таблице 3.

Таблица 2 – Параметры модели мониторинга сердечно-сосудистой системы

Обозначение	Описание и единицы измерения	Диапазон допустимых значений
A	Возраст (лет)	$A \in [20-40-70]$
H	Рост (см)	$H \in [120-170-220]$
M	Масса (кг)	$M \in [30-70-140]$
L	Нагрузка (кДж)	$L \in [4-6-120]$
F_{cc}	Частота сердечных сокращений (уд/мин)	$F_{cc} \in [30-60-250]$
P_{max}	Систолическое давление (мм рт. ст.)	$P_{max} \in [40-120-250]$
P_{min}	Диастолическое давление (мм рт. ст.)	$P_{min} \in [30-80-130]$
k_{str}	Относительный уровень стрессовой нагрузки (б/р)	$k_{str} \in [0.8-1-1.3]$
Adr	Содержание адреналина в плазме (мкг/л)	$Adr \in [10-55-95]$
$Nadr$	Содержание норадреналина в плазме (мкг/л)	$Nadr \in [95-300-450]$
Dof	Содержание дофамина в плазме (мкг/л)	$Dof \in [10-55-95]$
pH	Кислотное равновесие (б/р)	$pH \in [6.9-7.37-7.47]$
Hb	Содержание гемоглобина (г/л)	$Hb \in [80-150-200]$
k_{dfm}	Коэффициент мышечного изменения диаметра сосудов (б/р)	$k_{dfm} \in [0.8-1-1.3]$
k_{dlt}	Коэффициент дилатации сосудов (б/р)	$k_{dlt} \in [1.0-1.16-1.3]$
C_v	Скорость пульсовой волны (см/с)	$C_v \in [300-500-900]$
d	Диаметр сосудов (мм)	$d \in [0.1-20]$
η	Кинематическая вязкость крови (сСт)	$\eta \in [1.9-5-12]$
V_m	Минутный объем крови (л/м)	$V_m \in [3-5-15]$
V_s	Систолический объем (л)	$V_s \in [0.03-0.08-0.25]$
ΔO_2	Артеровенозный дифференциал кислорода (%)	$\Delta O_2 \in [9-14-100]$

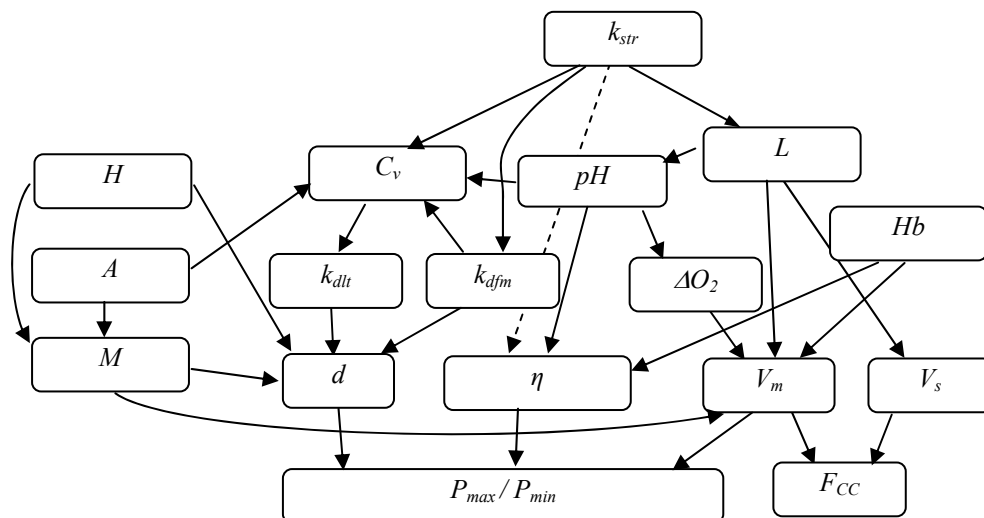


Рисунок 1 – Схема взаимодействия показателей гемодинамики, основных параметров моделирования

Таблица 3 – Параметры модели гемодинамики СК и их взаимосвязь

Обозначение	Взаимозависимости	Обозначение	Взаимосвязь
A	$A \Rightarrow \{\text{норма } M, C_v\}$	Hb	$Hb \Rightarrow \{\eta, V_m\}$
H	$H \Rightarrow \{\text{норма } M, d\}$	k_{dfm}	$\{C_v, k_{str}\} \Rightarrow k_{dfm} \Rightarrow \{d\}$
M	$M \Rightarrow \{d, V_m\}$	k_{dlt}	$\{C_v\} \Rightarrow k_{dlt} \Rightarrow \{d\}$
L	$\{k_{str}\} \Rightarrow L \Rightarrow \{V_m, pH, V_s\}$	C_v	$\{pH, k_{str}\} \Rightarrow C_v \Rightarrow \{k_{dlt}\}$
F_{cc}	$\{V_m, V_s\} \Rightarrow F_{cc}$	d	$\{k_{dfm}, k_{dfm}\} \Rightarrow d \Rightarrow \{P_{max}, P_{min}\}$
P_{max}	$\{d, \eta, V_m\} \Rightarrow P_{max}$	η	$\{Hb, pH, k_{str}\} \Rightarrow \eta \Rightarrow \{P_{max}, P_{min}\}$
P_{min}	$\{d, \eta, V_m\} \Rightarrow P_{min}$	V_m	$\{\Delta O_2, L, Hb, M\} \Rightarrow V_m \Rightarrow \{P_{max}, P_{min}, F_{cc}\}$
k_{str}	$k_{str} \Rightarrow \{L, \eta, k_{dfm}, C_v\}$	V_s	$\{L\} \Rightarrow V_s \Rightarrow \{F_{cc}\}$
pH	$\{L\} \Rightarrow pH \Rightarrow \{\rho, \Delta O_2, C_v\}$	ΔO_2	$\{pH\} \Rightarrow \Delta O_2 \Rightarrow \{V_m\}$

Модель была реализована в компьютерной программе БИОДИС V2.2. Преимуществом данного программного средства является возможность хранения архива результатов обследования конкретного лица и возможность дистанционного сбора информации. Предусмотрена статистическая обработка данных архива, что позволяет выявить разовые отклонения от нормальных для наблюдаемого показателей и развивающиеся тенденции. На основе имеющихся данных (в том числе о нагрузочных тестах) прогнозируются реакции и адаптационные резервы при различных психофизических нагрузках. В число процедур программы входят следующие:

1. Исходный анализ. Задаются значения векторов X и Y . В целях повышения точности расчета могут задаваться число гемоглобина, параметр кислотного равновесия, вязкость и скорость распространения волны. Результаты расчета выводятся вместе с относительными отклонениями параметров от статистических норм.

2. Сопоставительный мониторинг. Задаются вес, нагрузка, ЧСС, максимальное и минимальное давление. В качестве нормы рассматривается референтное состояние R . Выводятся результаты и отклонения основных параметров от R .

3. Опорная диагностика. Задаются вес, нагрузка, ЧСС, максимальное и минимальное давление. В следующей строке размещаются значения референтного состояния. Значения статистического прогноза ЧСС, минутного объема крови (МОК), давлений при текущей нагрузке размещаются в контрольной строке. Массив результатов содержит прогноз давлений в покое, отклонение прогнозируемого максимального давления от нормы в покое (*гипертония/гипотония*); отклонение текущего ЧСС от прогнозного (*тахикардия/брадикардия*); разность текущего максимального давления и прогнозного давления (*сердечная недостаточность*); *порок АК*, выражаемый в виде процентной доли площади просвета АК в участке закрытия к площади сечения аорты; признак *спортивного типа* системы кровообращения при прогножном систолическом объеме крови в покое более 150 мл.

4. Статистический прогноз. Задаются вес, нагрузка. По статистическим данным из архива

определяются ЧСС, систолическое и диастолическое давление. Методом расчета мониторинговых значений определяются остальные параметры.

Интерфейс программы БИОДИС V2.2 представлен на рисунке 2.

Верификация решений некорректных задач выполняема только на основе сопоставления расчетных и измеренных контрольных параметров [13]. Первый способ верификации заключался в сопоставлении расчетных результатов с заданными значениями лабораторно измеряемых параметров (вязкость крови, содержание гемоглобина, параметр кислотного равновесия, скорость распространения пульсовой волны). В соответствии со вторым способом, проводится верификация разрабатываемой модели гемодинамики на различных выборках, модификация алгоритмов моделирования, уточнение весовых коэффициентов. В частности, была проведена диагностика СК группы спортсменов Национальной сборной РБ по самбо (в количестве 9 человек). Выполнен анализ полученной информации, даны рекомендации тренерскому составу по оптимизации тренировок. Начата программа исследований гемодинамики СК групп студентов гомельских вузов: ГоГМУ (9 человек), БелГУТА (9 человек), ГГУ (80 человек).

Приведем анализ первых результатов обследования группы общефизической подготовки ГоГМУ. В процессе тестирования производились замеры антропометрических данных (рост, вес, возраст, пол). Контролируемые параметры функционирования системы кровообращения (ЧСС, АДс, АДд) замерялись в спокойном состоянии, сразу после нагрузки и по истечении 3-х минутного периода восстановления (рисунок 3).

Статистика изменений при физической нагрузке 30 кДж/мин в сравнении с положением покоя показывает, что: частота сердечных сокращений (среднее значение в покое – 67 уд/мин) поднялась до 78 уд/мин и не восстановилась за 3 минуты, что свидетельствует о недостаточной тренированности членов тестовой группы; динамика изменения показателей давления соответствует норме;

ФИО		Пол	Рост см	Вес кг	Дата	Возраст	Нагрузка		Частота сердечных сокращений уд/мин	Максимальное давление мм рт.ст.	Минимальное давление мм рт.ст.	Объем крови л	Минутный объем крови л	Систолический объем л	pH	Содержание гемоглобина г/л	Кинематическая вязкость cSt	Уровень стресса	Эластичность сосудов $\times 10^{-3}$ Па	Скорость волны см/сек	Сжатие/расширение сосудов $\Delta d/d_0$	Дилятация сосудов $\Delta d/d_0$	Спортивная СК	Патология ЧСС	Сердечная недостаточность	Патология клапана	Патология давления	Максимальное давление мм рт.ст.	Минимальное давление мм рт.ст.	Невязка давлений мм рт.ст.	Невязка параметров	
51	Сидоров	М	185	69	08.09.09	60	60	146	80	146	80	3.5	17.0	0.116	7.31	147	2.3	1.04	17.6	875	1.014	1.062										
51	Сидорова	Ж	185	69	06.03.09	21	6	80	120	80	80	3.5	6.4	0.080	7.42	149	6.2	1.00	5.2	475	1.017	1.199										
51	Сидоров	М	185	69	06.03.09	21	45	128	140	80	80	3.5	6.4	0.080	7.454	0.864	0.075	0.000	0.007	0.000	399.501											

Исходный анализ.									
Задаются поля A6 - L6, кроме G и H									
Сопоставительный мониторинг									
Задаются поля F6 - L6, кроме G и H									
Опорная диагностика									
Задаются поля B6 - A10 = номер архивной строки и поля G - B6									
Прогноз									
Задаются поля B6 - A10 = номер архивной строки и поля G - B6									

Анализ коронарной патологии									
Распределение кровотока по коронарным артериям									
Артерия-1	Артерия-2	Артерия-3	Артерия-4						
100 %	90	80	0.00%						
41%	33%	26%	0%						
Патология									
100	84	100	0.00%						
100%	92%	100%	0.00%						
41%	28%	26%	0%						
Полная картина системы кровообращения									
ЧСС	МОК	Р _{max}	Р _{min}						
522	60.9	1028	632						
551	64.3	1086	667						
$((522) \cdot (64.3)) \cdot ((1028) \cdot (632)) = ((551) \cdot (667))$									

Пол									
Ж	Женщины								
А	Анемия								
С	Спорт								

Рисунок 2 – Содержание протокола гидродинамического анализа: 1 – ячейки констант;
2 – зона операций с листом «архив»; 3 – зона основных расчетов; 4 – зона операций по уточнению коронарной дисфункции; 5 – зона варьирования отклонений по гемоглобину и кислотности; 6 – строки входных и выходных данных расчетов, а также отклонений от нормы

ФИО	Рост, см	Вес, кг	Возраст	Нагрузка, кДж	ЧСС, уд/мин	Максимальное давление, мм рт ст	Минимальное давление, мм рт ст	Минутный объем крови, л	Системический объем, л	pH-параметр	Содержание гемоглобина, г/л	Кинематическая вязкость, сСт	Уровень стресса	Скорость волны, см/сек	Сжатие/расширение сосудов, d/d0	Дилятация сосудов, d/d0	Ударное давление	Пациент O2 гемоглобина	Потребный O2 мл	Тест Рурфье-Диксона	Индекс Кердо	Кэф. Экономичности	Кэф. выносливости	Кваа
Л-н А.П.	180	88	56	7	72	120	80	8,8	0,123	7,41	154	4,3	0,97	862	1,088	1,064	40	16,7%	483		-50,0	2880	18,0	
	178	53	22	7	64	110	80	4,6	0,072	7,38	157	4,5	1,00	683	1,107	1,099	30	19,5%	301		-37,5	1920	21,3	
	176	53	22	7	62	110	80	5,2	0,083	7,44	140	3,9	1,00	761	1,107	1,080	30	19,6%	301		-37,5	1860	20,7	
	169	64	24	7	58	120	80	5,9	0,102	7,34	147	5,3	1,00	517	1,027	1,167	40	19,6%	364		-50,0	2320	14,5	
	153	48	22	7	68	115	70	5,5	0,082	7,44	117	3,3	1,00	639	1,027	1,099	45	19,6%	273		-64,3	3060	15,1	
	160	55	22	7	78	110	80	5,4	0,069	7,35	131	3,7	0,97	623	1,101	1,119	30	20,1%	302		-37,5	2340	26,0	
	168	54	22	7	70	120	80	5,2	0,075	7,34	136	4,4	1,00	661	1,072	1,107	40	20,0%	304		-50,0	2800	17,5	
	162	50	21	7	60	100	70	6,0	0,099	7,44	117	2,8	1,00	572	1,085	1,126	30	18,9%	282		-42,9	1800	20,0	
	Среднее значение в покое																							
	180	88	56	30	76	140	80	14,3	0,188	7,43	156	3,2	1,11	902	1,040	1,060	60	44,8%	2079	2	-75,0	4560	12,7	
Б-ва М.Т.	178	53	22	30	78	110	70	7,7	0,099	7,43	157	2,8	1,00	706	1,066	1,086	40	44,8%	1130	0,6	-57,1	3120	19,5	
	176	53	22	30	78	120	70	8,8	0,113	7,43	138	2,6	1,01	804	1,040	1,066	50	44,8%	1133	0,2	-71,4	3900	15,6	
	169	64	24	30	78	140	90	10,7	0,138	7,45	145	3,6	1,01	519	1,021	1,189	50	42,1%	1369	-0,6	-55,6	3900	15,6	
	153	48	22	30	78	130	70	9,5	0,122	7,41	118	2,5	1,10	516	0,960	1,147	60	47,6%	1118	1,4	-85,7	4680	13,0	
	160	55	22	30	78	130	60	7,0	0,090	7,33	130	3,4	0,96	717	0,960	1,069	70	58,7%	1124	3,4	-116,7	5460	11,1	
	168	54	22	30	76	130	80	8,2	0,108	7,37	134	3,2	1,07	680	1,040	1,102	50	53,1%	1221	1,6	-62,5	3800	15,2	
	162	50	21	30	78	115	70	11,5	0,147	7,45	115	1,8	1,10	630	1,014	1,100	45	42,1%	1164	-0,2	-64,3	3510	17,3	
	Среднее значение под нагрузкой																							
	180	88	56	8	70	120	80	8,7	0,125	7,41	154	4,4	1,02	862	1,088	1,065	40	17,7%	507		-50,0	2800	17,5	
	178	53	22	8	68	110	80	80	4,9	0,071	7,39	155	4,3	0,91	683	1,107	1,100	30	16,9%	272		-37,5	2040	22,7
Я-ва П.Л.	176	53	22	8	74	110	65	6,1	0,082	7,43	138	3,4	0,94	804	1,040	1,060	45	15,6%	281		-69,2	3330	16,4	
	169	64	24	8	76	130	80	7,8	0,103	7,47	148	4,5	1,01	521	1,005	1,167	50	14,6%	365		-62,5	3800	15,2	
	153	48	22	8	66	100	65	5,4	0,082	7,37	119	2,9	1,00	637	1,040	1,093	35	19,7%	271		-53,8	2310	18,9	
	160	55	22	8	76	100	60	5,2	0,068	7,33	129	3,5	1,00	669	1,027	1,079	40	21,8%	312		-66,7	3040	19,0	
	168	54	22	8	72	110	70	5,3	0,074	7,37	134	3,9	0,99	673	1,053	1,090	40	19,7%	303		-57,1	2880	18,0	
	162	50	21	8	74	110	70	7,8	0,106	7,45	115	2,5	1,08	594	1,040	1,115	40	15,6%	305		-57,1	2960	18,5	
	Среднее после восстановления																							
						72	111	71	6,4	0,089	7,40	136	3,7	0,99	680	1,050	1,096	40	17,7%	327		-56,8	2895	18,3

Рисунок 3 – Результаты мониторинга гемодинамики группы студентов ГогМУ до и после функциональной пробы и при окончании периода восстановления

ударный объем изменился с 0,088 до 0,126 л и вернулся в исходное состояние после 3-х минутного отдыха; *pH*-параметр под влиянием нагрузки изменялся в пределах от 7,39 до 7,41 и принял конечное значение, равное 7,40; показатель кинематической вязкости претерпел изменения с 4,0 до 2,9 *cSt* (что является нормальной реакцией на нагрузку) и принял конечное значение 3,7 *cSt*; уровень стрессовой нагрузки увеличился на 5%, затем принял исходное значение; скорость пульсовой волны увеличилась с 665 до 684 см/с и после отдыха приняла значение 680 см/с (эти результаты требуют дальнейшего исследования, так как в литературе нет соответствующих подтверждений); коэффициент деформации сосудов изменился с 1,077 до 1,018, т. е. на 5%, после отдыха в течение 3 минут не вернулся к исходному значению; коэффициент дилатации сосудов изменился с 1,108 до 1,102 и принял конечное значение 1,096; кислородный дифференциал увеличился под нагрузкой с 19,3% до 47,3%; тест Руфье – Диксона дал хорошие результаты у 8 испытуемых из 9, индекс Кердо показал преобладающее влияние парасимпатического отдела вегетативной нервной системы, коэффициент экономичности кровообращения свидетельствует о недостаточной тренированности группы обследуемых.

В результате верификации по фактическим данным предполагается модификация программы БИОДИС V2.2 с целью создания новой версии с оптимизированной структурой процедур анализа и улучшенным пользовательским интерфейсом.

Заключение

Использование тонометрического анализа системы кровообращения на основе разработанной 0-D гидродинамической модели и ее программной реализации дополняет обычно используемые в медицинской практике инструментальные методы диагностики состояния, позволяя получить полезную информацию для выявления предвестников патологии и оценки адаптивных возможностей сердечно-сосудистой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астраханцева, Е.В. Математическое моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов / Е.В. Астраханцева, В.Ю. Гидаснов, Д.Л. Ревизников // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 8. – С. 61 – 80.
2. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы / М.В. Абакумов [и др.]. – М. – 1996. – 25 с. – (Препринт / ИПМ РАН, № 104).
3. Лищук, В.А. Математическая теория кровообращения / В.А. Лищук. – М.: Медицина, 1991. – 256 с.
4. Фокин, В.А. Системный подход к интегральной оценке состояния биосистем // Современные методы представления и обработки биомедицинской информации / под ред. Ю.В. Кистенева, Я.С. Пеккера. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – С. 51–123.
5. Симаков, С.С. Численное моделирование сердечно-сосудистой и дыхательной систем организма человека с учетом их взаимодействия): дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / С.С. Симаков. – М.: МФТИ, 2006. – 115 с.
6. Математическое моделирование гемодинамики сердечно-сосудистой системы с учетом влияния нейрорегуляции / В.Б. Кошелев [и др.] // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 3. – С. 15–28.
7. Дубровский, В.И. Биомеханика / В.И. Дубровский, В.Н. Федорова. – М.: Медицина, 2003. – 669 с.
8. Механика кровообращения / К. Каро [и др.]. – М.: Мир, 1981. – 624 с.
9. Agrawal, A. Structural Modeling and Analysis of Cardiovascular Systems (CVS): Graph-Theoretic Approach / A. Agrawal, A.A. Ghatol, V.P. Agrawal // The IUP Journal of Computer Sciences. – 2008. – P. 241–266.
10. Analysis of Pressure Losses in the Hemodialysis Graft Vascular Circuit Using Finite Element Analysis / M. Beasley [et al.] // Excerpt from the Proc. of the COMSOL Users Conf. Boston. – 2006. – P. 185–191.
11. Gadcar, T. Mathematical modeling of blood flow in the presence of atherosclerosis / T. Gadcar, A. Jeremic // Excerpt from the Proc. of the COMSOL Users Conf. Boston. – 2006. – P. 879–886.
12. Шилько, С.В. Моделирование гидродинамического течения: аналогия системы кровообращения и трубопроводного транспорта нефти / С.В. Шилько, Ю.Г. Кузьминский // Матер. 2 междун. конф. Совр. информ. и телекомун. технол. для здравоохран. – Минск. – 2008. – С.338–343.
13. Методика и компьютерная система диагностики состояния сердечно-сосудистой системы / Ю.Г. Кузьминский [и др.] // Проблемы здоровья и экологии, ГоГМУ. – 2009. – № 2. – С. 90–96.
14. Возможности первичной диагностики сердечно-сосудистой системы на основе биомеханического анализа гемодинамики / С.В. Шилько [и др.] // Проблемы здоровья и экологии, ГоГМУ. – 2010. – № 3. – С. 148–155.
15. Sramek, B.B. Hemodynamics and its role in oxygen transport. Biomechanics of the Cardiovascular System / B.B. Sramek // Czech Technical University Press. – 1995. – P. 209–231.
16. Питкевич, Ю.Э. Вариабельность сердечного ритма у спортсменов / Ю.Э. Питкевич // Проблемы здоровья и экологии, ГоГМУ. – 2010. – № 4. – С. 101–106.

Поступила в редакцию 08.04.11.

УДК 004.8

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ШУМОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ДАННЫХ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Е.А. Якимов¹, О.М. Демиденко², Д.М. Албкеират¹

¹Белорусско-Российский университет, Могилев

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON RESTORATION OF NOISE COMPONENT IN DATA SEQUENCES BY A SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS METHOD

E.A. Yakimau¹, O.M. Demidenko², D.M. Albkeirat¹

¹Belarusian-Russian University, Mogilev

²F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассматриваются методика и результаты исследования последовательностей данных с равномерным, нормальным и экспоненциальным шумом путем преобразования методом сингулярного спектрального анализа (SSA-методом). Показываются особенности восстановления шумовой составляющей в последовательностях данных, предложен алгоритм корректировки восстановленной шумовой составляющей с учетом стандартного отклонения.

Ключевые слова: SSA-метод, временная последовательность данных; равномерное, нормальное, экспоненциальное распределение; коррекция.

The technique and results of research of sequences of data with uniform, normal and exponential noise by transformation a Singular Spectrum Analysis method are presented. The peculiarities of restoration of noise component in sequences of data are shown, the algorithm of updating restored noise component in view of a standard deviation is offered.

Keywords: SSA-method, time sequence data, uniform, normal, exponential distribution; correction.

Введение

Одной из основных проблем при подготовке и проведении стохастических экспериментов в имитационном моделировании является правильный выбор модели входных данных, т.е. закона распределения вероятностей, который точно соответствует поведению случайных входных процессов. При этом стандартные законы распределения могут не соответствовать вероятностному поведению реальных входных процессов, особенно на границах распределения. Подстройка или редактирование формы подбранного распределения является трудным процессом из-за ограниченного числа параметров, доступных для управления формой распределения, и из-за отсутствия эффективного механизма для непосредственного управления формой подбранного распределения с одновременным изменением соответствующих параметров распределения.

Для решения задачи определения типа распределения используются, например, обобщенное распределение Джонсона [1, с. 271–297] или кривые Бизе [2, с. 184–202]. Для интерактивного моделирования входных данных с использованием семейства распределения вероятностей, основанных на кривых Бизе, разработана графическая технология [3, с. 699–711]. При построении модели входных данных используется также

Байесовский подход с использованием предварительной информации о законе распределения вероятностей. Например, предложено дисперсию случайных величин представлять двумя компонентами: одна дисперсия создается контролируемыми параметрами, вторая дисперсия связана с неопределенностью знания закона распределения контролируемых величин [4, с. 781–792].

В работе А.М. Лоу [5, с. 65–74] обращается внимание на проведение статистического анализа выходных данных для определения окончания имитационного моделирования с оцениванием периода разгона модели. Для оценки эффективности деятельности стохастических систем в имитационном моделировании исследуют выходные данные в переходном процессе за конечный период и оценивают установившееся решение за длительный период [6, с. 62–72]. При исследовании поведения системы в установившемся режиме за длительный период времени по гистограмме распределения откликов моделирования оцениваются отклонения, которые являются мерой риска при принятии решения [7, с. 413–416].

Эксплуатация имитационных моделей в производственных условиях затруднена отсутствием методов обработки накопленных данных и подготовки их для использования в моделях [8, с. 1290–1295]. Эффективная подготовка входных

данных для имитационного моделирования становится возможной при использовании данных, накопленных в информационных системах организаций. Для этого, например, разработан программный инструментарий, который позволяет подключаться к базе данных и извлекать их, представляя в CMSD-формате (CMSD – Core Manufacturing Simulation Data), пригодном для дискретно-событийных моделей [9, с. 1335–1344].

Чаще всего имитационные модели и инструменты их построения используются в тех случаях, когда становятся невозможными аналитические подходы. Обычно исследуют поведение сложной системы при полной неопределенности, состоящей из двух компонентов: во-первых, изменчивость, определенная случайными процессами в системе и именуемая стохастической неопределенностью, случайной неопределенностью или непреодолимой неопределенностью; во-вторых, неопределенность, обусловленная нехваткой знаний или достаточной информации о системе. Поэтому предлагается учитывать оба компонента при формировании последовательности входных данных для имитационной модели, например, предприятия общественного питания:

$Exp([3;10]) \rightarrow Norm([2;5],8) \rightarrow Norm([4;7],[2;8])$.

где $Exp([3;10])$ – источник поступления заявок, $Norm([2;5],8)$ – время обслуживания заявки узла 1; $Norm([4;7],[2;8])$ – время обслуживания заявки узла 2. Исследования проведены для экспоненциального и нормального закона распределения и значения в интервалах также распределены по нормальному и экспоненциальному закону распределения [10, с. 1335–1344].

В работе [11, с. 49–58] представлен анализ программных средств для определения закона распределения случайных величин, используемых для ввода в имитационную модель, например, программа StatFit имеет 32 различных распределений, BestFit имеет 37 распределений вероятности, ExpertFit [12] имеет 40 распределений.

Несмотря на проведенные исследования, задача установления типа выравнивающей кривой распределения и нахождения оценок параметров последовательностей данных, хранящихся в информационной системе предприятия, к настоящему времени до конца не решена. Такая ситуация предполагает дальнейшее исследование новых методов обработки данных, в частности, метода сингулярного спектрального анализа.

1 Содержательное описание метода сингулярного спектрального анализа

Данные в компьютерной информационной системе, представленные вещественными числами и определенные последовательно во времени,

именуют временной последовательностью данных. В общем случае такую последовательность данных, обычно упорядоченных во времени, называют временным рядом. Поэтому в дальнейшем будем использовать понятие временного ряда, и для извлечения информации из последовательностей данных рассмотрим метод сингулярного спектрального анализа (SSA-метод), который применяется для анализа временных рядов и может быть использован на этапе эксплуатации имитационной модели (ИМ). Он позволяет выделить составляющие временного ряда, которые описывают тренд и гармонические колебания, и те составляющие временного ряда, которые относят к «шуму». При этом метод не требует стационарности временного ряда, знания модели тренда, а также сведений о наличии периодических составляющих и их периодах [13]. Также с помощью данного метода можно определить модель тренда и использовать это знание для дальнейшей обработки временного ряда с уже известной моделью тренда, что важно, например, при автоматизации определения длительности переходного процесса в ИМ.

Математической основой SSA-метода является сингулярное разложение [14, с. 74]. Для успешного применения SSA-метода следует последовательно пройти несколько шагов.

Вложение. На этом шаге выбирается ширина окна L , от выбора которой зависят результаты применения SSA-метода. Из-за того что нет общих рекомендаций по выбору ширины окна, параметр L зависит от решаемой задачи и предварительной информации, известной о временном ряде. Например, для выделения тренда рекомендуется выбирать ширину окна не слишком большой. С другой стороны, для выделения гармонических колебаний рекомендуется большая ширина окна. После выбора ширины окна в соответствии с L строится траекторная матрица A ряда, которая будет являться по условию ее построения ганкелевой [15, с. 301].

Сингулярное разложение. Для матрицы $S = A \cdot A^T$ находятся собственные числа λ [16, с. 51] и ортонормированные собственные векторы U . Упорядоченные по убыванию собственные числа, которые больше нуля, часто называются сингулярными числами, а соответствующие им собственные векторы – левыми сингулярными векторами U . После этого вычисляются векторы V , которые называются правыми сингулярными векторами, и находятся элементарные матрицы, на сумму которых раскладывается первоначальная траекторная матрица.

Группировка. На данном этапе элементарные матрицы группируются по принципу принадлежности к тренду, гармоническим колебаниям или к шуму. Этот этап является наиболее сложным при применении SSA-метода. Для нахождения тренда на диаграммах собственных

векторов (по оси абсцисс откладывается порядковый номер координаты собственного вектора, а по оси ординат – значение координаты собственного вектора) выделяют медленно меняющиеся векторы. Сумма элементарных матриц, соответствующих этим векторам, будет являться траекторной матрицей тренда ряда. После этого восстанавливают гармонические колебания ряда. Для отделения шума можно воспользоваться несколькими замечаниями: нерегулярное поведение сингулярных векторов может говорить о принадлежности их к набору, порожденному шумовой компонентой; также об этом может свидетельствовать медленное, практически без скачков, убывание собственных чисел с некоторого номера.

Диагональное усреднение. Если полученные сгруппированные матрицы ганкелевы, то они являются траекторными матрицами некоторого временного ряда, который может быть легко по ним восстановлен. Однако обычно сгруппированные матрицы редко получают ганкелевыми, поэтому для восстановления временного ряда прибегают к диагональному усреднению. В соответствии с этим этапом каждый член восстановленного временного ряда будет являться средним арифметическим соответствующей ему побочной диагонали траекторной матрицы.

В результате проделанных шагов получается несколько временных рядов: один описывает тренд первоначального временного ряда, другой – гармонические колебания, а третий – шумовые составляющие.

2 Методика исследования стохастических последовательностей данных SSA-методом

Целью исследования является изучение особенностей восстановления SSA-методом равномерной, нормальной и экспоненциальной шумовой составляющей временного ряда и разработка практических рекомендаций по их использованию.

Для исследования приняты последовательности данных, определяемые следующими моделями:

$$G_1 = Rnd(n_{\inf}; n_{\sup}),$$

где $Rnd(n_{\inf}; n_{\sup})$ – функция, возвращающая случайные равномерные числа в интервале $[n_{\inf}; n_{\sup}]$ ($n_{\inf} = 0$ – нижняя граница значений случайных чисел, $n_{\sup} = 1$ – верхняя граница значений случайных чисел);

$$G_{2,3} = Norm(\gamma; \beta),$$

где $Norm(\gamma; \beta)$ – функция, возвращающая случайные нормально распределенные числа (γ – математическое ожидание случайных чисел, β – среднеквадратическое отклонение случайных

чисел); для временного ряда $G_2: \gamma = 1, \beta = 1$, для временного ряда $G_3: \gamma = 1, \beta = 5$;

$$G_4 = Exp(\gamma; \beta),$$

где $Exp(\gamma; \beta)$ – функция, возвращающая случайные числа, распределенные по экспоненциальному закону с параметром смещения $\gamma = 0$ и параметром масштаба $\beta = 1$.

Исследование проводится с комплексным применением табличного процессора MS Excel, математического пакета Mathcad, статистического пакета Statistica [17, с. 77–83].

Длина последовательностей данных G_j , $j = 1, \dots, 4$ ограничена величиной $n = 43$, что обусловлено ограничениями математического пакета Mathcad [18]. Временные ряды сформированы в пакете Minitab: Calc\Random Data\... \.

Основные числовые характеристики закона распределения случайной величины, используемые в исследовании:

– характеристики положения: математическое ожидание, оцениваемое средним (mean), медиана (med);

– характеристики рассеяния: среднеквадратическое отклонение, оцениваемое стандартное отклонение (s); максимум (max); минимум (min), диапазон (range), коэффициенты асимметрии распределения (γ_3) и эксцесса (γ_4).

Методика исследования представлена на примере экспоненциального распределения вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \exp\left[-\frac{(x-\gamma)}{\beta}\right] & | x > \gamma, \\ 0 & | x \leq \gamma. \end{cases}$$

где γ и β – параметры распределения [12].

После преобразования временного ряда G_4 получен восстановленный ряд G_4^e с двумя составляющими

$$G_4^e = G_{4T}^e + G_{4N}^e,$$

где G_{4T}^e – восстановленная трендовая, G_{4N}^e – восстановленная шумовая составляющая.

Основные числовые характеристики исходного временного ряда G_4 , восстановленных составляющих G_{4T}^e и G_{4N}^e представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные характеристики временного ряда с экспоненциальным шумом ($\gamma = 0$, $\beta = 1$)

Ряд	Mean	Med	Max	Min	Range	s	γ_3	γ_4
G_4	1,004	0,683	3,842	0,069	3,773	0,880	1,614	2,599
G_{4T}^e	1,008	0,995	1,308	0,714	0,594	0,175	0,149	-1,054
G_{4N}^e	-0,004	-0,261	2,532	-1,170	3,702	0,870	1,380	1,767

Для восстановленного тренда G_{4T}^6 построена линия регрессии (рисунок 1).

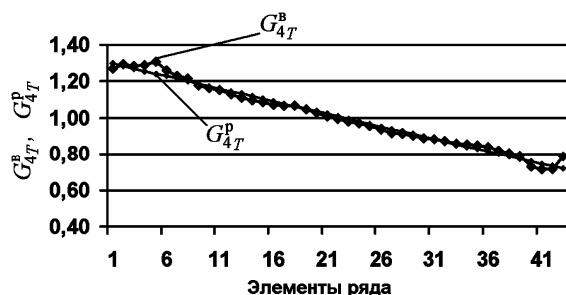


Рисунок 1 – Линия регрессии трендовой составляющей G_{4T}^6

Обозначим временной ряд, образованный элементами линии регрессии, через G_{4T}^P . Для оценки качества моделирования временного ряда G_{4T}^6 линией регрессии G_{4T}^P найдем разность ΔG_{4T}^{6P} :

$$\Delta G_{4T}^{6P} = G_{4T}^6 - G_{4T}^P.$$

Основные характеристики полученного распределения представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Основные характеристики погрешности моделирования трендовой составляющей G_{4T}^6

Ряд	Mean	Med	Max	Min	Range	s	γ_3	γ_4
ΔG_{4T}^{6P}	0	-0,008	0,068	-0,029	0,096	0,022	1,286	1,919

Представим восстановленную трендовую составляющую G_{4T}^6 в следующем виде:

$$G_{4T}^6 = G_{4TC}^6 + G_{4TD}^6,$$

где G_{4TC}^6 – постоянная составляющая тренда, G_{4TD}^6 – динамическая составляющая тренда.

Аналогично в регрессионной модели G_{4T}^P :

$$G_{4T}^P = G_{4TC}^P + G_{4TD}^P,$$

где G_{4TC}^P – постоянная составляющая регрессионной модели тренда, G_{4TD}^P – динамическая составляющая регрессионной модели тренда.

G_{4TC}^P определяется по формуле

$$G_{4TC}^P = \frac{\max_i G_{4T}^P - \min_i G_{4T}^P}{2}.$$

где $\max_i G_{4T}^P$, $\min_i G_{4T}^P$ – максимальный и минимальный элементы ряда G_{4T}^P соответственно.

G_{4TD}^P определяется по формуле

$$G_{4TD}^P = G_{4T}^P - G_{4TC}^P.$$

Восстановленная шумовая составляющая G_{4N}^6 представлена в виде гистограммы на рисунке 2.

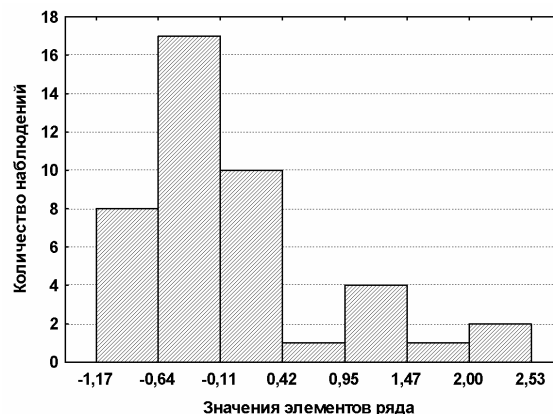


Рисунок 2 – Гистограмма восстановленной шумовой составляющей G_{4N}^6

В связи с появлением при восстановлении исходного временного ряда динамической составляющей тренда G_{4TD}^6 выполним корректировку шумовой составляющей G_{4N}^6 , построив скорректированный временной ряд G_{4N}^{6K} по формуле

$$G_{4N}^{6K} = G_{4N}^6 + G_{4TD}^P.$$

Основные характеристики скорректированного временного ряда G_{4N}^{6K} представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Основные характеристики скорректированного временного ряда G_{4N}^{6K}

Ряд	Mean	Med	Max	Min	Range	s	γ_3	γ_4
G_{4N}^{6K}	-0,004	-0,314	2,767	-0,959	3,726	0,873	1,586	2,504

Гистограмма скорректированного временного ряда G_{4N}^{6K} представлена на рисунке 3.

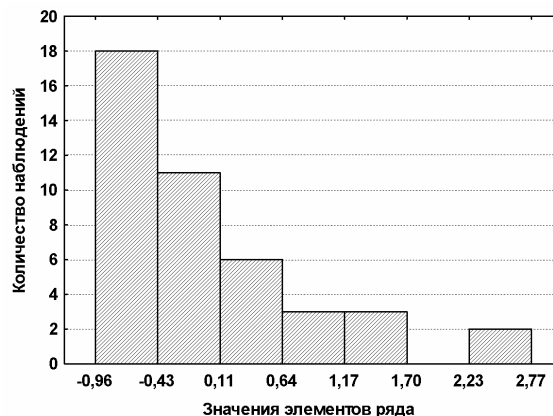


Рисунок 3 – Гистограмма скорректированного временного ряда G_{4N}^{6K}

Для проверки соответствия G_4 , G_{4N}^6 и G_{4N}^{6K} теоретическому экспоненциальному распределению используется критерий Колмогорова –

Смирнова. Критическое значение Δ_p для наибольшего отклонения эмпирического распределения от теоретического по таблице 6.2 [19, с. 347] при $p = 0,01$ и $n = 43$ равно 0,24332. Если наблюдаемое значение Δ больше или равно критическому значению, нулевая гипотеза H_0 отклоняется. Результаты проверки соответствия G_4 , G_{4N}^e и $G_{4N}^{ек}$ теоретическому экспоненциальному распределению представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Проверка соответствия G_4 , G_{4N}^e и $G_{4N}^{ек}$ теоретическому экспоненциальному распределению

Временной ряд	Наблюдаемое значение Δ
Исходный ряд G_4	0,03239
Восстановленный ряд G_{4N}^e	0,19518
Скорректированный ряд $G_{4N}^{ек}$	0,03818

Поскольку наблюдаемые значения меньше критического, гипотеза H_0 об экспоненциальном распределении G_4 , G_{4N}^e и $G_{4N}^{ек}$ принимается.

3 Обсуждение результатов исследования

Для обобщения полученных результатов и принятия решения о корректировке восстановленной шумовой составляющей построена таблица 5, в которой приняты следующие обозначения:

$$Range_{jT}^p = \max_i G_{jT}^p - \min_i G_{jT}^p \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m,$$

где n – длина исследуемого временного ряда ($n = 43$); m – количество исследуемых временных рядов.

$Range(G_{jN}^e)$ – диапазон значений элементов восстановленной шумовой составляющей G_{jN}^e временного ряда G_j ; $s(G_{jN}^e)$ – стандартное отклонение значений элементов восстановленной шумовой составляющей G_{jN}^e временного ряда G_j ; $s(\Delta G_{jT}^{ep})$ – стандартное отклонение ошибки моделирования восстановленной трендовой составляющей G_{jT}^e .

Для обоснования корректировки восстановленной шумовой составляющей на основе регрессионной модели восстановленной динамической составляющей тренда построим регрессионную зависимость для диапазона коррекции

$$Range_{jT}^p = f(s(G_{jN}^e)).$$

На основе проведенных исследований (таблица 5) регрессионная зависимость имеет следующий вид (рисунок 4):

$$Range_{jT}^p = -0,1 + 0,8 \cdot s(G_{jN}^e).$$

Таблица 5 – Показатели восстановления составляющих временного ряда

Временной ряд	$Range_{jT}^p$	$Range(G_{jN}^e)$	$s(G_{jN}^e)$	$s(\Delta G_{jT}^{ep})$
$G_1 = \text{Rnd}(0,1)$	0,170	1,04	0,271	0,040
$G_2 = \text{Norm}(1,1)$	0,550	3,58	0,840	0,058
$G_3 = \text{Norm}(1,5)$	4,001	17,86	4,874	0,321
$G_4 = \text{Exp}(0,1)$	0,580	3,702	0,870	0,022

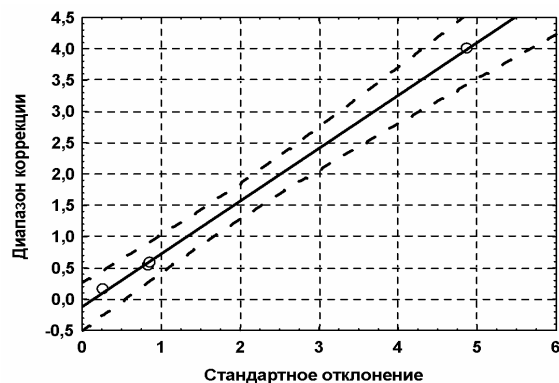


Рисунок 4 – Регрессионная зависимость диапазона коррекции $Range_{jT}^p = f(s(G_{jN}^e))$

При этом коэффициент корреляции составляет $r = 0,9997$, коэффициент детерминации $r^2 = 0,9993$ при уровне $p = 0,99$.

В соответствии с регрессионной моделью $Range_{jT}^p = f(s(G_{jN}^e))$ (рисунок 4) принятие решения для корректировки восстановленной шумовой составляющей в реальных исследованиях временного ряда рекомендуется соотносить со стандартным отклонением $s(G_{jN}^e)$.

Предлагаемый алгоритм для коррекции восстановленной шумовой составляющей методом сингулярного спектрального анализа выполняет следующие действия:

Шаг 1. Находят стандартное отклонение восстановленной шумовой составляющей, которое в соответствии с регрессионным уравнением определяет диапазон корректирующих значений динамического тренда по формуле

$$Range_{jT}^p \approx 0,8 \cdot s(G_{jN}^e).$$

Шаг 2. Находят среднее значение диапазона коррекции $Range_{jT}^p$.

Шаг 3. Диапазон $Range_{jT}^p$ относительно середины разбивается для получения n (в исследованиях $n = 43$) значений, при этом начальные значения полученного ряда являются положительными, конечные – отрицательными.

Шаг 4. Полученные на шаге 3 значения ряда прибавляются к восстановленной шумовой составляющей [37–А, с. 174–176].

Дополнительные исследования с дискретным равномерным шумом подтверждают полученные результаты по корректровке восстановленной шумовой составляющей.

Заключение

Предложен алгоритм корректировки закона распределения восстановленной шумовой составляющей временного ряда методом сингулярного спектрального анализа, основанный на декомпозиции трендовой составляющей временного ряда на статическую и динамическую составляющие, отличающийся применением регрессионной зависимости, включающей стандартное отклонение восстановленной шумовой составляющей, что позволяет создать автоматизированную технологию нахождения закона распределения шумовой составляющей временных последовательностей данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Swain, J.J. Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system / J.J. Swain, S. Venkatraman, J.R. Wilson // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. – 1988. – № 29. – P. 271–297.
2. *Introduction to Modeling and Generating Probabilistic Input Processes for Simulation* / M.E. Kuhl [et al.] [Электрон. ресурс] Proceedings of 2009 Winter Simulation Conference. – 2009. – P. 184–202. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc09papers/016.pdf>. – Дата доступа: 11.04.2011.
3. Wagner, M.A.F. Using univariate Bezier distributions to model simulation input processes / M.A.F. Wagner, J.R. Wilson // *IEE Transactions*. – 1996. – № 28 (9). – P. 699–711.
4. Zouaoui, F. Accounting for parameter uncertainty in simulation input modeling / F. Zouaoui, J.R. Wilson // *IEE Transactions*. – 2003. – № 35 (3). – P. 781–792.
5. Law, A.M. Statistical Analysis of Simulation Output Data: The Practical State of the Art / A.M. Law [Электрон. ресурс] Proceedings of 2010 Winter Simulation Conference. – 2010. – P. 65–74. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc10papers/008.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.
6. Nakayama, M. Statistical Analysis of Simulation Output / M. Nakayama [Электрон. ресурс] Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. – 2008. – P. 62–72. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc08papers/009.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.
7. Nelson, B.L. The More Plot: Displaying Measures of Risk & Error From Simulation Output / B.L. Nelson [Электрон. ресурс] Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. – 2008. – P. 413–416. –

Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc08papers/048.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.

8. Johansson, B. Information structure to support discrete event simulation in manufacturing systems / B. Johansson, J. Johnsson, A. Kinnander // *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference*, ed. S. Chick [et al.]. – New Orleans, Louisiana, 2003. – P. 1290–1295.

9. *Input Data Management Methodology for Discrete Event Simulation* / N. Bengtsson [et al.] [Электрон. ресурс] Proceedings of 2009 Winter Simulation Conference. – 2009. – P. 1335–1344. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc09papers/125.pdf>. – Дата доступа: 11.04.2011.

10. Batareseh, O.G. Reliable Simulation with Input Uncertainties Using an Interval-Based Approach / O.G. Batareseh, Y. Wang [Электрон. ресурс] Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. – 2008. – P. 344–352. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc08papers/040.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.

11. Biller, B. Introduction to Simulation Input Modeling / B. Biller, C. Gunes [Электрон. ресурс] Proceedings of 2010 Winter Simulation Conference. – 2010. – P. 49–58. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc10papers/006.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.

12. Law, A.M. ExpertFit Version 7 [Электрон. ресурс] / A.M. Law // *User's Guide.pdf* – 2006. – 144 p. – Режим доступа : <http://www.averilllaw.com/>. – Дата доступа 23.03.2010.

13. Голяндина, Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: учеб. пособие / Н.Э. Голяндина. – СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2004. – 76 с.

14. Голуб, Дж. Матричные вычисления: пер. с англ. / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Наука, 1999. – 548 с.: ил.

15. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

16. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер; пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

17. Якимов, Е.А. Исследование SSA-метода на основе комплексного применения информационных технологий / Е.А. Якимов // *Доклады БГУИР*. – 2010. – № 2 (48). – С. 77–83.

18. Ивановский, Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro: учеб. пособие / Р.И. Ивановский. – М.: Высш. шк., 2003. – 431 с.

19. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

Поступила в редакцию 01.09.11.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Допускается сквозная нумерация рисунков и таблиц. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. Through numbering of figures and tables is possible. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).