

ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№ 3 (4) 2010**

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»**

*Главный редактор:*  
**А.В. Рогачев** (Беларусь)

*Заместители главного редактора:*  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)  
**Л.А. Шеметков** (Беларусь)

*Редакционная коллегия:*  
**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**П.Д. Кухарчик** (Беларусь)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**И.В. Максимей** (Беларусь)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

*Ответственный секретарь:*  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

*Адрес редакции:*  
Гомельский государственный  
университет им. Ф.Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»**

*Editor-in-Chief:*  
**A.V. Rogachev** (Belarus)

*Deputy Editor-in-Chief:*  
**O.M. Demidenko** (Belarus)  
**L.A. Shemetkov** (Belarus)

*Editorial board:*  
**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Webin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**P.D. Kuharchik** (Belarus)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**I.V. Maksimei** (Belarus)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

*Executive Secretary:*  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

*Edition address:*  
F. Scorina Gomel State University  
Sovetskaya Str., 104,  
246019, Gomel, Republic of Belarus  
Ph. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
website: <http://pfmt.gsu.by>

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (4) 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА

<b>Капшай В.Н., Кондратюк В.В.</b> Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде.....	7
<b>Максименко Н.В., Курилин А.С., Подольский С.В., Андреев В.В., Ючко А.А., Бабич К.С., Степаненко Ю.Ю.</b> Новый метод оптимизации порогов обрезаний в эксперименте E391: концепция и текущий статус реализации.....	22
<b>Пилипцов Д.Г., Рогачев А.В., Федосенко Н.Н., Бекаревич Р.В.</b> Механические свойства легированных медью углеродных покрытий, осажденных из импульсной катодной плазмы.....	25
<b>Пилипцов Д.Г., Руденков А.С., Бекаревич Р.В.</b> Морфология композиционных покрытий на основе углерода, подвергнутых обработке ионами азота.....	31
<b>Шалунаев С.В., Никитюк Ю.В.</b> Лазерное термораскалывание стеклоизделий трубчатой формы.....	35

### МАТЕМАТИКА

<b>Джианхонг Хуанг, Фенгян Хие, Хиолан Юи.</b> $S$ - $C$ -перестановочно погруженные подгруппы конечных групп.....	41
<b>Казимиров Г.Н.</b> Эквивалентная структурная характеристика данного обобщенного модуля гладкости.....	49
<b>Кашин Ю.А., Жадан М.И., Кашина Р.Е.</b> Статика гибкого треугольного подвеса.....	52
<b>Скиба А.Н.</b> О пересечении всех максимальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп конечной группы.....	56
<b>Юфэнг Лиу, Хиухиан Фэнг, Джианхонг Хуанг.</b> О $\mathfrak{F}_h$ -нормальных подгруппах конечных групп.....	63

### ИНФОРМАТИКА

<b>Демиденко О.М., Левчук В.Д., Кучеров А.И.</b> Функциональные возможности программного комплекса адаптивной идентификации пользователей корпоративной сети.....	69
<b>Еськова О.И., Кикоть И.И.</b> Планирование кредитных условий на основе метода имитационного моделирования вероятностного сетевого графика.....	74

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Д. Д. Павловец, Г. Н. Петухова*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 07.09.10. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 8,40. Тираж 100 экз. Заказ № 470.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»  
246019, Гомель, ул. Советская, 104  
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГТУ им. Ф. Скорины»  
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2010

# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

*Published since December, 2009*

There are 4 times a year

№ 3 (4) 2010

## CONTENTS

### PHYSICS

<b>Kapshai V.N., Kondratjuk V.V.</b> Scattering of electromagnetic waves on biisotropic sphere in biisotropic medium.....	7
<b>Maksimenco N.V., Kurilin A.S., Podolsky S.V., Andreev V.V., Yuchko A.A., Babich K.S., Stepanenko Yu.Yu.</b> New method for the cuts threshold optimization in the E391 experiment: conception and current implementation.....	22
<b>Pilipstov D.G., Rogachev A.V., Fedosenko N.N., Bekarevich R.V.</b> Mechanical properties of the copper alloyed carbon coatings deposited from cathodic pulse plasma.....	25
<b>Pilipstov D.G., Rudenkov A.S., Bekarevich R.V.</b> The morphology of the carbon based composition coatings processed by nitrogen ions.....	31
<b>Shalupaev S.V., Nikitjuk Y.V.</b> Laser thermosplitting of the glass tubes.....	35

### MATHEMATICS

<b>Jianhong Huang, Fengyan Xie, Xiaolan Yi.</b> $S$ - $C$ -permutably embedded subgroups of finite groups.....	41
<b>Kazimirov G.N.</b> Equivalent structural characteristic of the given generalized modulus of smoothness.....	49
<b>Kashin Y.A., Zhadan M.I., Kashina R.E.</b> Statics of flexible triangular suspension.....	52
<b>Skiba A.N.</b> On the intersection of all maximal $\mathfrak{F}$ -subgroups of a finite group.....	56
<b>Yufeng Liu, Xiuxian Feng, Jianhong Huang</b> On $\mathfrak{F}_h$ -normal subgroups of finite groups.....	63

### INFORMATION SCIENCE

<b>Demidenko O.M., Liauchuk V.D., Kucharau A.I.</b> Functional capabilities of program tools for the adaptive identification of the corporate network users.....	69
<b>Eskova O.I., Kikot I.I.</b> Planning of the credit conditions based on simulation of probabilistic net diagram.....	74

***Founder – Francisk Scorina Gomel State University***

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

УДК 537.87

## РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА БИИЗОТРОПНОМ ШАРЕ В БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В.Н. Капшай<sup>1</sup>, В.В. Кондратюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

## SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON BIISOTROPIC SPHERE IN BIISOTROPIC MEDIUM

V.N. Kapshai<sup>1</sup>, V.V. Kondratjuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel

<sup>2</sup>P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Решена задача о рассеянии электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде. Получены аналитические выражения для коэффициентов разложения рассеянного и внутреннего полей по полной и ортонормированной системе шаровых векторов. Численно проанализированы зависимости этих амплитудных коэффициентов от параметров биизотропных сред и радиуса шара. Показано, что в частном случае взаимных гиротропных сред из полученных нами выражений следуют формулы, известные из более ранних работ.

**Ключевые слова:** биизотропная среда, материальные уравнения, теория Ми, шаровые векторы, сферические волны.

The problem of electromagnetic wave scattering on biisotropic sphere in biisotropic medium is solved. Analytical expressions for expansion coefficients of the scattered and inner fields on the complete orthonormal system of spherical vectors are obtained. These coefficients are numerically analyzed depending on the parameters of biisotropic media. It is shown that in the particular case of gyrotropic media our results yield solutions known earlier.

**Keywords:** biisotropic medium, constitutive relations, Mie theory, spherical vectors, spherical waves.

### Введение

В последнее время интенсивно ведутся исследования различных сложных искусственных макроскопических сред, электромагнитные свойства которых описывают материальными уравнениями вида [1]–[8]

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \\ \vec{B} &= (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H},\end{aligned}\quad (0.1)$$

содержащими «перекрестные» магнитоэлектрические слагаемые. Такие среды получили в научной литературе название «биизотропных» («biisotropic»). Любое внешнее поле обуславливает в них электрическую и магнитную поляризацию. Частными вариантами таких сред являются:

- а) изотропные диэлектрики (при  $\alpha = 0$ ,  $\chi = 0$ );
- б) естественно гиротропные (киральные) среды (при  $\chi = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ );
- в) среды Теллегена (при  $\alpha = 0$ ,  $\chi \neq 0$ ).

Важность изучения биизотропных сред объясняется тем, что, оставаясь изотропными, они, тем не менее, могут иметь электромагнитные свойства, существенно отличные от свойств более простых сред типа изотропных диэлектриков. Более того, биизотропные среды могут проявлять свойства, заметно отличающиеся от

свойств киральных сред или сред Теллегена. Различные аспекты исследования киральных и биизотропных сред хорошо освещены в литературе, в частности в монографиях [9], [10] и статьях [11]–[21].

Возрастающий интерес к исследованиям электродинамических свойств киральных и биизотропных сред во многом обусловлен успехами в создании композитных сред, структурированных в микроскопическом и нанометровом масштабе. При этом спектральная область, в которой могут проявляться специфические свойства искусственных сред, значительно шире, чем оптический диапазон, в котором свойства сред типа киральности обусловлены свойствами молекул. С усовершенствованием методов синтеза полимеров стало возможно реализовать взаимные киральные среды в целях практического использования их свойств в СВЧ и миллиметровом волновом диапазоне. Среди многочисленных потенциальных применений киральной среды можно указать использование слоёв из них в качестве объектов, поглощающих излучение радаров.

Биизотропные среды, рассматриваемые как обобщение случая киральных сред, кроме киральности, обладают также свойством невзаимности, в силу чего они очень перспективны в прикладном отношении. Биизотропные (невзаимные киральные) среды, при описании их

макроскопических электромагнитных свойств, характеризуют четырьмя материальными параметрами (вместо трех, используемых для характеристики взаимных киральных сред). Вследствие этого способы создания искусственных материалов, обладающих требуемыми электромагнитными свойствами, более вариативны. Таким образом, все больше и больше внимания привлекается к области взаимодействия электромагнитных волн со средами этого класса и соответствующим граничным задачам.

Следует отметить, что с середины 90-х годов прошлого века в литературе ведется дискуссия о «распознаваемом существовании» невазимных биизотропных сред [22]–[34]. Как указано в [7], [8] эта дискуссия фактически не завершена, поэтому именно при решении граничных задач могут быть найдены дополнительные аргументы в пользу утверждения о том, что нельзя эффекты, обусловленные отличием от нуля значения параметра невазимности  $\chi$ , объяснить изменением значений других параметров при  $\chi = 0$ . Чтобы найти такие эффекты, следует решить различные граничные задачи для электромагнитных полей в биизотропной среде, граничащей с другими различными средами в условиях, когда граница раздела является плоской, сферической, цилиндрической и др. Задачи об отражении электромагнитных волн от плоских границ раздела «вакуум – биизотропная среда», «биизотропная среда 1 – биизотропная среда 2» рассмотрены в работах [35], [36]. В настоящей статье рассматривается задача об отражении электромагнитных волн от сферической границы раздела двух биизотропных сред.

### 1 Задача Ми для биизотропных сред

Теория рассеяния электромагнитных волн на сферически симметричных объектах различной природы, помещенных в ту или иную среду (теория Ми), имеет более чем столетнюю историю [37], по этой проблеме имеется обширная библиография. В качестве путеводителей по этой теории укажем монографии [38]–[40], в которых содержатся десятки ссылок на оригинальные работы. Рассеяние на киральных и других сферически симметричных объектах было рассмотрено в [13]–[15]. Аналогичная задача о рассеянии электромагнитных волн на биизотропном шаре в вакууме решена в [17]. В настоящей работе мы представляем решение более общей граничной задачи о рассеянии плоской монохроматической электромагнитной волны на биизотропном шаре радиуса  $R$ , помещенном в биизотропную среду, параметры которой отличаются от параметров частицы-шара. В определенном смысле такая задача является наиболее общей задачей для двух сред с изотропными свойствами. Как и при решении всякой «наиболее общей» задачи, для

исследований с необходимостью требуется привлечение наиболее эффективного математического аппарата. В ходе решения задач такого рода мы убедились в том, что таким самым мощным средством является квантовомеханическая и квантовоэлектродинамическая теория шаровых векторов  $\bar{Y}_{JM}^L(\bar{n}_r)$  [41], [42]

$$\bar{Y}_{JM}^L(\bar{n}_r) = \sum_{m,\mu} C_{Lm1\mu}^{JM} Y_{Lm}(\bar{n}_r) \bar{e}_\mu, \quad (1.1)$$

где  $Y_{Lm}(\bar{n}_r)$  – сферические гармоники,  $\bar{n}_r = \vec{r}/r$ ,  $C_{Lm1\mu}^{JM}$  – коэффициенты Клебша – Гордана группы трехмерных вращений,  $\bar{e}_\mu$  – циклические орты:

$$\bar{e}_0 = \bar{e}_z, \quad \bar{e}_{\pm 1} = \mp(\bar{e}_x \pm i\bar{e}_y)/\sqrt{2}.$$

Посредством векторов (1.1) удобно определить сферические волны [12]–[15]:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{JM}^{(z)}(k|\vec{r}) = & z_J(kr) \bar{Y}_{JM}^J(\bar{n}_r) - \\ & -iv \left[ a_J z_{J+1}(kr) \bar{Y}_{JM}^{J+1}(\bar{n}_r) - \right. \\ & \left. - b_J z_{J-1}(kr) \bar{Y}_{JM}^{J-1}(\bar{n}_r) \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В выражении (1.2) верхний индекс  $z$  используется для обозначения типа сферических функций  $z_L(\rho)$ . В частности нами применяются сферические функции Бесселя  $z_L(\rho) = j_L(\rho)$ , Неймана  $z_L(\rho) = n_L(\rho)$  или Ханкеля 1-го и 2-го рода  $z_L(\rho) = h_L^{(1,2)}(\rho) = j_L(\rho) \pm in_L(\rho)$ . Коэффициенты  $a_J$  и  $b_J$  в (1.2) определены следующим образом:

$$a_J = \sqrt{J/(2J+1)}, \quad b_J = \sqrt{(J+1)/(2J+1)}.$$

Нетрудно показать, что плоскую монохроматическую циркулярно поляризованную волну можно разложить по сферическим волнам (1.2) следующим образом (множитель  $e^{-i\omega t}$  мы опускаем):

$$\bar{E}_v^n(\vec{r}) = -v\bar{e}_v E_0 \exp(ik_v z) = \sum_{J=1}^{\infty} E_J \bar{F}_{Jv}^{(j)}(k_v|\vec{r}), \quad (1.3)$$

$$E_J = E_0 \sqrt{2\pi(2J+1)} i^J,$$

где  $k_v = (\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + v\alpha)\omega/c$  – волновые числа, соответствующие волнам, распространяющимся в биизотропной среде; индексом  $\nu = \pm 1$  обозначается поляризация волны ( $\nu = 1$  для правоциркулярно поляризованной волны и  $\nu = -1$  для левоциркулярно поляризованной).

Учитывая структуру выражения (1.3), рассеянное и внутреннее поля будем искать в виде разложений:

$$\bar{E}_v^p(\vec{r}) = -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma}^J \bar{F}_{J\sigma}^{(h)}(k_\sigma|\vec{r}), \quad (1.4)$$

$$\bar{E}_v^b(\vec{r}) = \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma}^J \bar{F}_{J\sigma}^{(z)}(k_\sigma|\vec{r}).$$

Здесь  $k_\sigma^1 = (\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \chi_1^2} + \sigma \alpha_1) \omega / c$  – волновые числа для внутренних волн (волн в биизотропном шаре),  $f_{\sigma\nu}^j$  и  $g_{\sigma\nu}^j$  – искомые коэффициенты разложения полей рассеянной и внутренней волн соответственно; индексом  $\sigma$  отмечено состояние поляризации рассеянной и внутренней волн ( $\sigma = \pm 1$ ). В силу ортонормированности и линейной независимости системы шаровых векторов на сфере в формулах (1.4) фигурируют шаровые векторы  $\bar{Y}_{JM}^L(\bar{n}_r)$  только с  $M = \nu$ . Для рассеянной волны используются сферические функции Ханкеля первого рода  $h_L^{(1)}(\rho)$ , имеющие правильную асимптотику («расходящаяся волна») на бесконечности. Удобно сферические функции Бесселя для внутренних волн обозначать  $z_L(\rho) \equiv j_L(\rho)$ .

Используя уравнения Максвелла и материальные уравнения (0.1) для биизотропной среды, можно найти напряженности магнитных полей, соответствующих этим волнам:

$$\begin{aligned} \bar{H}_\nu^n(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J b_\nu \bar{F}_{J\nu\nu}^{(j)}(k_\nu | \bar{r}), \\ \bar{H}_\nu^p(\bar{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^J b_\sigma \bar{F}_{J\sigma\nu}^{(h)}(k_\sigma | \bar{r}), \\ \bar{H}_\nu^b(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma\nu}^J b_\sigma^1 \bar{F}_{J\sigma\nu}^{(z)}(k_\sigma^1 | \bar{r}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} b_\sigma &= \frac{1}{\mu} (\chi + i\sigma \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}), \\ b_\sigma^1 &= \frac{1}{\mu_1} (\chi_1 + i\sigma \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \chi_1^2}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих результирующих электрического и магнитного полей на границе раздела двух сред (сфера радиуса  $R$ ). Математически это требование может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} [\bar{n}, \bar{E}_\nu^n + \bar{E}_\nu^p - \bar{E}_\nu^b]_{r=R} &= 0, \\ [\bar{n}, \bar{H}_\nu^n + \bar{H}_\nu^p - \bar{H}_\nu^b]_{r=R} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Проецируя векторы, содержащиеся в (1.7), на оси локальной системы координат  $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$  [41], получим систему уравнений

$$\begin{cases} E_\theta^n + E_\theta^p - E_\theta^b = 0 \\ E_\varphi^n + E_\varphi^p - E_\varphi^b = 0 \\ H_\theta^n + H_\theta^p - H_\theta^b = 0 \\ H_\varphi^n + H_\varphi^p - H_\varphi^b = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Для удобства применения граничных условий выразим функции  $\bar{F}_{J\nu M}^{(z)}(k | \bar{r})$  через векторы  $\bar{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$  ( $\lambda = 0, \pm 1$ ), используя их связь с

шаровыми векторами  $\bar{Y}_{JM}^L(\theta, \varphi)$  [41]:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{JM}^{J+1}(\theta, \varphi) &= a_J \bar{Y}_{JM}^{(1)}(\theta, \varphi) - b_J \bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\theta, \varphi), \\ \bar{Y}_{JM}^J(\theta, \varphi) &= \bar{Y}_{JM}^{(0)}(\theta, \varphi), \\ \bar{Y}_{JM}^{J-1}(\theta, \varphi) &= b_J \bar{Y}_{JM}^{(1)}(\theta, \varphi) + a_J \bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя формулы (1.9) в выражение для сферических электромагнитных волн (1.2), а также используя рекуррентные соотношения для сферических функций:

$$z_{n-1}(\rho) + z_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho} z_n(\rho), \quad (1.10)$$

$$(2n+1) \frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = n z_{n-1}(\rho) - (n+1) z_{n+1}(\rho),$$

получим следующее выражение для функций  $\bar{F}_{J\nu M}^{(z)}(k | \bar{r})$ :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{J\nu M}^{(z)}(k | \bar{r}) &= z_J(kr) \bar{Y}_{JM}^{(0)}(\bar{n}_r) + \\ &+ \frac{i\nu}{kr} \hat{z}'_J(kr) \bar{Y}_{JM}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &+ i\nu a_J b_J \frac{2J+1}{kr} z_J(kr) \bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\bar{n}_r). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь использовано обозначение  $\hat{z}_L(\rho) = \rho z_L(\rho)$  для функций Риккати – Бесселя, Риккати – Неймана и Риккати – Ханкеля, а штрихом обозначено дифференцирование по соответствующему аргументу.

Подставляя выражение (1.11) в формулы (1.3)–(1.4), получим выражения для напряженностей электрического поля падающей, рассеянной и внутренней волн:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\nu^n(\bar{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \left\{ j_J(k_\nu r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &+ \frac{i\nu}{k_\nu r} \hat{j}'_J(k_\nu r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &\left. + i\nu a_J b_J \frac{2J+1}{k_\nu r} j_J(k_\nu r) \bar{Y}_{J\nu}^{(-1)}(\bar{n}_r) \right\}, \\ \bar{E}_\nu^p(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^J \left\{ h_J^{(1)}(k_\sigma r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &+ \frac{i\sigma}{k_\sigma r} \hat{h}'_J^{(1)}(k_\sigma r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &\left. + i\sigma a_J b_J \frac{2J+1}{k_\sigma r} h_J^{(1)}(k_\sigma r) \bar{Y}_{J\nu}^{(-1)}(\bar{n}_r) \right\}, \\ \bar{E}_\nu^b(\bar{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma\nu}^J \left\{ z_J(k_\sigma^1 r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &+ \frac{i\sigma}{k_\sigma^1 r} \hat{z}'_J(k_\sigma^1 r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &\left. + i\sigma a_J b_J \frac{2J+1}{k_\sigma^1 r} z_J(k_\sigma^1 r) \bar{Y}_{J\nu}^{(-1)}(\bar{n}_r) \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующие напряженности магнитного поля запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \bar{H}_v^n(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J b_v \left\{ j_J(k_v r) \bar{Y}_{Jv}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{iv}{k_v r} \hat{j}'_J(k_v r) \bar{Y}_{Jv}^{(1)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + i\nu a_J b_J \frac{2J+1}{k_v r} j_J(k_v r) \bar{Y}_{Jv}^{(-1)}(\bar{n}_r) \right\}, \\ \bar{H}_v^p(\bar{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma v}^J b_{\sigma} \left\{ h_J^{(1)}(k_{\sigma} r) \bar{Y}_{Jv}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sigma}{k_{\sigma} r} \hat{h}'_J(k_{\sigma} r) \bar{Y}_{Jv}^{(1)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + i\sigma a_J b_J \frac{2J+1}{k_{\sigma} r} h_J^{(1)}(k_{\sigma} r) \bar{Y}_{Jv}^{(-1)}(\bar{n}_r) \right\}, \\ \bar{H}_v^b(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma v}^J b_{\sigma}^1 \left\{ z_J(k_{\sigma}^1 r) \bar{Y}_{Jv}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sigma}{k_{\sigma}^1 r} \hat{z}'_J(k_{\sigma}^1 r) \bar{Y}_{Jv}^{(1)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + i\sigma a_J b_J \frac{2J+1}{k_{\sigma}^1 r} z_J(k_{\sigma}^1 r) \bar{Y}_{Jv}^{(-1)}(\bar{n}_r) \right\}. \end{aligned}$$

С учетом того факта, что вектор  $\bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\bar{n}_r)$  не имеет тангенциальной составляющей, из граничных условий (1.8) следует алгебраическая система уравнений для определения коэффициентов рассеянного и внутреннего полей в условиях, соответствующих рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^J h_J^{(1)}(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^J z_J(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= j_J(k_v R); \\ \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^J \frac{\sigma}{k_{\sigma}} \hat{h}'_J(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^J \frac{\sigma}{k_{\sigma}^1} \hat{z}'_J(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= \frac{\nu}{k_v} \hat{j}'_J(k_v R); \\ \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^J b_{\sigma} h_J^{(1)}(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^J b_{\sigma}^1 z_J(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= b_v j_J(k_v R); \\ \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^J b_{\sigma} \frac{\sigma}{k_{\sigma}} \hat{h}'_J(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^J b_{\sigma}^1 \frac{\sigma}{k_{\sigma}^1} \hat{z}'_J(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= b_v \frac{\nu}{k_v} \hat{j}'_J(k_v R). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Эту систему целесообразно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_J^{(1)}(k_{+1} R) & \hat{h}_J^{(1)}(k_{-1} R) & \hat{z}_J(k_{+1} R) & \hat{z}_J(k_{-1} R) \\ \hat{h}_J^{(1)'}(k_{+1} R) & -\hat{h}_J^{(1)'}(k_{-1} R) & \hat{z}'_J(k_{+1} R) & -\hat{z}'_J(k_{-1} R) \\ b_{+1} \hat{h}_J^{(1)}(k_{+1} R) & b_{-1} \hat{h}_J^{(1)}(k_{-1} R) & b_{+1}^1 \hat{z}_J(k_{+1} R) & b_{-1}^1 \hat{z}_J(k_{-1} R) \\ b_{+1} \hat{h}_J^{(1)'}(k_{+1} R) & -b_{-1} \hat{h}_J^{(1)'}(k_{-1} R) & b_{+1}^1 \hat{z}'_J(k_{+1} R) & -b_{-1}^1 \hat{z}'_J(k_{-1} R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{+1v}^J/k_{+1} \\ f_{-1v}^J/k_{-1} \\ g_{+1v}^J/k_{+1}^1 \\ g_{-1v}^J/k_{-1}^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k_v} \begin{bmatrix} \hat{j}_J(k_v R) \\ \nu \hat{j}'_J(k_v R) \\ b_v \hat{j}_J(k_v R) \\ \nu b_v \hat{j}'_J(k_v R) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Решения системы (1.13), то есть коэффициенты  $f_{\sigma v}^J$  и  $g_{\sigma v}^J$ , можно найти по правилам:

$$f_{\sigma v}^J = \frac{k_{\sigma}}{k_v} \frac{\Delta_{\sigma v}^f}{\Delta}; \quad g_{\sigma v}^J = \frac{k_{\sigma}^1}{k_v} \frac{\Delta_{\sigma v}^g}{\Delta}, \quad (1.14)$$

где  $\Delta$  – главный определитель системы,  $\Delta_{\sigma v}^f$ ,  $\Delta_{\sigma v}^g$  – характеристические определители. Проводя их вычисления с учетом хорошо известных свойств определителей, находим для  $\Delta$  выражение

$$\begin{aligned} \Delta &= [b_{+1} b_{-1} + b_{+1}^1 b_{-1}^1] \Pi(\hat{h}_+ \hat{h}_-) \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) + \\ &+ [b_{+1} b_{+1}^1 + b_{-1} b_{-1}^1] W(\hat{h}_+ \hat{z}_+) W(\hat{h}_- \hat{z}_-) - \\ &- [b_{+1} b_{-1}^1 + b_{-1} b_{+1}^1] \Pi(\hat{h}_+ \hat{z}_+) \Pi(\hat{h}_- \hat{z}_-). \end{aligned} \quad (1.15)$$

При записи определителей мы используем обозначения

$$W(y_1 y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

$$\Pi(y_1 y_2) = y_1 y_2' + y_1' y_2,$$

и сокращенные обозначения функций

$$\hat{j}_v = \hat{j}_J(k_v R),$$

$$\hat{h}_{\sigma} = \hat{h}_J^{(1)}(k_{\sigma} R),$$

$$\hat{z}_{\sigma} = \hat{z}_J(k_{\sigma}^1 R).$$

При вычислении характеристических определителей  $\Delta_{\sigma v}^f$  и  $\Delta_{\sigma v}^g$ , получаем выражения:

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma v}^f &= [b_v b_{-\sigma} + b_{+1}^1 b_{-1}^1] \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) (\hat{j}_v \hat{h}'_{-\sigma} + \nu \sigma \hat{j}'_v \hat{h}_{-\sigma}) + \\ &+ [b_{-\sigma} b_{-\sigma}^1 + b_v b_{+1}^1] W(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{z}'_{-\sigma} - \nu \sigma \hat{j}'_v \hat{z}_{-\sigma}) - \\ &- [b_{-\sigma} b_{\sigma}^1 + b_v b_{-\sigma}^1] \Pi(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{z}'_{-\sigma} + \nu \sigma \hat{j}'_v \hat{z}_{-\sigma}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma v}^g &= [b_v b_{-\sigma}^1 + b_{+1} b_{-1}] \Pi(\hat{h}_+ \hat{h}_-) (\hat{j}_v \hat{z}'_{-\sigma} + \nu \sigma \hat{j}'_v \hat{z}_{-\sigma}) - \\ &- [b_v b_{\sigma} + b_{-\sigma} b_{-\sigma}^1] W(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{h}'_{-\sigma} - \nu \sigma \hat{j}'_v \hat{h}_{-\sigma}) - \\ &- [b_v b_{-\sigma} + b_{\sigma} b_{-\sigma}^1] \Pi(\hat{h}_{\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{h}'_{-\sigma} + \nu \sigma \hat{j}'_v \hat{h}_{-\sigma}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Формулы (1.14)–(1.17) в совокупности составляют ответ к задаче о нахождении коэффициентов разложения рассеянного и внутреннего полей (1.4), (1.5).

Проиллюстрируем полученные аналитические результаты точного решения задачи Ми для биизотропных сред с применением результатов численных расчетов. На рисунках 1–8 приведены зависимости вещественных и мнимых частей коэффициентов  $f_{\sigma v}^J$  и  $g_{\sigma v}^J$  от отношения  $R/\lambda$

для различных значений  $J$  ( $J=1; 3; 6$ ) и всех возможных вариантов значений поляризационных индексов  $\sigma$  и  $\nu$ .

Необходимость большого числа иллюстраций обусловлена очень большим количеством параметров задачи: 8 материальных постоянных, 4 значения пары поляризационных индексов  $(\sigma, \nu)$ , отношение  $R/\lambda$ , индекс  $J$ , значением которого определяется полный момент сферической волны. Чтобы систематизировать графики, мы на каждом из рисунков 1–4 представляем значения величин  $\text{Re} f_{\sigma\nu}^J$  и  $\text{Im} f_{\sigma\nu}^J$  при одних и тех же значениях пары поляризационных индексов  $(\sigma, \nu)$ . Аналогично на каждом из рисунков 5–8 представлены значения величин  $\text{Re} g_{\sigma\nu}^J$  и  $\text{Im} g_{\sigma\nu}^J$  при одних и тех же значениях пары индексов  $(\sigma, \nu)$ . Таким образом, в пределах каждого рисунка постоянны поляризационные индексы  $\sigma$  и  $\nu$ .

На всех восьми рисунках установлено соответствие: а)  $J=1$ ; б)  $J=3$ ; в)  $J=6$ ; указанные значения полного момента выбраны для примера. При этом на левых (правых) рисунках изображается функциональная зависимость вещественной (мнимой) части, соответствующей функции  $f$  или  $g$  от параметра  $R/\lambda$ . На каждом из рисунков кривым, пронумерованным цифрами 1–4, соответствует следующий выбор значений материальных постоянных (одинаковый для всех рисунков):

- 1)  $\alpha = 0,1, \chi = 0,1, \alpha_1 = 0,1, \chi_1 = 0,2$ ;
- 2)  $\alpha = 0,1, \chi = 0,2, \alpha_1 = 0,3, \chi_1 = 0,3$ ;
- 3)  $\alpha = 0,3, \chi = 0,4, \alpha_1 = 0,4, \chi_1 = 0,5$ ;
- 4)  $\alpha = 0,4, \chi = 0,5, \alpha_1 = 0,2, \chi_1 = 0,1$ .

Так как число варьируемых параметров велико, диэлектрические и магнитные проницаемости двух биизотропных сред в численных расчётах были фиксированы и взяты следующими:  $\varepsilon = 3, \mu = 1,01$  и  $\varepsilon_1 = 4, \mu_1 = 1,05$ .

В ходе анализа зависимостей типа приведённых на рисунках 1–8 и рассчитанных при других значениях параметров выяснилось, что при отличных от нуля значениях параметров не взаимности ( $\chi \neq 0; \chi_1 \neq 0$ ) ни одна из кривых не может быть воспроизведена ни при каких (изменённых) значениях других материальных параметров  $\varepsilon; \mu; \alpha; \varepsilon_1; \mu_1; \alpha_1$ , что противоречит предположениям авторов работ [22], [23], [32]–[34]. Другими словами, параметры не взаимности  $\chi$  и  $\chi_1$  не могут быть исключены из соотношений теории рассеяния электромагнитных волн на сферических биизотропных частицах в биизотропной среде ни при каком наборе значений других материальных параметров.

## 2 Некоторые частные варианты решения задачи Ми для биизотропных сред

В целях проверки полученных результатов рассмотрим два частных случая. В первом из них, когда параметры биизотропных сред (внешней среды и материала частицы-шара) совпадают, имеем:  $b_\sigma = b_\sigma^1$  и  $k_\sigma = k_\sigma^1$ . При этом для коэффициентов рассеянного и внутреннего полей получаем  $f_{\sigma\nu}^J = 0, g_{\sigma\nu}^J = \delta_{\sigma\nu}$ , где  $\delta_{\sigma\nu}$  – символ Кронекера. Таким образом, в данной ситуации рассеянная волна отсутствует, а внутренняя волна полностью совпадает с волной падающей, как и должно быть.

В качестве второго теста на правильность полученных формул рассмотрим ситуацию, в которой и внешняя среда и частица-шар являются взаимными гиротропными; при этом  $\chi = 0; \chi_1 = 0$  и

$$b_\sigma = i\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}; \quad b_\sigma^1 = i\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}},$$

а определители (1.15)–(1.17) и выражения (1.14) для коэффициентов  $f_{\sigma\nu}^J$  и  $g_{\sigma\nu}^J$  упрощаются. При рассмотрении случая двух взаимных гиротропных сред для главного определителя (1.15) получаем выражение:

$$\Delta = \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) \left[ (1+\delta)^2 W(\hat{h}_+ \hat{z}_-) W(\hat{h}_+ \hat{z}_+) - (1-\delta)^2 \Pi(\hat{h}_+ \hat{z}_-) \Pi(\hat{h}_+ \hat{z}_+) \right], \quad (2.1)$$

где  $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu}{\mu_1 \varepsilon}}$ .

Аналогично упрощаются и характеристические определители:

$$\Delta_{\sigma\nu}^f = \begin{cases} \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) \left[ (1+\delta)^2 W(\hat{h}_- \hat{z}_-) W(\hat{j}_\nu \hat{z}_-) - (1-\delta)^2 \Pi(\hat{h}_- \hat{z}_-) \Pi(\hat{j}_\nu \hat{z}_-) \right]; \sigma = \nu; \\ \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) (1-\delta^2) \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) W(\hat{j}_\nu \hat{h}_\nu); \sigma \neq \nu, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\Delta_{\sigma\nu}^g = \begin{cases} \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) 2(1+\delta) W(\hat{h}_- \hat{z}_-) W(\hat{h}_\nu \hat{j}_\nu); \sigma = \nu; \\ \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) 2(1-\delta) \Pi(\hat{h}_\sigma \hat{z}_\nu) W(\hat{h}_\nu \hat{j}_\nu); \sigma \neq \nu. \end{cases} \quad (2.3)$$

Таким образом, формулы (2.1)–(2.3), полученные как частный случай выражений (1.14)–(1.17), полностью совпадают с результатами, полученными ранее в работе [14].

Сравнивая формулы (2.1)–(2.3) с общими формулами (1.14)–(1.17), и учитывая результаты сравнения графиков, можно ответить на один из главных вопросов дискуссии, упомянутой во введении – вопрос о распознаваемом существовании биизотропных сред.

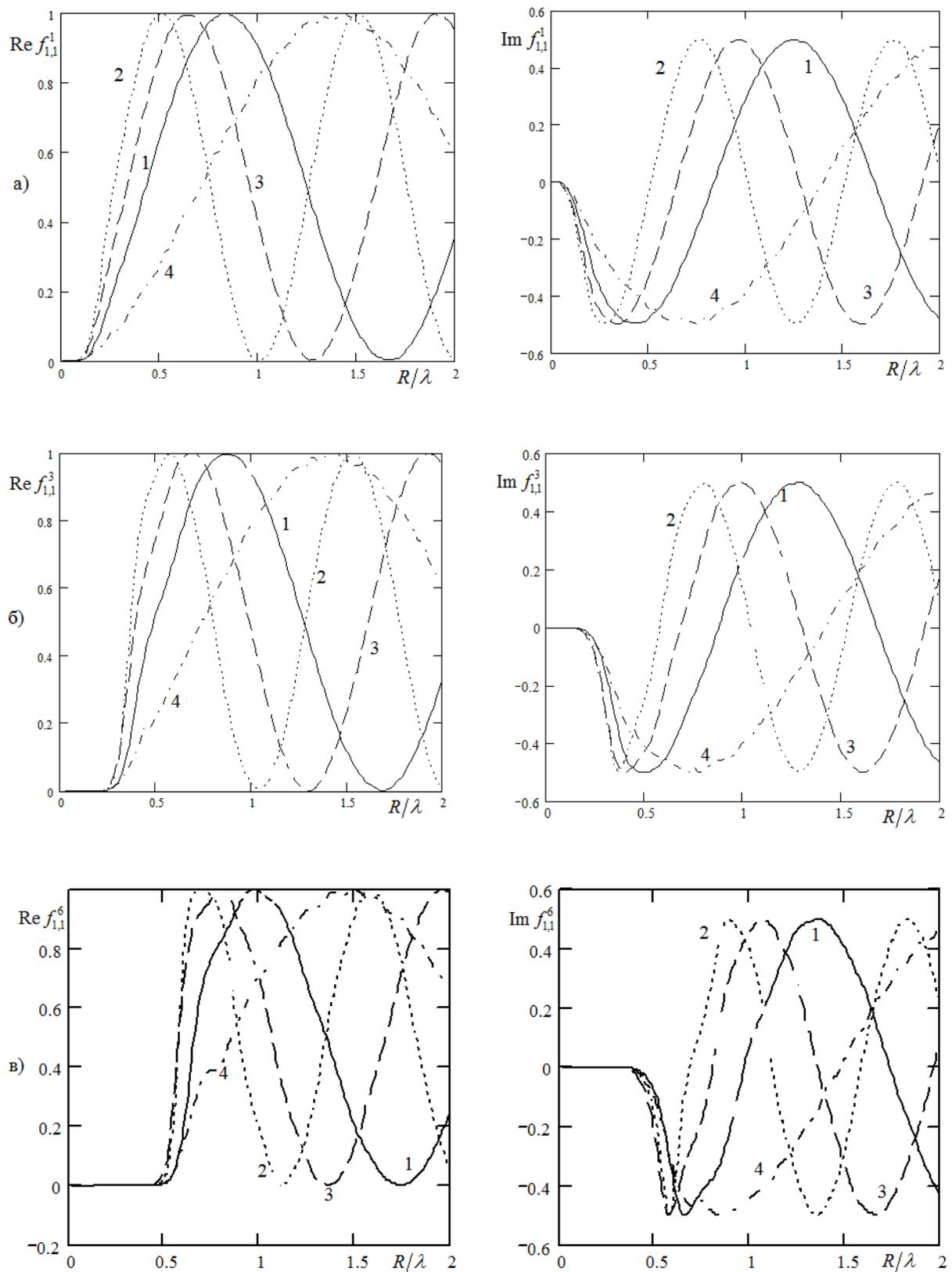


Рисунок 1 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $f_{1,1}^j$  от  $R/\lambda$ :

а)  $f_{1,1}^1$ , б)  $f_{1,1}^3$ , в)  $f_{1,1}^6$

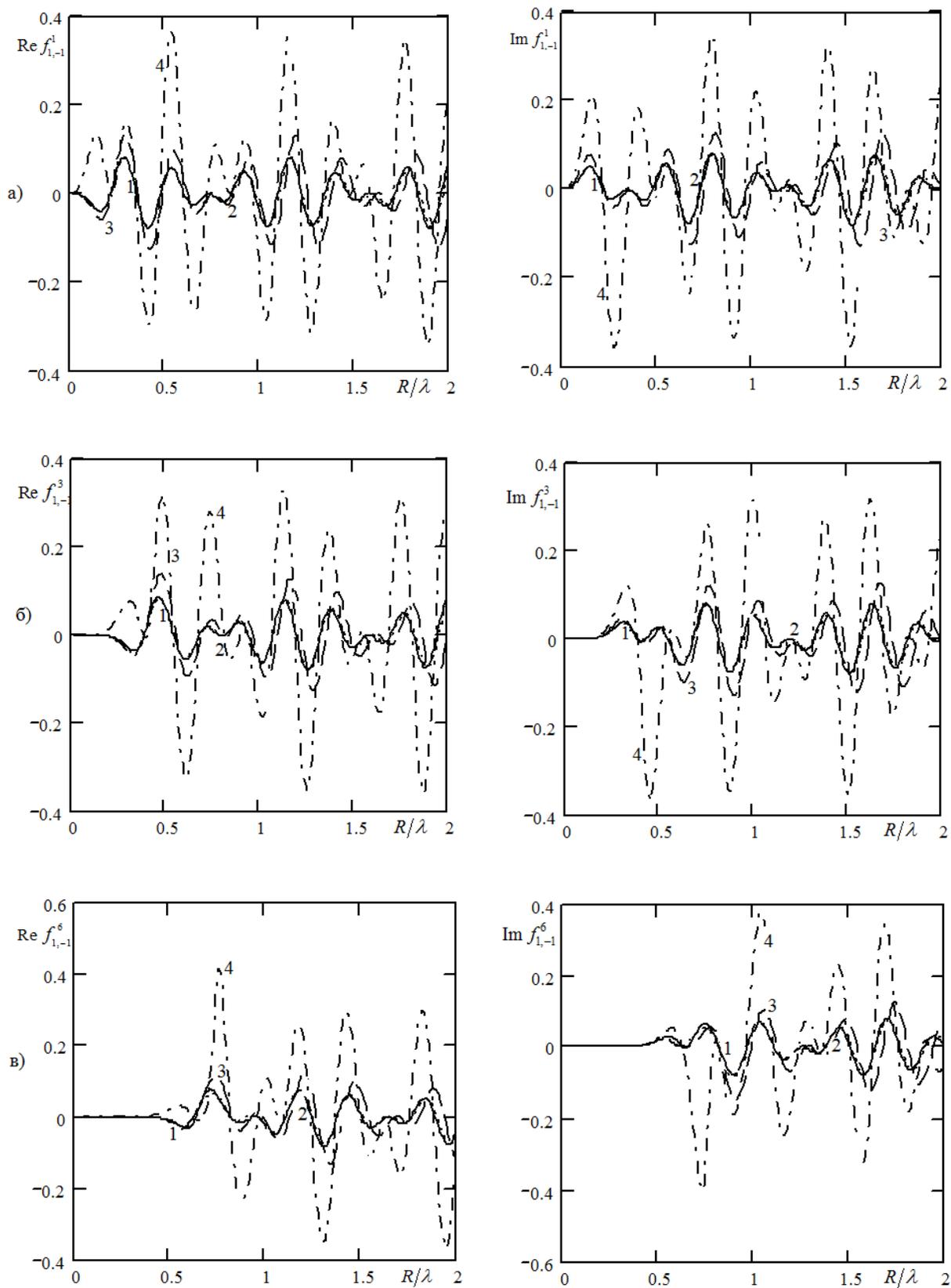


Рисунок 2 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $f_{l-1}^l$  от  $R/\lambda$ :

а)  $f_{1-1}^1$ , б)  $f_{1-1}^3$ , в)  $f_{1-1}^6$

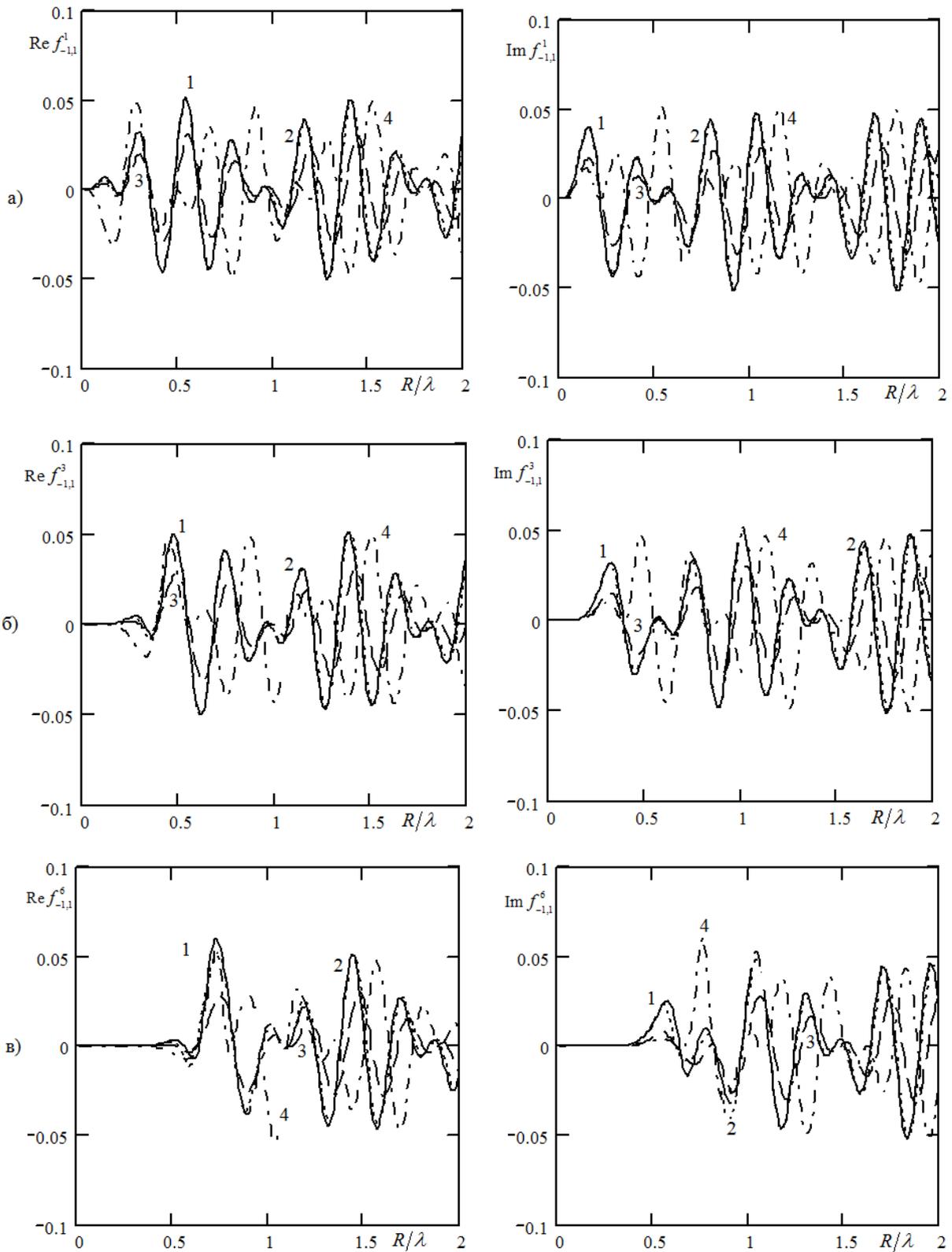


Рисунок 3 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $f_{-1,1}^j$  от  $R/\lambda$  :

а)  $f_{-1,1}^1$ , б)  $f_{-1,1}^3$ , в)  $f_{-1,1}^6$

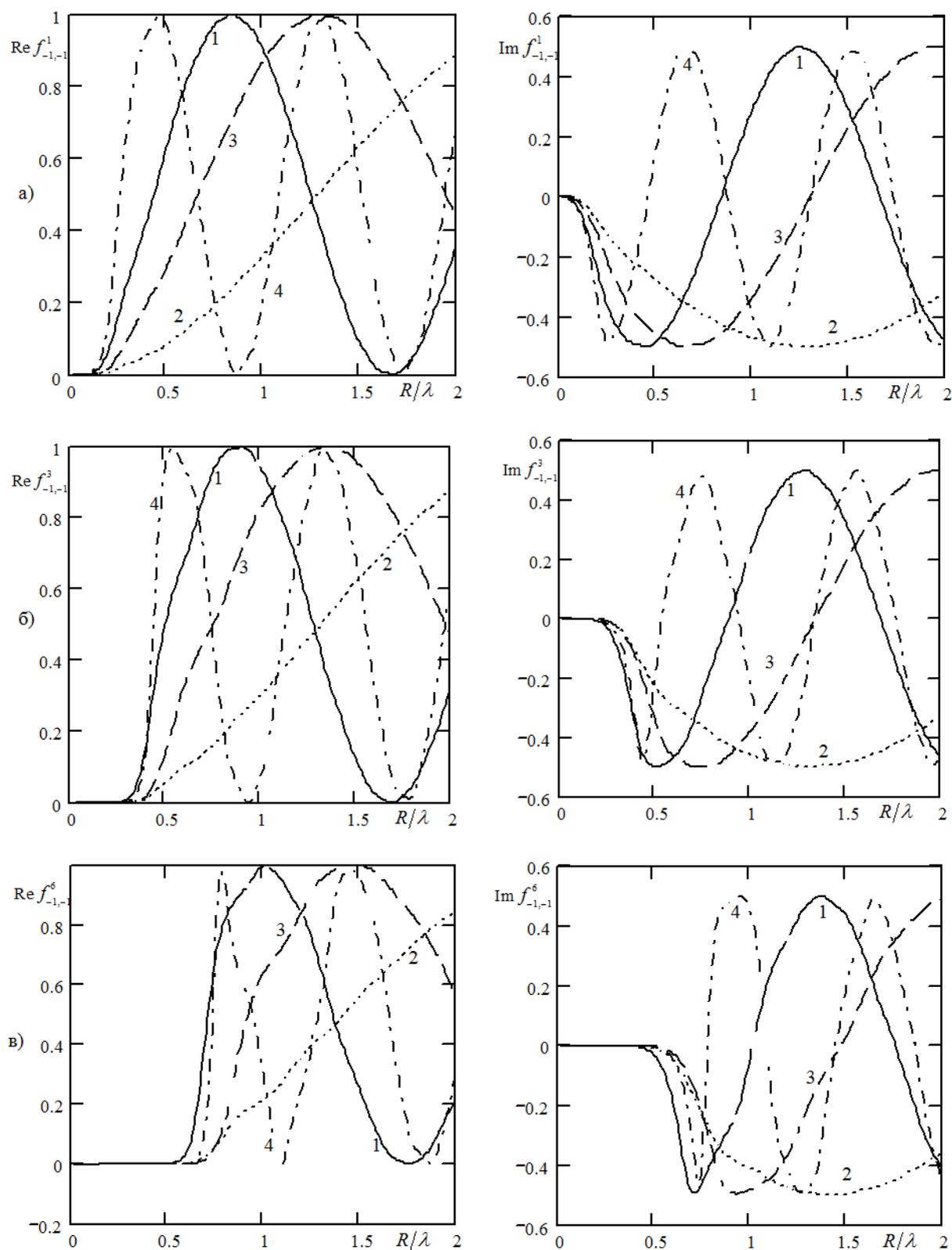


Рисунок 4 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $f_{-1,-1}^l$  от  $R/\lambda$ :

а)  $f_{-1,-1}^1$ , б)  $f_{-1,-1}^3$ , в)  $f_{-1,-1}^6$

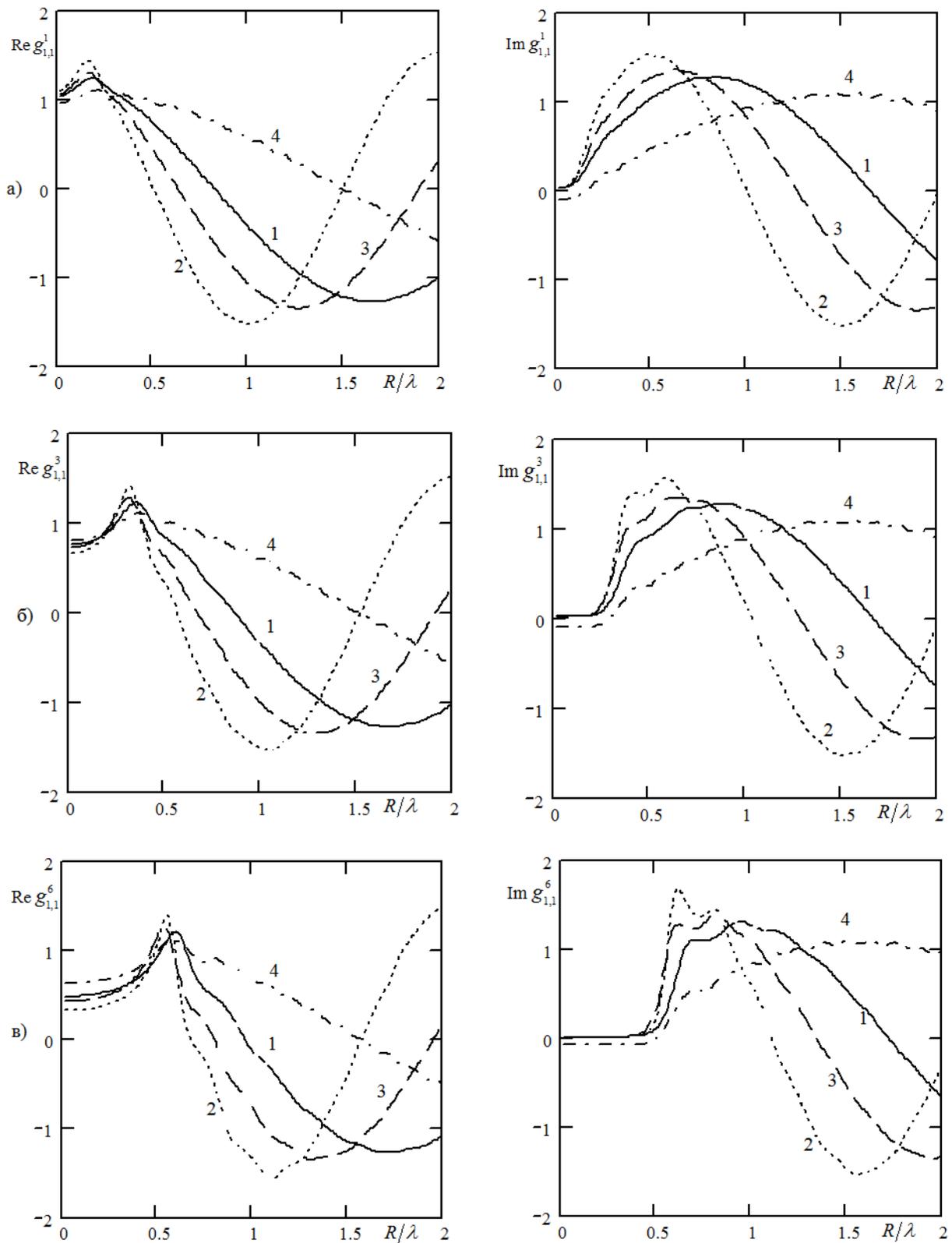


Рисунок 5 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $g_{1,1}^j$  от  $R/\lambda$ :

а)  $g_{1,1}^1$ , б)  $g_{1,1}^3$ , в)  $g_{1,1}^6$

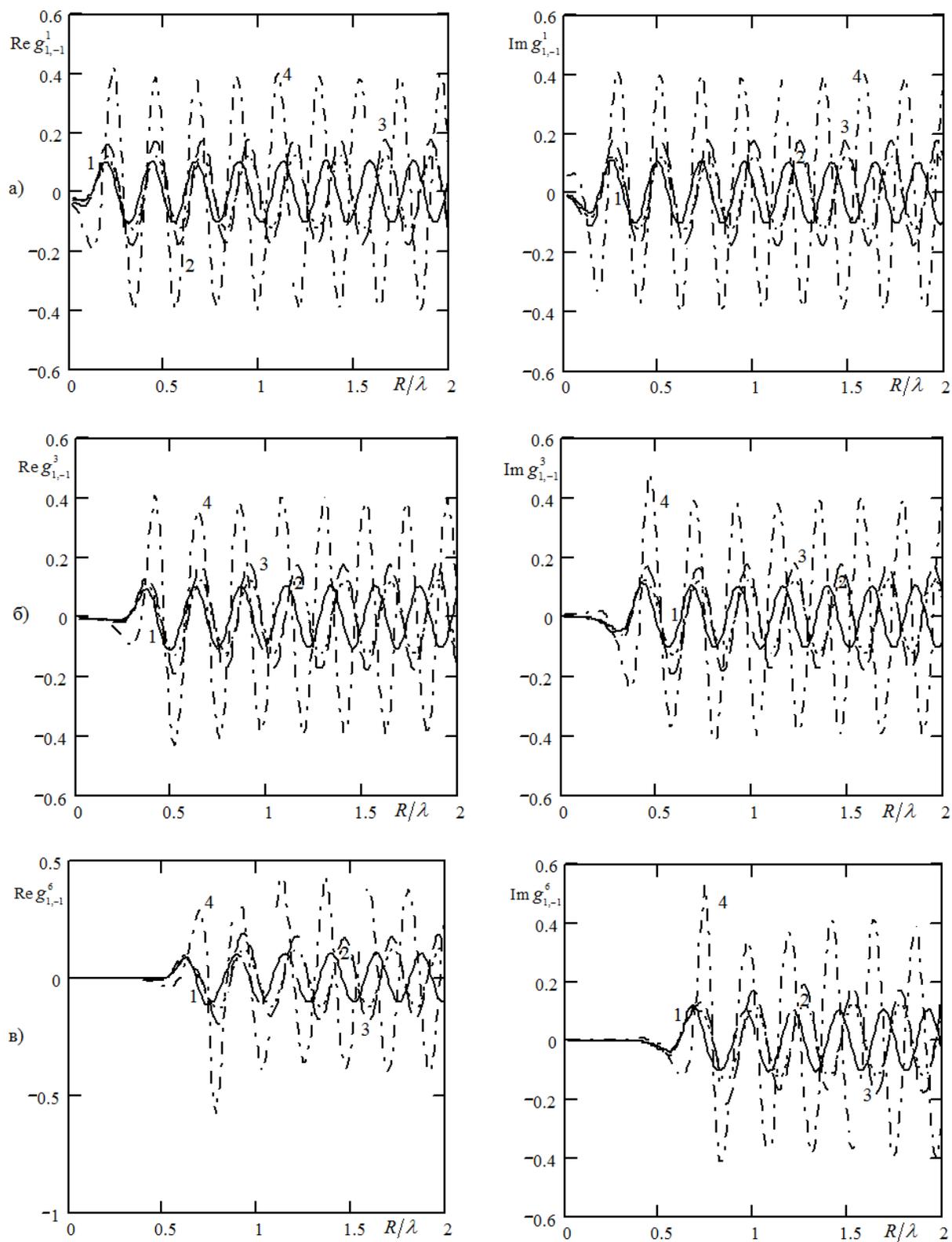


Рисунок 6 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $g_{1,-1}^j$  от  $R/\lambda$ :

а)  $g_{1,-1}^1$ , б)  $g_{1,-1}^3$ , в)  $g_{1,-1}^6$

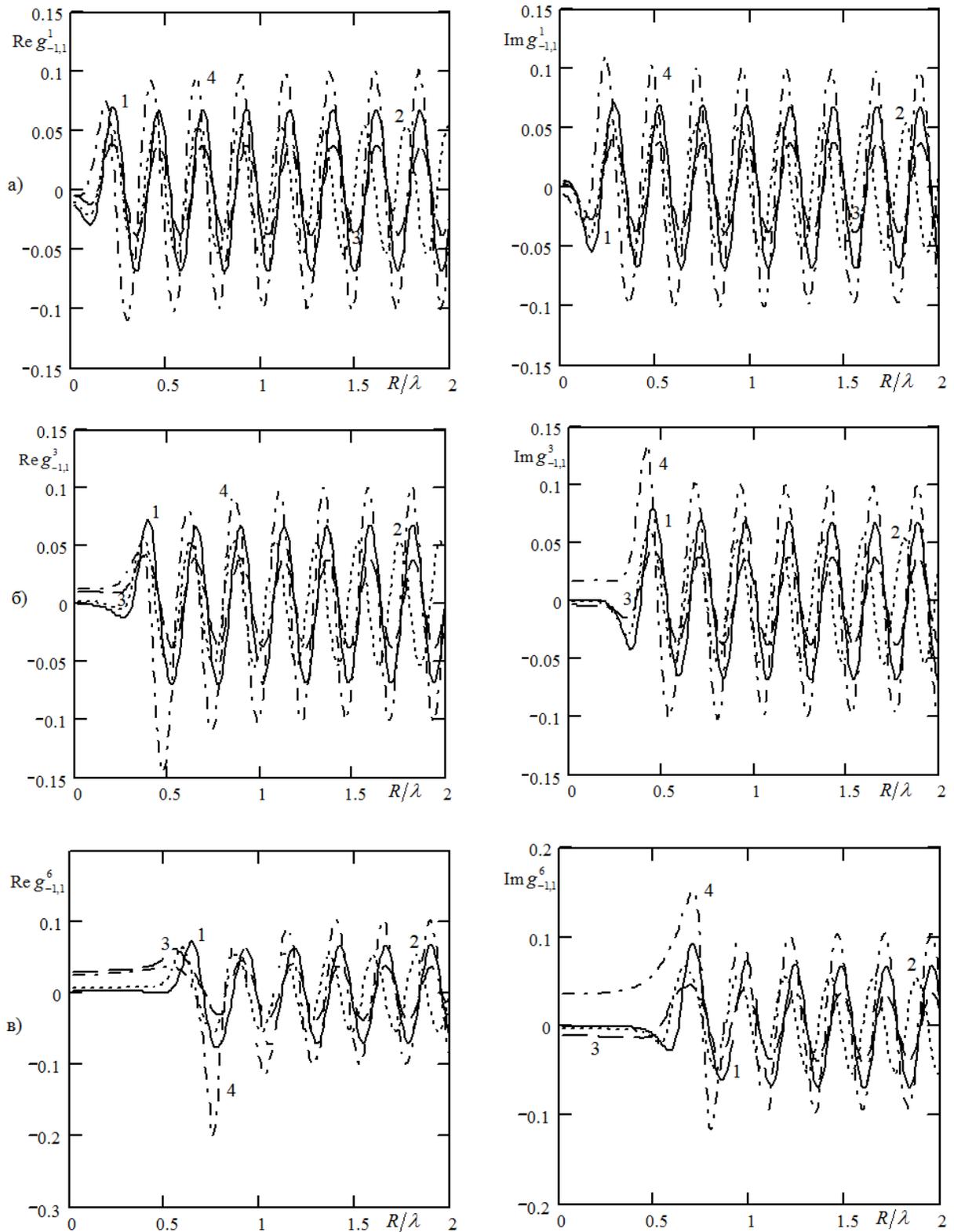


Рисунок 7 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $g_{-1,1}^j$  от  $R/\lambda$ :

а)  $g_{-1,1}^1$ , б)  $g_{-1,1}^3$ , в)  $g_{-1,1}^6$

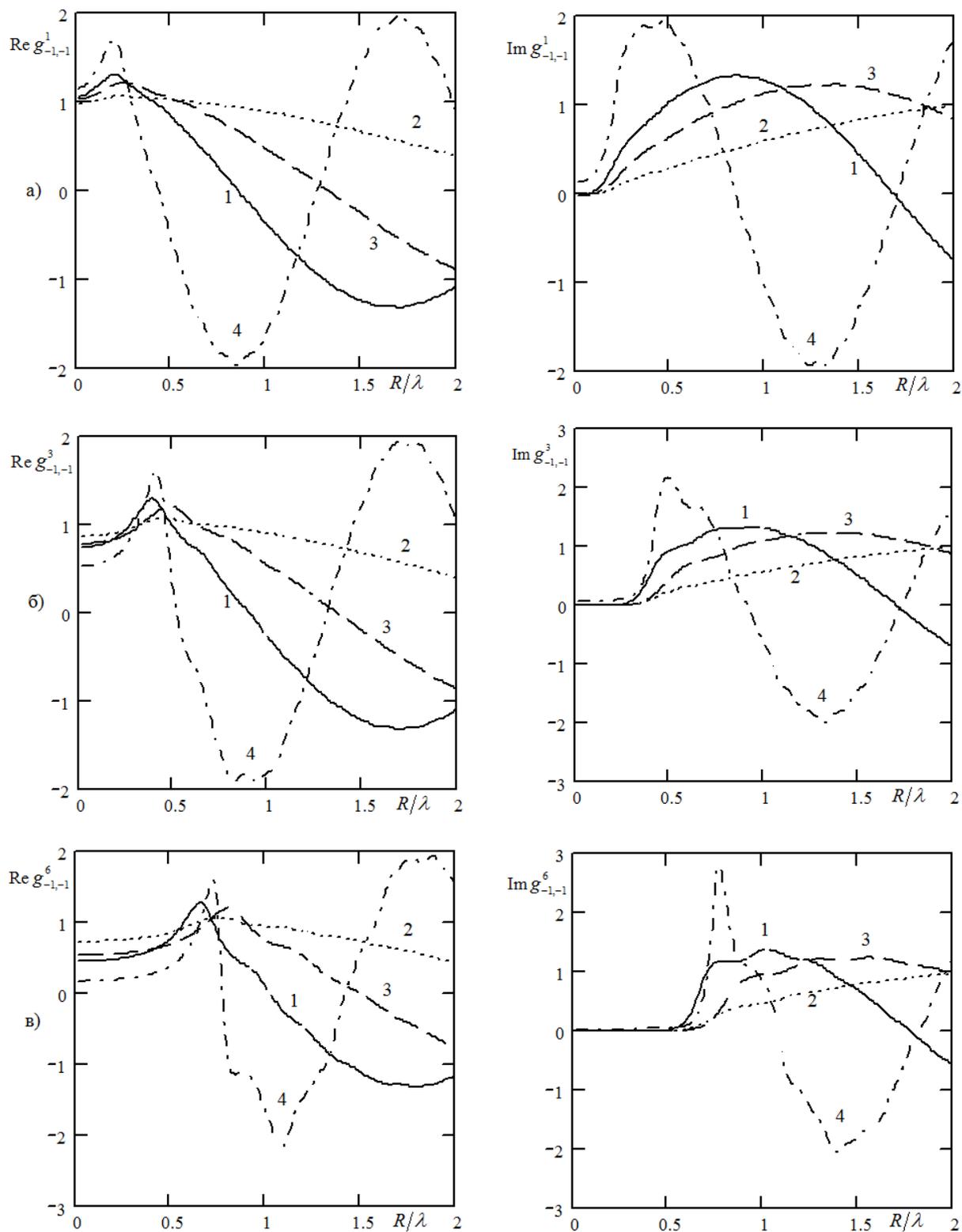


Рисунок 8 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов  $g_{-1,-1}^j$  от  $R/\lambda$ :

а)  $g_{-1,-1}^1$ , б)  $g_{-1,-1}^3$ , в)  $g_{-1,-1}^6$

Совершенно ясно, что никаким изменением параметров  $\varepsilon; \mu; \alpha; \varepsilon_1; \mu_1; \alpha_1$ , входящих в аргументы сферических функций Бесселя и Ханкеля в формулах (2.1)–(2.3) при  $\chi = 0$ ,  $\chi_1 = 0$ , невозможно воспроизвести более сложные формулы (1.14)–(1.17), содержащие ненулевые значения параметров невязимности.

Из наших выражений (1.14)–(1.17) легко также получить ответы для задачи Ми и в других частных случаях, например, для задач о рассеянии электромагнитной волны на биизотропном шаре, находящемся в вакууме, диэлектрике или среде Теллгена, или о рассеянии на находящемся в биизотропной среде диэлектрическом или гиротропном шаре, на вакуумной полости или на шаре Теллгена в биизотропной среде и в других условиях.

### Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи Ми о рассеянии плоских электромагнитных волн на биизотропном шаре, находящемся в биизотропной среде, характеризующейся другими материальными параметрами. Полученные аналитические выражения проиллюстрированы графически с использованием результатов численного расчета коэффициентов  $f_{\sigma\nu}^J$  и  $g_{\sigma\nu}^J$  рассеянной и внутренней волн. В результате анализа зависимостей указанных коэффициентов от отношения  $R/\lambda$  при различных отличных от нуля значениях параметров невязимности  $\chi$  и  $\chi_1$  доказано, что эти зависимости нельзя воспроизвести пользуясь при расчете формулами, в которых параметры невязимности приняты равными нулю, ни при каких вариантах сочетания значений других материальных параметров. Это и означает, что биизотропные среды – распознаваемы; они принципиально, а не только значениями параметров  $\varepsilon; \mu; \alpha$  отличаются от взаимных киральных сред.

В частных условиях при которых (невязимные) биизотропные среды трансформируются во (взаимные) гиротропные среды результаты данной работы совпадают с полученными ранее в [14]. Физически правильное заключение об оптической однородности среды следует из полученных формул и при совпадении параметров граничащих сред.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Sihvola, A.H.* Bi-isotropic constitutive relations / A.H. Sihvola, I.V. Lindell // *Microwave and Opt. Technol. Lett.* – 1991. – Vol. 4, № 8. – P. 295–297.
2. *Monzon, J.C.* Radiation and scattering in homogeneous general biisotropic regions / J.C. Monzon // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* – 1990. – Vol. 38, № 2. – P. 227–235.
3. *Lindell, I.V.* Plane-wave reflection from a bi-isotropic (non-reciprocal chiral) interface / I.V. Lindell, A.H. Sihvola, A.J. Viitanen // *Microwave and Opt. Technol. Lett.* – 1992. – Vol. 5, № 2. – P. 79–81.
4. *Sihvola, A.H.* Electromagnetic modeling of bi-isotropic media / A.H. Sihvola // *Progress In Electromagnetics Research (PIER).* – 1994. – Vol. 9. – P. 45–86.
5. *Semchenko, I.V.* Research on chiral and bi-anisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // *Progress in Electromagnetics Research (PIER).* – 1996. – Vol. 12. – P. 335–370.
6. *Bolioli, S.* Advances in Complex Electromagnetic Materials / S. Bolioli. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands. – 1997. – P. 33–51.
7. *Sihvola, A.* Comments on boundary problems and electromagnetic constitutive parameters / A. Sihvola, S. Tretyakov // *Optik.* – 2008. – Vol. 120. – P. 247–249.
8. *Obukhov, Y.N.* On the boundary-value problems and the validity of the Post constraint in the modern electromagnetism / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // *Optik.* – 2009. – Vol. 120. – P. 418–421.
9. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.
10. *Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications* / A. Serdyukov [et al.]. – Overseas Publishers Association, 2001. – 400 p.
11. *Сферические электромагнитные волны и квантовая теория электромагнитного поля в естественно гиротропной среде* / А.А. Афонин [и др.] // *Журнал прикладной спектроскопии.* – 1986. – Т. 45, № 2. – С. 307–312.
12. *Годлевская, А.Н.* Сферические электромагнитные волны в естественно гиротропных средах / А.Н. Годлевская, В.А. Карпенко, А.Н. Сердюков // *Опт. и спектр.* – 1985. – Т. 59, № 6. – С. 1262–1265.
13. *Годлевская, А.Н.* Рассеяние электромагнитных волн на металлической сфере в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // *ДАН БССР.* – 1989. – Т. 33, № 4. – С. 332–335.
14. *Годлевская, А.Н.* Рассеяние электромагнитных волн на сферически симметричных частицах в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // *Опт. и спектр.* – 1990. – Т. 68, № 1. – С. 122–127.
15. *Рассеяние электромагнитных волн на двуслойной шаровой частице в естественно гиротропной среде* / А.А. Афонин [и др.] // *Опт. и спектр.* – 1990. – Т. 69, В. 2. – С. 406–411.
16. *Третьяков, С.Я.* Электромагнитные волны в прямоугольных волноводах, заполненных биизотропной (невязимной киральной) средой / С.Я. Третьяков // *Радиотехника и электроника.* – 1991. – Т. 36, № 11. – С. 108–112.

17. Беличенко, В.И. Рассеяние электромагнитных волн биизотропной сферой / В.И. Беличенко, В.В. Фисанов // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 10. – С. 108–112.
18. Капшай, В.Н. Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ВУЗов. Физика. – Томск, 2000. – № 11. – С. 79–84.
19. Киральные электродинамические объекты / Б.З. Каценеленбаум [и др.] // УНФ. – 1997. – Т. 167, В. 11. – С. 1201–1212.
20. Сихвола, А. Метаматериалы с экстремальными материальными параметрами / А. Сихвола, С.А. Третьяков, А. де Баас // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52. – № 9. – С. 1066–1071.
21. Санников, Д.Г. Интерференция встречных волн в невзаимной киральной среде / Д.Г. Санников, Д.И. Семенов // Письма в ЖТФ. – 2007. – Т. 33, Вып. 23. – С. 19–26.
22. Weiglhofer, W.S. On the non-existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / W.S. Weiglhofer, A.J. Lakhtakia // J. Phys. A. : Math. Gen. – 1997. – Vol. 30. – P. 2597–2600.
23. Лакхтакия, А. Замечание о не существовании линейной среды Теллегена / А. Лакхтакия, В.С. Вейгльхофер // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 494–495.
24. Reflection and transmission by a uniaxial bi-anisotropic slab under normal incidence of plane waves / I.V. Semchenko [et al.] // J. Phys. D. : Appl. Phys. – 1998. – Vol. 31. – P. 2458–2464.
25. Reply to comment on «Reflection and transmission by uniaxial bi-anisotropic slab under normal incidence of plane waves» / S.A. Tretyakov [et al.] // J. Phys. D. : Appl. Phys. – 1999. – Vol. 32. – P. 2705–2706.
26. Raab, R.E. On the existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / R.E. Raab, A.H. Sihvola // J. Phys. A. : Math. Gen. – 1997. – Vol. 30. – P. 1335–1344.
27. de Lange, O.L. Post's constraint for electromagnetic constitutive relations / O.L. de Lange, R.E. Raab // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2001. – Vol. 3. – P. L23–L26.
28. Weiglhofer, W.S. Comment on «Post's constraint for electromagnetic constitutive relations» / W.S. Weiglhofer // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2002. – Vol. 4. – P. 213–214.
29. Raab, R.E. Reply to «Comment on "Post's constraint for electromagnetic constitutive relations» / R.E. Raab, O.L. de Lange // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2002. – Vol. 4. – P. 215–216.
30. Lakhtakia, A. On the genesis of Post constraint in modern electromagnetism / A. Lakhtakia // Optik. – 2004. – Vol. 115. – P. 151–158.
31. Hehl, F.W. Linear media in classical electrodynamics and the Post constraint / F.W. Hehl, Y.N. Obuhov // Physics Letters A. – 2005. – Vol. 334. – P. 249–259.
32. Lakhtakia, A. Boundary-value problems and the validity of the Post constraint in modern electromagnetism / A. Lakhtakia // Optik. – 2006. – Vol. 117. – P. 188–192.
33. Lakhtakia, A. Remarks on the current status of the Post constraint / A. Lakhtakia // Optik. – 2009. – Vol. 120. – P. 422–424.
34. Lakhtakia, A. Response to comments on boundary problems and electromagnetic constitutive parameters / A. Lakhtakia // Optik. – 2008. – Vol. 119. – P. 250–252.
35. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на границе раздела с биизотропной средой / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2009. – № 4 (55), Ч. 2. – С. 113–122.
36. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела биизотропных сред / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 129–133.
37. Mie, G. Beitrage zur Optik trüber Medien speciell kolloidaler Metallösungen / G. Mie, // Annalen der Physik. – 1908. – В. 25. – S. 377–445.
38. Стрэттон, Дж. Теория электромагнетизма / Дж. Стрэттон. – М. : Физматгиз, 1947. – 539 с.
39. Ван де Хюлст, Г. Рассеяние света малыми частицами / Г. Ван де Хюлст. – М. : Из-во иностр. лит., 1961. – 288 с.
40. Борен, К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д.Хафмен. – М. : Мир, 1986. – 664 с.
41. Варшалович, А.Б. Квантовая теория углового момента / А.Б. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 600 с.
42. Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. – М. : Наука, 1969. – 623 с.

Поступила в редакцию 01.07.10.

УДК 539.12

## НОВЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ПОРОГОВ ОБРЕЗАНИЙ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ E391: КОНЦЕПЦИЯ И ТЕКУЩИЙ СТАТУС РЕАЛИЗАЦИИ

Н.В. Максименко<sup>1</sup>, А.С. Курилин<sup>2</sup>, С.В. Подольский<sup>1,2</sup>,  
В.В. Андреев<sup>1</sup>, А.А. Ючко<sup>1</sup>, К.С. Бабич<sup>1</sup>, Ю.Ю. Степаненко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель  
<sup>2</sup>Лаборатория ядерных проблем ОИЯИ, Дубна, Московская область, Россия

## NEW METHOD FOR THE CUTS THRESHOLD OPTIMIZATION IN THE E391 EXPERIMENT: CONCEPTION AND CURRENT IMPLEMENTATION

N.V. Maksimenko<sup>1</sup>, A.S. Kurilin<sup>2</sup>, S.V. Podolsky<sup>1,2</sup>,  
V.V. Andreev<sup>1</sup>, A.A. Yuchko<sup>1</sup>, K.S. Babich<sup>1</sup>, Yu.Yu. Stepanenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel  
<sup>2</sup>Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research,  
Dubna, Moscow Region, Russia

Представлена новая техника оптимизации катов с использованием генетических алгоритмов. Главным преимуществом данного метода является полностью автоматический поиск точек обрезания. Это позволяет находить точки экспериментальных ограничений установок без вмешательства человека. Более того, автоматический поиск этих точек является более точным по сравнению с ручным методом. В работе представлены предварительные результаты для кат-оптимизации вето системы эксперимента E391. Данная методика может быть использована в других экспериментах.

**Ключевые слова:** редкий распад,  $K_L$  – мезон, генные алгоритмы, каты.

New cut optimization technique with using gene Algorithms is proposed. The main advantage of this method is completely automatic search for cut points. This allows finding cut points without of human intervention. Moreover, precision of cut points obtained by automatic searching is much higher than for those obtained «by hand». Preliminary results of the veto system cut optimization in the E391 [1] experiment is presented. The developed technique is applicable to other experiments.

**Keywords:** rare decay,  $K_L$  – meson, gene algorithms, cuts

### Introduction

The rare  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \nu + \bar{\nu}$  decay process is one of the clearest and «cheapest» critical Standard Model (SM) probes. In several papers (for example [2], [3]) it was shown that this decay is sensitive to the «new physics» effects as well as to the SM parameters. For a long time, this decay measurement was impossible and just with the start of the E391 experiment studies of this decay on special setups began. Sensitivity of the E391 experiment is too low to observe this decay because the planned precision of the experiment is  $\sim 10^{-9}$  while the SM-based predictions show  $Br(K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \nu + \bar{\nu}) \sim 10^{-11}$ . The most important task of this experiment was developing methods for the  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \nu + \bar{\nu}$  decay registration to be applied to more sensitive experiments in the future.

During the experimental data analysis it was found out that one of the most important tasks of the E391 experiment is to optimize cuts of observable quantities. In the E391 setup 1200 ADC channels are

used, and 20 kinematic values are reconstructed. All work on choosing signal phase space was done by hand. To do this, methods for sensitivity and background estimation were developed. Cut values were tuned to obtain the best ratios between signal and background with keeping the latter value reasonable. It is a natural approach used without significant changes since the first high energy physics experiments till nowadays. The experience gained during the analysis phase of the E391 experiment showed that the case of the classical cut optimization method is accompanied by a lot of restrictions:

1. With the hand approach, it is very difficult to take into account the correlation between visible kinematic variables because there are a lot of them. They are assumed to be orthogonal to each other and are optimized in the zero approximation.

2. There is no way to check convergence of solutions.

3. The optimization process yields range of cut point of kinematic variables, ADC and TDC values. It is much more convenient to use one function of lot of variables (visible and reconstructed).

4. Cut points founding is a labor-consuming process. The main goal of the present paper was to create a new method of the computer cut optimization for the E391 experiment. To achieve that goal we used gene algorithms [4].

### 1 Gene Algorithms

Gene algorithms are heuristic search algorithms used for solving tasks of optimization and simulation by random exhaustion, combination, and variation of searching parameters, as in biological evolution [4].

During the evolution process of a system, it is modified to meet external requirements. For this rules of evolution transformation and fitness function are defined. The evolution process continues until the requirements are met or the number of generations exceeds the predetermined value.

As in biological evolution, the following evolution mechanisms can be selected in gene algorithms: reproduction, mutation, termination, elitism.

Reproduction is a process of combination of two individuals for obtaining two descendants. The latter will possess exceptional characteristics of both parents. Mutation is a change in the single individual in accordance with the predetermined algorithm.

Termination is exclusion of the individual from further evolution of the system.

Elitism is the transition of the individual to the next phase of evolution without change.

Application of gene algorithms for finding the values of the cuts in the experiments of particle physics is a new and promising trend. In the last three years several papers on data processing using the developed approach have been published ([5], [6], and a few others).

### 2 Cut optimization in the E391 experiment

To find the corrected values of the cuts, we have created a special program that works on the principles of genetic algorithms. We used the lil-gp framework developed at Michigan State University [7] as a part of the GARAGE (Genetic Algorithms Research and Applications Group) project. We divided optimization process into several phases.

At the first stage we optimized the cut thresholds for one detector (Main Barrel) of the E391 setup. This stage was necessary to make sure that the proposed approach allows automatic cut search. At the next stage we optimized thresholds for the whole veto system, and after that we optimized all cuts. The next step in the development of the effective approaches to signal/noise separation will be search for the single function from all visible variables, with their correlation taking into account.

At the present investigation stage each individual in the population was represented by 43 numbers. The value of each of them is proportional to the cut threshold used in the E391 experiment data analysis. Kinematic observable quantities

correspond to 23 numbers, and the energy release in the veto detectors – 20 numbers. The total number of such individuals in the population was 200.

During evolution, each individual could be subjected to the above mechanisms (reproduction, mutation, deletion, elitism).

The value of each threshold was limited to the top and the bottom. These boundary conditions are needed to exclude the possibility of obtaining non-physical results in the machine search. For a more complete coverage of the set of real numbers in this range, as well as for avoiding large jumps in the process of mutation, the value of each number in a set of cutoffs was represented as a tree of functions. During reproduction, individuals can share the branches of the trees. The maximum degree of nesting of the functions was limited to 10.

The criterion for the effectiveness of circumcission, which corresponds to a particular individual, is a fitness function. We have defined it as

$$f(S) = \frac{Acc(S)}{Bg(S)}, Bg(S) < 0,55;$$

$$f(S) = \frac{1/2 Acc(S)}{Bg(S)}, 0,55 < Bg(S) < 0,65;$$

$$f(S) = \frac{1/4 Acc(S)}{Bg(S)}, Bg(S) > 0,65,$$

where  $Bg(S)$  is the background level, which resulted from the reconstruction of events  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \nu + \bar{\nu}$  with applying  $S$  selection cuts,  $Acc(S)$  is the sensitivity of the method to  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \nu + \bar{\nu}$  events after applying  $S$  selection cuts. Differences in the coefficients for different ranges of values of backgrounds are needed to maintain an acceptable background contribution to the recent results of computer search.

In the process of computer calculations for each individual the function  $f$  was evaluated. Then, based on the obtained fitness function value, individual either jumped to the next generation in the process of reproduction, mutation, or elitism, or was terminated. The relative probability of the first three operators was 0, 1, 0, 1 and 0,8, respectively. The relative probability of the termination of the individual was  $f^{-1}$ . Three hundred generations of individuals, were calculated.

**Acceptance calculation.** We used the procedure of background and acceptance estimation as well as experimental and Monte-Carlo statistics developed for the E391 experiment RunII analysis [8]. This allowed to comparing the effectiveness of imposing the cuts found and used in the standard analysis without any whatever amendments to the differences in the methods. Acceptance was calculated by reconstruction of events with applying of all cuts. For taking into account accidental losses and

applying timing cuts, we calculated additional coefficients of acceptance loss, as shown in [8].

**Background calculation.** Among all sources of background, we have identified those whose contribution cannot be considered negligible [8]. By the method presented in this work, we analyzed the following sources of background: decays  $K_L^0 \rightarrow 2\pi^0$ ,  $\eta \rightarrow 2\gamma$  and sources associated with the neutron beam.

### 3 Results

After the calculations we obtained new cut values that were more effective than those found by hand. The results of the calculation of backgrounds are represented in Table 1.

Table 1 – Background estimation

Background	Contribution in the case of manual selection of cuts	Contribution in the case of machine cut search
Core neutron background	0,20	0,17
Halo neutron background	0,08	0,13
$K_L^0 \rightarrow 2\pi^0$ events	0,12	0,12
$\eta \rightarrow 2\gamma$ events	0,06	0,08
Total	0,46	0,50

As seen from Table 1, the contribution of backgrounds increased by 8%. However, the increase of sensitivity was 10%. Signal plots for the classical set of cuts of the E391 experiment and the results obtained in the present work are shown in Figure 1 and 2, respectively.

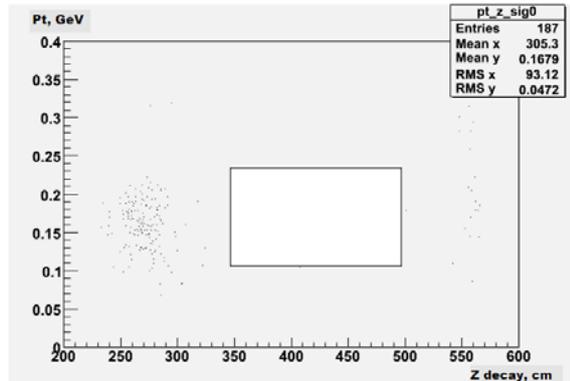


Figure 1 – Signal plot for Run II of the E391 experiment, after applying standard cuts. Events in the signal region are absent

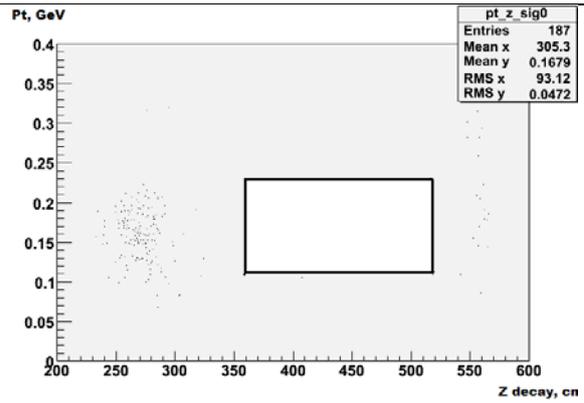


Figure 2 – Signal plot for Run II of the E391 experiment, after applying the cuts found by using gene algorithms. Events in the signal region are absent

### Conclusion

As a result of this work, we have found new cut thresholds, which are more effective than those found by the usual selection. Acceptance to events increased by 10%. This work will continued to find a single threshold function of all observed variables to take into account correlations between them.

### REFERENCES

1. *KEK-E391 Proposal 1996* / T. Inagaki [et al.]. – KEK-Internal 96–13, 1996.
2.  $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  as a probe of new physics / D. Bryman [et al.] // *Int. J. Mod. Phys.* – 2006. – Vol. A21. – P. 487–504.
3. *Deshpande, N.G.* Constraints on new physics from  $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  / N.G. Deshpande, D.K. Ghosh, X.-G. He // *Phys. Rev.* – 2004. – Vol. D70. – P. 093003.
4. *Holland, J.H.* Adaptation in natural and artificial systems / J.H. Holland. – University of Michigan Press, Ann Arbor : MIT Press, 1975. – 212 p.
5. *Teodorescu, L.*  $K_s \rightarrow \pi^+ \pi^-$  selection cuts finding in BABAR experiment (High Energy Physics event selection with Gene Expression Programming / L. Teodorescu, D. Sherwood // *Computer Physics Communications.* – 2008. – Vol. 178. – P. 409–419.
6. *Application of genetic programming to high energy physics event selection* / J. M. Link [et al.] // *Nucl. Instrum. Meth.* – 2005. – Vol. A551. – P. 504–527.
7. *Genetic Programming System* [Electronic resource] – 1998. – Mode of access : <http://garage.cse.msu.edu/software/lil-gp> – Date of access : 14.01.2010.
8. *Sumida, T.* Search for the Decay  $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  : Ph. D. thesis / T. Sumida. – Kyoto University, 2008. – 151 c.

Поступила в редакцию 08.07.10.

УДК 546.26;539.23

## МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛЕГИРОВАННЫХ МЕДЬЮ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ОСАЖДЕННЫХ ИЗ ИМПУЛЬСНОЙ КАТОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Д.Г. Пилипцов, А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, Р.В. Бекаревич

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## MECHANICAL PROPERTIES OF THE COPPER ALLOYED CARBON COATINGS DEPOSITED FROM CATHODIC PULSE PLASMA

D.G. Pilipstov, A.V. Rogachev, N.N. Fedosenko, R.V. Bekarevich

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Определены особенности влияния легирования медью однокомпонентных и титансодержащих алмазоподобных покрытий, получаемых из катодной импульсной плазмы, на их микротвердость, внутренние механические напряжения и морфологию. Показано, что медьсодержащие углеродные покрытия имеют неоднородную структуру, характеризуются более низкой микротвердостью, сохраняют высокие триботехнические свойства. При отжиге покрытий, содержащих углерод, титан, медь, микротвердость возрастает. Введение в покрытие меди приводит к снижению внутренних механических напряжений, изменению их характера; при высокой концентрации меди они становятся сжимающими.

**Ключевые слова:** углеродные покрытия, механические свойства, трение, легирование, медь, титан, морфология.

In the present paper the copper alloying of single-component and titanium-containing diamond-like coatings obtained from cathodic pulse plasma is examined. The peculiarities of the influence of the copper alloying of such coatings on their microhardness, internal mechanical stresses and morphology have been defined. It is shown, that copper-containing carbon coatings have non-uniform structure, they are characterised by lower microhardness and they keep high tribotechnical properties. Microhardness increases after annealing the coatings containing carbon, titanium and copper. Copper implantation into the coating leads to decrease of internal mechanical stresses and changes their character; at high copper concentration they become compressing.

**Keywords:** carbon coatings, mechanical properties, friction, alloying, copper, titanium, morphology.

### Введение

Углеродные алмазоподобные покрытия (АПП) обладают комплексом ценных физико-механических свойств и находят широкое практическое применение, в том числе в качестве антифрикционных, коррозионностойких, биосовместимых слоев [1], [2]. Вместе с тем, область их использования ограничена из-за низкой термостойкости (на воздухе эксплуатация АПП рекомендуется при температуре не выше 350 °С), наличия в слое значительных внутренних механических напряжений, низкой адгезии [1]. Отмечено, что при температуре нагрева выше 400 °С в покрытии происходит снижение концентрации  $sp^3$ -связей и соответствующее возрастание числа  $sp^2$ -связей, что приводит к снижению твердости и прочности. Такие температуры могут быть достигнуты в зоне фактического контакта при трении и вызывают интенсивный износ покрытия [3].

Существенным недостатком АПП является их склонность к расслоению и шелушению, когда их толщина превышает определенное значение. Основная причина такого поведения АПП – высокий уровень остаточных внутренних напряжений [4]. В качестве эффективного метода их снижения предлагается формирование композиционных пленочных систем. Так как АПП обладают высокой твердостью и

низким коэффициентом трения, а металлы, в частности, характеризуются пластичностью, то их введение в АПП, а также формирование многослойных систем на их основе может существенно повлиять на релаксацию механических напряжений и, в целом, на механические свойства покрытий данного типа.

Экспериментально установлено [2], [5], что значительное повышение механических свойств покрытий на основе углерода может быть достигнуто оптимальным легированием их металлами, природа которых устанавливается с учетом протекающих на стадии формирования и эксплуатации химических процессов. Отметим, что в большинстве работ акцент сделан на легирование АПП карбидообразующими материалами [3]–[5], образующих в слое на стадии синтеза или же при термообработке в вакууме высокодисперсные фазы внедрения соответствующих соединений. Системы Me-АПП в сравнении с однокомпонентными АПП в ряде случаев показывают снижение износостойкости, хотя и обладают достаточной твердостью, более низким значением внутренних напряжений и лучшей адгезией к подложкам, например, стальным [2]. По-видимому, образующиеся в объеме покрытия твердые карбидные частицы при трении практически не деформируются и могут выкрашиваться из слоя.

Возможность легирования АПП металлами, не образующими карбиды, изучена недостаточно. Наиболее перспективным металлом из-за своих механических и химических свойств является медь. По данным авторов [6], легирование АПП, синтезированных из ацетиленовой плазмы, медью позволяет снизить уровень остаточных напряжений до 0,7 ГПа. Сведения о влиянии пластичных металлов на свойства АПП, полученных другими методами, в частности из катодной импульсной плазмы, отсутствуют.

Основной целью настоящей работы является изучение морфологических особенностей и механических свойств легированных медью однокомпонентных и композиционных углеродных покрытий, сформированных из импульсной катодной плазмы.

### **1 Методика исследования**

Основными объектами исследования явились легированные медью алмазоподобные покрытия и композиционные системы на основе углерода, меди, титана. Выбранные наполнители характеризуются различной активностью по отношению углерода, и их комплексное введение в состав АПП представляет научный и практический интерес.

Для получения легированных углеродных покрытий использовалась установка вакуумного напыления УВНИПА-1-001, содержащая газовый ионный источник, с помощью которого производится очистка и нагрев подложек, источник плазмы стационарного катодно-дугового разряда с металлическим (титановым) катодом, источник плазмы импульсного катодно-дугового разряда с катодом из графита, используемым для нанесения углеродных покрытий. Углеродные покрытия наносились при напряжении разряда 250–300 В и частоте импульсов от 1 до 35 Гц. Данные режимы выбирались согласно полученным ранее рекомендациям [5].

Для очистки и нагрева подложек применялась обработка их поверхности ионами металла с энергией 1,5–2,5 КэВ или ионами азота (аргона) с энергией  $\leq 4$  КэВ и плотностью ионного тока  $\approx 25$  А/м<sup>2</sup>. Нанесение покрытия производилось при давлении в камере  $\sim 4 \cdot 10^{-3}$  Па. Отрицательный потенциал смещения, подаваемый на образец  $\approx 110$  В.

Легирование медью углеродного покрытия проводили из плазмы импульсного катодно-дугового разряда, при создании которого использовался составной катод из графита и легирующего металла. Изменение содержания меди в покрытии достигалось путем изменения площади медных вставок на поверхности испаряемого графитового катода. Введение титана в покрытие осуществлялось с помощью

отдельного электродугового испарителя. Для определения концентрации легирующих элементов использовался рентгеноспектральный микронзондовый анализ.

В качестве основных характеристик, определяющих механические свойства покрытий, были выбраны значения микротвердости, уровень внутренних механических напряжений, коэффициент трения.

Испытания покрытий на микротвердость проводились при постоянной нагрузке на индентор для всех образцов 10 г при длительности нагружения 7 секунд на микротвердомере Leica VMHT MOT (Кноор).

Для оценки напряжений в пленке на кремниевой подложке использовался рентгеновский дифракционный анализ [7]. Метод основан на регистрации рентгеновского излучения, отраженного двумя разными точками кристалла. Под углом Вульфа-Брегга. Отражение в двух точках кристалла без изменения его углового положения можно получить только на идеально прямых кристаллах. На изогнутых кристаллах при переходе регистрации излучения из одной точки в другую необходим поворот кристалла до положения, подчиняющегося закону Вульфа-Брегга. Величина деформации кристалла, по которой рассчитывались напряжения, определялась по изменению угла поворота при переходе из одной точки в другую. При расчете напряжений в покрытии, осажденном на кремниевую подложку, модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$  принимались равными  $1,1 \cdot 10^3$  ГПа и 0,07 соответственно.

Триботехнические испытания проводили на микротрибометре ММТ по схеме сфера – плоскость (шарик радиусом 3 мм из закаленной стали ШХ15, подложка – сталь 12Х18Н10Т). Режим трения: нагрузка 1,50 Н, средняя скорость перемещения 0,04 м/сек. Особенности определения коэффициента трения и износостойкости с помощью микротрибометра ММТ приведены в [8].

Изучение морфологии легированных АПП проводилось методом растровой электронной микроскопии (ESEM Quanta 200F) и атомно-силовой микроскопии в режимах измерения топографии и фазового контраста с помощью прибора Solver Pro производства NT-MDT (Москва, Россия). Применение полуконтактного метода позволяет с достаточной точностью исследовать морфологические и относительные механические характеристики поверхностей различной физической природы.

### **2 Результаты и их обсуждение**

Установлено, что легированные медью углеродные покрытия, формирование которых осуществлялось испарением составного катода, имеют ряд морфологических особенностей

(рисунок 1). В частности, установлено, что медь в углеродном покрытии находится в виде отдельных вкраплений размером до 150 нм. При этом микрочастицы меди равномерно распределены по поверхности и имеют практически одинаковую форму, что является следствием проявления капельного механизма генерации потока при импульсном катодном испарении металла. При увеличении концентрации меди покрытие становится пористым, характеризуется высокой структурной неоднородностью, шероховатостью (рисунок 1, б).

Высокодисперсную структуру имеют углеродные покрытия, содержащие титан и медь (рисунок 1, в, г), медь и азот (рисунок 1, е). Размер твердых фаз внедрения, образовавшихся в результате химического взаимодействия титана

с углеродом [5], (на изображении фазового контраста (рисунок 1, в) они являются светлыми) составляет 20-50 нм. При возрастании концентрации меди высокая однородность покрытия нарушается; на поверхности регистрируются относительно равномерно распределенные частицы меди, разделенные областями высокой твердости (рисунок 1, г). Отметим, что при легировании АПП только титаном покрытие имеет более крупные структурные образования, значительно отличающиеся твердостью (рисунок 1, д).

Содержание меди в углеродном покрытии оказывает существенное влияние на их механические свойства. В частности, с увеличением содержания меди нанотвердость и модуль упругости покрытия уменьшаются (таблица 1).

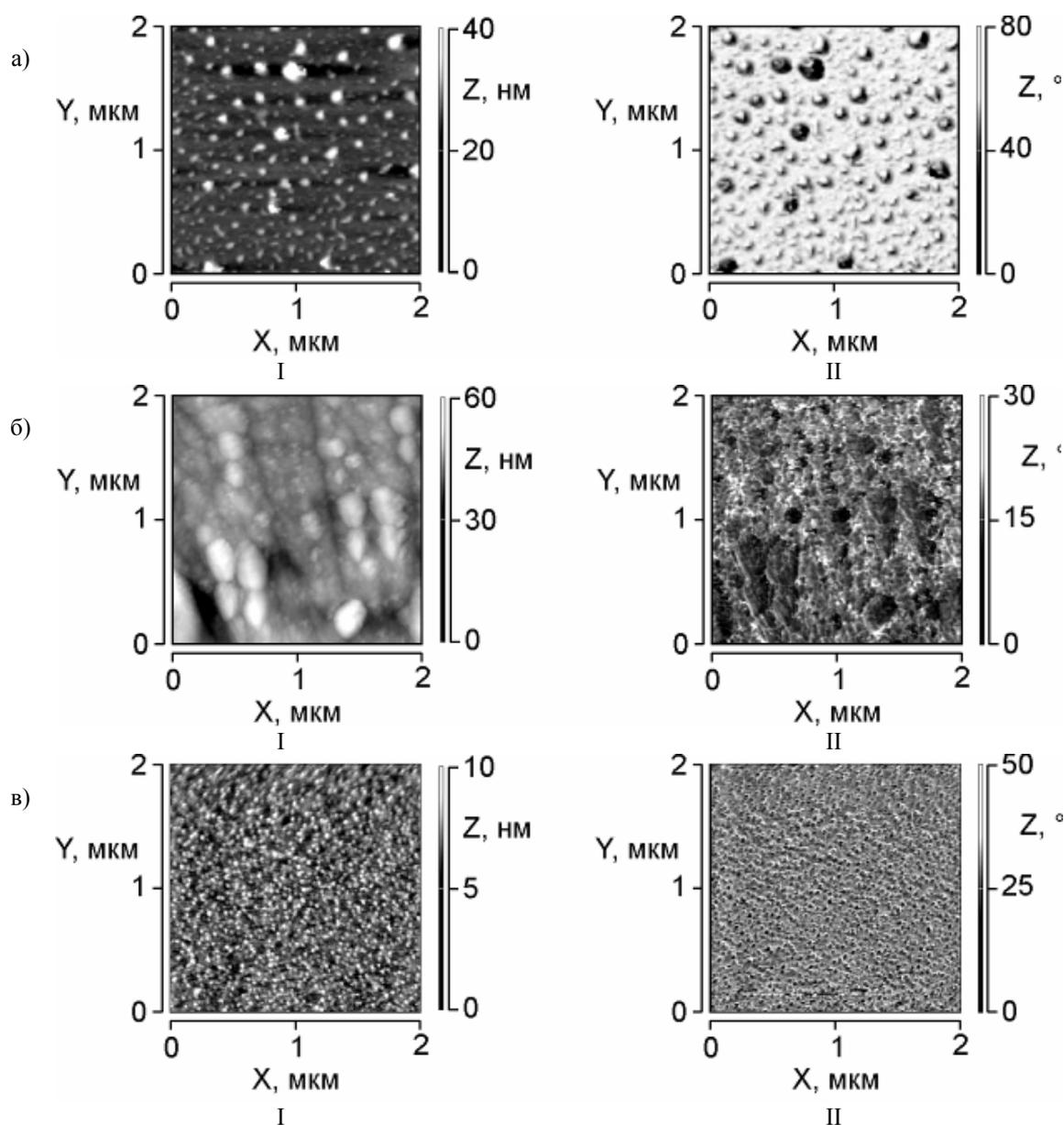


Рисунок 1 – АСМ изображение поверхности углеродного легированного покрытия медью с концентрацией 3,6% (а) и 4,2% (б), медью (1,8%) и титаном (38,6%) (в): I – топология; II – фазовый контраст

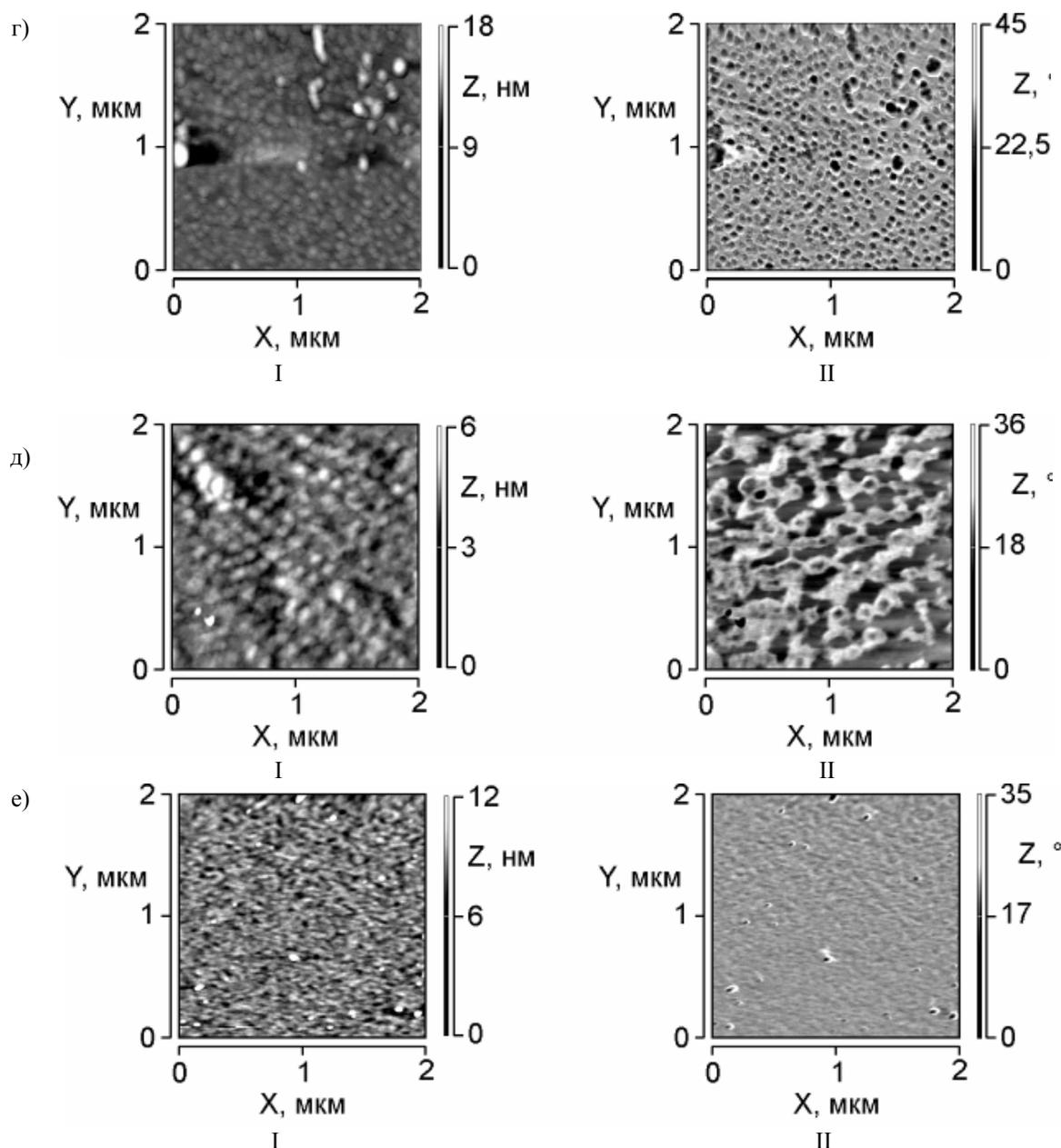


Рисунок 1 – АСМ изображение поверхности углеродного легированного покрытия медью с концентрацией (4,8%) и титаном (41,3%) (г), титаном (56,93%) (д), медью (2,5%) и азотом (5,3%) (е): I – топология; II – фазовый контраст

Таблица 1 – Значения микротвердости ( $H$ ), модуля упругости ( $E$ ) и коэффициент трения ( $f$ ) легированных АПП

Тип покрытия	Содержание, %		$H^*$ , МПа	$E \pm \Delta E$ , ГПа	$f^*$
	Ti	Cu			
АПП+Cu	–	3,6	1341,9/1186,0	–	0,13/0,11
АПП+Cu	–	4,0	1178,7/956,9	–	0,08/0,12
АПП+Cu	–	4,2	1102,8/1001,18	–	0,21/0,25
АПП+Cu+Ti	38,6	1,8	1491,7/1629,6	407±16	0,31/0,27
АПП+Cu+Ti	45,4	4,1	1250,1/1341,4	372±26	0,26/0,24
АПП+Cu+Ti	41,3	4,8	1015,6/1129,7	314±50	0,27/0,27

\*)- первое значение характеризует покрытие до отжига, второе – после отжига.

При этом установлено, что поверхностные слои углеродных покрытий, содержащих медь и титан, имеют более высокую твердость (рисунки 2). Установленное снижение нанотвердости покрытия при возрастании величины прикладываемой нагрузки можно рассматривать как следствие высокой структурной неоднородности покрытия. При увеличении нагрузки на индентор в деформирование вовлекается больший объем покрытия, в котором и содержится больше нано-, микрочастиц меди, которые имеют значительно более низкую твердость.

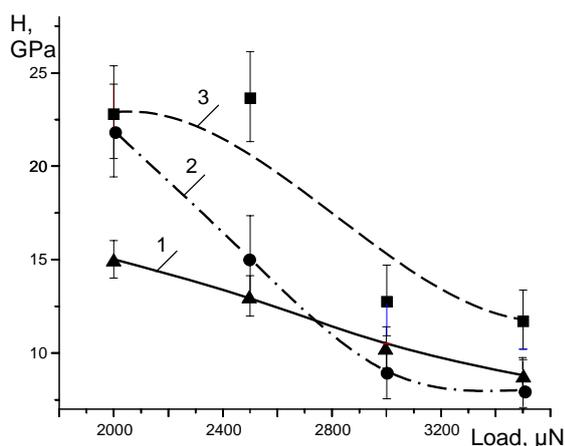


Рисунок 2 – Зависимость от величины прикладываемой нагрузки нанотвердости покрытий АПП+Cu с концентрацией меди 4,8% (1), 4,1% (2), 1,8% (3)

При легировании АПП медью и титаном микротвердость покрытия в целом выше, чем при легировании только медью. Данный факт требует дополнительного исследования, т. к. при многокомпонентном легировании содержание углеродной фазы в покрытии снижается и возрастание твердости как результат суперпозиционного эффекта невозможно. Высокие значения твердости наблюдаются при легировании углеродного покрытия титаном до значений 49-50%. Это может быть обусловлено образованием в объеме покрытия твердых карбидных фаз внедрения [3], [9]. Вместе с тем твердость этих фаз внедрения ниже твердости однокомпонентного углеродного покрытия.

С целью выравнивания концентрации легирующих элементов по толщине слоя проводился отжиг покрытия в вакууме при температуре 500 °С в течение 30 мин. Как видно из таблицы 1, при нагреве двухкомпонентных покрытий АПП+Cu микротвердость слоев значительно (на 13...23%) снижается. При отжиге же покрытий АПП+Cu+Ti наблюдается ее заметное возрастание. Данный эффект согласуется с представленными в работах [5] данными, свидетельствующими об иницировании процес-

сов образования карбида титана при нагреве и образовании таким образом твердых карбидных фаз внедрения, которые и обуславливают возрастание твердости покрытия в целом.

Особый интерес вызывает определение влияния легирования АПП медью на величину внутренних механических напряжений, величина и характер которых оказывает влияние на эксплуатационные свойства тонкопленочной системы. Результаты исследований покрытий, легированных металлами и азотом, приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Внутренние напряжения легированных АПП

Состав покрытия	Концентрация легирующих элементов		Тип напряжений	$\sigma$ , МПа
	Ti, %	Cu, %		
C	0	0	растяжения	171,5
C+Cu	0	3,6	растяжения	40,0
C+Cu	0	4,2	сжатия	16,0
C+Ti	56,93	0	растяжения	94,3
Ti+C+Cu	38,6	1,8	растяжения	84,3
Ti+C+Cu	41,3	4,8	растяжения	72,2
C+Cu+N <sub>2</sub>	0	2,5	растяжения	54,4
C+Cu+N <sub>2</sub>	0	5,3	растяжения	11,1

Установлено, что введение меди в углеродное покрытие практически всегда приводит к снижению величины внутренних напряжений. Так, легирование углеродного покрытия 2,7% меди уменьшает механические напряжения более чем в два раза. При этом изменяется характер возникающих напряжений; если в однокомпонентном покрытии возникают напряжения растяжения, то при легировании меди – напряжения сжатия. Отметим, что в таких слоях сохраняется достаточно высокая твердость, что в сочетании с относительно низкими внутренними напряжениями определяет высокую перспективность их практического применения.

Представляющим интерес фактом является изменение характера напряжений при введении в покрытие меди и азота. Возникающие в таких системах напряжения растяжения являются весьма значительными (до 55 ГПа) и могут явиться причиной разрушения покрытия. Особенно негативно влияют напряжения растяжения на износостойкость покрытий при трении [10].

При многокомпонентном легировании влияние легирующих элементов на внутренние напряжения не однозначно, и полный анализ процессов, влияющих на механическую напряженность покрытий, возможен при условии анализа природы и кинетики химических изменений, протекающих в таких композиционных материалах.

Трение легированных медью углеродных покрытий также имеет свои особенности. Установлено, что при относительно небольшой концентрации меди в покрытии она способна выполнять роль твердой смазки, и обеспечивает низкий коэффициент трения (таблица 1). Из представленной на рисунке 3 электронной микрофотографии видно, что в зоне трения медьсодержащего углеродного покрытия образуется характерная для меди политузная пленка, которая способствует снижению коэффициента трения и объясняет приведенные в [9] данные, свидетельствующие о стабильной работе узла трения.

При легировании титаном и медью коэффициент трения заметно возрастает, и регистрируемые значения близки к значениям, характерным для двухкомпонентных покрытий АПП+Ti [3], [9]. При этом отжиг покрытия не оказывает заметного влияния на триботехнические свойства.

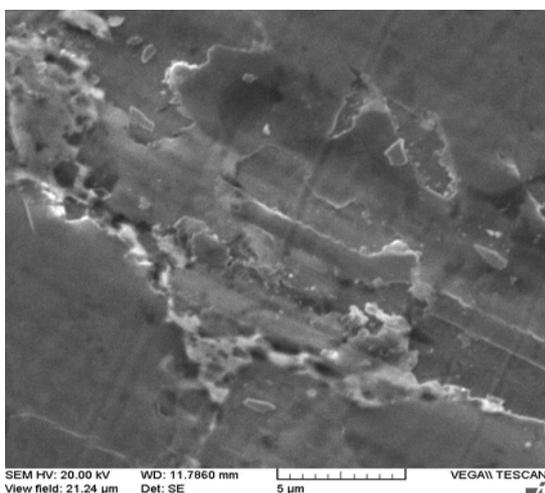


Рисунок 3 – Дорожка трения покрытия АПП+Cu (содержание меди 1,8%)

#### Выводы

Определены особенности влияния легирования медью однокомпонентных и титаносодержащих алмазоподобных покрытий, получаемых из катодной импульсной плазмы, на их микротвердость, внутренние механические напряжения и морфологию. Показано, что медьсодержащие углеродные покрытия имеют неоднородную структуру, характеризуются более низкой микротвердостью. При отжиге покрытий, содержащих углерод, титан, медь, микротвердость возрастает. Введение в покрытие меди не оказывает заметного влияния на коэффициент трения, приводит к снижению внутренних механических напряжений, которые при высокой концентрации меди становятся сжимающими.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рогачев, А.В. Восстановление и повышение износостойкости деталей машин / А.В. Рогачев, С.С. Сидорский. – Гомель : БелГУТ, 2005. – 343 с.
2. *Tribological behavior of hard carbon coatings on steel substrates* / F.E. Kennedy [et al.] // *Wear* : Elsevier Science – 2003. – Vol. 255. – P. 854–858.
3. Попов, А.Н. Улучшение триботехнических характеристик прецизионных узлов трения нанесением вакуумно-плазменных покрытий на основе титана и углерода: дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04 / А.Н. Попов – Гомель: ИММС НАНБ, 2002. – 106 с.
4. *Synthesis of superlow friction carbon films from highly hydrogenated methane plasmas* / A. Erdemir [et al.] // *Surface and Coatings Technology*: Elsevier Science – 2000. – Vol. 134. – P. 448–454.
5. *Механические свойства и структура композиционных углеродных покрытий* / А.В. Рогачев [и др.] // *Материалы, технологии, инструмент.* – 2001. – Т. 5, № 2. – С. 77–80.
6. Chen, C. Structure and properties of diamond-like carbon nanocomposite films containing copper nanoparticles / C. Chen, F. Hong // *Applied surface science* : Elsevier Science. – 2005. – Vol. 232, № 3. – P. 261–269.
7. Рогачев, А.В. Механические свойства многокомпонентно легированных углеродных покрытий / А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, Д.Г. Пилипцов // *Сб. науч. тр. / Материалы, технологии и оборудование в производстве, эксплуатации, ремонте и модернизации машин. Сб. научных трудов 7 МНТК.* – Новополоцк : ПГУ, 2009. – Т. 1. – С. 49–53.
8. *Влияние природы и концентрации легирующих элементов на морфологию зоны трения углеродных покрытий* / А.В. Рогачев [и др.] // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.* – 2009. – № 5 (56). – С. 100–103.
9. Рогачев А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // *Трение и износ.* – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.
10. Богданович, П.Н. Трение и износ в машинах / П.Н. Богданович, В.Я. Прушак. – Минск : «Вышэйшая школа», 1999. – 256 с.

Поступила в редакцию 14.07.10.

УДК 546.26;539.23

## МОРФОЛОГИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ УГЛЕРОДА, ПОДВЕРГНУТЫХ ОБРАБОТКЕ ИОНАМИ АЗОТА

Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, Р.В. Бекаревич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## THE MORPHOLOGY OF THE CARBON BASED COMPOSITION COATINGS PROCESSED BY NITROGEN IONS

D.G. Piliptsov, A.S. Rudenkov, R.V. Bekarevich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Установлено, что обработка композиционных покрытий на основе углерода и титана ионами азота существенно диспергирует структуру покрытий (размер образований снижается почти в 10 раз). После отжига морфология покрытий становится более однородной.

**Ключевые слова:** композиционные покрытия, ионная обработка, топография, структурные образования.

It was determined, that the processing of composition coatings on the basis of carbon and titanium by ions of nitrogen essentially disperses the structure of coating (the size of formation becomes 10 times less). After annealing of coatings the morphology becomes more homogeneous.

**Keywords:** composition coatings, ion processing, morphology, structure formation.

### Введение

Бомбардировка ускоренными ионами подложки и поверхности покрытия сопровождается проявлением целого ряда явлений (распыления, образования точечных и линейных дефектов кристаллической решетки, ускорения диффузии, локальным нагревом), которые вызывают изменения в структуре и свойствах поверхностных слоев [1]. Для управления структурой и свойствами покрытий наибольший интерес представляют следующие особенности ионно-плазменной обработки:

1. Удаление с поверхности адсорбированных слоев химических соединений при бомбардировке ионами высоких энергий.
2. Активация диффузионных процессов в поверхностных слоях под действием ионов.
3. Диспергирование структуры покрытия.

Эффективно также применение ионной бомбардировки для травления верхних деформированных слоев и полировки поверхности [2]. Изменение топографии поверхности обычно осуществляется с помощью скользящих пучков медленных ионов с энергией от 100 до 700 эВ. Под действием ионов происходит преимущественное разрушение границ зерен, которые проявляются на распыляемой поверхности в виде впадин. Зернистая структура выявляется даже у тех веществ, для которых химическое травление не дает результатов, например, сплавов на основе алюминия. Ионное травление эффективно при выявлении структуры составляющих сплавов, минералов и особенно многокомпонентных диэлектрических и полупроводниковых систем (ситаллов, углеграфитов, резины, нейлона).

При ионной бомбардировке поверхности композиционных покрытий на основе углерода и металла неуглеродными ионами (азота, аргона) помимо перечисленных эффектов происходит вытравливание  $sp^2$ -гибридизированного углерода [3]. Особый интерес представляет изучение процессов, протекающих при ионной обработке в условиях возможного протекания химического взаимодействия ионов с атомами мишени. Таким образом, при ионной обработке композиционных покрытий на основе углерода и металла возможны существенные изменения топографии поверхности, что требует детального изучения.

Основной целью данной работы является изучение морфологии, композиционных углеродных покрытий, подвергнутых обработке низкоэнергетическими ионами азота.

### 1 Методика исследования

Основными объектами исследования явились композиционные системы на основе углерода и титана. Для получения композиционных углеродных покрытий была использована установка вакуумного напыления PVM-D, содержащая ионный источник «АИДА», с помощью которого можно производить очистку и нагрев подложек, обработку растущего покрытия ионами азота; источник плазмы стационарного катодно-дугового разряда с металлическим катодом, источник плазмы импульсного катодно-дугового разряда с катодом из графита, используемым для нанесения углеродных покрытий, а также дозатор рабочего газа, позволяющий контролировать давление рабочего газа в вакуумной

камере. Схема устройства для ионной обработки представлена на рисунке 1.

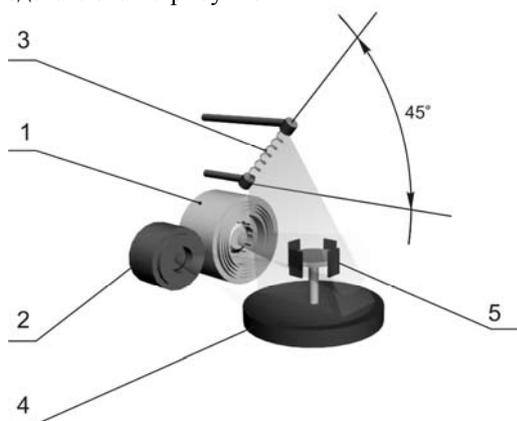


Рисунок 1 – Схема устройства, предназначенного для синтеза композиционных углеродных покрытий с последующей их обработкой ионами азота: 1 – импульсный источник углеродной плазмы, 2 – источник плазмы стационарного катодно-дугового разряда с титановым катодом, 3 – ионный источник «АИДА», 4 – специальная оснастка, 5 – подложки

Очистка поверхности кремниевых подложек 5 производилась с помощью ионного источника 3. В качестве рабочего газа использовался аргон. Давление рабочего газа  $2 \cdot 10^{-2}$  Па. Энергия ионов аргона 350 эВ. Ток накала – 8 А, ток соленоида – 0,4 А, ток анода – 3 А. Время обработки составляло 20 минут.

Композиционные покрытия формировались из плазмы импульсного катодно-дугового разряда с катодом из графита 1 (напряжение накопителя составляло 300 В, число импульсов – 3600, частота следования 20 Гц) и с одновременным электродуговым испарением титана с помощью испарителя 2 (ток дуги 70 А).

Ионная обработка композиционного углеродного покрытия осуществлялась с помощью ионного источника «АИДА», установленного в верхней части камеры под углом  $45^\circ$  к направлению плазменного потока углеродного источника. Обработка ионами азота композиционного покрытия происходила при следующих параметрах: давление рабочего газа  $4 \cdot 10^{-2}$  Па, ток накала – 8 А, энергия ионов азота – 350-400 эВ, ток анода – 2 А, ток соленоида 0,3 А. Обработка производилась в течении 8, 15 и 30 минут.

Изучение морфологии покрытий проводилось методом атомно-силовой микроскопии

(АСМ) в режимах измерения топографии и фазового контраста с помощью прибора Solver по методике, описанной в работах [4], [5]. Применение динамического полуконтактного метода позволяет с достаточной точностью исследовать морфологические и относительные механические характеристики поверхностей различной физической природы.

## 2 Результаты и их обсуждение

Поверхность композиционного покрытия Ti+C, не подвергнутого ионной обработке, представляет собой систему образований со средним диаметром у основания порядка 130 нм и высотой 10 нм (рисунок 2, а).

Как видно из рис. 2, б, в, г, дисперсность покрытия, обработанного ионами азота, значительно увеличивается; латеральный размер отдельных структурных образований составляет 15-20 нм, высота не более 3 нм. При этом установлено, что время ионной обработки неоднородно влияет на параметры шероховатости поверхностных слоев (таблица 1).

Видно, что при времени ионной обработки 15 минут высота структурных образований и шероховатость поверхности имеют минимальное значение. Интерес представляет оценка влияния отжига на морфологию титаносодержащих углеродных покрытий, подвергнутых обработке ионами азота. Нагрев в вакууме таких покрытий, по данным работ [3], [4], инициирует процессы образования карбидов и нитридов титана, дисперсных фаз внедрения. Результаты исследования топографии образцов после отжига средствами АСМ представлены на рисунке 3.

Установлено, что после отжига структура поверхностного слоя становится более однородной, снижается высота структурных образований и их размер. Из анализа изображений фазового контраста следует, что площадь светлых участков возрастает (размер и плотность темных частиц снижается), что свидетельствует об увеличении твердости поверхности.

## Выводы

Установлено, что после обработки титаносодержащих углеродных покрытий ионами азота высота структурных образований и шероховатость поверхности существенно уменьшается. Отжиг покрытий в вакууме повышает структурную однородность и способствует сглаживанию поверхности.

Таблица 1 – Результаты статистической обработки данных АСМ композиционных покрытий Ti+C

Тип покрытия	Время ионной обработки, мин	Шероховатость Ra, нм		Средняя высота образований, нм	
		до отжига	после отжига	до отжига	после отжига
Ti+C	нет	2,03	–	9,9	–
	8	0,37	0,206	3,3	2,6
	15	0,17	0,216	1,2	2,5
	30	0,31	0,194	1,8	1,1

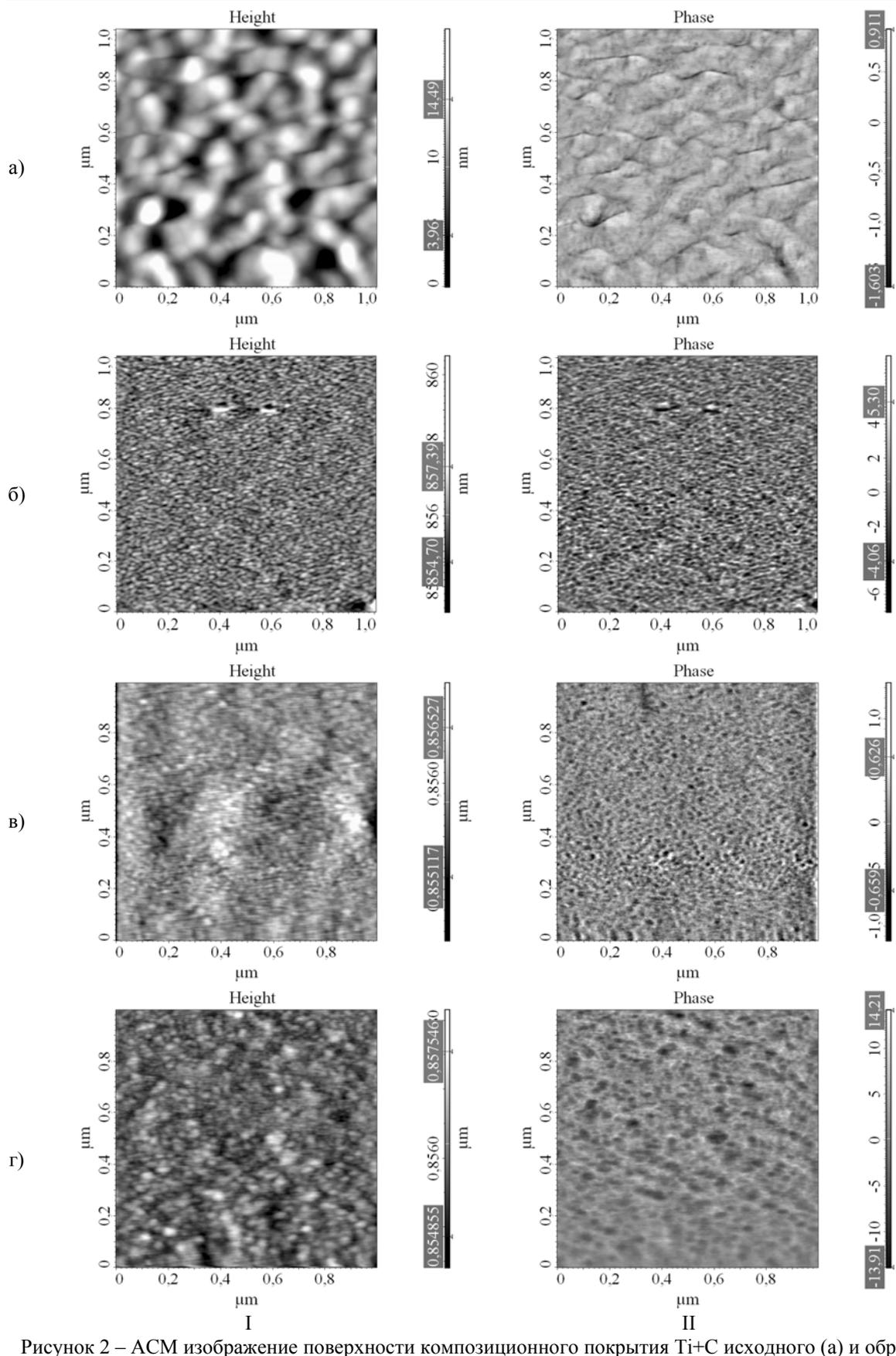


Рисунок 2 – АСМ изображение поверхности композиционного покрытия Ti+C исходного (а) и обработанного ионами азота в течение 8 минут (б), 15 минут (в), 30 минут (г), площадь сканирования 1x1 мкм: I – топология; II – фазовый контраст

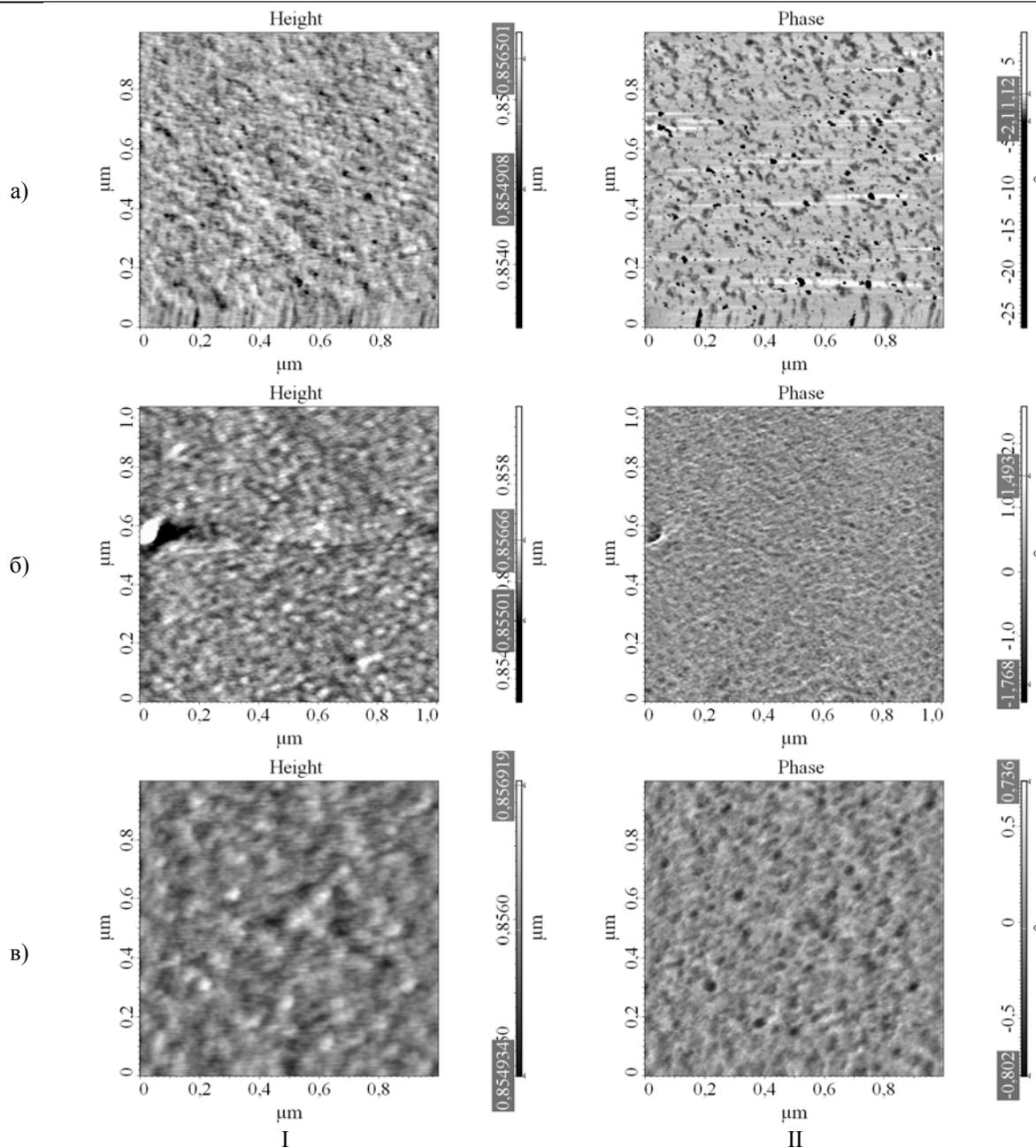


Рисунок 3 – АСМ изображение поверхности композиционного покрытия Ti+C после отжига, обработанного ионами азота в течение 8 минут (б), 15 минут (в), 30 минут (г), площадь сканирования 1x1 мкм: I – топология; II – фазовый контраст

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барвинок, В.А. Физические основы и математическое моделирование процессов вакуумного ионно-плазменного напыления / В.А. Барвинок, В.И. Богданович. – М. : Машиностроение, 1999. – 309 с.
2. Гасанов, И.С. Плазменная и пучковая технология / И.С. Гасанов. – Баку : Элм, 2006. – 174 с.
3. Белошенко, В.А. Получение углерод-азотных покрытий, модифицированных нитридом титана / В.А. Белошенко, В.Н. Варюхин, Б.Е. Шкуратов // Журнал технической физики. – 2004. – Т. 74. – С. 131–133.

4. Структура и механические свойства легированных углеродных покрытий / А.В. Рогачев [и др.] // Теоретические и технологические основы упрочнения и восстановления изделий машиностроения : Сб. научн. трудов. – Минск : ПГУ, 2001. – С. 227–230.

5. Chizik, S.A. Scanning probe microscopy as a method of control of structure, geometry and physical surface properties / S.A. Chizik // Computers methods and inverse problems in nondestructive testing and diagnostics. – Minsk. – 1995. – P. 332–335.

Поступила в редакцию 14.07.10.

УДК 535.42+537.86.22

## ЛАЗЕРНОЕ ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЕ СТЕКЛОИЗДЕЛИЙ ТРУБЧАТОЙ ФОРМЫ

С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## LASER THERMOSPLITTING OF THE GLASS TUBES

S.V. Shalupaev, Y.V. Nikitjuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Выполнено моделирование процесса лазерного термораскалывания стеклянных изделий трубчатой формы. Расчеты термоупругих полей были выполнены для однолучевых и двухлучевых вариантов реализации технологии лазерного термораскалывания. Показано, что для практического использования целесообразно применение двухлучевого способа лазерной резки стеклянных трубок.

**Ключевые слова:** лазерная резка, двухлучевой метод, стекло.

Modelling of the process of laser thermosplitting of glass products of the tubular form is executed. Calculations of thermoelastic fields for one-beam and two-beam variants of realisation of technology of laser thermosplitting have been performed. It is shown, that for practical use the application of a two-beam way laser cutting of fragile glass tubes is expedient.

**Keywords:** laser cutting, dual-laser-beam method, glass.

### Введение

Важной разновидностью лазерного термораскалывания является разделение хрупких неметаллических материалов трубчатой формы. Резка стеклянных труб методом лазерного термораскалывания имеет перед традиционными способами ряд неоспоримых преимуществ, к которым в первую очередь следует отнести высокое качество получаемых торцевых поверхностей. Одни из первых результатов по лазерной резке стеклянных труб методом термораскалывания приведены в [1]. Развитие данной технологии привело к созданию целого ряда ее модификаций [2]–[3]. Нужно отметить, что во всех вышеперечисленных случаях разделение хрупких неметаллических материалов трубчатой формы было выполнено с использованием излучения с длиной волны 10,6 мкм. Полученные авторами положительные результаты использования двухлучевой технологии при разделении методом термораскалывания плоскопараллельных образцов создали предпосылки для проведения исследования влияния воздействия дополнительного лазерного излучения с длиной волны 1,06 мкм на процесс лазерного термораскалывания изделий трубчатой формы [4]–[5].

### 1 Постановка задачи

Анализ известных работ и собственные исследования позволили выделить несколько основных схем обработки, обеспечивающих приемлемые результаты при практическом использовании.

В соответствии с первой схемой стеклянная трубка подвергается лазерному нагреву в течение нескольких оборотов до образования разделяющей трещины.

При обработке по второй схеме в течение нескольких оборотов часть материала трубки нагревается лазерным излучением и одновременно на некотором удалении от зоны лазерного нагрева поверхность трубки охлаждается. При этом в материале формируется не сквозная лазерно-индуцированная трещина.

Использование третьей схемы предполагает, что трубка попадает в зону воздействия лазерного излучения, далее, совершив несколько оборотов вокруг своей оси, поверхность трубки подвергается воздействию хладагента, причем трубка продолжает вращение при одновременном воздействии лазерного излучения и хладагента (таким образом, третья схема является последовательным сочетанием первых двух).

Для расчета термоупругих полей был использован метод конечных элементов [6]. Моделирование проводилось для трубок из стекла С52. Так как величины теплофизических свойств стекла в значительной степени зависят от температуры, а при лазерном термораскалывании стеклоизделий трубчатой формы температура меняется в широких пределах, то в расчетах были учтены соответствующие зависимости [1]. Модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения и плотность приняты равными соответственно:  $E = 380$  ГПа,  $\nu = 0,222$ ,  $\alpha_T = 80 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\rho_0 = 3960 \text{ кг/м}^3$ .

При выполнении расчетов были использованы следующие параметры лазерных пучков: большая ось  $A=6 \cdot 10^{-3}$  м, малая ось  $B=1 \cdot 10^{-3}$  м для пучка с длиной волны излучения  $\lambda=10,6$  мкм и мощностью излучения  $P=15$  Вт; радиус пятна излучения  $YAG$  – лазера с мощностью излучения  $P0=40$  Вт составлял  $R=1 \cdot 10^{-3}$  м.

Расчеты проведены для трубки с внешним радиусом, равным 7 мм, внутренним радиусом, равным 6 мм, и длиной в осевом направлении 20 мм. Скорость вращения трубки относительно лазерных пучков принималась равной 45 оборотов в минуту. Считалось, что под действием хладагента обеспечивается охлаждение поверхности трубки с коэффициентом теплоотдачи, равным  $8000 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$  [7].

Моделирование резки трубок осуществлялось как для однолучевых вариантов обработки с использованием  $\text{CO}_2$  – лазера и  $YAG$  – лазера, так и для двулучевого варианта, сочетающего одновременное воздействие  $\text{CO}_2$  и  $YAG$  – лазеров. Для всех вариантов обработки были выполнены расчеты зависимости температуры и напряжений, действующих в осевом направлении трубки, от номера оборота для трех различных схем временной последовательности воздействия лазерного излучения и хладагента на обрабатываемое изделие (рисунки 1–6).

## 2 Анализ результатов

Сравнивая представленные на рисунках 1, 3, 5 расчетные зависимости температуры в фиксированных точках (1 – на внешней поверхности трубки; 2 – в середине стенки трубки; 3 – на внутренней поверхности трубки), можно сделать вывод о том, что дополнительное воздействие лазерного излучения с длиной волны 1,06 мкм не приводит к существенным изменениям характера этих зависимостей по сравнению с вариантом однолучевой обработки  $\text{CO}_2$ -лазером. Можно отметить небольшое увеличение значений максимальных температур при использовании каждой из схем двулучевой обработки по сравнению с соответствующими схемами однолучевой обработки  $\text{CO}_2$ -лазером, которое, как и следовало ожидать, в наибольшей степени проявляется в удаленных от поверхности слоях материала.

Анализируя рисунки 1 а, 1 б, 1 в, видим, что при многократном лазерном нагреве материала трубки, вращающейся вокруг своей оси относительно неподвижного лазерного луча (или лучей – при двулучевой обработке), температура в каждой точке ее внешней поверхности периодически резко повышается под воздействием лазерного излучения и плавно уменьшается вследствие относительно небольшой теплопроводности стекла. При этом наблюдается повышение максимальной температуры стекла. Нужно отметить, что в случае однолучевой обработки

$YAG$ -лазером, таким образом изменяется температура по всему объему трубки (рисунок 1 б).

При использовании второй схемы (рисунок 3), являющейся по своей сути схемой управляемого лазерного термораскалывания, примененной для обработки тел трубчатой формы, происходит многократный быстрый локальный нагрев обрабатываемой поверхности. Он чередуется с быстрым охлаждением, обусловленным воздействием хладагента. При этом практически отсутствует повышение максимальной температуры стекла. Таким образом, каждый оборот характеризуется практически одинаковыми изменениями температуры трубки.

Зависимости температуры от номера оборота, характерные для третьей схемы обработки (рисунок 5), на первом этапе характеризуются особенностями, аналогичными указанным ранее особенностям первой схемы: температура точек поверхности периодически резко увеличивается, а затем плавно уменьшается. При этом повышается максимальная температура образца. На втором этапе обработки зависимости температуры в точках поверхности трубки от номера оборота аналогичны наблюдаемым при использовании второй схемы: температура в точках поверхности периодически резко увеличивается, а затем резко уменьшается без изменения максимальной температуры. Описанное выше изменение температуры при использовании третьей схемы является следствием того, что эта схема обработки является последовательным сочетанием первых двух.

Сравнивая расчетные зависимости напряжений, действующих в осевом направлении трубки, от номера оборота при однолучевой обработке  $\text{CO}_2$ -лазером и при двулучевой обработке (рисунки 2 а, 4 а, 6 а и рисунки 2 в, 4 в, 6 в), можно сделать вывод о том, что при реализации однолучевого (с использованием  $\text{CO}_2$ -лазера) и двулучевого разделения основные особенности изменения осевых напряжений в фиксированных точках обрабатываемого материала с течением времени сохраняются. При этом дополнительным воздействием излучения  $YAG$ -лазера обусловлено значительное увеличение как растягивающих напряжений, так и напряжений сжатия, что в свою очередь обуславливает значительное увеличение вероятности инициирования и стабильного развития разделяющей микротрещины. Нужно отметить, что анализ рисунков 2 б, 4 б, 6 б позволяет сделать вывод о неэффективности самостоятельного использования излучения с длиной волны в 1,06 мкм для разделения методом термораскалывания стеклоизделий трубчатой формы. Данное обстоятельство обусловлено недостаточно высоким значением коэффициента поглощения силикатных стекол на этой длине волны.

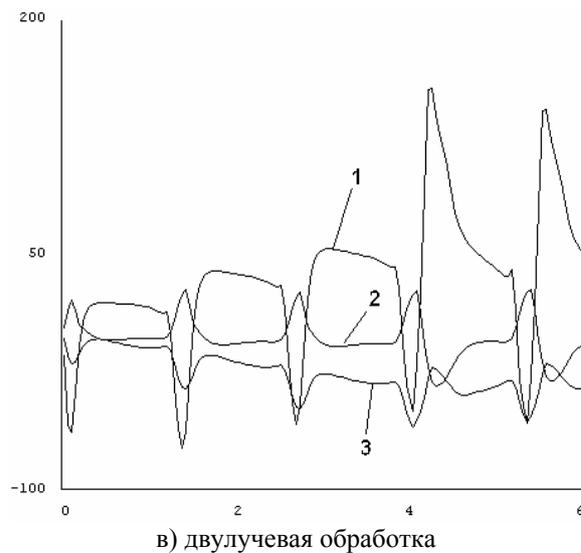
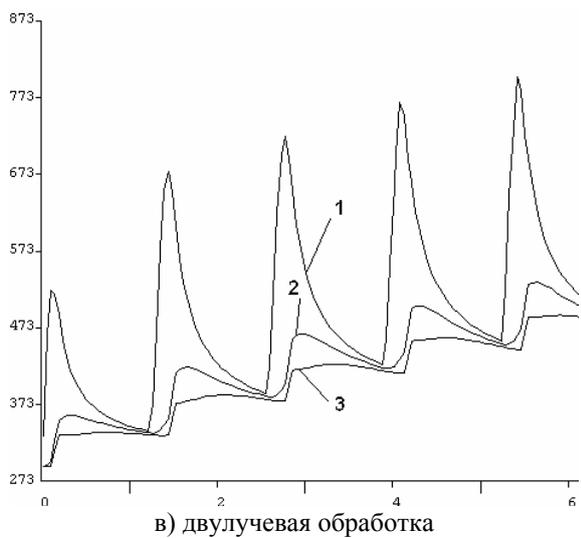
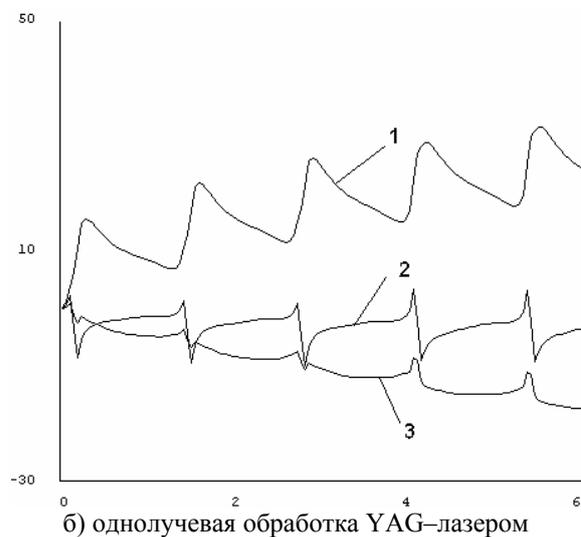
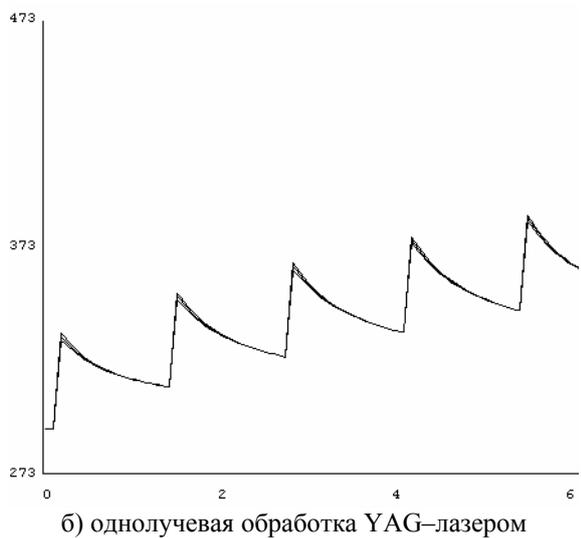
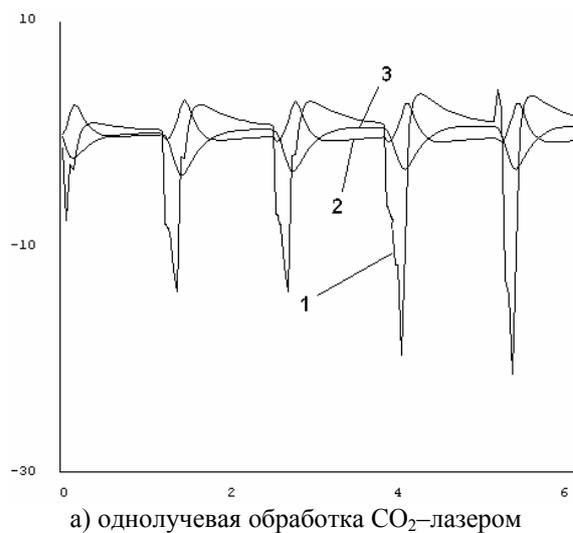
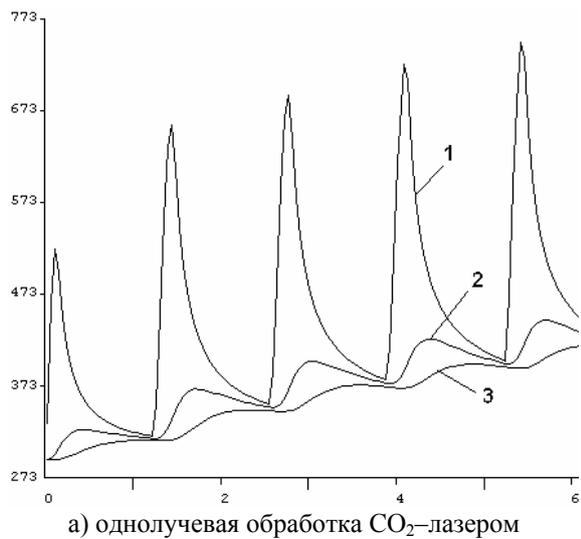
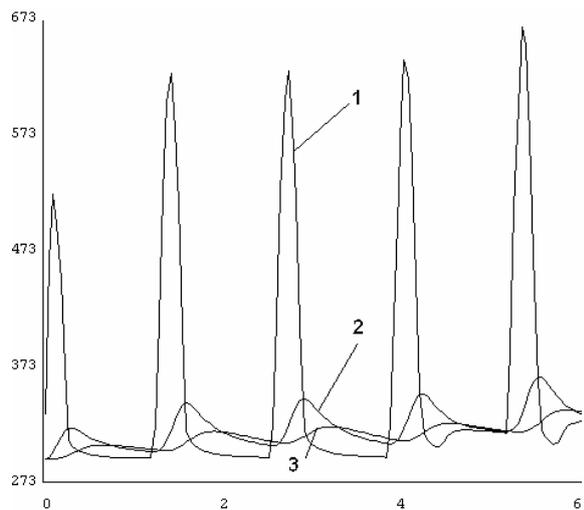
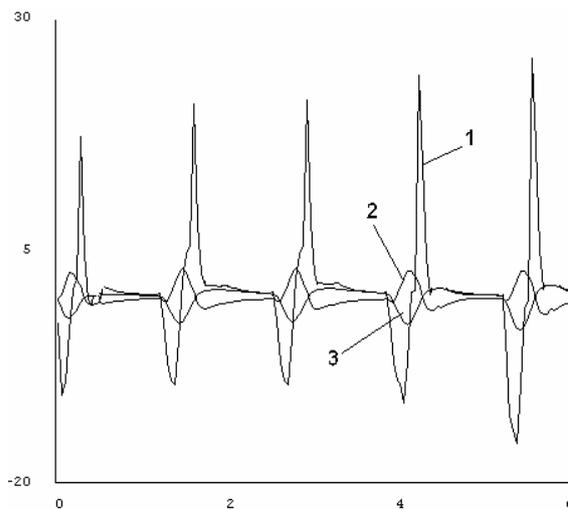


Рисунок 1 – Расчетные зависимости температуры в фиксированных точках от номера оборота при обработке по первой схеме, К

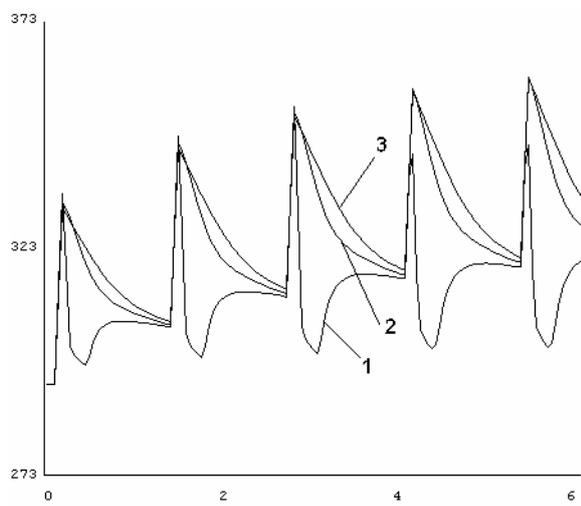
Рисунок 2 – Расчетные зависимости напряжений в фиксированных точках от номера оборота при обработке по первой схеме, МПа



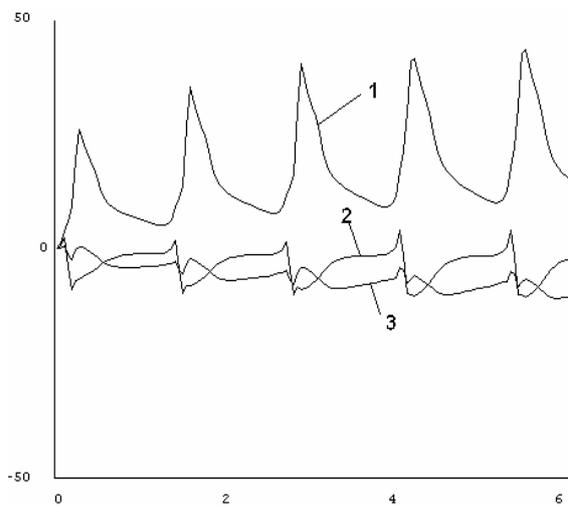
а) однолучевая обработка CO<sub>2</sub>-лазером



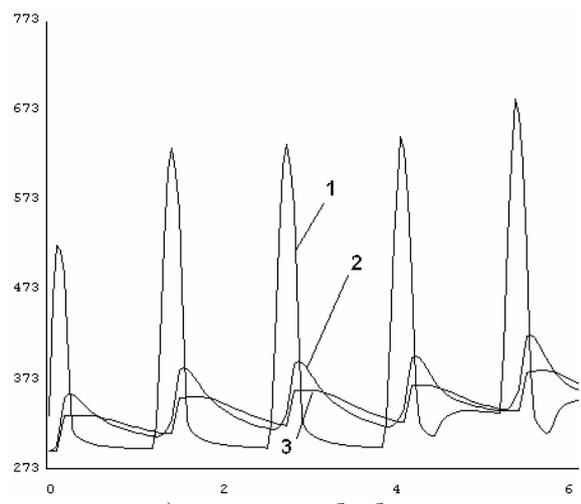
а) однолучевая обработка CO<sub>2</sub>-лазером



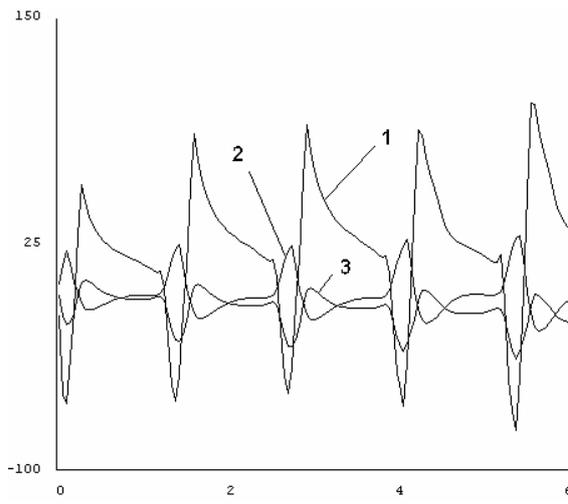
б) однолучевая обработка YAG-лазером



б) однолучевая обработка YAG-лазером



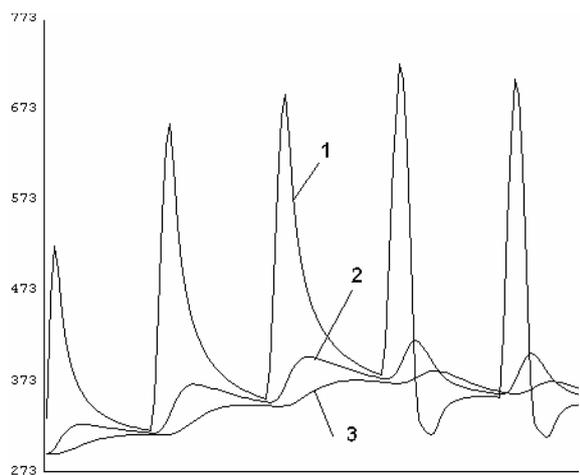
в) двулучевая обработка



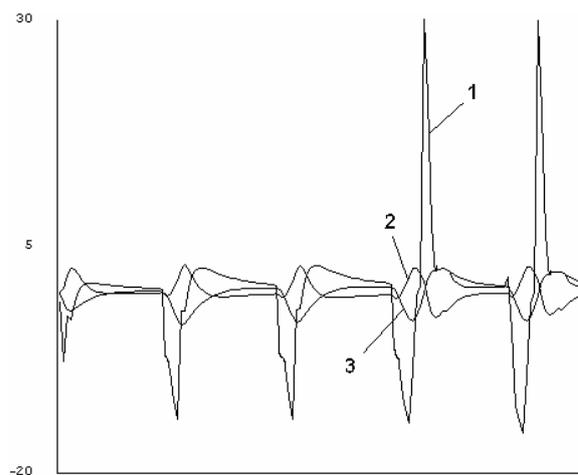
в) двулучевая обработка

Рисунок 3 – Расчетные зависимости температуры в фиксированных точках от номера оборота при обработке по второй схеме, К

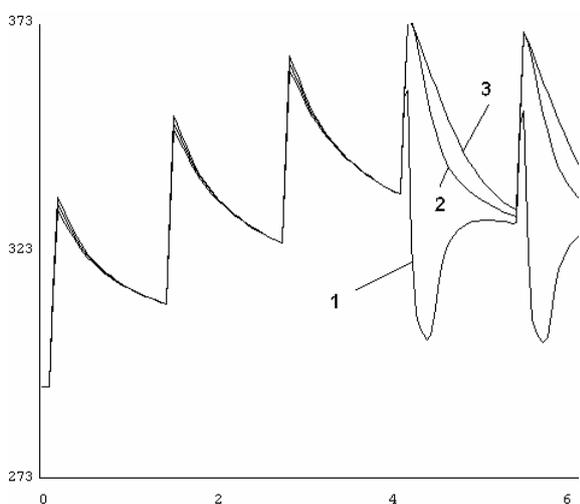
Рисунок 4 – Расчетные зависимости напряжений в фиксированных точках от номера оборота при обработке по второй схеме, МПа



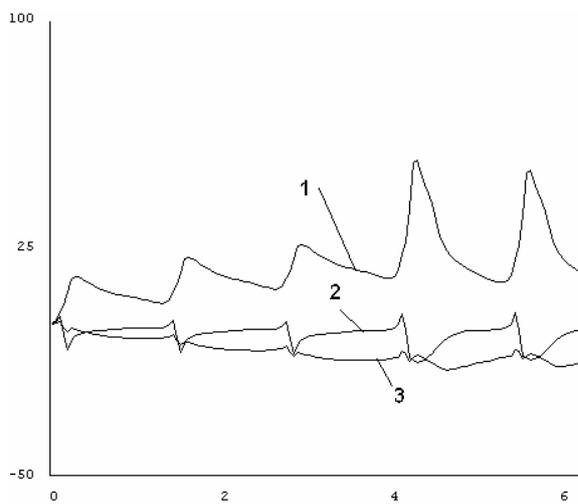
а) однолучевая обработка CO<sub>2</sub>-лазером



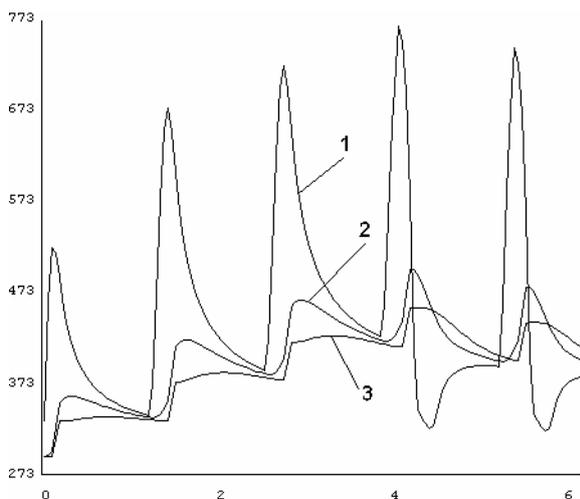
а) однолучевая обработка CO<sub>2</sub>-лазером



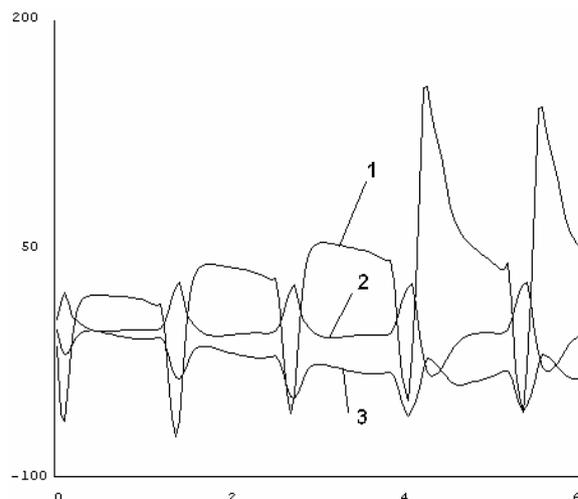
б) однолучевая обработка YAG-лазером



б) однолучевая обработка YAG-лазером



в) двулучевая обработка



в) двулучевая обработка

Рисунок 5 – Расчетные зависимости температуры в фиксированных точках от номера оборота при обработке по третьей схеме, К

Рисунок 6 – Расчетные зависимости напряжений в фиксированных точках от номера оборота при обработке по третьей схеме, МПа

Еще одной общей закономерностью зависимостей, полученных при численном моделировании, является то, что на внешней и внутренней поверхности стеклянной трубки формируются напряжения, одинаковые по знаку. При этом напряжения на внешней границе трубки значительно больше, чем на ее внутренней поверхности, а в слоях материала близких к середине стенки трубки, формируются напряжения, противоположные им по знаку.

При обработке по первой схеме (с многократным лазерным нагревом материала) имеет место последовательное чередование в точках поверхности трубки осевых напряжений растяжения и сжатия, сопровождаемое постепенным увеличением напряжений растяжения. Такое изменение напряжений обуславливает в итоге сквозное разделение трубки. Однако качество такого разделения часто недостаточно высокое.

При использовании второй схемы обработки на поверхности трубки практически после первого оборота возникают растягивающие напряжения, достаточные для формирования разделяющей трещины. В дальнейшем без существенных изменений периодически растягивающие осевые напряжения, которые возникают в зоне воздействия лазерного излучения, сменяются сжимающими напряжениями, формируемыми в зоне воздействия хладагента. При использовании данной схемы обеспечивается развитие несквозной разделяющей трещины, особенности формирования которой в целом такие же, как в процессе управляемого лазерного термораскалывания плоскопараллельных образцов. Полученные при использовании данной схемы торцевые поверхности характеризуются высоким качеством. Недостатком данной технологии является необходимость механического докола для получения окончательного изделия.

При использовании третьей схемы, являющейся последовательным сочетанием первых двух, как и температурные зависимости, зависимости осевых напряжений от номера оборота на первом этапе совпадают по характеру с зависимостями, полученными с применением первой схемы обработки, а на втором этапе – с зависимостями, полученными с применением второй схемы. При использовании третьей схемы обеспечивается получение сквозной трещины с высоким качеством получаемых поверхностей разделения. Таким образом, на практике наиболее

эффективно применение двулучевой обработки по схеме, в которой предварительный лазерный нагрев обрабатываемого материала в течение нескольких оборотов сочетается с совместным воздействием на материал вдоль контура обработки лазерного излучения и хладагента, обуславливающим формирование разделяющей трещины.

### Заключение

Наиболее эффективным методом разделения стеклоизделий трубчатой формы является двулучевая обработка по схеме, использующей предварительный лазерный нагрев обрабатываемого материала в течение нескольких оборотов с последующим формированием разделяющей микротрещины при совместном воздействии на контур обработки лазерного излучения и хладагента.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Мачулка, Г.А.* Лазерная обработка стекла. – М. : Сов. радио, 1979. – 136 с.
2. *Способ резки полых стеклоизделий:* пат. 2015118 РФ, МКИ 5 С03В33/00 / И.А. Орлов, В. С. Чадин ; – №4942111/33; заявл. 1991.06.17; опубл. 1994.06.30.
3. *Кондратенко, В.С.* Термораскалывание стеклянных трубок под действием лазерного излучения / В.С. Кондратенко, А.С. Танасейчук, Е. Б. Шершнев // Электронная техника. – 1986. – № 4. – С. 30–37.
4. *Двулучевое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов* / С.В. Шалупаев [и др.] // Оптический журнал. – 2005. – Т. 73, № 5. – С. 62–66.
5. *Шалупаев, С.В.* Лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов по замкнутым криволинейным контурам / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Оптический журнал. – 2008. – Т. 75, № 2. – С. 11–15.
6. *Шабров, Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л. : Машиностроение, 1983. – 212 с.
7. *Богуславский, И.А.* Высокопрочные закаленные стекла / И.А. Богуславский. – М. : Издательство литературы по строительству, 1969. – 208 с.

Поступила в редакцию 09.08.10.

УДК 512.542

## S - C - ПЕРЕСТАНОВОЧНО ПОГРУЖЕННЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Джианхонг Хуанг<sup>1</sup>, Фенгян Хие<sup>2</sup>, Хиолан Юи<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Китайский университет науки и технологии, Хэфей, Китай

<sup>2</sup>Аняннский педагогический университет, Анян, Китай

<sup>3</sup>Жейжянганский университет науки и технологии, Ханджоу, Китай

## S - C - PERMUTABLY EMBEDDED SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

Jianhong Huang<sup>1</sup>, Fengyan Xie<sup>2</sup>, Xiaolan Yi<sup>3</sup>

<sup>1</sup>University of Science and Technology of China, Hefei, China

<sup>2</sup>Anyang Normal University, Anyang, China

<sup>3</sup>Zhejiang of Science and Technology University, Hangzhou, China

Подгруппа  $H$  конечной группы  $G$  называется  $s$ -условно перестановочно погруженной (или более кратко,  $s$ - $c$ -перестановочно погруженной) в  $G$  если для каждого  $p \in \pi(H)$ , каждая силовская  $p$ -подгруппа группы  $H$  является силовской  $p$ -подгруппой некоторой  $s$ -условно перестановочной подгруппой группы  $G$ . В данной работе мы используем некоторые  $s$ - $c$ -перестановочно погруженные подгруппы для изучения структуры некоторых конечных групп. Обобщаются некоторые известные результаты.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $s$ -условно перестановочно погруженная подгруппа, формация, подгруппа Силова, максимальная подгруппа.

A subgroup  $H$  of a finite group  $G$  is said to be  $s$ -conditionally permutably embedded (or in brevity,  $s$ - $c$ -permutably embedded) in  $G$  if for each  $p \in \pi(H)$ , every Sylow  $p$ -subgroup of  $H$  is a Sylow  $p$ -subgroup of some  $s$ -conditionally permutably embedded subgroup of  $G$ . In this paper, we use some  $s$ - $c$ -permutably embedded subgroups to study the structure of some groups. Some known results are generalized.

**Keywords:** finite group,  $s$ -conditionally permutably embedded subgroup, formation, Sylow subgroup, maximal subgroup.

### Introduction

Throughout this paper, all groups considered are finite and  $G$  denotes a finite group. The terminology and notations are standard, as in [1] and [2].

Let  $A$  and  $B$  be subgroups of  $G$ .  $A$  is said to be permutable with  $B$  if  $AB = BA$ . If  $A$  is permutable with all subgroups of  $G$ , then  $A$  is said to be a permutable subgroup [1] (or quasinormal subgroup [3]) of  $G$ . The permutable subgroups have many interesting properties. For example, Ore [3] proved that every permutable subgroup of a finite group is subnormal. Itô and Szép [4] proved that for every permutable subgroup  $H$  of a finite group  $G$ ,  $H/H_G$  is nilpotent.

However, in general, two subgroups  $H$  and  $T$  of  $G$  may not be permutable in  $G$  but  $G$  maybe contain an element  $x$  such that  $HT^x = T^xH$ . Based on the observations, Guo, Shum and Skiba introduced the concept of conditionally permutable subgroup (in more general, the concept of  $X$ -permutable subgroup) [5]–[7]: let  $X$  be a non-empty subset of  $G$ . Then a subgroup  $A$  of  $G$  is said to be conditionally permutable ( $X$ -permutable) in  $G$  if for every subgroup  $T$  of  $G$ , there exists some  $x \in G$  ( $x \in X$

respectively) such that  $AT^x = T^xA$ . By using the conditionally permutable subgroups and  $X$ -permutable subgroups, authors have obtained some new elegant results on the structure of groups (cf. [5]–[8]).

By considering some local conditionally permutable subgroups, Huang and Guo [9] introduced the concept of  $s$ -conditionally permutable subgroup: a subgroup  $H$  of  $G$  is said to be  $s$ -conditionally permutable in  $G$  if, for every Sylow subgroup  $T$  of  $G$ , there exists some  $x \in G$  such that  $HT^x = T^xH$ . By Sylow's theorem, we see that a subgroup  $H$  of  $G$  is  $s$ -conditionally permutable in  $G$  if and only if for every  $p \in \pi(G)$ , there exists a Sylow  $p$ -subgroup  $T$  such that  $HT = TH$ . As a development of  $s$ -conditionally permutable subgroups, Chen and Guo [10] introduced the concept of  $s$ - $c$ -permutably embedded subgroups:

**Definition 0.1** [10, Definition 1.1]. A subgroup  $H$  of  $G$  is said to be  $s$ -conditionally permutably embedded (or in brevity,  $s$ - $c$ -permutably embedded) in  $G$  if every Sylow subgroup of  $H$  is a Sylow subgroup of some  $s$ -conditionally permutable subgroup of  $G$ .

Clearly, all permutable subgroups,  $s$ -permutable subgroups and  $s$ -conditionally permutable subgroups are  $s$ - $c$ -permutable embedded. But the converse is not true in general (see, for example, Example 1-2 in [10]).

The purpose of this paper is to go further into the influence of  $s$ - $c$ -permutable embedded subgroups on the structure of finite groups. Some new results are obtained and some known results are generalized.

### 1 Preliminary results

In this section, we give the related concepts and some basic results which are useful in the sequel.

**Lemma 1.1** [10, Lemma 2.2]. *Suppose that  $G$  is a group,  $KG$  and  $H \leq G$ . Then:*

- (1) *If  $H$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G$ , then  $HK/K$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G/K$ .*
- (2) *If  $K \leq H$  and  $H/K$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G/K$ , then  $H$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G$ .*
- (3) *If  $HK/K$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G/K$  and  $(|H|, |K|) = 1$ , then  $H$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G$ .*
- (4) *If  $H$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G$ , then  $H \cap K$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $K$ .*

**Lemma 1.2** [11, Lemma 3.1]. *Let  $N$  and  $L$  be normal subgroups in  $G$  such that  $P/L$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $NL/L$  and  $M/L$  is a maximal subgroup of  $P/L$ . If  $P_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $P \cap N$ , then  $P_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $N$  such that  $D = M \cap N \cap P_p$  is a maximal subgroup of  $P_p$  and  $M = LD$ .*

**Lemma 1.3** [12, Lemma 4.1]. *Let  $p$  be a prime dividing the order of  $G$ . Suppose that  $(|G|, p-1) = 1$  and the order of  $G$  is not divisible by  $p^3$  and  $G$  is  $A_4$ -free. Then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

**Lemma 1.4** [2, Theorem 1.8.17]. *Let  $N$  be a non-trivial normal subgroup of  $G$ . If  $N \cap \Phi(G) = 1$ , then the Fitting subgroup  $F(N)$  of  $N$  is the direct product of minimal normal subgroups of  $G$  which are contained in  $F(N)$ .*

**Lemma 1.5** [13, III, Lemma 3.3].

- i) *If  $N \trianglelefteq G$ ,  $U \leq G$  and  $N \leq \Phi(U)$ , then  $N \leq \Phi(G)$ .*
- ii) *If  $M \trianglelefteq G$ , then  $\Phi(M) \leq \Phi(G)$ .*

Recall that, a class  $\mathfrak{F}$  of groups is called a formation if it is closed under homomorphic image and subdirect product and every group  $G$  has a smallest normal subgroup (called  $\mathfrak{F}$ -residual) with quotient is in  $\mathfrak{F}$ . A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be saturated if it contains every group  $G$  with

$G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ . A class of groups  $\mathfrak{F}$  is said to be  $S$ -closed if every subgroup of  $G$  belongs to  $\mathfrak{F}$  whenever  $G \in \mathfrak{F}$ . We say a subgroup  $H$  of  $G$  is  $\mathfrak{F}$ -supplemented in  $G$  if  $G$  has a subgroup  $T \in \mathfrak{F}$  such that  $G = HT$ . In this case,  $T$  is said to be an  $\mathfrak{F}$ -supplement of  $H$  in  $G$ . In particular, if  $\mathfrak{F}$  is the class of all supersoluble groups ( $p$ -supersoluble groups), then an  $\mathfrak{F}$ -supplement is said to be a supersoluble supplement (a  $p$ -supersoluble supplement). We use  $\mathfrak{U}$  to denote the formation of all supersoluble groups. The following Lemma is obvious.

**Lemma 1.6.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a formation of groups. Suppose that a subgroup  $H$  of  $G$  has an  $\mathfrak{F}$ -supplement in  $G$ . Then:*

- (1) *If  $N \trianglelefteq G$ , then  $HN/N$  has an  $\mathfrak{F}$ -supplement in  $G/N$ .*
- (2) *If  $H \leq K \leq G$  and  $\mathfrak{F}$  is  $S$ -closed, then  $H$  has an  $\mathfrak{F}$ -supplement in  $K$ .*

**Lemma 1.7** [14, Lemma 2.3]. *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all supersoluble groups and  $G$  a group with a normal subgroup  $E$  such that  $G/E \in \mathfrak{F}$ . If  $E$  is cyclic, then  $G \in \mathfrak{F}$ .*

**Lemma 1.8** [15, Theorem 3.1]. *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation contained  $\mathfrak{U}$  and  $G$  has a soluble normal subgroup  $H$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$ . If for any maximal subgroup  $M$  of  $G$ , either  $F(H) \leq M$  or  $F(H) \cap M$  is a maximal subgroup of  $F(H)$ , then  $G \in \mathfrak{F}$ . The converse also holds, in the case where  $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ .*

**Lemma 1.9** [10, Theorem 3.2]. *Let  $G$  be a soluble group. If every maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of  $G$  having no supersoluble supplement in  $G$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G$ , then  $G$  is supersoluble.*

Recall that a subgroup  $H$  of  $G$  is said to be a 2-maximal subgroup of  $G$  if  $H$  is a maximal subgroup of some maximal subgroup  $M$  of  $G$ .

### 2 Main results

**Theorem 2.1.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing  $\mathfrak{U}$  and  $G$  a group. Then  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if  $G$  has a soluble normal subgroup  $H$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of  $H$  having no supersoluble supplement in  $G$  is  $s$ - $c$ -permutable embedded in  $G$ .*

*Proof.* The necessity is obvious. We only need to prove the sufficiency. Suppose that the assertion is false and let  $(G, H)$  be a counterexample with  $|G||H|$  is minimal. Then:

- (1)  $G/R \in \mathfrak{F}$ , where  $R$  is an arbitrary minimal normal subgroup of  $G$ .

Obviously,  
 $(G/R)/(HR/R) \cong G/HR \cong (G/H)/(HR/H) \in \mathfrak{F}$   
 and  $HR/R \cong H/(H \cap R)$  is soluble. Let  $P/R$  be a non-cyclic Sylow  $p$ -subgroup of  $HR/R$ , where  $p$  is any prime divisor of  $|HR/R|$ , and  $M/R$  a maximal subgroup of  $P/R$ . If  $P_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $P \cap H$ , then by Lemma 1.2,  $P_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $H$  such that  $L = M \cap H \cap P_p$  is a maximal subgroup of  $P_p$  and  $M = LR$ . Clearly,  $P_p$  is non-cyclic. By hypothesis, either  $L$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$  or  $L$  has a supersoluble supplement in  $G$ . By Lemma 1.1 and Lemma 1.6, either  $M/R = LR/R$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$  or  $M/R = LR/R$  has a supersoluble supplement in  $G$ . By the choice of  $G$ ,  $G/R \in \mathfrak{F}$ .

(2)  $G$  has a unique minimal normal subgroup  $N$ ,  $G = [N]M$ , where  $M$  is a maximal subgroup of  $G$ , and  $N = O_p(G) = F(G) = C_G(N)$  for some prime  $p$ .

Since  $\mathfrak{F}$  is a saturated formation, by (1),  $G$  has a unique minimal normal subgroup  $N$  and  $\Phi(G) = 1$ . Hence, there exists a maximal subgroup  $M$  of  $G$  such that  $G = [N]M$ . Since  $H$  is soluble,  $N$  is an elementary abelian  $p$ -group for some prime  $p$ . Clearly,  $N \leq O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$ . Let  $C = C_G(N)$ . It is easy to see that  $C \cap M \leq G$ . Hence  $C = C \cap NM = N(C \cap M) = N$ . Thus (2) holds.

(3)  $N$  is a non-cyclic Sylow  $p$ -subgroup of  $H$ .

By Lemma 1.1, Lemma 1.6 and Lemma 1.9, we know that  $H$  is supersoluble. By the choice of  $G$ ,  $H < G$ . Let  $q$  be the largest prime divisor of  $|H|$  and  $Q \in \text{Syl}_q(H)$ . Then  $Q = O_q(H) \leq G$ . Since  $N$  is the unique minimal normal subgroup of  $G$ ,  $q = p$ . Hence, by (2), we see that  $N \subseteq Q = O_p(H) \subseteq O_p(G) = N$ . By (1) and Lemma 1.7, we see that  $N$  is not cyclic. Thus (3) holds.

(4) Final contradiction.

Let  $G_p$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . Since  $N \not\leq \Phi(G)$ ,  $N \not\leq \Phi(G_p)$  by Lemma 1.5. So there exists a maximal subgroup  $P_1$  of  $G_p$  such that  $N \not\leq P_1$ . Clearly,  $N_1 = P_1 \cap N$  is a maximal subgroup of  $N$ . If  $N_1$  has a supersoluble supplement in  $G$ , then there exists a supersoluble subgroup  $T$  of  $G$  such that  $G = N_1T$ . It is easy to see that  $N \cap T \leq NT = G$ . Hence  $N \cap T = 1$  or  $N \cap T = N$ . If  $N \cap T = N$ , then  $G = N_1T = T$  is supersoluble, a contradiction. If  $N \cap T = 1$ , then  $N = N_1$ , which is impossible. Hence we assume that  $N_1$  is

$s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ , that is, there exists an  $s$ -conditionally permutable subgroup  $A$  of  $G$  such that  $N_1$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $A$ . In this case, for every  $q \in \pi(G)$  and  $q \neq p$ , there exists a Sylow  $q$ -subgroup  $Q$  of  $G$  such that  $AQ = QA$ . Then  $N_1 = N \cap P_1 = N \cap AQ \leq AQ$  and consequently  $Q \subseteq N_G(N_1)$ . On the other hand,  $N_1 = N \cap P_1 \leq G_p$ . Thus,  $N_1 \leq G$ . It follows that  $N \cap P_1 = 1$  and so  $|N| = p$ . Then by (1) and Lemma 1.7, we obtain that  $G \in \mathfrak{F}$ . This contradiction completes the proof.

**Theorem 2.2.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing  $\mathfrak{A}$  and  $G$  a group. Then  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if  $G$  has a soluble normal subgroup  $H$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of  $F(H)$  having no supersoluble supplement in  $G$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ .*

*Proof.* The necessity is obvious. We only need to prove the sufficiency. Suppose that the assertion is false and let  $(G, H)$  be a counterexample with  $|G||H|$  is minimal.

Let  $M$  be a maximal subgroup of  $G$ . If  $F(H) \not\subseteq M$ , then there exists a prime  $p$  dividing  $|F(G)|$  such that  $O_p(H) \not\subseteq M$ . Thus  $G = O_p(H)M$ . It is clear that  $\Phi(G) \cap F(H) = 1$ . If not, we choose a minimal normal subgroup  $R$  of  $G$  contained in  $\Phi(G) \cap F(H)$ , then  $(G/R, H/R)$  satisfies the hypothesis. The minimal choice of  $(G, H)$  implies that  $G/R \in \mathfrak{F}$ . Then, since  $\mathfrak{F}$  is a saturated formation, we have that  $G \in \mathfrak{F}$ , a contradiction. By Lemma 1.5,  $\Phi(O_p(H)) \subseteq \Phi(G) \cap F(H)$ . Hence  $\Phi(O_p(H)) = 1$ . It follows from [2, Theorem 1.8.17] that  $O_p(H)$  is an abelian  $p$ -group and consequently  $O_p(H) \cap M \leq G$ . If  $|O_p(H)| = p$ , then  $|F(H) : F(H) \cap M| = |G : M| = p$ . Hence by Lemma 1.8,  $G \in \mathfrak{F}$ . This contradiction shows that  $O_p(H)$  is a non-cyclic Sylow  $p$ -subgroup of  $F(H)$ . Let  $M_p$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $M$ . Then  $G_p = O_p(H)M_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . Let  $P_1$  be a maximal subgroup of  $G_p$  with  $M_p \subseteq P_1$  and  $P_2 = P_1 \cap O_p(H)$ . Then  $P_1 = P_1 \cap O_p(H)M_p = (P_1 \cap O_p(H))M_p = P_2M_p$  and  $P_2 \cap M_p = O_p(H) \cap M_p$ . Hence  $|O_p(H) : P_2| = |O_p(H)M_p : P_2M_p| = |G_p : P_1| = p$ , that is,  $P_2$  is a maximal subgroup of  $O_p(H)$ . Since  $O_p(H) \cap M \leq G$ ,  $P_2(O_p(H) \cap M)$  is a subgroup of  $O_p(H)$ . By the maximality of  $P_2$  in  $O_p(H)$ , we know that  $P_2(O_p(H) \cap M) = P_2$  or  $P_2(O_p(H) \cap M) = O_p(H)$ .

If  $P_2(O_p(H) \cap M) = O_p(H)$ , then  $G = O_p(H)M = P_2M$ . Since, obviously,  $O_p(H) \cap M = P_2 \cap M$ ,  $O_p(H) = P_2$ , a contradiction. Hence  $P_2(O_p(H) \cap M) = P_2$ . It follows that  $O_p(H) \cap M \subseteq P_2$ . Since  $O_p(H) \cap M \trianglelefteq G$ ,  $O_p(H) \cap M \subseteq (P_2)_G$ . If  $(P_2)_G \not\leq M$ , then  $G = (P_2)_G M = P_2M$  and  $O_p(H) = P_2(O_p(H) \cap M) = P_2$ , a contradiction. Hence,  $(P_2)_G \leq M$  and  $(P_2)_G = O_p(H) \cap M$ .

Suppose that  $P_2$  has a supersoluble supplement  $N$  in  $G$ , then  $G = P_2N = O_p(H)N$ . If  $O_p(H) \cap N \leq M$ , then  $O_p(H) \cap N \leq M \cap O_p(H) = (P_2)_G \leq P_2$ . Therefore,  $O_p(H) = P_2(O_p(H) \cap N) = P_2$ , a contradiction. It follows that  $O_p(H) \cap N \not\leq M$ .

Since  $O_p(H) \cap N \trianglelefteq G$  and  $M$  is maximal in  $G$ , we have that  $G = (O_p(H) \cap N)M$ . By the modular law,  $N = (O_p(H) \cap N)(M \cap N)$ . It follows that  $G = O_p(H)(M \cap N)$ . By the modular law again,  $M = (P_2)_G(M \cap N)$ . Hence,  $G = M(O_p(H) \cap N) = MN = (P_2)_G N$ .

If  $M \cap N$  is not maximal in  $N$ , then there exists a maximal subgroup  $N_1$  of  $N$  such that  $M \cap N < N_1$ . Let  $L = (P_2)_G N_1$ . Since  $(P_2)_G \leq M$ , it follows that  $(P_2)_G \cap N = (P_2)_G \cap (N \cap M) \leq (P_2)_G \cap N_1 \leq (P_2)_G \cap N$ . Hence,  $(P_2)_G \cap N = (P_2)_G \cap N_1 = (P_2)_G \cap (M \cap N)$ . Since  $G = (P_2)_G N$ ,  $L = (P_2)_G N_1$ ,  $M = (P_2)_G(M \cap N)$ , we have that  $M < L < G$ , a contradiction. Therefore,  $M \cap N$  is a maximal subgroup of  $N$ . Since  $N$  is supersoluble, it follows that  $|F(H) : F(H) \cap M| = |G : M| = |N : M \cap N| = p$ , a prime. This implies that  $F(H) \cap M$  is a maximal subgroup of  $F(H)$ . Then by Lemma 1.8, we obtain that  $G \in \mathfrak{F}$ , a contradiction.

Hence, by hypothesis,  $P_2$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ . Then there exists an  $s$ -conditionally permutable subgroup  $A$  of  $G$  such that  $P_2$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $A$ . Now, for every  $q \in \pi(G)$  and  $q \neq p$ , there exists a Sylow  $q$ -subgroup  $Q$  of  $G$  such that  $AQ \leq G$ . Because  $P_2 = AQ \cap O_p(H) \trianglelefteq AQ$ , we have that  $Q \subseteq N_G(P_2)$ . On the other hand, since  $P_2 = P_1 \cap O_p(H)P_1$  and  $O_p(H)$  is abelian,

$$G_p = O_p(H)M_p = O_p(H)P_1 \subseteq N_G(P_2).$$

Thus,  $P_2 \trianglelefteq G$ . This implies that  $P_2 = (P_2)_G \subseteq M$  and so  $O_p(H) \cap M = P_2 \cap M = P_2$ . It follows that

$$|F(H) : F(H) \cap M| = |G : M| = |O_p(H) : O_p(H) \cap M| = p.$$

This indicates that  $F(H) \cap M$  is a maximal subgroup of  $F(H)$ . By Lemma 1.8 again, we obtain

that  $G \in \mathfrak{F}$ . The final contradiction completes the proof.

**Theorem 2.3.** *A group  $G$  is  $p$ -supersoluble if and only if  $G$  has a normal  $p$ -soluble subgroup  $H$  such that  $G/H$  is  $p$ -supersoluble and every maximal subgroup of every Sylow  $p$ -subgroup of  $H$  having no  $p$ -supersoluble supplement in  $G$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ .*

*Proof.* The necessity is obvious. We only need to prove the sufficiency. Suppose that the assertion is false and let  $(G, H)$  be a counterexample with  $|G||H|$  is minimal. We proceed the proof via the following steps:

(1) If  $R$  is a minimal normal subgroup of  $G$ , then  $G/R$  is  $p$ -supersoluble.

Clearly,  $(G/R)/(HR/R) \cong G/HR \cong (G/H)/(HR/H)$  is  $p$ -supersoluble and  $HR/R \cong H/(H \cap R)$  is  $p$ -soluble. Let  $P/R$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $HR/R$  and  $M/R$  a maximal subgroup of  $P/R$ . If  $P_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $P \cap H$ , then by Lemma 1.2,  $P_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $H$  such that  $L = M \cap H \cap P_p$  is a maximal subgroup of  $P_p$  and  $M = LR$ . By hypothesis, either  $L$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$  or  $L$  has a  $p$ -supersoluble supplement in  $G$ . By Lemma 1.1 and Lemma 1.6, we see that either  $M/R = LR/R$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$  or  $M/R = LR/R$  has a  $p$ -supersoluble supplement in  $G$ . By the choice of  $(G, H)$ ,  $G/R$  is  $p$ -supersoluble.

(2)  $O_{p'}(G) = 1$  and  $G$  has a unique minimal normal subgroup  $N$  such that  $N = C_G(N) = O_p(G)\Phi(G)$  and  $|N| \neq p$ .

In fact, if  $O_{p'}(G) \neq 1$ , then, by (1),  $G/O_{p'}(G)$  is  $p$ -supersoluble. It follows that  $G$  is  $p$ -supersoluble, a contradiction. Hence,  $O_{p'}(G) = 1$ . Since the class of all  $p$ -supersoluble groups is a saturated formation,  $G$  has a unique minimal normal subgroup  $N$  and  $N \not\subseteq \Phi(G)$ . Obviously,  $N = C_G(N) = O_p(G)$ . By (1) and Lemma 1.7,  $|N| \neq p$ .

(3) If  $H \leq D \trianglelefteq G$  and  $D < G$ , then  $D$  is  $p$ -supersoluble.

It is clear that  $D/H$  is  $p$ -supersoluble and  $(D, H)$  satisfies the hypothesis by Lemma 1.1 (4) and Lemma 1.6. Hence, by the choice of  $(G, H)$ ,  $D$  is  $p$ -supersoluble.

(4) Let  $H_p$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $H$ . Then  $1 \neq H_p \neq N$  and so  $H_p$  is not normal in  $G$ .

By hypothesis, obviously,  $H_p \neq 1$ . If  $H_p = N$ , then, by (2),  $|H_p| > p$ . Since  $H_p \not\subseteq \Phi(G)$  and  $H_p \trianglelefteq G$ ,  $H_p \not\subseteq \Phi(G_p)$  by Lemma 1.5, where  $G_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . Hence, there exists a maximal subgroup  $P_1$  of  $G_p$  such that  $H_p \not\subseteq P_1$ . Let  $E = H_p \cap P_1$ . Then  $E$  is a maximal subgroup of  $H_p$ . If  $E$  has a  $p$ -supersoluble supplement  $T$  in  $G$ , then  $|G:T| \leq |E|$ . Since  $H_p T = ET = G$  and  $H_p$  is an abelian minimal normal subgroup of  $G$ ,  $G = [H_p]T$ . This implies that  $|G:T| = |H_p| > |E|$ , a contradiction. Hence  $E$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ , that is, there exists an  $s$ -conditionally permutable subgroup  $A$  of  $G$  such that  $E$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $A$ . So for every  $q \in \pi(G)$  and  $q \neq p$ , there exists a Sylow  $q$ -subgroup  $Q$  of  $G$  such that  $QA = AQ$ . Thus  $E = H_p \cap P_1 = H_p \cap AQ \trianglelefteq AQ$ . It follows that  $Q \leq N_G(E)$ . Besides,  $E = H_p \cap P_1 \trianglelefteq G_p$ . Therefore  $E \trianglelefteq G$ . This induces that  $E = 1$  and so  $|H_p| = p$ , a contradiction. Thus (4) holds.

(5)  $G = [N]M$ , where  $M$  is a  $p$ -supersoluble maximal subgroup of  $G$  such that  $p \nmid |M|$  and  $O_p(M) = 1$ .

By (1) and (2),  $G$  has a  $p$ -supersoluble maximal subgroup  $M$  such that  $G = [N]M$ . By [2, Lemma 1.7.11],  $O_p(G/C_G(N)) = O_p(G/N) = 1$ . Hence  $O_p(M) = 1$ . Assume that  $p \nmid |M|$ . Then  $p$  does not divide  $|G/N|$ . Since  $N \subseteq H$ ,  $H/N$  is a  $p'$ -group, which contradicts (4).

(6)  $H = G$ .

Assume that  $H \neq G$ . Consider the subgroup  $H \cap M$ . Since  $H = H \cap NM = N(H \cap M)$  and  $N \neq H$ ,  $H \cap M \neq 1$ . By (2) and (3),  $H$  is  $p$ -supersoluble and  $O_{p'}(H) = 1$ . It follows from [11, Lemma 3.3] that  $H$  is supersoluble. This implies that  $p$  is the largest prime divisor of  $|H|$  and so the Sylow  $p$ -subgroup  $P$  of  $H \cap M$  is normal in  $H \cap M$ . Hence  $P \text{ char } H \cap M \trianglelefteq M$ . Since  $O_p(M) = 1$ ,  $P = 1$ . It follows that  $N$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $H$ , which contradicts (4).

(7) Every maximal subgroup of every Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  has a  $p$ -supersoluble supplement in  $G$ .

Let  $G_p$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  and  $P_1$  a maximal subgroup of  $G_p$ . If  $N \subseteq P_1$ , then, by (5),  $P_1$  has a  $p$ -supersoluble supplement  $M$  in  $G$ . Assume that  $N \not\subseteq P_1$  and  $P_1$  is  $s$ - $c$ -permutably

embedded in  $G$ . Then there exists an  $s$ -conditionally permutable subgroup  $A$  of  $G$  such that  $P_1$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $A$ . By the same discussion as in (4), we obtain that  $P_1 \trianglelefteq G$  and consequently  $N \subseteq P_1$ , a contradiction.

(8) Final contradiction.

By (7) and [11, Theorem 3.4], we obtain that  $G$  is  $p$ -supersoluble. This final contradiction completes the proof.

**Theorem 2.4.** *Let  $p$  be the smallest prime dividing the order of a  $p$ -soluble group  $G$  and  $P$  a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . If every 2-maximal subgroup of  $P$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$  and  $G$  is  $A_4$ -free, then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

*Proof.* Suppose that the assertion is false and let  $G$  be a counterexample of minimal order. We proceed with our proof as follows:

(1)  $G/N$  is  $p$ -nilpotent, for every non-trivial normal subgroup  $N$  of  $G$ .

If some Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  is contained in  $N$ , then, obviously,  $G/N$  is  $p$ -nilpotent. Hence, we may assume that  $N$  does not contain any Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . Let  $PN/N$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $G/N$ , where  $P$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ , and  $M_2/N$  a 2-maximal subgroup of  $PN/N$ . It is easy to see that  $M_2 = PN \cap M_2 = (P \cap M_2)N$ . Let  $P_2 = P \cap M_2$ . Since  $P \cap M_2 \cap N = P \cap N$ ,  $p^2 = |PN/N : M_2/N| = |PN : (P \cap M_2)N| = |P : P_2|$ .

Hence  $P_2$  is a 2-maximal subgroup of  $P$  and  $M_2 = P_2N$ . By Lemma 1.1,  $M_2/N = P_2N/N$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G/N$ . This shows that  $G/N$  satisfies the hypothesis. The minimal choice of  $G$  implies that  $G/N$  is  $p$ -nilpotent.

(2)  $G$  has a unique minimal normal subgroup  $H = C_G(H)$  and  $\Phi(G) = 1$ .

Since the class of all  $p$ -nilpotent groups is a saturated formation,  $G$  has a unique minimal normal subgroup, say  $H$ , and  $\Phi(G) = 1$ . Because  $G$  is a  $p$ -soluble group,  $H$  is a  $p$ -group or a  $p'$ -group. If  $H$  is a  $p'$ -group, then  $G$  is  $p$ -nilpotent. Hence  $H$  is an elementary abelian  $p$ -group. Now, by the similar argument as in the proof (2) of Theorem 2.1, we can know that  $H = C_G(H)$ .

(3)  $|H| \geq p^2$ .

If  $|H| = p$ , then  $G/H = G/C_G(H) \lesssim \text{Aut}(H)$  is a cyclic group of order  $p-1$ . Since  $p$  is the smallest prime of  $|G|$ ,  $G = C_G(H)$ , that is,  $H \subseteq Z(G)$ . This induces that  $G$  is  $p$ -nilpotent, a contradiction. Thus (3) holds.

(4) Final contradiction.

By (2), we see that there exists a maximal subgroup  $M$  of  $G$  such that  $G=[H]M$ . Let  $M_p$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $M$ . Then  $G_p = M_p H$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . By Lemma 1.3, we see that  $|G_p| \geq p^3$ . Let  $G_0$  be a 2-maximal subgroup of  $G_p$  with  $M_p \subseteq G_0$  and  $H_1 = G_0 \cap H$ . Then  $|H : H_1| = |H : G_0 \cap H| = |HG_0 : G_0| = |G_p : G_0| = p^2$ . Hence  $H_1$  is a 2-maximal subgroup of  $H$ . By hypothesis,  $G_0$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ . Hence there exists an  $s$ -conditionally permutable subgroup  $A$  of  $G$  such that  $G_0$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $A$ . Let  $q$  be an arbitrary prime divisor of  $|G|$  with  $q \neq p$ . Since  $A$  is  $s$ -conditionally permutable in  $G$ , there exists a Sylow  $q$ -subgroup  $Q$  of  $G$  such that  $AQ = QA$ . As  $H_1$  is a 2-maximal subgroup of  $H$  and  $H_1 = G_0 \cap H \subseteq AQ \cap H \subseteq H$ , we have that  $H_1 = AQ \cap H$  or  $AQ \cap H = H$  or  $H_1 \subset AQ \cap H \subset H$ . If  $AQ \cap H = H$ , then  $H \subseteq AQ$  and so  $G_p = M_p H \subseteq AQ$ , which is clearly impossible. If  $H_1 \subset AQ \cap H \subset H$ , then  $AQ \cap H$  is a maximal subgroup of  $H$ . Let  $H_2 = AQ \cap H$ . Since  $H_2 = AQ \cap H \trianglelefteq AQ$  and  $H_2 \trianglelefteq H$ ,  $AQ \subseteq N_G(H_2)$  and  $G_p = G_0 H \leq AH \leq N_G(H_2)$ . This implies that  $H_2 \trianglelefteq G$ . However, because  $H$  is the minimal normal subgroup of  $G$ , we have that  $H_2 = 1$ . It follows that  $|H| = p$ , a contradiction. Hence  $H_1 = AQ \cap H \trianglelefteq AQ$ . It follows that  $AQ \subseteq N_G(H_1)$ . On the other hand, since  $H_1 = G_0 \cap H \trianglelefteq G_0$  and  $H$  is an abelian group,  $G_p = G_0 H \subseteq N_G(H_1)$ . This shows that  $H_1 \trianglelefteq G$ . Consequently,  $H_1 = 1$  and so  $|H| = p^2$ . It follows that  $|Aut(H)| = (p+1)p(p-1)^2$ . Since  $q > p$  and  $G/H = G/C_G(H) \lesssim Aut(H)$ ,  $q = p+1$ . This induces that  $p=2, q=3$ . Let  $x$  be an element of order 3. Thus  $[H]\langle x \rangle$  is a subgroup of  $G$ , which contradicts the fact that  $G$  is  $A_4$ -free. The final contradiction completes the proof.

**Remark 2.4.1.** In Theorem 2.4, we cannot omit the assumption that  $G$  is  $A_4$ -free in general. For example,  $G = A_4$ . It is clear that every 2-maximal subgroup of the Sylow 2-subgroups of  $G$  is the identity subgroup and of course, is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ . But  $G$  is not 2-nilpotent.

**Corollary 2.4.1.** *Let  $G$  be a soluble group. Suppose that for each prime divisor  $p$  of  $|G|$  and  $P \in Syl_p(G)$ , every 2-maximal subgroup of  $P$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$  and  $G$  is  $A_4$ -free, then  $G$  is a Sylow tower group (see [2, p. 49]).*

**Theorem 2.5.** *Let  $G$  be a group and  $N$  a soluble normal subgroup of  $G$  such that  $G/N$  is a Sylow tower group. If, for every prime  $p$  dividing the order of  $N$  and  $P \in Syl_p(N)$ , every 2-maximal subgroup of  $P$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$  and  $G$  is  $A_4$ -free, then  $G$  is a Sylow tower group.*

*Proof.* By Lemma 1.1 (4) and Corollary 2.4.1, we can see that  $N$  is a Sylow tower group by induction. Let  $r$  be the largest prime number in  $\pi(N)$  and  $R \in Syl_r(N)$ . Then  $R \text{ char } N \trianglelefteq G$  and so  $R \trianglelefteq G$ . By Lemma 1.1 (1) and induction,  $G/R$  is a Sylow tower group. Let  $q$  be the largest prime divisor of  $|G|$  and  $Q$  a Sylow  $q$ -subgroup of  $G$ . Then  $RQ/R \trianglelefteq G/R$  and thereby  $RQ \trianglelefteq G$ . If  $q=r$ , then, obviously,  $G$  is a Sylow tower group by induction. Hence, we assume that  $r < q$ .

Case 1.  $RQ < G$ . In this case,  $RQ$  is a Sylow tower group by Theorem 2.4 and induction. It follows that  $Q \trianglelefteq RQ$  and so  $Q \trianglelefteq G$ . Thus  $G$  is a Sylow tower group.

Case 2.  $G = RQ$ . Let  $L$  be a minimal normal subgroup of  $G$  with  $L \subseteq R$ . Then the quotient group  $G/L$  (with respect to  $N/L$ ) satisfies the hypothesis. Hence, by induction,  $G/L$  is a Sylow tower group. Since the class of all Sylow tower groups is a saturated formation,  $L \not\subseteq \Phi(G)$  and  $L$  is the unique minimal normal subgroup of  $G$  which is contained in  $R$ . Therefore,  $L = F(R) = R$  by Lemma 1.4. In particular,  $R$  is an elementary abelian group.

If  $R$  is a cyclic subgroup of order  $r$ , then  $r < q$  implies that  $G$  is  $r$ -nilpotent by [16, (10.1.9)] and so  $G = R \times Q$ . Hence  $G$  is a Sylow tower group. Now assume that  $|R| \geq r^2$ . Let  $R_1$  be a 2-maximal subgroup of  $R$ . By hypothesis,  $R_1$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ . Hence there exists an  $s$ -conditionally permutable subgroup  $A$  of  $G$  such that  $R_1$  is a Sylow  $r$ -subgroup of  $A$ . Then, for some  $Q_1 \in Syl_q(G)$ , we have  $AQ_1 \leq G$ . Since  $R_1 = R \cap AQ_1 \trianglelefteq AQ_1$ ,  $AQ_1 \subseteq N_G(R_1)$ . This implies that  $R_1 \trianglelefteq G$ . But, because  $R$  is the minimal normal subgroup of  $G$ , we have that  $R_1 = 1$  and so  $|R| = r^2$ . Since  $Q \subseteq Aut(R)$  and  $|Aut(R)| = (r+1)r(r-1)^2$ ,  $q=3$  and  $r=2$ , which contradicts the fact that  $G$  is  $A_4$ -free. The proof is completed.

### 3 Some applications of the results

Theorems 2.1–2.3 have many corollaries. We state only some special cases of theorem which can be found in the literature.

Theorem 2.1 immediately implies

**Corollary 3.1** (Huang, Guo [9]). Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all supersoluble groups. A group  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if there exists a soluble normal subgroup  $H$  of  $G$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of  $H$  is  $s$ -conditionally permutable in  $G$ .

**Corollary 3.2** (Chen, Guo [10]). Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all supersoluble groups. A group  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if  $G$  has a soluble normal subgroup  $H$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of every Sylow subgroup of  $H$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ .

Recall that, let  $X$  be a non-empty subset of  $G$ . Then a subgroup  $H$  of  $G$  is  $c$ -semipermutable ( $X$ -semipermutable) in  $G$  if there is a minimal supplement  $T$  of  $H$  in  $G$  such that  $H$  is  $T$ -permutable ( $X$ -permutable) with all subgroups of  $T$  (see [8], [17]). Clearly, if a subgroup  $H$  of  $G$  of prime power order is  $c$ -semipermutable ( $X$ -semipermutable) in  $G$ , then  $H$  is  $s$ -conditionally permutable in  $G$  and consequently is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ . Hence we immediately have the following corollary.

**Corollary 3.3** (Hu, Guo [17]). Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all supersoluble groups. A group  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if there exists a soluble normal subgroup  $H$  of  $G$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of every Sylow subgroup of  $H$  is  $c$ -semipermutable in  $G$ .

From Theorem 2.3, we have

**Corollary 3.4** (Zha, Guo, Li [18]). Let  $G$  be a  $p$ -soluble group. Then  $G$  is  $p$ -supersoluble if and only if  $G$  has a normal subgroup  $N$  such that  $G/N$  is  $p$ -supersoluble and every maximal subgroup of every Sylow  $p$ -subgroup of  $N$  having no  $p$ -supersoluble supplement in  $G$  is  $s$ -conditionally permutable in  $G$ .

From Theorem 2.2, we obtain

**Corollary 3.5** (Ramadan [19]). Let  $G$  be a soluble group. If all maximal subgroups of the Sylow subgroups of  $F(G)$  are normal in  $G$ , then  $G$  is supersoluble.

**Corollary 3.6** (Ramadan [19]). Let  $G$  be a soluble group, and  $E$  a normal subgroup of  $G$  such that  $G/E$  is supersoluble. If all maximal subgroups of the Sylow subgroups of  $F(E)$  are normal in  $G$ , then  $G$  is supersoluble.

**Corollary 3.7** (Asaad, Ramadan, Shaalan [20]). Suppose that  $G/H$  is supersoluble. If  $H$  is supersoluble and all maximal subgroups of any Sylow subgroup of  $F(H)$  are  $s$ -permutable in  $G$ , then  $G$  is supersoluble.

**Corollary 3.8** (Asaad [21]). Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing  $\mathfrak{U}$ . Suppose that  $G$  is a soluble group with a normal subgroup  $H$  such that

$G/H \in \mathfrak{F}$ . If all maximal subgroups of all Sylow subgroups of  $F(H)$  are  $s$ -permutable in  $G$ , then  $G \in \mathfrak{F}$ .

**Corollary 3.9** (Huang, Guo [9]). Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all supersoluble groups. A group  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if there exists a soluble normal subgroup  $H$  of  $G$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of  $F(H)$  is  $s$ -conditionally permutable in  $G$ .

**Corollary 3.10** (Chen, Guo [10]). Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all supersoluble groups. A group  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if there exists a soluble normal subgroup  $H$  of  $G$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of Sylow subgroups  $F(H)$  is  $s$ - $c$ -permutably embedded in  $G$ .

**Corollary 3.11** (Hu, Guo [17]). Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all supersoluble groups. A group  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if there exists a soluble normal subgroup  $H$  of  $G$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$  and every maximal subgroup of Sylow subgroups  $F(H)$  is  $c$ -semipermutable in  $G$ .

**Corollary 3.12** (Chen, Li [22]). A group  $G$  is supersoluble if and only if there exists a soluble normal subgroup  $H$  of  $G$  such that  $G/H$  is supersoluble and every maximal subgroup of every Sylow subgroup of the Fitting subgroup  $F(H)$  of  $H$  is  $F(H)$ -semipermutable in  $G$ .

## REFERENCES

1. Doerk, K. Finite Soluble Group / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin : Walter de Gruyter, New York, 1992.
2. Guo, W. The Theory of Class of Groups / W. Guo. – Beijing-New-York-Dordrecht-Boston : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.
3. Ore, O. Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5, № 2. – P. 431–460.
4. Itô, N. Über die Quasinormalteiler endlicher Gruppen / N. Itô, J. Szép // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168–170.
5. Guo, W. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Southeast Asian Bull. Math. – 2005. – Vol. 29, № 2. – P. 493–510.
6. Guo, W.  $X$ -quasinormal subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2004. – Vol. 48, №1. – P. 433–442.
7. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.
8. Guo, W.  $X$ -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.

9. Huang, J. *S*-conditionally permutable subgroups of finite groups / J. Huang, W. Guo // Chin. Ann. Math. – 2007. – Vol. 28A, № 1. – P. 17–26 (in chinese).
  10. Chen, S. *S*-*C*-Permutably Embedded Subgroups of Finite Groups / S. Chen, W. Guo // Int. J. Contemp. Math. Science. – 2008. – Vol. 3, № 20. – P. 951–960.
  11. Guo, W. *G*-covering systems of subgroups for classes of *p*-supersoluble and *p*-nilpotent finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2004. – Vol. 45, № 3. – P. 433–442.
  12. Wang, Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups *c*-supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 464–478.
  13. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
  14. Guo, W. On  $\mathfrak{F}$ -supplement subgroups of finite groups / W. Guo // Manuscripta Math. – 2008. – Vol. 127. – P. 139–150.
  15. Wang, Y. A generalization of Kramer's theorem and its applications / Y. Wang, H. Wei, Y. Li // Bull. Austral. Math. Soc. – 2002. – Vol. 65. – P. 467–475.
  16. Robinson Derek, J.S. A Course in the Theory of Groups / J.S. Robinson Derek. – New York-Heidelberg-Berlin : Springer-Verlag, 1982.
  17. Hu, B. *C*-semipermutable subgroups of finite groups / B. Hu, W. Guo // Siberian Math. J. – 2007. – Vol. 48, № 1. – P. 180–188.
  18. Zha, M. On *p*-supersolubility of finite groups / M. Zha, W. Guo, B. Li // J. of Math. (PRC). – 2007. – Vol. 20, № 5. – P. 563–568 (in chinese).
  19. Ramadan, M. Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group / M. Ramadan // Acta Math. Hungar. – 1992. – Vol. 59. – P. 107–110.
  20. Asaad, M. Influence of  $\pi$ -quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroups on a finite group / M. Asaad, M. Ramadan, A. Shaalan // Arch. Math. (Basel). – 1991. – Vol. 56. – P. 521–527.
  21. Asaad, M. On maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / M. Asaad // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26, № 11. – P. 3647–3652.
  22. Chen, G. The influence of *X*-semipermutability of subgroups on the structure of finite groups / G. Chen, J. Li // Science in China Series A: Mathematics. – 2009. – Vol. 52, № 2. – P. 261–271.
- Research is supported by NNSF Grant of China (Grant: 10771180).

Поступила в редакцию 23.07.10.

УДК 517.5

## ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СТРУКТУРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДАННОГО ОБОБЩЁННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ

Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## EQUIVALENT STRUCTURAL CHARACTERISTIC OF THE GIVEN GENERALIZED MODULUS OF SMOOTHNESS

G.N. Kazimirov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В этой статье доказывается эквивалентность обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига и  $K$ -функционала Петре.

**Ключевые слова:** оператор обобщённого сдвига Якоби, обобщённый модуль гладкости,  $K$ -функционал.

In this paper the equivalence of the  $k$ -th generalized modulus of smoothness determined with the help of the generalized shift operator and Peetres  $K$ -functional is proved.

**Keywords:** Jacobi generalized shift operator, generalized modulus of smoothness,  $K$ -functional.

### Введение

Хорошо известны прямая и обратная теоремы теории приближений о связи между модулями гладкости  $2\pi$ -периодических функций и их наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами. При рассмотрении непериодических функций уже не удаётся получить такие же связи между модулями гладкости функции и её наилучшими приближениями алгебраическими многочленами. Однако, если обычный модуль гладкости заменить некоторым обобщённым модулем гладкости, то остаются справедливыми прямая и обратная теоремы теории приближений. Некоторые из таких обобщённых модулей непрерывности, определяемых при помощи операторов обобщённого сдвига были предложены М.К. Потаповым. В настоящей работе рассматривается один из таких обобщённых модулей гладкости и доказывается его эквивалентность  $K$ -функционалу. С помощью этой эквивалентности, следуя методу  $K$ -функционала, введённому Я. Петре легко доказываются прямая и обратная теоремы теории приближений.

### 1 Основные определения и вспомогательные утверждения

Будем говорить, что  $f \in L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , если функция  $f$  измерима на отрезке  $[-1, 1]$  и

$$\|f\|_p = \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

а для  $p = \infty$  функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$  и  $\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$ . Через  $L_{p,\alpha}$  обозначим множество таких функций  $f$ , что

$$f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p \text{ и } \|f\|_{p,\alpha} = \|f(x)(1-x^2)^\alpha\|_p.$$

Определим оператор обобщённого сдвига

$$T_h(f, x) = \frac{1}{2} \left[ f(x \cosh + \sqrt{1-x^2} \sinh) + f(x \cosh - \sqrt{1-x^2} \sinh) \right].$$

Введём обозначения ( $r = 2, 3, \dots$ ):

$$\Delta_h^1(f, x) = T_h(f, x) - f(x),$$

$$\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x) = \Delta_{h_r}^1 \left( \Delta_{h_1, \dots, h_{r-1}}^{r-1}(f, x), x \right),$$

$$\tilde{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha} = \sup_{|h_i| \leq \delta, i=1, \dots, r} \left\| \Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x) \right\|_{p,\alpha},$$

$$D_x = \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx},$$

$D_x^0 = I$ , где  $I$ -тождественный оператор,

$D_x^1 = D_x$  и для  $k=2, 3, \dots$   $D_x^k = D_x^1(D_x^{k-1})$ . Через

$AD_{p,\alpha}^r$  обозначим множество таких функций  $g$ , что  $g$  имеет абсолютно непрерывную на каждом  $[a, b] \subset (-1, 1)$   $2r-1$  производную и  $D_x^l g \in L_{p,\alpha}$  для  $l=0, 1, 2, \dots, r$ .

Для  $f \in L_{p,\alpha}$  введём  $K$ -функционал Петре

по формуле:

$$K_r(f, \delta)_{p,\alpha} = \inf_{g \in AD_{p,\alpha}^r} \left\{ \|f - g\|_{p,\alpha} + \delta^{2r} \|D_x^r g(x)\|_{p,\alpha} \right\}.$$

Цель работы – доказать теорему об эквивалентности обобщённого модуля гладкости и  $K$ -функционала.

Доказательству теоремы предпослём несколько лемм.

**Лемма 1.** Пусть даны числа  $p, r$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Пусть число  $\alpha$  выбрано по правилу:

$$\alpha = \frac{1}{2p} \text{ при } 1 \leq p < \infty, \alpha = 0 \text{ при } p = \infty.$$

Тогда если  $f \in L_{p,\alpha}$ , то и  $T_t(f, x) \in L_{p,\alpha}$  и  $\|T_t(f, x)\|_{p,\alpha} \leq C_3 \|f\|_{p,\alpha}$ , где положительная постоянная  $C_3$  не зависит от  $f$  и  $t$ .

Лемма 1 доказана в [2].

**Лемма 2.** Пусть даны числа  $p, r$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Пусть число  $\alpha$  выбрано по правилу:

$$\alpha = \frac{1}{2p} \text{ при } 1 \leq p < \infty, \alpha = 0 \text{ при } p = \infty.$$

Тогда для  $g \in AD_{p,\alpha}^r$  и  $\delta \in [0, \pi]$  справедливо неравенство:

$$\tilde{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha} \leq C_4 \delta^{2r} \|D_x^r g(x)\|_{p,\alpha},$$

где положительная постоянная  $C_4$  не зависит от  $g$  и  $\delta$ .

Для  $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$  рассмотрим оператор

$$L_h(f, x) = \frac{2}{h^2} \int_0^h dw \int_0^w T_u(f, x) du,$$

Пусть  $L_h^1(f, x) = L_h(f, x)$ , а для  $k=2, 3, \dots$   $L_{h_1, \dots, h_k}^k(f, x) = L_{h_1}^{k-1}(L_{h_2}^{k-2} \dots L_{h_k}^1(f, x), x)$ .

**Лемма 3.** Пусть даны числа  $p, r$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Пусть число  $\alpha$  выбрано по правилу:  $\alpha = \frac{1}{2p}$  при  $1 \leq p < \infty$ ,  $\alpha = 0$  при  $p = \infty$ . Тогда если  $f \in L_{p,\alpha}$  то для любого  $k \in \mathbb{N}$   $L_h^k(f, x) \in AD_{p,\alpha}^k$ .

Лемма 2 и 3 доказаны в [3].

**Лемма 4.** Пусть  $g \in AD_{1, \frac{1}{2}}^k$ . Тогда для почти всех  $x \in [-1, 1]$  и всех  $t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $l = 1, 2, 3, \dots$  справедливо равенство:

$$D_x^k T_{t_1, \dots, t_l}^l(g, x) = T_{t_1, \dots, t_l}^l(D_x^k g, x).$$

Лемма 4 доказана в [3], стр. 26.

**Лемма 5.** Если  $f \in L_{1, -(1/2)}$ , то для любого  $k \in \mathbb{N}$  справедливо равенство:

$$D_x^k L_h^k(f, x) = \frac{2^k}{h^{2k}} \Delta_h^k(f, x).$$

Лемма 5 доказана в [3, с. 50].

**Лемма 6.** Если  $f \in L_{1, -(1/2)}$ , то для почти всех  $x \in [-1, 1]$  и для любых  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  справедливо равенство:

$$T_{t_1, t_2}^2(f, x) = T_{t_2, t_1}^2(f, x).$$

Лемма 6 доказана в [3, с. 32].

**2 Теорема об эквивалентности обобщенного модуля гладкости и K-функционала**

**Теорема.** Пусть даны числа  $p, r$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Пусть число  $\alpha$  выбрано по правилу:

$$\alpha = \frac{1}{2p} \text{ при } 1 \leq p < \infty, \alpha = 0 \text{ при } p = \infty.$$

Тогда для  $f \in L_{p,\alpha}$  справедливы неравенства:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha} \leq K_r(f, \delta)_{p,\alpha} \leq C_2 \tilde{\omega}(f, \delta)_{p,\alpha},$$

где положительные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $f$  и  $\delta$ .

**Доказательство.** Используя лемму 1 и лемму 2 имеем для  $g \in AD_{p,\alpha}^r$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha} &\leq \tilde{\omega}(f - g, \delta) + \tilde{\omega}(g, \delta) \leq \\ &\leq C_5 \|f - g\|_{p,\alpha} + C_6 \delta^{2r} \|D_x^r g(x)\|_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

где  $C_5$  и  $C_6$  не зависят от  $f, g$  и  $\delta$ .

Переходя к точной верхней грани по  $g \in AD_{p,\alpha}^r$ , получим:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha} \leq K_r(f, \delta)_{p,\alpha}.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$$A_h^r(f, x) = E - (E - L_h^r)^r(f, x),$$

где  $E(f, x) = f(x)$ .

Из леммы 3 следует, что  $L_h^k(f, x) \in AD_{p,\alpha}^k$ . Нетрудно проверить, что  $AD_{p,\alpha}^l \subset AD_{p,\alpha}^r$  при  $l \geq r \geq 1$ ,  $l = r, r+1, \dots$ . Поэтому  $A_h^r(f, x) \in AD_{p,\alpha}^r$ . Так как  $L_h^r$  имеет абсолютно непрерывную производную на каждом  $[a, b] \subset (-1, 1)$ , то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, лемму 4, обобщенное неравенство Минковского и лемму 1, имеем для  $l = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} &\|D_x^r (L_h^r)^l(f, x)\|_{p,\alpha} \leq \\ &\leq \frac{2}{h^2} \int_0^h dw \int_0^w \|T_u(D_x^r (L_h^{r-1})^l(f, x))\|_{p,\alpha} du \leq \\ &\leq C_7 \|D_x^r L_h^{r-1}(f, x)\|_{p,\alpha} \leq \dots \leq C_8 \|D_x^r L_h^r(f, x)\|_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Так как  $A_h^r(f, x)$  представляет собой сумму произведений  $L_h^r(f, x)$ , то

$$\|D_x^r A_h^r(f, x)\|_{p,\alpha} \leq C_9 \|D_x^r L_h^r(f, x)\|_{p,\alpha}.$$

Применяя лемму 5, имеем

$$\begin{aligned} h^{2r} \|D_x^r A_h^r(f, x)\|_{p,\alpha} &= h^{2r} \|D_x^r L_h^r(f, x)\|_{p,\alpha} \leq \\ &\leq C_{11} \|\Delta_h^r(f, x)\|_{p,\alpha} \leq \\ &\leq C_{12} \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^r(f, x)\|_{p,\alpha} \leq \\ &\leq C_{13} \tilde{\omega}_r(f, h)_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как

$$E - L_h^r = (E - L_h)(E + L_h + \dots + L_h^{r-1}),$$

то из определения  $L_h(f, x)$ , обобщённого неравенства Минковского и леммы 1 следует, что при

$$0 \leq h \leq \frac{\pi}{2} \quad \|L_h(f, x)\|_{p, \alpha} \leq C_{14} \|f\|_{p, \alpha}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|(E-L_h)(g, x)\|_{p, \alpha} &\leq C_{15} \|(E-L_h)(g, x)\| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq u \leq h} \|\Delta_u(g, x)\|_{p, \alpha}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из леммы 6 следует, что

$$T_i(L_h(f, x), x) = L_h(T_i(f, x), x).$$

Поэтому из неравенства (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} \|f(x) - A_h^r(f, x)\|_{p, \alpha} &\leq \\ &\leq C_{16} \sup_{0 \leq u_1 \leq h} \sup_{0 \leq u_2 \leq h} \dots \sup_{0 \leq u_r \leq h} \|\Delta_{u_1, u_2, \dots, u_r}^r(f, x)\|_{p, \alpha} \leq \\ &\leq C_{17} \tilde{\omega}_r(f, h)_{p, \alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом для  $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$

$$K_r(f, \delta)_{p, \alpha} \leq C_{18} \tilde{\omega}(f, \delta)_{p, \alpha}.$$

Пусть  $I_h = \{ \|f - A_1^r(f, x)\|_{p, \alpha} + h^{2r} \|D_x^r A_1^r(f, x)\|_{p, \alpha} \}$ .

По доказанному выше для  $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$

$$I_h \leq C_{19} \tilde{\omega}(f, 1)_{p, \alpha} \text{ и для } \frac{\pi}{2} \leq h \leq \pi$$

$$I_h \leq C_{20} I_1 \leq C_{21} \tilde{\omega}(f, 1)_{p, \alpha} \leq C_{22} \tilde{\omega}_r(f, h)_{p, \alpha}.$$

Итак, для любого  $\delta \in [0, \pi]$

$$K_r(f, \delta)_{p, \alpha} \leq C_{23} \tilde{\omega}(f, \delta)_{p, \alpha}.$$

Теорема полностью доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Казимиров, Г.Н.* Об одном подходе к упрощению модели сложного процесса на основе алгебраических многочленов / Г.Н. Казимиров // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – № 6 (15). – 2002. – С. 171–174.

2. *Потапов, М.К.* О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения / М.К. Потапов // Труды МИАН СССР. – 1975. – Том 134. – С. 260–277.

3. *Казимиров, Г.Н.* Приближение алгебраическими многочленами функций с данным  $k$ -м обобщённым модулем гладкости : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Г.Н. Казимиров // Москва, 1995. – 106 с.

Поступила в редакцию 20.07.10.

УДК 531.3

## СТАТИКА ГИБКОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ПОДВЕСА

Ю.А. Кашин<sup>1</sup>, М.И. Жадан<sup>1</sup>, Р.Е. Кашина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

## STATICS OF FLEXIBLE TRIANGULAR SUSPENSION

Y.A. Kashin<sup>1</sup>, M.I. Zhadan<sup>1</sup>, R.E. Kashina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel

<sup>2</sup>P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Получена система нелинейных уравнений, описывающих состояние статического равновесия гибкого треугольного подвеса в плоском силовом поле, компланарном плоскости неизменного треугольника кинематических связей.

**Ключевые слова:** гибкий треугольный подвес, статическое равновесие, кинематические связи, нерастяжимая гибкая нить.

The system of the nonlinear equations describing the condition of static balance of the flexible triangular suspension in a plane force field, coplanar to the plane of the constant triangle of kinematic relations is received.

**Keywords:** flexible triangular suspension, static balance, kinematic relations, not extensible flexible string.

### Введение

Гибким треугольным подвесом тела  $T_B$  к условно неподвижному телу  $T_A$  называем систему двух тел, кинематически связанных двумя напряженными ветвями или отрезками гибкой нити, именуемых поводками, три точки крепления которых к обоим телам являются вершинами действительного  $\Delta PCQ$ , вершины  $P$  и  $Q$ , которого закреплены на подвешенном теле  $T_B$ , а вершина  $C$  – на несущем теле  $T_A$  (рисунок 1).

### 1 Постановка задачи исследования

Целью настоящей работы является изучение состояния статического равновесия гибкого треугольного подвеса в плоском силовом поле, компланарном плоскости треугольника кинематических связей этого подвеса –  $\Delta PCQ$ . Поводки будем рассматривать кусками гибкой нерастяжимой нити [1], [2], концы которых плотно защемлены на телах  $T_A$  и  $T_B$ .

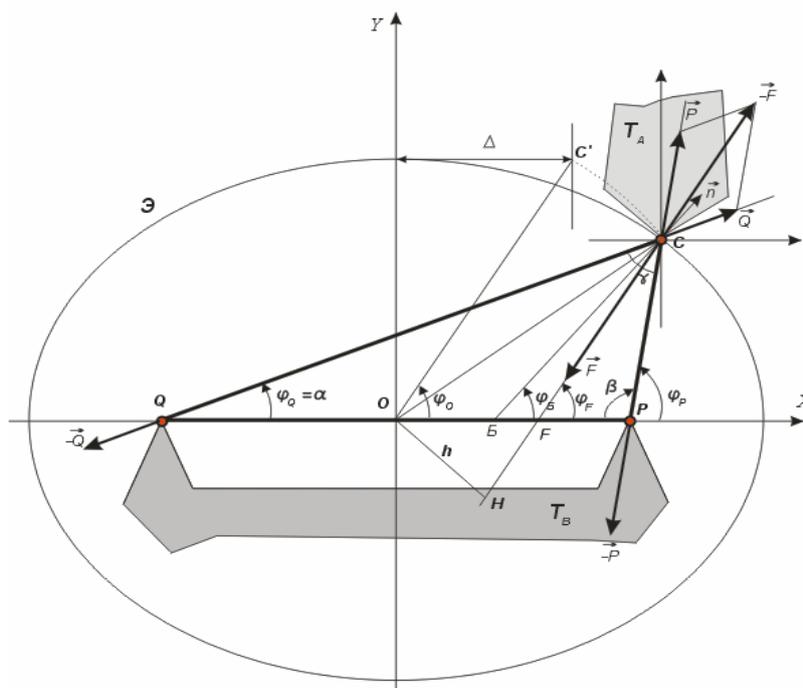


Рисунок 1 – Кинематическая схема гибкого треугольного подвеса тела  $T_B$  к телу  $T_A$

Пусть  $2c$  – длина отрезка  $PQ$ , стягивающего точки крепления поводков на подвешенном теле  $T_B$ ,  $p$  и  $q$  – длины поводков  $PC$  и  $QC$  соответственно,  $p \leq q$  и пусть

$$|\overline{PC}| \leq p, \quad |\overline{QC}| \leq q,$$

где знакам строгого равенства соответствуют строго прямолинейные формы поводков, приобретаемые ими в напряженном состоянии под действием соответствующих концевых растягивающих сил (рисунок 1),

$$P > 0, \quad Q > 0. \quad (1.1)$$

Справедливым считаем и обратное: концевым растягивающим силам поводков, удовлетворяющим условиям (1.1), соответствуют напряженные состояния поводков, их строгая прямолинейность, определенность и неизменность формы и размеров фигуры, образованной  $\Delta PCQ$  и сечением тела  $T_B$  плоскостью этого треугольника.

Положим, что

$$\Delta = \frac{q-p}{2}, \quad (1.2)$$

$$a = \frac{q+p}{2} = const. \quad (1.3)$$

При этом, в силу принятых соглашений и известных свойств треугольников, необходимо выполняются следующие неравенства

$$0 \leq \Delta < c < a. \quad (1.4)$$

Положим также, что

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (1.5)$$

и, что

$$c < b < a. \quad (1.6)$$

Размеры  $p$ ,  $q$  и  $c$ , удовлетворяющие (1.2)–(1.6), будем называть базовыми размерами обсуждаемого бифилярного подвеса, соответствующий  $\Delta PCQ$  – базовым треугольником подвеса, а его плоскость – базовой плоскостью подвеса.

## 2 Решение задачи

Предполагаем, что на тело  $T_B$  действует некоторая определенная система внешних сил  $\overline{F}_k, k = \overline{1, n}$ , линии действия которых лежат в базовой плоскости подвеса, что под действием этой плоской системы сил тело  $T_B$  и удерживающие его поводки занимают такое статическое положение, при котором линия действия построенного в точке  $C$  главного вектора данной системы внешних сил

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k,$$

пересекает отрезок  $PQ$  в его некоторой точке  $F$  и при этом реактивные силы  $\overline{P}$  и  $\overline{Q}$  натяжения поводков телом  $T_A$  уравнивают данную систему внешних сил:

$$\overline{F} + \overline{P} + \overline{Q} = 0. \quad (2.1)$$

Предполагая, что все эти условия выполнены и тело  $T_B$  находится в покое, свяжем с ним систему декартовых координат  $OXYZ$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , плоскость  $OXY$  которой совместим с плоскостью  $\Delta PCQ$ , ось  $OX$  – с линией основания  $PQ$  этого треугольника, а его центральную точку  $O$  примем началом системы координат. В этих условиях вершинами  $\Delta PCQ$  являются точки  $P(c, 0, 0)$ ,  $C(X_C, Y_C, 0)$ ,  $Q(-c, 0, 0)$ , координаты которых связаны следующими уравнениями:

$$q = a + \Delta = \sqrt{(X_C + c)^2 + Y_C^2}$$

$$p = a - \Delta = \sqrt{(X_C - c)^2 + Y_C^2}.$$

Следовательно,

$$2a = \sqrt{(X_C + c)^2 + Y_C^2} + \sqrt{(X_C - c)^2 + Y_C^2} = Const, \quad (2.2)$$

$$2\Delta = \sqrt{(X_C + c)^2 + Y_C^2} - \sqrt{(X_C - c)^2 + Y_C^2}. \quad (2.3)$$

Замечаем, что равенства (2.2) являются аналитическим выражением классического определения эллипса  $\mathcal{E}$  геометрическим местом точек  $C(X_C, Y_C)$  плоскости  $OXY$ , сумма расстояний которых до точек  $P(c, 0)$  и  $Q(-c, 0)$ , именуемых фокусами эллипса, постоянна и равна длине его большей оси  $2a$ .  $\Delta PCQ$  и эллипс  $\mathcal{E}$ , однозначно определяемые базовыми размерами  $p$ ,  $q$  и  $c$  данного бифилярного подвеса, условимся называть его базовым треугольником кинематических связей и его базовым эллипсом. Плоскость их расположения  $OXY$  назовем базовой плоскостью подвеса. Каноническое уравнение эллипса  $\mathcal{E}$

$$\frac{X_C^2}{a^2} + \frac{Y_C^2}{b^2} = 1 \quad (2.4)$$

получается исключением радикалов в уравнении (2.3) и его последующими преобразованиями. Абсциссу точки  $C$  находим перемножением обеих частей равенств (2.2) и (2.3):

$$X_C = \frac{a\Delta}{c}. \quad (2.5)$$

Это значение подставляем в уравнение (2.4) и, решая его, получаем ординату точки  $C$ :

$$Y_C = \pm \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \Delta^2}, \quad (2.6)$$

где, для определенности выбора точки  $C$  сохраняем знак плюс (+).

Уравнение пучка прямых плоскости  $OXY$ , проходящих через точку  $C\left(\frac{a\Delta}{c}, \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \Delta^2}\right)$ ,

имеет вид:

$$Y - \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \Delta^2} = k \left( X - \frac{a\Delta}{c} \right), \quad (2.7)$$

где

$$k = tg\varphi \quad (2.8)$$

– угловой коэффициент соответствующей прямой данного семейства,  $\varphi$  – ее угол наклона к оси  $OX$ .

Если некоторая прямая  $\Pi$  этого семейства ось  $OX$  пересекает в определенной точке  $D(d, 0)$  основания  $PQ \Delta PCQ$  при  $d \in [-c, c]$ , то условимся обозначать  $k_D$  ее угловой коэффициент,  $\varphi_D$  – ее угол наклона к оси  $OX$ , и, удовлетворяя уравнениям (2.7) и (2.8), будем считать, что

$$k_D = tg\varphi_D = \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - cd}.$$

В соответствии с этим правилом устанавливаем, что для линий действия сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  и  $\vec{F}$ , являющихся прямыми этого же семейства и проходящих через точки  $P(c, 0)$ ,  $Q(-c, 0)$ ,  $F(f, 0)$ , угловые коэффициенты, соответственно, равны

$$k_P = tg\varphi_P, \quad k_Q = tg\varphi_Q \quad \text{и} \quad k_F = tg\varphi_F$$

и что их углы наклона к оси  $OX$  определяются значениями

$$\varphi_P = \arctg \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - c^2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\varphi_Q = \arctg \frac{-b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta + c^2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

и при  $f \in [-c, c]$

$$\varphi_F = \arctg \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - fc} \in [\varphi_P, \varphi_Q].$$

В то же время, основываясь на известных свойствах углов треугольников, заключаем, что

$$\varphi_Q = \varphi_P + \gamma.$$

Внутренний угол  $\gamma \Delta PCQ$  при его вершине  $C$ , образованный линиями действия сил  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  находим на основании теоремы косинусов и устанавливаем, что

$$\gamma = \arccos \frac{c^2 - b^2 - \Delta^2}{a^2 - \Delta^2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Удовлетворяя представленным зависимостям, угол  $\varphi_F$  выразим линейной комбинацией его предельных значений  $\varphi_P$  и  $\varphi_Q$ :

$$\varphi_F = \lambda\varphi_Q + (1 - \lambda)\varphi_P = \varphi_P + \lambda\gamma,$$

где  $\lambda \in [0, 1]$  – неопределенный множитель Лагранжа. Легко заметить, что при  $\lambda = \frac{1}{2}$  угол наклона к оси  $OX$  силы  $\vec{F}$  равен

$$\varphi_F = \varphi_P + \gamma/2 = \varphi_Q - \gamma/2,$$

следовательно, он совпадает с углом наклона  $\varphi_B$  биссектрисы  $CB$  угла  $\gamma$ , которая, как известно из планиметрии [3], своей точкой  $B(b, 0)$  пересечения основания  $PQ$  базового  $\Delta PCQ$  делит

его на отрезки  $PB$  и  $BQ$ , пропорциональные длинам прилегающих боковых сторон  $PC$  и  $QC$  этого треугольника:

$$\frac{QB}{BP} = \frac{c + b}{c - b} = \frac{q}{p} = \frac{a + \Delta}{a - \Delta}.$$

Из этих уравнений находим значение  $b = \frac{\Delta c}{a}$  и вычисляем угловой коэффициент биссектрисы  $CB$

$$k_B = tg\varphi_B = \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - cb} = \frac{ab\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{\Delta(a^2 - c^2)} = \frac{a\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{\Delta b}.$$

Затем, используя зависимости (2.5) и (2.6), при  $\Delta \in [-c, c]$  определяем угловой коэффициент  $k_n$  нормали базового эллипса  $\mathcal{E}$  в его точке  $C$  и устанавливаем, что:

$$k_n = tg\varphi_n = -\frac{dX_c}{dY_c} = \frac{a\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{b\Delta} = k_B.$$

Этот результат означает, что биссектриса  $CB$  угла  $\gamma$ , образованного при вершине  $C$  базового  $\Delta PCQ$  поводками  $PC$  и  $QC$ , совпадает с нормалью базового эллипса  $\mathcal{E}$  в его точке  $C$ .

Располагая углами ориентации векторов  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  и  $\vec{F}$ , представим их в координатной форме в виде:

$$\vec{P} = P(\vec{i} \cos \varphi_P + \vec{j} \sin \varphi_P),$$

$$\vec{Q} = Q(\vec{i} \cos \varphi_Q + \vec{j} \sin \varphi_Q),$$

$$\vec{F} = F(\vec{i} \cos \varphi_F + \vec{j} \sin \varphi_F).$$

Эти значения подставляем в уравнение (2.1), проектируя его на оси координат, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} F \cos \varphi_F = P \cos \varphi_P + Q \cos \varphi_Q \\ F \sin \varphi_F = P \sin \varphi_P + Q \sin \varphi_Q. \end{cases}$$

Ее решениями являются значения

$$P = F \frac{\sin \lambda \gamma}{\sin \gamma}, \quad Q = F \frac{\sin(1 - \lambda)\gamma}{\sin \gamma}, \quad (2.9)$$

которые при  $F > 0$  и  $\gamma \in [0, \pi]$  удовлетворяют условиям (1.1), при выполнении которых сечение тела  $T_B$  базовой плоскостью и базовый треугольник  $\Delta PCQ$  образуют неизменную фигуру, нагруженную заданной системой внешних сил, уравновешенных реактивными силами натяжения поводков несущим телом  $T_A$ .

Из формул (2.9) следует, что равенству сил натяжения обоих поводков соответствует значение  $\lambda = \frac{1}{2}$ , т.е. случай, когда сила  $\vec{F}$  нормальна к базовому эллипсу  $\mathcal{E}$  в его точке  $C$ , являющейся вершиной базового  $\Delta PCQ$ .

### Заключение

Резюмируя изложенное, констатируем, что для достижения некоторого состояния статического равновесия гибкого треугольного подвеса с данным базовым неизменным треугольником кинематических связей  $\Delta PCQ$  в плоском силовом поле, компланарном плоскости этого треугольника, необходимо и достаточно, чтобы построенный в таком стационарном состоянии подвеса с началом в точке  $C$  крепления обоих поводков на несущем теле  $T_A$  главный вектор  $\vec{F}$  действующих на подвешенное тело  $T_B$  внешних сил был ориентирован в направлении тела  $T_B$ , а линия его действия пересекала отрезок  $PQ$ ,

стягивающий точки крепления поводков на теле  $T_B$  в некоторой точке  $F$  этого отрезка.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольц, Н.Н. Основы курса теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – М. : Наука, 1972. – 468 с.
2. Щедров, В.С. Механика гибкой нити / В.С. Щедров. – М. : МАШГИЗ, 1961. – 171 с.
3. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. – М. : Наука, 1966. – 424 с.

Поступила в редакцию 08.07.10.

УДК 512.542

## О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ВСЕХ МАКСИМАЛЬНЫХ $\mathfrak{F}$ -ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## ON THE INTERSECTION OF ALL MAXIMAL $\mathfrak{F}$ -SUBGROUPS OF A FINITE GROUP

A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть  $\mathfrak{F}$  класс групп. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется максимальной  $\mathfrak{F}$ -подгруппой группы  $G$  если  $H \in \mathfrak{F}$  и  $G$  не имеет такой подгруппы  $E \in \mathfrak{F}$  что  $H < E$ . Символ  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  обозначает пересечение всех максимальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы  $G$ . Мы изучаем влияние подгруппы  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  на строение группы  $G$ .

**Ключевые слова:** насыщенная формация, наследственная формация, минимальная подгруппа, максимальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа,  $\mathfrak{F}$ -гиперцентр, разрешимая группа, сверхразрешимая группа,  $S$ -квазинормальная подгруппа.

Let  $\mathfrak{F}$  be a class of groups. A subgroup  $H$  of a group  $G$  is said to be a maximal  $\mathfrak{F}$ -subgroup of  $G$  if  $H \in \mathfrak{F}$  and  $G$  has no a subgroup  $E \in \mathfrak{F}$  such that  $H < E$ . The symbol  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  denotes the intersection of all maximal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of  $G$ . We study the influence of the subgroup  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  on the structure of  $G$ .

**Keywords:** saturated formation, hereditary formation, minimal subgroup, maximal  $\mathfrak{F}$ -subgroup,  $\mathfrak{F}$ -hypercentre, soluble group, supersoluble group,  $S$ -quasinormal subgroup.

### 1 General properties of the intersection of all maximal $\mathfrak{F}$ -subgroups

Throughout this paper, all groups are finite. We use  $G^{\mathfrak{F}}$  to denote the intersection of all normal subgroups of a group  $G$  with  $G/N \in \mathfrak{F}$ . A class  $\mathfrak{F}$  of groups is said to be a formation if for every group  $G$ , every homomorphic image of  $G/G^{\mathfrak{F}}$  belongs to  $\mathfrak{F}$ . A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be saturated if  $\mathfrak{F}$  contains every group  $G$  with  $G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(G)$ . A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be hereditary if  $\mathfrak{F}$  contains every subgroup of every its group. In this paper  $\mathfrak{F}$  denotes some hereditary saturated formation containing all nilpotent groups. We use  $\mathfrak{N}$  and  $\mathfrak{U}$  to denote the formation of all nilpotent groups and the formation of all supersoluble groups, respectively.

A subgroup  $H$  of a group  $G$  is said to be a maximal  $\mathfrak{F}$ -subgroup of  $G$  if  $H \in \mathfrak{F}$  and  $G$  has no a subgroup  $E \in \mathfrak{F}$  such that  $H < E$ . We use  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  to denote the intersection of all maximal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of  $G$ . Thus  $\Sigma_{\mathfrak{N}}(G)$  is the intersection of all maximal nilpotent subgroups of  $G$  and  $\Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$  is the intersection of all maximal supersoluble subgroups of  $G$ .

Applications of the subgroup  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  is based on the following our theorem.

**Theorem A.** Let  $H, E$  be subgroups of a group  $G$ ,  $N$  a normal subgroup of  $G$  and  $\Sigma = \Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$ .

- (a)  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(H)N/N \leq \Sigma_{\mathfrak{F}}(HN/N)$ .
- (b)  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(H) \cap E \leq \Sigma_{\mathfrak{F}}(H \cap E)$ .
- (c) If  $H/H \cap \Sigma \in \mathfrak{F}$ , then  $H \in \mathfrak{F}$ .
- (d) If  $H \in \mathfrak{F}$ , then  $H\Sigma \in \mathfrak{F}$ .
- (e) If  $N \leq \Sigma$ , then  $\Sigma/N = \Sigma_{\mathfrak{F}}(G/N)$ .
- (f)  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G/\Sigma) = 1$ .

(g) If every minimal non- $\mathfrak{F}$ -subgroup of  $G$  is soluble and  $\psi_e(N) \leq \Sigma$ , then  $N \leq \Sigma$ .

In this theorem  $\psi_e(G)$  denotes the subgroup of  $G$  generated by all its cyclic subgroups of prime order and of order 4 [1]. A group  $G$  is said to be a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group if  $G \notin \mathfrak{F}$  but  $H \in \mathfrak{F}$  for every proper subgroup  $H$  of  $G$ .

**Corollary 1.1.** Suppose that every minimal non- $\mathfrak{F}$ -subgroup of a group  $G$  is soluble. If every  $p$ -subgroup  $P$  of  $G$  is contained in the intersection of all maximal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of  $N_G(P)$ , then  $G \in \mathfrak{F}$ .

It is well known that every minimal non-supersoluble group and every minimal non- $p$ -nilpotent group are soluble. Hence from Corollary 1.1 we obtain the following.

**Corollary 1.2.** *Suppose that every  $p$ -subgroup  $P$  of a group  $G$  is contained in  $\Sigma_{\mathfrak{U}}(N_G(P))$ . Then  $G$  is supersoluble.*

**Corollary 1.3.** *Suppose that every  $p$ -subgroup  $P$  of a group  $G$  is contained in the intersection of all maximal  $p$ -nilpotent subgroups of  $N_G(P)$ . Then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

**Corollary 1.4** (Frobenius). *If  $N_G(P)/C_G(P)$  is a  $p$ -group for every  $p$ -subgroup  $P$  of a group  $G$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

*Proof.* Since by [2, Appendix C, Corollary 6.4],  $O_p(N_G(P)/C_{N_G(P)}(H/K))=1$  for all chief factors  $H/K$  of  $N_G(P)$  below  $P$ , we have  $P \leq Z_{\infty}(N_G(P))$ . Hence for every  $p$ -nilpotent subgroup  $H$  of  $N_G(P)$ , the subgroup  $PH$  is  $p$ -nilpotent as well. Therefore  $G$  is  $p$ -nilpotent by Corollary 1.3.

Next applications of Theorem A are connected with minimal subgroups.

**Theorem 1.5.** *Let  $G$  be a group and  $\mathfrak{F}$  the class of all  $2'$ -supersoluble groups.*

(1) *If every minimal subgroup  $L$  of  $G$  of odd order has a supplement  $T$  in  $G$  such that  $L \cap T \leq \Sigma_{\mathfrak{F}}(T)$ , then  $G$  is  $2'$ -supersoluble.*

(2) *If  $G$  is soluble and every subgroup of  $G$  of order 2 is complemented in  $G$ , then  $G$  is 2-nilpotent.*

**Corollary 1.6** (Gaschütz [3, IV, Theorem 5.7]). *If every minimal subgroup of a group  $G$  is normal in  $G$ , then the commutator subgroup  $G'$  of  $G$  is 2-closed.*

**Corollary 1.7** (Buckley [4]). *Let  $G$  be a group of odd order. If every minimal subgroup of  $G$  is normal in  $G$ , then  $G$  is supersoluble.*

**Corollary 1.8** (Ballester-Bolinches, Guo [5]). *Let  $G$  be a group. If every minimal subgroup of  $G$  is complemented in  $G$ , then  $G$  is supersoluble.*

Recall that a subgroup  $H$  of a group  $G$  is said to be quasinormal ( $S$ -quasinormal) in  $G$  if  $HE = EH$  for all subgroups  $E$  of  $G$  ( $HP = PH$  for all Sylow subgroups  $P$  of  $G$ , respectively).

**Proposition 1.9.** *Let  $R$  be the subgroup of a group  $G$  generated by the set of all cyclic quasinormal subgroups of  $G$  and  $R_s$  be the subgroup of  $G$  generated by the set of all cyclic  $S$ -quasinormal subgroups of  $G$ . Then  $R_s \leq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$  and  $R$  is contained in the intersection of all maximal  $p$ -supersoluble subgroups of  $G$  for all primes  $p$ .*

**Corollary 1.10** (Shaalán [6]). *Let  $G$  be a group and  $E$  a normal subgroup of  $G$  with supersoluble quotient  $G/E$ . Suppose that all minimal subgroups of  $E$  and all its cyclic subgroups with order 4 are  $S$ -quasinormal in  $G$ . Then  $G$  is supersoluble.*

*Proof.* By Proposition 1.9 we have  $\Psi_e(E) \leq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$ . Hence  $E \leq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$  by Theorem A (g) and so  $G$  is supersoluble by Theorem A (c).

Recall that the hyper-generalized-center  $\text{genz}^*(G)$  of  $G$  coincides with the largest term of the chain of subgroups

$$1 = Q_0 \leq Q_1 \leq Q_2 \leq \dots,$$

where  $Q_i(G)/Q_{i-1}(G)$  is the subgroup of  $G/Q_{i-1}(G)$  generated by the set of all cyclic  $S$ -quasinormal subgroups of  $G/Q_{i-1}(G)$  (see [2, page 22]).

**Corollary 1.11** (Agrawal [7]). *The hyper-generalized-center  $\text{genz}^*(G)$  of  $G$  is contained in  $\Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$ .*

*Proof.* Let  $R$  be the subgroup of  $G$  generated by the set of all its cyclic  $S$ -quasinormal subgroups. By Proposition 1.9 we have  $R \leq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$  and hence  $\Sigma_{\mathfrak{U}}(G)/R = \Sigma_{\mathfrak{U}}(G/R)$  by Theorem A (e). Thus  $\text{genz}^*(G/R) = \text{genz}^*(G)/R \leq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G/R)$  and so  $\text{genz}^*(G) \leq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$ .

Based on Theorem C we also proved the following result.

**Theorem 1.12.** *Suppose that  $\mathfrak{F}$  is either the class of all soluble groups or the class of all  $p$ -decomposable groups for some prime  $p$ . Suppose that  $G$  has three subgroups  $A_1, A_2$  and  $A_3$  whose indices  $|G:A_1|, |G:A_2|, |G:A_3|$  are pairwise coprime. If  $A_i \cap A_j \leq \Sigma_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap \Sigma_{\mathfrak{F}}(A_j)$  for all  $i \neq j$ , then  $G \in \mathfrak{F}$ .*

**Corollary 1.13** (Wielandt [8]). *If  $G$  has three soluble subgroups  $A_1, A_2$  and  $A_3$  whose indices  $|G:A_1|, |G:A_2|, |G:A_3|$  are pairwise coprime, then  $G$  is itself soluble.*

**Corollary 1.14** (Kegel [9]). *If  $G$  has three nilpotent subgroups  $A_1, A_2$  and  $A_3$  whose indices  $|G:A_1|, |G:A_2|, |G:A_3|$  are pairwise coprime, then  $G$  is itself nilpotent.*

In view of Proposition 1.9 and Corollary 1.10 the following natural questions arise:

(I) *Is there a group  $G$  such that  $\text{genz}^*(G) \neq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$ ? (see [2, page 22] or [7, page 19])*

(II) *Is there a group  $G$  such that  $\text{genz}^*(G)$  is not contained in the intersection of all maximal  $p$ -supersoluble subgroups of  $G$ ?*

The following examples give positive answers to these questions.

**Example.** Let  $p, q$  and  $r$  be primes such that  $p \neq q \neq r$ . Let  $C_r$  be a group of order  $r$  and  $Q$  be a simple  $\mathbb{F}_q[C_r]$ -module which is faithful for  $C_r$ . Let  $H = Q \rtimes C_r$  and  $P$  be a simple  $\mathbb{F}_p[H]$ -module

which is faithful for  $QC_r$ . Finally, let  $G=P \rtimes H$ . Then  $P=C_G(P)$ , so  $P=F(G)$ .

1. Suppose that  $q$  divides  $p-1$ ,  $r$  divides  $p-1$  and  $r$  does not divide  $q-1$  ( $p=31$ ,  $q=5$  and  $r=3$ , for instance). Then the maximal subgroups  $PQ$  and  $PC_r$  of  $G$  are supersoluble but the subgroup  $H$  is not supersoluble. Hence  $\Sigma_{\mathfrak{U}}(G)=P$ . Suppose that  $\text{genz}^*(G) \neq 1$ . Then  $G$  has a non-identity cyclic  $S$ -quasinormal subgroup  $V$ . Hence  $V$  is subnormal in  $G$  by [10], so  $V \leq P=F(G)$  by [11]. Hence  $QC_r \leq N_G(V)$  and so  $V$  is normal in  $G$ . But then  $V=P$  and hence  $G/C_G(P) \cong QC_r$  is cyclic. This contradiction shows that  $\text{genz}^*(G)=1 \neq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)$ .

2. Now suppose that  $p=r$  and  $q$  divides  $p-1$ . In this case  $PQ=O^p(G)$  and  $QC_r$  is not supersoluble. We shall show that  $P=\text{genz}^*(G)$ . Indeed, since  $q$  divides  $p-1$ , then  $PQ$  is supersoluble by [2, Chapter 1, Theorem 1.4]. Hence by Maschke's theorem,  $P=P_1 \times P_2 \times \dots \times P_t$ , where  $P_i$  is normal in  $PQ=O^p(G)$  and  $|P_i|=p$  for all  $i=1,2,\dots,t$ . Hence  $P_i$  is  $S$ -quasinormal in  $G$  by Lemma 4.3 below and so  $P \leq \text{genz}^*(G)$ . On the other hand, if  $E$  is a cyclic  $S$ -quasinormal subgroup of  $G$ , then  $E$  is subnormal in  $G$  and hence  $E \leq P=F(G)$ . Thus  $P$  is the subgroup of  $G$  generated by the set of all its cyclic  $S$ -quasinormal subgroups. It is clear also that any cyclic  $S$ -quasinormal subgroup of  $QC_r \cong G/P$  is identity. Hence  $P=\text{genz}^*(G)$ . Since all maximal subgroups of  $G$  are  $p$ -supersoluble, then the intersection  $\Sigma$  of all such subgroups is identity. Hence  $\text{genz}^*(G) \not\leq \Sigma$ .

**2 On the  $\mathfrak{F}$ -hypercentre and the intersection of all maximal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of a finite group**

A chief factor  $H/K$  of a group  $G$  is called  $\mathfrak{F}$ -central provided  $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$  (see [12, p. 127–128] or [13, Def. 2.4.3]). The product of all normal subgroups of  $G$  whose  $G$ -chief factors are  $\mathfrak{F}$ -central in  $G$  is called the  $\mathfrak{F}$ -hypercentre of  $G$  and denoted by  $Z_{\mathfrak{F}}(G)$  [14, p. 389].

Note that for any subgroup  $E \in \mathfrak{F}$  of  $G$ , the subgroup  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)E$  belongs to  $\mathfrak{F}$  as well (see Theorem A 3.1 (d)). Moreover, we shall also show that  $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq \Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  and the condition  $G/\Sigma_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$  always implies  $G \in \mathfrak{F}$  (Theorem A (c), (h)). Therefore the subgroup  $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  is similar in properties to the subgroup  $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ . Nevertheless, the following

simple example shows that in general we have  $Z_{\mathfrak{F}}(G) \neq \Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$ .

**Example.** Let  $p$ ,  $q$  and  $r$  be primes such that  $q$  divides  $p-1$ ,  $r$  divides  $p-1$  and  $r$  does not divide  $q-1$  ( $p=31$ ,  $q=5$  and  $r=3$ , for instance). Let  $C_r$  be a group of order  $r$  and  $Q$  be a simple  $\mathbb{F}_q[C_r]$ -module which is faithful for  $C_r$ . Let  $H=Q \rtimes C_r$  and  $P$  be a simple  $\mathbb{F}_p[H]$ -module which is faithful for  $H$ . Finally, let  $G=P \rtimes H$ . Then the maximal subgroups  $PQ$  and  $PC_r$  of  $G$  are supersoluble but the subgroup  $H$  is not supersoluble. Hence  $\Sigma_{\mathfrak{U}}(G)=P \neq \Sigma_{\mathfrak{U}}(G)=1$ .

In connection with these observations it is natural to ask:

**Question.** *What one can say about a hereditary saturated formation  $\mathfrak{F}$  if the equality  $Z_{\mathfrak{F}}(G)=\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  is true in each group  $G$ ?*

In order to give the answer to this question we write  $\mathfrak{F}(p)$  to denote the intersection of all formations containing the set  $\{G/O_{p',p}(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$  and we write  $F(p)$  to denote the class of groups  $G$  such that  $G^{\mathfrak{F}(p)}$  is a  $p$ -group. It is not difficult to show that  $F(p)$  is a formation for all primes  $p$ , and any extension of any  $p$ -group  $P$  by a group  $G \in F(p)$  belongs to  $F(p)$  as well.

We say that the formation  $\mathfrak{F}$  is a *formation with Property (\*)* if  $\mathfrak{F}$  contains each group whose maximal subgroups belongs to  $F(p)$ , at least for one prime  $p$ . We say that  $\mathfrak{F}$  is a *formation with Property (\*) in the class of all soluble groups* if  $\mathfrak{F}$  contains each soluble group whose maximal subgroups belongs to  $F(p)$ , at least for one prime  $p$ .

The following our theorems give an answer to above question.

**Theorem B.** *The equality  $Z_{\mathfrak{F}}(G)=\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  is true in each group  $G$  if and only if  $\mathfrak{F}$  is a formation with Property (\*).*

**Theorem C.** *The equality  $Z_{\mathfrak{F}}(G)=\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  is true in each soluble group  $G$  if and only if  $\mathfrak{F}$  is a formation with Property (\*) in the class of all soluble groups.*

The proofs of these two theorems consist of many steps and are based on the following lemmas.

**Lemma 2.1** [15, Theorem 1]. *Let  $\mathfrak{F}$  be a formation containing all nilpotent groups. Then  $\mathfrak{F}$  is saturated if and only if  $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  for all primes  $p$ .*

From Theorem 17.14 in [12] we get

**Lemma 2.2.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing all nilpotent groups. A chief factor  $H/K$  of a group  $G$  is  $\mathfrak{F}$ -central if and only if*

$G/C_G(H/K) \in F(p)$  for all prime divisors  $p$  of  $|H/K|$ .

In view of [15, Remark 1] and Proposition 3.16 in [14, IV] we get also

**Lemma 2.3.** For any prime  $p$ , the formation  $F(p)$  is hereditary.

We shall need in our proofs the following properties of the  $\mathfrak{F}$ -hypercentre.

**Lemma 2.4.** Let  $G$  be a group and  $H \leq G$ .

- (1) If  $H$  is normal in  $G$ , then  $Z_{\mathfrak{F}}(G)H/H \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/H)$ .
- (2)  $Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap H \leq Z_{\mathfrak{F}}(H)$ .
- (3) If  $G/Z_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ , then  $G \in \mathfrak{F}$ .

*Proof.* (1) This follows from the  $G$ -isomorphism  $Z_{\mathfrak{F}}(G)H/H \cong Z_{\mathfrak{F}}(G)/Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap H$ .

(2) Let  $1 = Z_0 < Z_1 < \dots < Z_{t-1} < Z_t = Z_{\mathfrak{F}}(G)$  be a chief series of  $G$  below  $Z_{\mathfrak{F}}(G)$  and  $C_i = C_G(Z_i/Z_{i-1})$ . Let  $p$  be a prime divisor of  $|Z_i \cap H/Z_{i-1} \cap H| = |Z_{i-1}(Z_i \cap H)/Z_{i-1}|$ . Then  $p$  divides  $|Z_i/Z_{i-1}|$ , so  $G/C_i \in F(p)$  by Lemma 2.2. Hence by Lemma 2.3,  $H/H \cap C_i \in F(p)$ . But  $H \cap C_i \leq C_H(Z_i \cap H/Z_{i-1} \cap H)$ . Hence  $H/C_H(Z_i \cap H/Z_{i-1} \cap H) \in F(p)$  for all primes  $p$  dividing  $|Z_i \cap H/Z_{i-1} \cap H|$ . Thus  $Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap H \leq Z_{\mathfrak{F}}(H)$  by Lemma 2.2.

(3) This is evident.

The following lemma is a corollary of general results on  $f$ -hypercentral action (see [16, Chapter 2] or [14, Chapter IV, Section 6]). For reader's convenience, we give a direct proof.

**Lemma 2.5.** Let  $E$  be a normal  $p$ -subgroup of a group  $G$ . If  $E \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ , then  $G/C_G(E) \in F(p)$ .

*Proof.* Let  $1 = E_0 < E_1 < \dots < E_t = E$  be a chief series of  $G$  below  $E$ . Let  $C_i = C_G(E_i/E_{i-1})$  and  $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_t$ . Then  $C_G(E) \leq C$  and by Corollary 3.3 in [17, Chapter 5],  $C/C_G(E)$  is a  $p$ -group. On the other hand,  $G/C_i \in F(p)$  by Lemma 2.2, so  $G/C \in F(p)$ . Hence  $G/C_G(E) \in F(p)$ .

**Lemma 2.6.** Let  $G$  be a group and  $p$  a prime such that  $O_p(G) = 1$ . If  $G$  has the only minimal normal subgroup, then there is a simple  $\mathbb{F}_p[G]$ -module which is faithful for  $G$ .

*Proof.* Let  $A = C_p \wr G = [K]G$ , where  $C_p$  is a group of order  $p$  and  $K$  is the base group of the regular product  $A$ . Let

$$1 = K_1 < K_2 < \dots < K_t = K, \quad (**)$$

where  $K_i/K_{i-1}$  is a chief factor of  $A$  for all

$i = 1, 2, \dots, t$ . Let  $C_i = C_A(K_i/K_{i-1})$ ,  $N$  be a minimal normal subgroup of  $G$  and  $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_t$ . Suppose that  $C_i \cap G \neq 1$  for all  $i = 1, 2, \dots, t$ . Then  $N \leq C \cap G$ . Hence  $N$  stabilizes Series (\*\*), so  $N$  is a  $p$ -group by Corollary 3.3 in [17, Chapter 5], which implies  $N \leq O_p(G)$ . This contradiction shows that for some  $i$  we have  $C_A(K_i/K_{i-1}) = A$ . The lemma is proved.

**Lemma 2.7.**

(1) If  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p \mathfrak{F}$ , then  $F(p) = \mathfrak{F}$ .

(2) If  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}$  for some non-empty formation  $\mathfrak{H}$ , then  $F(p) = \mathfrak{G}_p \mathfrak{H}$  for all primes  $p$ .

*Proof.* (1) In view of Lemma 2.1 we need only to prove that  $\mathfrak{F} \subseteq F(p)$ . Suppose that this is false and let  $A$  be a group of minimal order in  $\mathfrak{F} \setminus F(p)$ . Then  $R = A^{F(p)}$  is the only minimal normal subgroup of  $A$  and  $O_p(A) = 1$ . By Lemma 2.6 there is a simple  $\mathbb{F}_p[A]$ -module  $P$  which is faithful for  $A$ . Then  $G = P \wr A \in \mathfrak{G}_p \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ , so  $A \cong G/P = G/O_{p',p}(G) \in F(p)$ , a contradiction.

(2) The inclusion  $F(p) \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}$  is evident. Suppose that  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{H} \not\subseteq F(p)$  and let  $A$  be a group of minimal order in  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{H} \setminus F(p)$ . Let  $L$  be a minimal normal subgroup of  $A$ . Then  $L$  is a unique minimal normal subgroup of  $A$  and  $O_p(A) = 1$ . Hence  $A \in \mathfrak{H}$  and there is a simple  $\mathbb{F}_p[A]$ -module  $P$  which is faithful for  $A$ . Then  $G = P \wr A \in \mathfrak{G}_p \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ , so  $A \cong G/P = G/O_{p',p}(G) \in F(p)$ , a contradiction. The lemma is proved.

A group  $G$  is said to be a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group if  $G \notin \mathfrak{F}$  but  $H \in \mathfrak{F}$  for every proper subgroup  $H$  of  $G$ .

In what follows we shall need the following result about minimal non- $\mathfrak{F}$ -groups.

**Lemma 2.8** [16, Chapter VI, Theorem 25.4]. Let  $G$  be a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group such that  $G^{\mathfrak{F}}$  is soluble.

(a)  $P = G^{\mathfrak{F}}$  is a  $p$ -group for some prime  $p$  and  $P$  is of exponent  $p$  or of exponent 4 (if  $P$  is a non-abelian 2-group).

(b)  $P/\Phi(P)$  is a chief factor of  $G$  and  $(P/\Phi(P)) \wr (G/C_G(P/\Phi(P))) \notin \mathfrak{F}$ .

(c) If  $P$  is abelian, then  $\Phi(P) = 1$ .

Let  $H$  and  $K$  be subgroups of a group  $G$ . If  $HK = G$ , then  $K$  is called a supplement of  $H$  in  $G$ . If, in addition,  $HT \neq G$  for all proper subgroups  $T$  of  $K$ , then  $K$  is called a minimal supplement of  $H$  in  $G$ .

**3 Some classes of formations with Property (\*)**  
**Classes of soluble groups with limited nilpotent length.** Following [14, Chapter VII, Definitions 6.9] we write  $l(G)$  to denote the nilpotent length of the group  $G$ . Recall that  $\mathfrak{N}^r$  is the product of  $r$  copies of  $\mathfrak{N}$ ;  $\mathfrak{N}^0$  is the class of groups of order 1 by definition. It is well known that  $\mathfrak{N}^r$  is the class of all soluble groups  $G$  with  $l(G) \leq r$ .

**Proposition 3.1.** *For any  $r \in \mathbb{N}$ , the class  $\mathfrak{N}^r$  is a hereditary saturated formation with Property (\*) in the class of the soluble groups. The formation  $\mathfrak{N}$  is a formation with Property (\*).*

*Proof.* Let  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^r$ . It is clear that  $\mathfrak{F}$  is a hereditary formation. Besides, by [14, Chapter A, Theorem 9.3 (c)],  $\mathfrak{F}$  is saturated. Moreover,  $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{r-1}$  by Lemma 2.7 (2). Therefore in the case  $r = 1$  the formation  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$  is a hereditary saturated formation with Property (\*).

Now suppose that  $r > 1$ . We shall show that  $\mathfrak{F}$  has Property (\*) in the class of all soluble groups. Suppose that this is false and let  $(\mathfrak{N}^r, G)$  be a counterexample with minimal  $r | G |$ . Then  $G \notin \mathfrak{F}$  and there is a prime  $p$  such that every maximal subgroup of  $G$  belongs to  $F(p)$ . Then  $\Phi(G) = 1$ . Indeed, suppose that  $\Phi(G) \neq 1$ . Then  $|G/\Phi(G)| < |G|$  and every maximal subgroup of  $G/\Phi(G)$  belongs to  $F(p)$ . Hence  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$  by the choice of  $G$ , so  $G \in \mathfrak{F}$  since the formation  $\mathfrak{F}$  is saturated. This contradiction shows that  $\Phi(G) = 1$ . Let  $R$  and  $N$  be any minimal normal subgroup of  $G$ . Suppose that  $R \neq N$ . Then  $G = R \rtimes M$  and  $N \rtimes L$  for some maximal subgroups  $M$  and  $L$  of  $G$ , so  $G/R, G/N \in F(p) = \mathfrak{G}_p F(p)$ . Hence  $G = G/R \cap N \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ , a contradiction. Therefore  $R = N = C_G(R)$  is a unique minimal normal subgroup of  $G$  and  $R$  is a  $q$ -group for some prime  $q \neq p$ .

Let  $M_1$  be any maximal subgroup of  $M$ . Then  $RM_1 \in F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{r-1}$ . Since  $R = C_G(R)$ ,  $O_q(RM_1) = 1$ . Hence  $O_{q',q}(RM_1) = O_q(RM_1)$  and  $O_p(RM_1) = 1$ . Hence  $RM_1 \in \mathfrak{N}^{r-1}$ . Thus

$$\begin{aligned} M_1/M_1 \cap RO_q(M_1) &\cong RM_1/RO_q(M_1) = \\ &= RM_1/O_q(RM_1) = RM_1/O_{q',q}(RM_1) \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}^{r-2}. \end{aligned}$$

Hence  $M_1 \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}^{r-2}$ . Therefore every maximal subgroup of  $M$  belongs to  $\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}^{r-2}$ . Hence  $M \in \mathfrak{N}^{r-1}$  by the choice of  $(\mathfrak{N}^r, G)$ . Thus

$$G = [R]M \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^r.$$

This contradiction completes the proof of the proposition.

**Proposition 3.2.** *Let  $\{\pi_i | i \in I\}$  be any partition of  $\mathbb{P}$  and  $\mathfrak{F}$  the class of all groups  $G$  such that  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if  $G$  is the direct product of its Hall  $\pi_i$ -subgroups. Then  $\mathfrak{F}$  is a hereditary saturated formation with Property (\*).*

*Proof.* It is clear that the class  $\mathfrak{F}$  is closed under taking subgroups, homomorphic images and direct products. Hence  $\mathfrak{F}$  is a hereditary formation. Moreover, this formation  $\mathfrak{F}$  is saturated. We show that for any prime  $p$ ,  $F(p) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$ , where  $p \in \pi_i$ . It is clear that  $F(p) \subseteq \mathfrak{G}_{\pi_i}$ . Suppose that the inverse conclusion is not true and let  $A$  be a group of minimal order in  $\mathfrak{G}_{\pi_i} \setminus F(p)$ . Let  $L$  be a minimal normal subgroup of  $A$ . Then  $L$  is a unique minimal normal subgroup of  $A$  and  $O_p(A) = 1$ . Hence there is a simple  $\mathbb{F}_p[A]$ -module  $P$  which is faithful for  $A$ . Then  $G = P \rtimes A \in \mathfrak{G}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$ , so  $A \cong G/P = G/O_{p',p}(G) \in F(p)$ . This contradiction shows that  $F(p) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$ . Now let  $G$  be a group such that every maximal subgroup of  $G$  belongs to  $F(p) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$ . Then either  $G$  belongs to  $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  or  $|G| = q \notin \pi_i$  is a prime, so again we have  $G \in \mathfrak{F}$ . Hence  $\mathfrak{F}$  is a formation with Property (\*).

**Proposition 3.3.** *Let  $\{\pi_i | i \in I\}$  be any partition of  $\mathbb{P}$  and  $\mathfrak{F}$  be a class of all soluble groups  $G$  such that  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if  $G$  is the direct product of its Hall  $\pi_i$ -subgroups. Then  $\mathfrak{F}$  is a hereditary saturated formation with Property (\*) in the class of all soluble groups.*

*Proof.* See the proof of Proposition 3.2.

**Lattice formations.** A subgroup  $H$  is said to be  $\mathfrak{F}$ -subnormal in a group  $G$  if either  $H = G$  or there exists a chain of subgroups

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_t = G$$

such that  $H_{i-1}$  is a maximal subgroup of  $H_i$  and  $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$  for all  $i = 1, 2, \dots, t$ . A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be a lattice formation (see [18, Section 6]) if the set of all  $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups is a sublattice of the lattice of all subgroups in every group.

We use  $\mathfrak{S}$  to denote the class of all soluble groups.

**Proposition 3.4.** *Every lattice formation  $\mathfrak{F}$  with  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$  is a hereditary saturated formation with Property (\*) in the class of all soluble groups.*

*Proof.* By [18, Corollary 6.3.1], there exists a partition  $\{\pi_i | i \in I\}$  of  $\mathbb{P}$  such that  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if  $G$  is the direct product of its Hall  $\pi_i$ -subgroups. Hence by Proposition 3.3,  $\mathfrak{F}$  is a

hereditary saturated formation with Property (\*) in the class of all soluble groups.

**Corollary 3.5.** *If either  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^r$ , for some  $r \in \mathbb{N}$ , or  $\mathfrak{F}$  is a lattice formation with  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ , then  $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  in every soluble group  $G$ .*

From Proposition 3.2 we also get

**Corollary 3.6.** *If either  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$  is the class of all nilpotent groups or  $\mathfrak{F}$  is the class of all  $p$ -decomposable groups, for some prime  $p$ , then  $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  in every group  $G$ .*

**Proposition 3.7.** *Let  $\mathfrak{F}$  be the class of all groups with nilpotent the commutator subgroup  $G'$ . Then  $\mathfrak{F}$  is a hereditary saturated formation with Property (\*).*

*Proof.* Suppose that this proposition is false and let  $G$  be a counterexample with minimal  $|G|$ . Then  $G'$  is not nilpotent and there is a prime  $p$  such that every maximal subgroup of  $G$  belongs to  $F(p)$ . It is clear that  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ , where  $\mathfrak{A}$  is the formation of all abelian groups. Hence by Lemma 2.7 (2),  $F(p) = \mathfrak{G}_p\mathfrak{A}$  for all primes  $p$ . First we show that  $G$  is soluble. Suppose that this is false. Then for every Schmidt subgroup  $H$  of  $G$  we have  $H \neq G$ . Let  $q \neq p$  be any prime divisor of  $|G|$ . Suppose that  $G$  is not  $q$ -nilpotent. Then  $G$  has a  $q$ -closed Schmidt subgroup  $H = Q \rtimes R$  [3, Chapter IV, Satz 5.4], where  $Q$  is a Sylow  $q$ -subgroup of  $H$ ,  $R$  is a cyclic Sylow  $r$ -subgroup of  $H$ . Since  $H \neq G$ ,  $H \leq M$ , where  $M \in F(p)$  is a maximal subgroup of  $G$ . Then  $M' \leq O_p(M)$  and hence  $H' \leq Q \cap O_p(H) = 1$ . Hence  $H$  is abelian. This contradiction shows that  $G$  is  $q$ -nilpotent for all primes  $q \neq p$ , so  $G^{n_1}$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . Hence  $G$  is soluble. Let  $R$  be any minimal normal subgroup of  $G$ . Then every maximal subgroup of  $G/R$  belongs to  $F(p)$ , so  $(G/R)' \leq F(G/R)$  by the choice of  $G$ . Therefore  $R$  is the only minimal normal subgroup of  $G$  and  $R \not\leq \Phi(G)$ . Hence  $G = R \rtimes M$  for some maximal subgroups  $M$  of  $G$ ,  $R = C_G(R) = O_q(G)$  for some prime  $q \neq p$  (see the proof of Proposition 3.1). Let  $M_1$  be any maximal subgroup of  $M$ . Then  $RM_1 \in F(p)$ , so  $RM_1$  is abelian since  $R = C_G(R)$ . Hence  $M_1 = 1$ , so  $G' = R$  is nilpotent. This contradiction completes the proof of the result.

**Corollary 3.8.** *If  $\mathfrak{F}$  is the class of all groups with nilpotent the commutator subgroup  $G'$ . Then  $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$  in every group  $G$ .*

#### 4 Some classes of formations not having Property (\*)

**Corollary 4.1** *Suppose that for some prime  $p$  we have  $F(p) = \mathfrak{F}$ . Then  $\mathfrak{F}$  does not have Property (\*).*

*Proof.* Let  $G$  be a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group. Then  $G \notin \mathfrak{F}$  but every maximal subgroup of  $G$  is in  $\mathfrak{F} = F(p)$ . Hence  $\mathfrak{F}$  does not have Property (\*).

Similarly one can prove the following

**Corollary 4.2.** *Suppose that  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$  and for some prime  $p$  we have  $F(p) = \mathfrak{F}$ . Then  $\mathfrak{F}$  does not have Property (\*) in the class of all soluble groups.*

**Corollary 4.3** *Suppose that  $\mathfrak{F}$  is one of the following formations:*

- (1) *The formation of all  $p$ -soluble groups.*
- (2) *The formation of all  $p$ -supersoluble groups.*
- (3) *The formation of all  $p$ -nilpotent groups.*
- (4) *The formation of all soluble groups.*

Then  $\mathfrak{F}$  does not have Property (\*).

*Proof.* It is clear that for any prime  $q \neq p$  we have  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_q\mathfrak{F}$ . Hence  $F(q) = \mathfrak{F}$  by Lemma 2.7 (1). Now we use Corollary 4.1 (4).

#### REFERENCES

1. *Laue, R.* Dualization for saturation for locally defined formations / R. Laue // J. Algebra. – 1978. – Vol. 52. – P. 347–353.
2. *Weinstein, M.* Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Polygonal Publishing House, 1982.
3. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967.
4. *Buckley, J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – Vol. 15. – P. 15–17.
5. *Ballester-Bolinches, A.* On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X.Y. Guo // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 161–166.
6. *Shaalán, A.* The influence of  $\pi$ -quasinormality of some subgroups on the structure of a finite group / A. Shaalan // Acta Math. Hungar. – 1990. – Vol. 56. – P. 287–293.
7. *Agrawal, R.K.* Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
8. *Wielandt, H.* Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierten Gruppen / H. Wielandt // B. Austral Math. Soc. – 1960. – Vol. 1. – P. 143–146.
9. *Kegel, O.H.* Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – Vol. 87. – P. 409–434.

- 
10. *Kegel, O.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // *Math. Z.* – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
  11. *Wielandt, H.* Subnormal subgroups and permutation groups. Lectures given at the Ohio State University / H. Wielandt. – Columbus : Ohio, 1971.
  12. *Shemetkov, L.A.* Formations of algebraic systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow : Nauka, 1989.
  13. *Guo, Wenbin.* The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.
  14. *Doerk, K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
  15. *Shemetkov, L.A.*  $\omega$ -local Formations and Fitting classes of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // *Advances of Math. Siberian.* – 2000. – Vol. 10, № 2. – P. 112–141.
  16. *Shemetkov, L.A.* Formations of Finite Groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, 1978.
  17. *Gorenstein, D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York-Evanston-London : Harper & Row Publishers, 1968.
  18. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006.

Поступила в редакцию 22.07.10.

УДК 512.542

О  $\mathfrak{F}_h$ -НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУППЮфэнг Лиу<sup>1</sup>, Хиухиан Фэнг<sup>2</sup>, Жианхонг Хуанг<sup>3</sup><sup>1</sup>Шандонгский институт бизнеса и технологии, Янтай, Китай<sup>2</sup>Сюйчжоуский нормальный университет, Сюйчжоу, Китай<sup>3</sup>Китайский университет науки и технологии, Хейфей, КитайON  $\mathfrak{F}_h$ -NORMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPSYufeng Liu<sup>1</sup>, Xiuxian Feng<sup>2</sup>, Jianhong Huang<sup>3</sup><sup>1</sup>Shandong Institute of Business and Technology, Yantai, China<sup>2</sup>Xuzhou Normal University, Xuzhou, China<sup>3</sup>University of Science and Technology of China, Hefei, China

Пусть  $G$  конечная группа и  $\mathfrak{F}$  – формация конечной группы. Мы говорим, что подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}_h$ -нормальной в  $G$  если существует такая нормальная подгруппа  $T$  группы  $G$ , что  $HT$  – нормальная халловская подгруппа в  $G$  и  $(H \cap T)H_G/H_G$  содержится в  $\mathfrak{F}$ -гиперцентре  $Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$  группы  $G/H_G$ . В данной работе мы получаем некоторые результаты о  $\mathfrak{F}_h$ -нормальных подгруппах и используем их для изучения конечных групп.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\mathfrak{F}_h$ -нормальная подгруппа, подгруппа Силова, максимальная подгруппа, минимальная подгруппа.

Let  $G$  be a finite group and  $\mathfrak{F}$  a formation of finite groups. We say that a subgroup  $H$  of  $G$  is  $\mathfrak{F}_h$ -normal in  $G$  if there exists a normal subgroup  $T$  of  $G$  such that  $HT$  is a normal Hall subgroup of  $G$  and  $(H \cap T)H_G/H_G$  is contained in the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter  $Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$  of  $G/H_G$ . In this paper, we obtain some results about the  $\mathfrak{F}_h$ -normal subgroups and use them to study the structure of finite groups.

**Keywords:** finite groups,  $\mathfrak{F}_h$ -normal subgroup, Sylow subgroup, maximal subgroup, minimal subgroup.

**Introduction**

Throughout this paper, all groups are finite and  $G$  denotes a group. The notation and terminology are standard, as in [1] and [2].

The relationship between the subgroups and the structure of  $G$  has been extensively studied in the literature. Many useful results of finite groups have been obtained under the assumption that some certain subgroups of  $G$  of prime power orders are well situated in  $G$ . Ito [3] has proved that if  $G$  is a group of odd order and all minimal subgroups of  $G$  lie in the center of  $G$ , then  $G$  is nilpotent. Buckley [4] showed that a group  $G$  of odd order is supersoluble if all minimal subgroups of  $G$  are normal in  $G$ . Srinivasan [5] proved that a group  $G$  is supersoluble if every maximal subgroup of every Sylow subgroup of  $G$  is normal in  $G$ .

Recently, by considering some special supplemented subgroups, people have obtained a series of new interesting results. For example, Wang [6] introduced  $c$ -normal subgroup: a subgroup  $H$  of  $G$  is said to be  $c$ -normal in  $G$  if there exists a normal subgroup  $K$  of  $G$  such that  $G = HK$  and  $H \cap K \leq H_G$ , where  $H_G$  is the maximal normal

subgroup of  $G$  contained in  $H$ . Later, Yang and Guo [7] gave the concept of  $\mathfrak{F}_n$ -supplemented subgroup: a subgroup  $H$  of  $G$  is said to be  $\mathfrak{F}_n$ -supplemented in  $G$  if there exists a normal subgroup  $K$  of  $G$  such that  $G = HK$  and  $(H \cap K)H_G/H_G$  is contained in the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter  $Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$  of  $G/H_G$ . Many facts have shown that  $c$ -normal and  $\mathfrak{F}_n$ -supplemented properties of some subgroups can give a good insight into the structure of supersoluble groups and  $p$ -nilpotent groups (see [6]–[12]).

As a development of this topic, the authors introduce the following new concept.

**Definition 0.1** [13]. Let  $\mathfrak{F}$  be a class of groups. A subgroup  $H$  of  $G$  is said to be  $\mathfrak{F}_h$ -normal in  $G$  if there exists a normal subgroup  $T$  of  $G$  such that  $HT$  is a normal Hall subgroup of  $G$  and  $(H \cap T)H_G/H_G \leq Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$ .

Recall that, for a class  $\mathfrak{F}$  of groups, a chief factor  $H/K$  of  $G$  is called  $\mathfrak{F}$ -central (see [14] or [1, Definition 2.4.3]) if  $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$ .

The symbol  $Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$  denotes the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter of a group  $G$ , that is, the product of all such normal subgroups  $H$  of  $G$  whose  $G$ -chief factors are  $\mathfrak{F}$ -central. A subgroup  $H$  of  $G$  is said to be  $\mathfrak{F}$ -hypercenter in  $G$  if  $H \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$ .

A class  $\mathfrak{F}$  of groups is called a formation if it is closed under homomorphic image and every group  $G$  has a smallest normal subgroup (called  $\mathfrak{F}$ -residual of  $G$  and denoted by  $G^{\mathfrak{F}}$ ) with quotient in  $\mathfrak{F}$ . A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be saturated if it contains every group  $G$  with  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ . We use  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{U}$  to denote the formations of all nilpotent groups and supersoluble groups, respectively.

Obviously, all normal subgroups,  $c$ -normal subgroups and  $\mathfrak{F}_n$ -supplemented subgroups are all  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G$ , for any nonempty saturated formation  $\mathfrak{F}$ . However, the converse is not true in general (see [13, Example 1.2]).

In this paper, we will use  $\mathfrak{F}_n$ -normal subgroups to give some new characterizations of some classes of groups. Some previously known results are generalized.

### 1 Preliminaries

A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be  $S$ -closed ( $S_n$ -closed) if it contains all subgroups (all normal subgroups, respectively) of all its groups.

For the sake of convenience, we cite the following lemmas which are useful in this paper.

**Lemma 1.1** [15, Lemma 2.1]. *Let  $\mathfrak{F}$  be a non-empty saturated formation,  $A \leq G$  and  $Z = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$ . Then*

(1) *If  $A$  is normal in  $G$ , then  $AZ/A \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/A)$ .*

(2) *If  $\mathfrak{F}$  is  $S$ -closed, then  $Z \cap A \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A)$ .*

(3) *If  $\mathfrak{F}$  is  $S_n$ -closed and  $A$  is normal in  $G$ , then  $Z \cap A \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A)$ .*

(4) *If  $G \in \mathfrak{F}$ , then  $Z = G$ .*

**Lemma 1.2** [12, Lemma 2.5]. *Let  $p$  be a prime number such that  $(|G|, p^2 - 1) = 1$ . If  $G/L$  is  $p$ -nilpotent and  $p^3 \nmid |L|$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent.*

**Lemma 1.3** [16, II 7.9]. *Let  $N$  be a nilpotent normal subgroup of  $G$ . If  $N \neq 1$  and  $N \cap \Phi(G) = 1$ , then  $N$  is a direct product of some minimal normal subgroups of  $G$ .*

**Lemma 1.4** [3, VI 14.3]. *Let  $G$  be a finite group. If  $G$  has an abelian Sylow  $p$ -subgroup  $P$  of  $G$ , then  $Z(G) \cap G' \cap P = 1$ .*

**Lemma 1.5** [17, Theorem 1]. *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation and  $G$  be a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group such that  $(G^{\mathfrak{F}})'$  is a proper subgroup of  $G^{\mathfrak{F}}$ , then  $G^{\mathfrak{F}}$  is a solvable group.*

**Lemma 1.6** [1, Corollary 3.2.9]. *If  $\mathfrak{F}$  is a local formation, then  $[G^{\mathfrak{F}}, Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)] = 1$ , for any group  $G$ .*

**Lemma 1.7** [13, Theorem 3.2]. *Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S$ -closed saturated formation containing  $\mathfrak{U}$ . Suppose that  $G$  is a group with a normal subgroup  $E$  such that  $G/E \in \mathfrak{F}$ . If all cyclic subgroups of  $E$  of prime order and order 4 are  $\mathfrak{U}_n$ -normal in  $G$ , then  $G \in \mathfrak{F}$ .*

**Lemma 1.8** [13, Theorem 4.1]. *A group  $G$  is solvable if and only if every minimal subgroup of  $G$  is  $\mathfrak{U}_n$ -normal in  $G$ .*

**Lemma 1.9** [13, Theorem 3.1]. *A group  $G$  is supersoluble if and only if there exists a normal subgroup  $E$  of  $G$  such that  $G/E$  is supersoluble and every maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of  $E$  is  $\mathfrak{U}_n$ -normal in  $G$ .*

**Lemma 1.10.** *Let  $R$  be a soluble minimal normal subgroup of  $G$ . If there exists a maximal subgroup  $R_1$  of  $R$  such that  $R_1$  is  $\mathfrak{U}_n$ -normal in  $G$ , then  $R$  is a group of prime order.*

*Proof.* Since  $R$  is a minimal normal subgroup of  $G$ ,  $R$  is an elementary abelian group and  $(R_1)_G = 1$ . By hypothesis, there exists a normal subgroup  $K$  of  $G$  such that  $R_1K$  is a normal Hall subgroup of  $G$  and  $R_1 \cap K \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)$ . Since  $R \cap KG$ ,  $R \cap K = 1$  or  $R \cap K = R$ . If  $R \cap K = 1$ , then  $R = R \cap R_1K = R_1(R \cap K) = R_1$ , a contradiction. If  $R \cap K = R$ , then  $R \leq K$ , and so  $R_1 \leq K$ . It follows that  $R_1 = R_1 \cap K \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)$ . If  $R$  is not a group of prime order, then  $1 \neq R_1 \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \cap R$ . Hence  $Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \cap R \neq 1$  and  $R \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)$ . It follows that  $R$  is a group of prime order. This contradiction completes the proof.

**Lemma 1.11** [13, Lemma 2.6]. *Let  $G$  be a group and  $H \leq K \leq G$ . Then*

(1)  *$H$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G$  if and only if  $G$  has a normal subgroup  $T$  such that  $HT$  is a normal Hall subgroup of  $G$ ,  $H_G \leq T$  and  $H/H_G \cap T/H_G \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$ .*

(2) *Suppose that  $H$  is normal in  $G$ . If  $K$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G$ , then  $K/H$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G/H$ .*

(3) *Suppose that  $H$  is normal in  $G$ . Then for every  $\mathfrak{F}_n$ -normal subgroup  $E$  of  $G$  satisfying  $(|H|, |E|) = 1$ ,  $HE/H$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G/H$ .*

(4) *If  $H$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G$  and  $\mathfrak{F}$  is  $S$ -closed, then  $H$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $K$ .*

(5) *If  $H$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G$  and  $\mathfrak{F}$  is  $S_n$ -closed, then  $H$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $K$ .*

(6) *If  $G \in \mathfrak{F}$ , then every subgroup of  $G$  is  $\mathfrak{F}_n$ -normal in  $G$ .*

**2 Main Results**

**Theorem 2.1.** *Let  $p$  be a prime divisor of  $|G|$  with  $(|G|, p-1)=1$ . Then  $G$  is  $p$ -nilpotent if and only if there exists a normal subgroup  $N$  of  $G$  such that  $G/N$  is  $p$ -nilpotent and every maximal subgroup of every Sylow subgroup of  $N$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ .*

*Proof.* The necessity is obvious. We only need to prove the sufficiency. Suppose that the assertion is false and let  $G$  be a counterexample of minimal order. we proceed the proof via the following steps.

(1)  $G$  is soluble,  $G$  has a minimal normal subgroup  $L \leq N$  and  $L$  is an elementary abelian  $r$ -group, where  $r$  is the largest prime in  $\pi(N)$ .

If  $p > 2$ , then  $G$  is soluble since  $(|G|, p-1) = 1$ . Now we assume that  $p = 2$ . Then  $G/N$  is 2-nilpotent and so  $G/N$  is soluble. Since every maximal subgroup of every Sylow subgroup of  $N$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ , it is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $N$  by Lemma 1.11 (4). Applying Lemma 1.9 for the case  $G = N$ , we get that  $N$  is supersoluble and so  $G$  is soluble. Hence, for the largest prime number  $r$  in  $\pi(N)$ , the Sylow  $r$ -subgroup  $R$  of  $N$  is normal in  $N$ . Since  $R \text{ char } N \trianglelefteq G$ ,  $R$  is normal in  $G$ . Thus,  $G$  has a minimal normal subgroup  $L \leq N$  and  $L$  is an elementary abelian  $r$ -group.

(2)  $G/L$  is  $p$ -nilpotent and  $L = R \in \text{Syl}_p(N)$ .

Obviously,  $(G/L)/(N/L) = G/N$  is  $p$ -nilpotent. Let  $R_1/L$  be a maximal subgroup of a Sylow  $r$ -subgroup of  $N/L$ . Then  $R_1$  is a maximal subgroup of the Sylow  $r$ -subgroup  $R$  of  $N$ . By hypothesis and Lemma 1.11 (2),  $R_1/L$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G/L$ . Let  $Q_1/L$  be a maximal subgroup of a Sylow  $q$ -subgroup of  $N/L$ , where  $q \neq r$ . It is clear that  $Q_1 = Q_1^*L$ , where  $Q_1^*$  is a maximal subgroup of a Sylow  $q$ -subgroup of  $N$ . By hypothesis and Lemma 1.11 (3),  $Q_1/L = Q_1^*L/L$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G/L$ . Hence by the minimal choice of  $G$ ,  $G/L$  is  $p$ -nilpotent. If  $p \nmid |L|$ , then  $G$  is  $p$ -nilpotent, a contradiction. So  $L$  is a  $p$ -group. Since the class of all  $p$ -nilpotent groups is a saturated formation,  $L$  is the unique minimal normal subgroup of  $G$  contained in  $N$  and  $L \not\leq \Phi(G)$ . By Lemma 1.3,  $F(N) = L$ . Since  $N$  is soluble,  $L \leq C_N(F(N)) \leq F(N)$  and so  $C_N(L) = L = F(N)$ . Because  $RG$  and  $R \leq F(N)$ , we have that  $L = R \in \text{Syl}_p(N)$ .

(3) Final contradiction.

Let  $L_1$  be a maximal subgroup of  $L$ . By (2) and the hypothesis,  $L_1$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ . Then by

Lemma 1.10, we have that  $|L| = p$ . Since  $G/L$  is  $p$ -nilpotent,  $G/L$  has a normal  $p$ -complement  $H/L$ . By Schur Zassenhaus theorem,  $H = G_p L$ , where  $G_p$  is a Hall  $p'$ -subgroup of  $G$ . Since  $p$  is the prime divisor of  $|G|$  with  $(|G|, p-1) = 1$  and  $N_H(L)/C_H(L) \lesssim \text{Aut}(L)$  is a cyclic subgroup of order  $p-1$ . By the well known Burnside theorem, we have that  $H$  is  $p$ -nilpotent. Hence,  $G_p \text{ char } H \trianglelefteq G$  and so  $G_p \trianglelefteq G$ . Clearly,  $G_p$  is a normal  $p$ -complement of  $G$ , which implies that  $G$  is  $p$ -nilpotent. The final contradiction completes the proof.

**Theorem 2.2.** *Let  $p$  be a prime divisor of  $|G|$  with  $(|G|, p-1) = 1$ . Then  $G$  is  $p$ -nilpotent if and only if  $G$  has a soluble normal subgroup  $H$  such that  $G/H$  is  $p$ -nilpotent and every maximal subgroup of every Sylow subgroup of  $F(H)$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ .*

*Proof.* The necessity is obvious. We only need to prove the sufficiency. Suppose that the assertion is false and let  $G$  be a counterexample with  $|G||H|$  minimal. Let  $P$  be an arbitrary Sylow  $r$ -subgroup of  $F(H)$ . Since  $P \text{ char } F(H) \text{ char } H \trianglelefteq G$ ,  $P \trianglelefteq G$ . We proceed the proof via the following steps.

(1)  $\Phi(G) \cap P = 1$ .

If not, then  $1 \neq \Phi(G) \cap P \trianglelefteq G$ . Let  $R = \Phi(G) \cap P$ . Clearly,  $(G/R)/(H/R) = G/H$  is  $p$ -nilpotent. By [3, Theorem III.3.5], we have that  $F(H/R) = F(H)/R$ . Assume that  $P/R$  is a Sylow  $r$ -subgroup of  $F(H/R)$  and  $P_1/R$  a maximal subgroup of  $P/R$ . Then  $P_1$  is a maximal subgroup of  $P$ . By hypothesis,  $P_1$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ . Then by Lemma 1.11 (2),  $P_1/R$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G/R$ . Now, let  $Q/R$  be a maximal subgroup of some Sylow  $q$ -subgroup of  $F(H/R) = F(H)/R$ , where  $q \neq r$ . Then  $Q = Q_1R$ , where  $Q_1$  is a maximal subgroup of the Sylow  $q$ -subgroup of  $F(H)$ . By hypothesis,  $Q_1$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ . Hence  $Q/R = Q_1R/R$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G/R$  by Lemma 1.11 (3). This shows that  $(G/R, H/R)$  satisfies the hypothesis. The minimal choice of  $(G, H)$  implies that  $G/R$  is  $p$ -nilpotent. Since  $G/\Phi(G) = (G/R)/(\Phi(G)/R)$  is  $p$ -nilpotent and the class of all  $p$ -nilpotent groups is a saturated formation,  $G$  is  $p$ -nilpotent, a contradiction. Hence (1) holds.

(2)  $P = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_m \rangle$ , where every  $\langle x_i \rangle$

$(i = 1, \dots, m)$  is a normal subgroup of  $G$  of order  $r$ .

By (1) and Lemma 1.3,  $P = R_1 \times \dots \times R_m$ , where  $R_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) is a minimal normal subgroup of  $G$ . We now prove that all  $R_i$  are of order  $r$ .

Assume that  $|R_i| > r$ , for some  $i$ . Without loss of generality, we let  $|R_1| > r$ . Let  $R_1^*$  be a maximal subgroup of  $R_1$ . Then  $R_1^* \times R_2 \times \dots \times R_m = P_1$  is a maximal subgroup of  $P$ . Set  $T = R_2 \times \dots \times R_m$ , then, clearly  $(P_1)_G = T$ . By hypothesis,  $P_1$  is  $\mathcal{U}_h$ -normal in  $G$ . Hence by Lemma 1.11 (1), there exists a normal subgroup  $N$  of  $G$ , such that  $(P_1)_G \leq N$ ,  $P_1N$  is a normal Hall subgroup of  $G$  and  $(P_1 \cap N)/(P_1)_G \leq Z_\infty^{\mathcal{U}}(G/(P_1)_G)$ . It follows that  $P_1N = R_1^*TN = R_1^*N$ . If  $R_1^* \cap N \neq 1$ , then  $1 < R_1 \cap N \leq G$ . By the minimal normality of  $R_1$ ,  $R_1 \cap N = R_1$  and so  $R_1 \leq N$ . Hence  $P_1N = R_1^*N = N$ . Consequently  $P_1 \leq N$ . It follows that  $P_1/(P_1)_G \leq Z_\infty^{\mathcal{U}}(G/(P_1)_G)$ . If  $(P_1)_G = P_1$ , then  $R_1^* = 1$ , which contradicts  $R_1^* \cap N \neq 1$ . Hence  $(P_1)_G < P_1$  and so  $1 \neq P_1/(P_1)_G \leq Z_\infty^{\mathcal{U}}(G/(P_1)_G) \cap P/(P_1)_G$ . Since  $P/(P_1)_G = R_1$  and  $R_1$  is a minimal normal subgroup of  $G$ ,  $P/(P_1)_G$  is a chief factor of  $G$ . This implies that  $Z_\infty^{\mathcal{U}}(G/(P_1)_G) \cap P/(P_1)_G = P/(P_1)_G$  and so  $P/(P_1)_G \leq Z_\infty^{\mathcal{U}}(G/(P_1)_G)$ . It follows that  $|P/(P_1)_G| = r$ . Hence  $|R_1| = r$ , a contradiction. Now assume that  $R_1^* \cap N = 1$ . Then  $(R_1^*)_G = 1 \leq N \leq G$ ,  $R_1^*N = P_1N$  is a normal Hall subgroup and  $(R_1^* \cap N)/(R_1^*)_G = 1 \leq Z_\infty^{\mathcal{U}}(G/(R_1^*)_G)$ . This shows that  $R_1^*$  is  $\mathcal{U}_h$ -normal in  $G$ . Hence  $R_1$  is a cyclic group of order  $r$  by Lemma 1.10, a contradiction again. Thus (2) holds.

(3)  $G/F(H)$  is  $p$ -nilpotent.

From (2),  $F(H) = \langle y_1 \rangle \times \dots \times \langle y_n \rangle$ , where every  $\langle y_i \rangle$  ( $i = 1, \dots, n$ ) is a normal subgroup of  $G$  of prime order. Since  $G/C_G(\langle y_i \rangle)$  is isomorphic to a subgroup of  $Aut(\langle y_i \rangle)$ ,  $G/C_G(\langle y_i \rangle)$  is cyclic and so it is  $p$ -nilpotent for each  $i$ . It follows that  $G/\cap_{i=1}^n C_G(\langle y_i \rangle)$  is  $p$ -nilpotent. Obviously,  $C_G(F(H)) = \cap_{i=1}^n C_G(\langle y_i \rangle)$ . Hence  $G/C_G(F(H))$  is  $p$ -nilpotent. Consequently  $G/(H \cap C_G(F(H))) = G/C_H(F(H))$  is  $p$ -nilpotent. Because  $F(H)$  is abelian, we have that  $F(H) \leq C_H(F(H))$ . On the other hand,  $C_H(F(H)) \leq F(H)$  for  $H$  is soluble. Thus  $F(H) = C_H(F(H))$  and so  $G/F(H)$  is  $p$ -nilpotent.

(4) Final contradiction.

In view of Theorem 2.1, we have that  $G$  is  $p$ -nilpotent. The final contradiction completes the proof.

**Theorem 2.3.** Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S$ -closed saturated formation which satisfies that every minimal non- $\mathfrak{F}$ -group is soluble. Then  $G$  is an  $\mathfrak{F}$ -group if and only if  $G$  has a normal subgroup  $N$  such that  $G/N \in \mathfrak{F}$  and every cyclic subgroup of order 4 of  $N$  is  $\mathfrak{F}_h$ -normal in  $G$  and every minimal subgroup of  $N$  is contained in  $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$ .

*Proof.* The necessity is obvious. We only need to prove the sufficiency. Assume that the assertion is false and choose  $G$  to be a counterexample of minimal order. Then, obviously  $N \neq 1$ .

Let  $L$  be a proper subgroup of  $G$ . Then  $L/L \cap N = LN/N \leq G/N$  implies that  $L/L \cap N \in \mathfrak{F}$ . Since  $L \cap N \leq N$ , by hypothesis, every cyclic subgroup of  $L \cap N$  of order 4 is  $\mathfrak{F}_h$ -normal in  $G$  and hence is  $\mathfrak{F}_h$ -normal in  $L$  by Lemma 1.11. On the other hand, since every minimal subgroup of  $L$  is a minimal subgroup of  $G$ , every minimal subgroup of  $L$  is contained in  $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G) \cap L \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(L)$  by Lemma 1.1. This shows that  $(L, N \cap L)$  satisfies the hypothesis. By the minimal choice of  $G$ ,  $L \in \mathfrak{F}$  and so  $G$  is a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group. By [1, Theorem 3.4.2] and the hypothesis, we know that  $G$  is soluble and  $G$  has the following properties: (1)  $G^\delta$  is a  $p$ -group, for some prime  $p$ ; (2)  $G^\delta/\Phi(G^\delta)$  is a chief factor of  $G$ ; (3) If  $G^\delta$  is abelian, then  $G^\delta$  is an elementary abelian  $p$ -group; (4) If  $p > 2$ , then the exponent of  $G^\delta$  is  $p$ ; if  $p = 2$ , then the exponent of  $G^\delta$  is 2 or 4.

Since  $G/N \in \mathfrak{F}$ ,  $G^\delta \leq N$ . Suppose that the exponent of  $G^\delta$  is a prime. Then by hypothesis,  $G^\delta \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$  and so  $G \in \mathfrak{F}$ , a contradiction.

Now assume that  $G^\delta$  is not abelian and  $p = 2$ . We claim that there is no an element of order 4 in  $G^\delta \setminus \Phi(G^\delta)$ . Assume that there exists an element  $x \in G^\delta \setminus \Phi(G^\delta)$  with  $|\langle x \rangle| = 4$ . Then by hypothesis,  $\langle x \rangle$  is  $\mathfrak{F}_h$ -normal in  $G$ . Hence by Lemma 1.11 (1), there exists a normal subgroup  $T$  of  $G$  such that  $\langle x \rangle T$  is a normal Hall subgroup of  $G$  and  $\langle x \rangle / \langle x \rangle_G \cap T / \langle x \rangle_G \leq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G / \langle x \rangle_G)$ . Thus  $G^\delta \leq \langle x \rangle T$  by (1). Let  $P_1 = G^\delta \cap T$ . Then  $P_1 \trianglelefteq G$ . If  $P_1 \leq \Phi(G^\delta)$ , then  $G^\delta = G^\delta \cap \langle x \rangle T = \langle x \rangle (G^\delta \cap T) = \langle x \rangle P_1 = \langle x \rangle$ , a contradiction. So  $P_1 \not\leq \Phi(G^\delta)$ . By (2)  $P_1 \Phi(G^\delta) / \Phi(G^\delta) = G^\delta / \Phi(G^\delta)$ . It follows that

$P_1 = G^\delta$  and so  $G^\delta \leq T$ . Thus  $\langle x \rangle \leq T$  and  $\langle x \rangle = \langle x \rangle \cap T$ . We first assume that  $\langle x \rangle / \langle x \rangle_G \cap T / \langle x \rangle_G = 1$ . Then  $\langle x \rangle = \langle x \rangle_G \trianglelefteq G$ . Hence  $\langle x \rangle \Phi(G^\delta) / \Phi(G^\delta) \trianglelefteq G / \Phi(G^\delta)$ . Then by (2),  $\langle x \rangle \Phi(G^\delta) = G^\delta$  and so  $\langle x \rangle = G^\delta$ , a contradiction. Hence  $\langle x \rangle / \langle x \rangle_G \cap T / \langle x \rangle_G \neq 1$ , that is  $\langle x \rangle_G < \langle x \rangle$ , and so  $|\langle x \rangle_G| \leq 2$ . If  $|\langle x \rangle_G| = 1$ , then  $\langle x \rangle \leq Z_\infty^\delta(G)$ . By hypothesis,  $G^\delta \leq Z_\infty^\delta(G)$  and consequently  $G \in \mathfrak{F}$ , a contradiction. If  $|\langle x \rangle_G| = 2$ , then  $\langle x \rangle / \langle x \rangle_G \leq Z_\infty^\delta(G / \langle x \rangle_G)$  and  $\langle x \rangle_G \leq Z_\infty^\delta(G)$ . It follows that  $Z_\infty^\delta(G / \langle x \rangle_G) = Z_\infty^\delta(G) / \langle x \rangle_G$ . Hence  $\langle x \rangle \leq Z_\infty^\delta(G)$ . This implies that  $G^\delta \leq Z_\infty^\delta(G)$ . Consequently  $G \in \mathfrak{F}$ . This final contradiction completes the proof.

**Corollary 2.3.1.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S$ -closed saturated formation which satisfies that every minimal non- $\mathfrak{F}$ -group is soluble. Then  $G$  is an  $\mathfrak{F}$ -group if and only if every cyclic subgroup of order 4 of  $G$  is  $\mathfrak{F}_h$ -normal in  $G$  and every minimal subgroup of  $G$  is contained in  $Z_\infty^\delta(G)$ .*

**Corollary 2.3.2** (Miao, Guo [18]). *Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S$ -closed saturated formation which satisfies that a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group is soluble and its  $\mathfrak{F}$ -residual is a Sylow subgroup. If every cyclic subgroup of order 4 of  $G$  is  $c$ -normal in  $G$  and every minimal subgroup of  $G$  is contained in the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter of  $G$ , then  $G$  is an  $\mathfrak{F}$ -group.*

**Corollary 2.3.3** (Miao, Guo [18]). *Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S$ -closed saturated formation which satisfies that a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group is soluble and its  $\mathfrak{F}$ -residual is a Sylow subgroup. Let  $N$  be a normal subgroup of  $G$  and  $G/N \in \mathfrak{F}$ . If every cyclic subgroup of order 4 of  $N$  is  $c$ -normal in  $G$  and every minimal subgroup of  $N$  is contained in the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter of  $G$ , then  $G$  is an  $\mathfrak{F}$ -group.*

**Theorem 2.4.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S$ -closed saturated formation containing  $\mathfrak{U}$  and  $G$  a group. Then  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if there exists a normal subgroup  $N$  of  $G$  such that  $G/N \in \mathfrak{F}$  and all elements of  $N$  of odd prime order are  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$  and  $N$  has an abelian Sylow 2-subgroup and every subgroup of  $N$  of order 2 is contained in  $Z_\infty^\mathfrak{U}(G)$ .*

*Proof.* Assume that the theorem is false and let  $G$  be a counterexample of minimal order.

First we show that  $M \in \mathfrak{F}$  for every maximal subgroup  $M$  of  $G$ . If  $N \not\leq M$ , then  $G = MN$  and  $M/M \cap N \cong MN/N \in \mathfrak{F}$ . Since  $\mathfrak{F}$  is  $S$ -closed,

$M \cap Z_\infty^\delta(G) \leq Z_\infty^\delta(M)$  by Lemma 1.1. Then by Lemma 1.11, we see that  $(M, M \cap N)$  satisfies the hypothesis. Hence  $M \in \mathfrak{F}$  by the choice of  $G$ . Therefore  $G$  is a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group. Let  $R = G^\delta$ . Then  $R \leq N$ . Assume that  $R' < R$ , where  $R'$  is the derived subgroup of  $R$ . Then  $R$  is soluble by Lemma 1.5. Hence by [1, Theorem 3.4.2] and since  $R$  has an abelian Sylow 2-subgroup,  $R$  is a  $p$ -group of exponent  $p$ . If  $p \neq 2$ , then  $G \in \mathfrak{F}$  by Lemma 1.7, a contradiction. Suppose that  $p = 2$ , then  $R$  is an elementary abelian 2-group. Thus, by hypothesis,  $R \leq Z_\infty^\delta(G)$  and so  $G \in \mathfrak{F}$ , a contradiction. Now assume that  $R = R'$ . Let  $T$  be a Sylow 2-group of  $R$ . Then  $T$  is abelian and so  $T \cap Z(R) = 1$  by Lemma 1.4. Assume that  $T \neq 1$ . Then there exists an element  $r \in T$  with  $|r| = 2$ . Hence  $r \in Z_\infty^\delta(G)$  and so  $r \in Z_\infty^\delta(G) \cap R$ . Since  $Z_\infty^\delta(G) \cap R$  is contained in  $Z(R)$  by Lemma 1.6,  $r \in Z(R) \cap T \neq 1$ . That is  $Z(R) \cap T \neq 1$ . This contradiction shows that  $R$  is of odd order. Therefore by Feit-Thompson theorem,  $R$  is soluble, which contradicts  $R = R'$ .

These contradictions show that the counterexample of minimal order does not exist. Therefore the Theorem holds.

**Theorem 2.5.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation containing  $\mathfrak{U}$ . Suppose that  $G$  is a group with a normal subgroup  $H$  such that  $G/H \in \mathfrak{F}$ . Then  $G \in \mathfrak{F}$  if one of the following conditions holds:*

- (a)  $G$  is 2-nilpotent and every element  $x$  of odd prime order of  $H$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ .
- (b)  $H$  has an abelian Sylow 2-subgroup and every subgroup of prime order of  $H$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ .

*Proof.* (a) If  $G$  is 2-nilpotent, then  $H$  is 2-nilpotent. Let  $K$  be the 2-complement of  $H$ . Then  $K \trianglelefteq G$ . Since  $(G/K)/(H/K) = G/H \in \mathfrak{F}$  and  $H/K$  is a 2-group,  $H/K$  has no element of odd order. Hence  $G/K \in \mathfrak{F}$  by induction on  $|G|$ . Since  $K$  is a 2-complement of  $H$ ,  $K$  has no cyclic subgroup of order 4. Thus  $G \in \mathfrak{F}$  by Lemma 1.7.

(b) Let  $E = G^\delta$ . Then, obviously,  $E \leq H$  and  $E$  has abelian Sylow 2-subgroups. By hypotheses, every subgroup  $\langle x \rangle$  of prime order of  $E$  is  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $G$ . Hence, by Lemma 1.11,  $\langle x \rangle$  is also  $\mathfrak{U}_h$ -normal in  $E$ . It follows from Lemma 1.8 that  $E$  is soluble. Let  $M$  be a maximal subgroup of  $G$  such that  $E \not\leq M$ . Then  $ME/E \cong M/M \cap E \in \mathfrak{F}$ . It is easy to see that  $(M, M \cap E)$  satisfies the hypothesis. Therefore  $M \in \mathfrak{F}$  by induction. Then, applying [1,

Theorem 3.4.2], we see that  $E$  is a  $p$ -group of exponent  $p$ . Thus  $G \in \mathfrak{F}$  by Lemma 1.7.

## REFERENCES

1. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press / Kluwer Academic Publishers, 2000.
2. Robinson, D.J.S. A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – New York : Springer, 1982.
3. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967.
4. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – Vol. 116. – P. 15–17.
5. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 3, № 35. – P. 210–214.
6. Wang, Y.  $c$ -normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
7. Yang, N. On  $\mathfrak{F}_n$ -supplemented subgroups of finite groups / N. Yang, W. Guo // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 1, № 4. – P. 619–629.
8. Wang, Y.  $c$ -normality and solvability of groups / Y. Wang // J. Pure Appl. Algebra. – 1996. – Vol. 110. – P. 315–320.
9. Guo, X. On  $c$ -normal maximal and minimal subgroups of Sylow  $p$ -subgroups of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80. – P. 561–569.
10. Li, D. The influence of  $c$ -normality of subgroups on the structure of finite groups / D. Li, X. Guo // J. Pure. App. Algebra. – 2000. – Vol. 150. – P. 53–60.
11. Li, D. The influence of  $c$ -normality of subgroups on the structure of finite groups II / D. Li, X. Guo // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26. – P. 1913–1922.
12. Miao, L. New criteria for  $p$ -nilpotency of finite groups / L. Miao, W. Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35. – P. 965–974.
13. Feng X., Guo W., Huang J., New characterizations of some classes of finite groups, Malaysian Mathematical Science Society, to appear.
14. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow : Nauka, 1989.
15. Guo, W. On  $\mathfrak{F}$ -supplemented subgroups of finite group / W. Guo // Manuscripta Math. – 2008. – Vol. 127. – P. 139–150.
16. Shemetkov, L.A. Formations of Finite Groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, 1978.
17. Ballester-Belinches, A. On minimal subgroups of finite groups / A. Ballester-Belinches, M.C. Pedraza-Aguilera // Acta Math. – 1966. – Vol. 73, № 4. – P. 335–342.
18. Miao, L. The influence of  $c$ -normality of some subgroups on the structure of a finite / L. Miao, W. Guo // Problems in Algebra. – 2000. – Vol. 3, № 16. – P. 101–106.

Research is supported by a NNSF of China (Grant: 10771180).

Поступила в редакцию 23.07.10.

УДК 004.7

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ КОРПОРАТИВНОЙ СЕТИ

О.М. Демиденко, В.Д. Левчук, А.И. Кучеров

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

## FUNCTIONAL CAPABILITIES OF PROGRAM TOOLS FOR THE ADAPTIVE IDENTIFICATION OF THE CORPORATE NETWORK USERS

O.M. Demidenko, V.D. Liauchuk, A.I. Kucharau

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

В статье предложен адаптивный способ защиты вычислительной техники от несанкционированного использования. Приводится оригинальная схема реализации программного комплекса. Рассматриваются преимущества создания и внедрения разработанного программного комплекса.

**Ключевые слова:** авторизация, идентификация, аутентификация, программный комплекс, корпоративная сеть.

The authors propose an adaptive way of protecting computers from unauthorized use. The original scheme of the software implementation is discussed. The advantages of creating and implementing of program tools are considered.

**Keywords:** authorization, identification, authentication, software system, the corporate network.

### **Введение**

Практически каждый офисный сотрудник в своей повседневной производственной деятельности в течение всего рабочего дня использует компьютерную технику и коммуникационное оборудование. В настоящее время огромное количество оборудования объединяется в сетевые структуры различных стандартов и типов. Будь то локальные, корпоративные, городские или глобальные сети.

В процессе своей деятельности человек – пользователь, использует различные сетевые ресурсы и в свою очередь создает различные компьютерные продукты: документы, чертежи, программы, мультимедиа и др. Каждый сетевой ресурс и программный продукт является собственностью определенного человека или группы лиц и в конечном итоге может быть собственностью предприятия. Поэтому возникает необходимость обеспечения сохранности создаваемых программных продуктов. Для этих целей используется превеликое множество программных и аппаратных решений. Но основной и первоначальной задачей является обеспечение достоверной идентификации пользователя. Для этих целей операционная система предоставляет большие возможности, но их не достаточно, так как они широко известны злоумышленнику [3], [4]. Поэтому задачи идентификации и аутентификации пользователей корпоративной компьютерной сети являются актуальными.

### **1 Традиционная схема защиты сетевых ресурсов от несанкционированного использования**

Каждый пользователь или группа пользователей в операционной системе обладают определенными правами. Действия, которые пользователь может выполнять в операционной системе, строго определены и описаны. В общем случае возможностей у пользователя много. Он может выполнять большое количество различных операций, на которые может иметь или не иметь права. Эти операции связаны как с работой на локальном компьютере, так с работой в сетевой среде.

Чем выше привилегии пользователя, тем выше у него права и соответственно возможности. Всеми правами в операционной системе обладают только администраторы системы. Для управления правами пользователей в операционной системе в настройках имеется возможность администрирования, где можно назначить права пользователя [2], [5].

Пользователь может выполнять большое количество действий. Но не все из них пользователь имеет право и должен выполнять. А информация может быть как общего, личного, так и служебного использования.

Для повышения дисциплины руководство организаций и предприятий должно иметь возможность управлять правами пользователей локальной вычислительной сети и следить за выполнением их служебных обязанностей.

Обеспечить эти возможности предназначено как встроенное в операционную систему, так и другое системное программное обеспечение.

Современные операционные системы от версии к версии совершенствуют системы, отвечающие за безопасность. Войти в операционную систему возможно только зарегистрированному пользователю. Он должен знать зарегистрированное имя пользователя и его пароль. Если компьютер подключен к компьютерной сети с доменами в качестве рабочей станции, то операционная система потребует помимо имени и пароля, еще и имя домена. Только при совпадении этих трех составляющих пользователю будет разрешен вход в систему. То есть пользователь пройдет аутентификацию [3].

Аутентификация – это установление подлинности личности. Она может быть выполнена при использовании трех вещей: того, что вы знаете, того, что вы имеете, или того, кем вы являетесь. Исторически для идентификации личности в компьютерных системах применяются пароли. Но надеяться на пароли особо не следует. Пароль можно угадать, либо пользователь где-то запишет его, и пароль узнают все. Пользователь также может передать свой пароль другому лицу по какой либо просьбе или с преступным умыслом.

На рисунке 1 показана упрощенная традиционная схема защиты вычислительной техники от несанкционированного использования.

На рисунке 1 видно, что защита сетевых ресурсов от несанкционированного использования складывается из трех составляющих: административные средства, программные средства, аппаратные средства. Административные средства описывают служебные обязанности каждого работника, правила внутреннего распорядка и правила использования вычислительной техники.

Административные средства предписывают настройки программных и аппаратных средств. Аппаратные средства чаще всего настраиваются посредством программных средств, которые в свою очередь состоят из операционной системы, утилит от производителя операционной системы, утилит сторонних производителей, собственные программные разработки. Но и все программные и аппаратные средства имеют свои ограничения, что вносит свои коррективы в административные средства.

Для обеспечения эффективной безопасности вычислительной системы необходимо использовать все три выше описанные составляющие. Но внедрение самых эффективных систем защиты вычислительной техники от несанкционированного использования может обойтись очень дорого, но это еще не значит, что у предприятия будут все необходимые возможности по управлению политикой безопасности. Поэтому многие субъекты стремятся создавать собственные программные комплексы для обеспечения защиты от несанкционированного использования вычислительной техники. При этом программным путем можно следить за всеми действиями пользователя вычислительной системы.

## 2 Адаптивная схема защиты сетевых ресурсов от несанкционированного использования

Можно предложить следующую схему реализации программного комплекса защиты сетевых ресурсов от несанкционированного использования, которая будет состоять из трех связанных друг с другом программных продуктов. Первый программный продукт будет функционировать на локальной станции. Его главным предназначением будет мониторинг работы пользователя с сохранением результата в файл.



Рисунок 1 – Защита вычислительной техники от несанкционированного использования

Второй программный продукт будет функционировать на сервере безопасности и заниматься сбором и анализом результатов мониторинга активности пользователей на рабочих станциях. Из этих данных можно получить информацию различного рода. Например, сколько пользователь проводит времени за компьютером и какие приложения запускает, какие устройства ввода являются предпочтительными, какие приложения постоянно находятся в оперативной памяти, какой файловый менеджер загружается по умолчанию и т. д. По этим и другим данным можно составить индивидуальный портрет поведения пользователя за компьютером [1].

Третий программный продукт будет заниматься дополнительной идентификацией личности пользователя по хранящемуся на сервере портрету поведения пользователя и по некоторым другим данным. На рисунке 2 показана адаптивная схема программного комплекса по защите сетевых ресурсов.

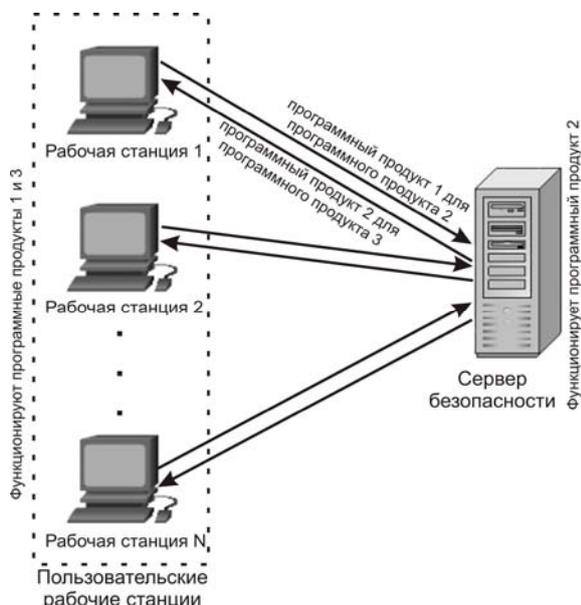


Рисунок 2 – Адаптивная схема программного комплекса мониторинга активности Пользователей

Различие в операционных системах, установленных на рабочих станциях влечет за собой разработку различных версий первого и третьего программных продуктов. Но сервер безопасности должен иметь общий стандартный интерфейс для всех версий.

При использовании в сети технологии «тонкий клиент» все становится еще проще, поскольку достаточно собирать данные в пределах сервера, обслуживающего клиентские рабочие станции (рисунок 3). Функции сервера обслуживания и сервера безопасности можно совместить на одной аппаратной базе. Тогда весь программный комплекс, состоящий из трех программных продуктов, будет работать на одном сервере.

В результате при использовании широко известных средств защиты от несанкционированного использования вычислительной техники совместно с предложенным программным комплексом можно надеяться, что защита будет гораздо более эффективной. При этом предложенный программный комплекс решает, помимо дополнительной защиты от несанкционированного использования вычислительной техники, еще и ряд других задач. Во-первых можно проанализировать, сколько времени каждый пользователь проводит за вычислительной техникой. Во-вторых, можно выяснить какие приложения запускал пользователь и, исходя из этого оценить, сколько времени пользователь решал производственные задачи и сколько находился в состоянии таймаута. В-третьих, анализируя данные на сервере, можно увидеть продолжительность работы каждой рабочей станции от момента включения до момента выключения. Из этого времени элементарно выделяется время простоя вычислительной техники. При творческом подходе перечень опциональных возможностей системных программных средств не ограничивается приведенными выше режимами функционирования. Таким образом, данный программный комплекс обеспечивает эффективные механизмы администрации по управлению предприятием.



Рисунок 3 – Схема программного комплекса мониторинга активности пользователей для технологии «тонкий клиент».

### 3 Этапы разработки программного комплекса

На первом этапе разработки программного обеспечения создан программный продукт, позволяющий автоматизировать действия администратора корпоративной сети по регистрации пользователей на контроллере домена. Для

предоставления доступа к ресурсам сети необходимо применять средства операционной системы, которые позволяют разграничить права пользователей на используемые данные. Операционная система является связующим звеном между электронными средствами и пользователем. Вся информация хранится в электронном виде на компьютерах.

Разграничением прав доступа пользователей к различной информации занимается администратор корпоративной сети. Для осуществления своей деятельности ему необходимо обрабатывать большие объемы информации, содержащей сведения о компьютерах и пользователях корпоративной сети. На рисунке 4 представлена схема традиционной работы администратора корпоративной сети.

Для усовершенствования работы администратора сети по разграничению прав доступа пользователей к информационным ресурсам сети используется разработанная авторами автоматизированная система ДОСТУП, которая позволяет уменьшить ошибки, сбои и дублирование служебной информации в работе администратора и операционной системы. На рисунке 5 представлена схема работы администратора сети посредством автоматизированной системы.

Автоматизированной системой реализуются следующие задачи:

- ввод первичной информации в базу данных Active Directory [2];
- модификация, удаление устаревшей информации;
- ввод вторичной информации;

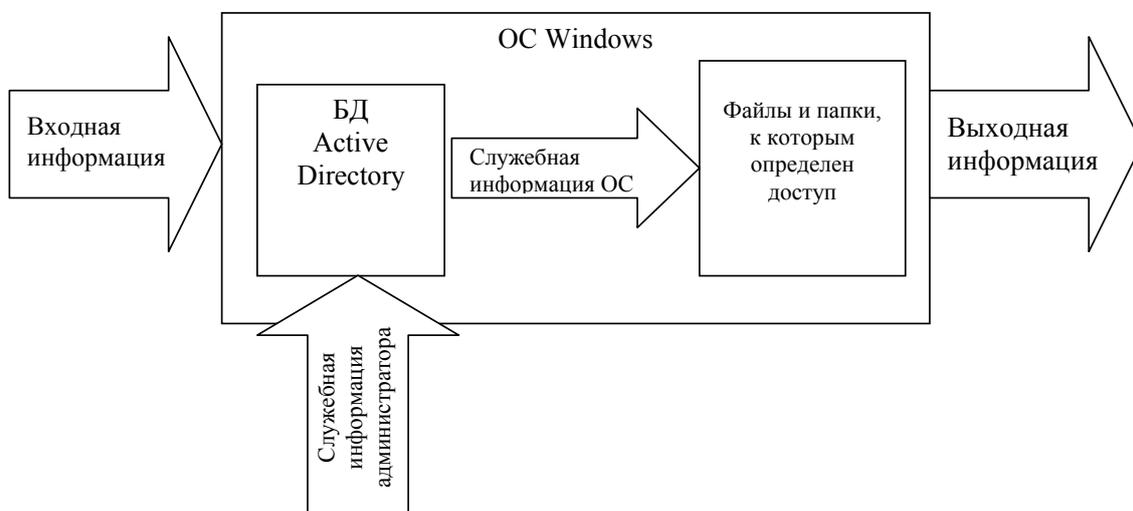


Рисунок 4 – Структура неавтоматизированной работы администратора сети средствами операционной системы

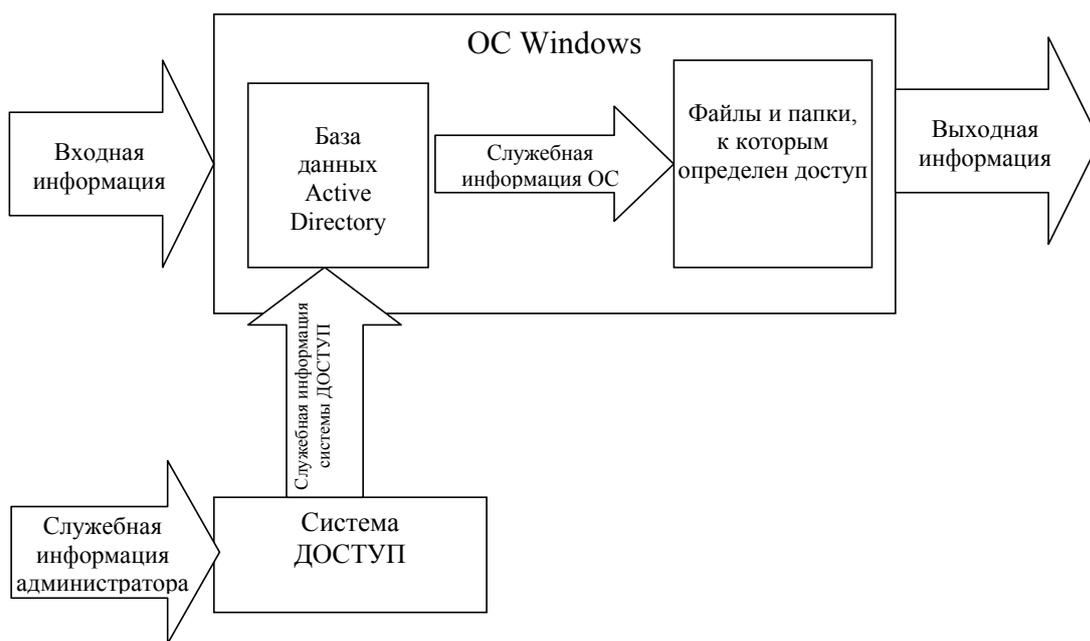


Рисунок 5 – Структура автоматизированной работы администратора сети

- репликация базы данных Active Directory;
- поисковые запросы в базе данных Active Directory;
- вывод результатов поиска по запросам;
- создание личных папок пользователей корпоративной сети;
- разграничение прав доступа к вычислительным ресурсам корпоративной сети;
- ведение аудита входа и выхода на рабочей станции;
- ведение аудита использования сетевых ресурсов;
- автоматизация ввода вторичной информации;
- автоматизация модификации и удаления устаревшей информации.

На втором этапе разработки программного обеспечения создан программный комплекс адаптивной идентификации пользователей корпоративной сети. В его основе находится сбор информации о пользователях на узлах сети и формирование идентификационного портрета каждого пользователя.

В качестве узлов сети приняты персональные компьютеры, соединенные посредством сетевой среды, выполненной по одной из топологий. Рабочая нагрузка на узлах сети состоит из рабочей нагрузки, создаваемой операционной системой, и рабочей нагрузки, создаваемой пользователями вычислительной системы. В процессе функционирования операционной системы на узле сети порождается рабочая нагрузка посредством системных процессов. Кроме этого, пользователь вычислительной системы по роду своей деятельности выполняет различные задачи, которые в операционной системе представляются как пользовательские процессы. Пользователь может использовать следующие программные приложения: офисные пакеты; бухгалтерские пакеты; игры; интернет; графические пакеты и мультимедиа; языки программирования; специализированные программные средства.

Программный комплекс адаптивной идентификации пользователей корпоративной сети архитектурно построен на основе модульного принципа разработки приложений. Каждый модуль выполняет свои определенные функции, что позволяет уменьшить влияние одного программного модуля на другой. Это обеспечивает создание более гибкого и легко расширяемого по функциям программного модуля. Программные модули будут собирать информацию о действиях пользователей, например: скорость набора на клавиатуре (количество символов в единицу времени); скорость нажатий каждой кнопки манипулятора типа «мышь»; запускаемые приложения; время входа в узел сети; время выхода из узла сети; время блокировки пользователем узла сети; время простоя узла сети и т.д.

На основе собранной информации, создается идентификационный портрет пользователя корпоративной сети. Данные портреты пользователей хранятся в базе данных и сравниваются с текущей информацией о пользователе. Если сохраненный идентификационный портрет пользователя существенно не совпадает с текущей информацией о пользователе, то с определенной долей вероятности система адаптивной идентификации пользователей корпоративной сети принимает решение, что на узле сети работает пользователь, выдающий себя за другого пользователя. Методик по определению мнимых пользователей на основе идентификационного портрета пользователя достаточно много, и еще предстоит выяснить наиболее приемлемую из них [1]. Для этих целей необходимо продолжить научные исследования в этой области.

Чем дольше созданный программный комплекс будет функционировать на рабочих станциях в корпоративной сети, тем большими данными будет обладать база данных, в которой будут храниться действия пользователей. И тем более адекватно программный комплекс будет определять пользователя, выдающего себя за другого пользователя корпоративной сети.

Санкции, применяемые к таким нарушителям, определяет администрация организации, которая будет использовать созданный программный комплекс. В настоящее время рассмотренные в данной статье программные средства проходят опытную эксплуатацию.

Как выше отмечалось, из собранной информации можно делать и другие выводы. Например, сколько каждый узел сети работает в течение дня, недели, месяца и т.д. От этого будет зависеть, как часто необходимо проводить профилактические работы с тем или иным узлом. В процессе эксплуатации программного комплекса будут уточняться цели и задачи созданной системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Деннинг, В. Диалоговые системы «человек-ЭВМ». Адаптация к требованиям пользователя / В. Деннинг, Г. Эссинг, С. Макс – М. : «Мир», 1984.
2. Зубанов, Ф.В. Active Directory: подход профессионала / Ф.В. Зубанов. – М. : Издательско-торговый дом «Русская редакция», 2003.
3. Палмер М. Проектирование и внедрение компьютерных сетей: учебный курс / 2-е изд., перераб. и доп.; пер. с англ. / М. Палмер, Р.С. Брюс. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004.
4. Соловьев, В.Н. Операционные системы / В.Н. Соловьев. – М. : Радио и связь, 1991.
5. Чен, В. Реестр Windows NT для профессионалов / Чен Веинг. – СПб. : Питер, 1999.

Поступила в редакцию 11.07.10.

УДК 330.105.611

## ПЛАНИРОВАНИЕ КРЕДИТНЫХ УСЛОВИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОГО СЕТЕВОГО ГРАФИКА

О.И. Еськова, И.И. Кикоть

*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель*

## PLANNING OF THE CREDIT CONDITIONS BASED ON SIMULATION OF PROBABILISTIC NET DIAGRAM

O.I. Eskova, I.I. Kikot

*Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel*

Обсуждается задача определения срока начала возврата кредита на реализацию инвестиционного проекта. Проект представляется в виде вероятностного сетевого графика. Сравниваются аналитический и имитационный методы исследования.

**Ключевые слова:** кредит, инвестиционный проект, вероятностный сетевой график, имитационное моделирование.

The problem of the credit repayment term determination is discussed. Investment project is represented as probabilistic net diagram. Analytical and simulation methods of investigation are compared.

**Keywords:** credit, investment project, probabilistic net diagram, simulation.

### **Введение**

Реализация крупных инвестиционных проектов обычно не обходится без привлечения банковских кредитов. Примерами могут служить строительство завода, фабрики или широкомащтабная реконструкция какого-либо цеха. Такие проекты отличаются значительной продолжительностью во времени и неопределенностью сроков выполнения как отдельных работ, так и всего проекта в целом. В ситуации использования кредита срок ввода в эксплуатацию финансируемого объекта очень важен, поскольку его функционирование позволяет начать получать прибыль, из которой выплачивается кредит банку. За несвоевременное начало выплат банк наказывает введением различных штрафных санкций (обычно повышается процентная ставка по кредиту). Поэтому очень важно в момент заключения договора о кредитовании предусмотреть реальные сроки ввода объекта в эксплуатацию. Несмотря на многообразие условий и соглашений, которые могут быть отражены в договоре о кредитовании, основными параметрами такого договора являются:

$p_1$  – годовая процентная ставка по кредиту;

$T^{план}$  – планируемый срок завершения проекта и начала возврата кредита;

$T$  – период, в течение которого должен быть погашен кредит после начала его возврата равными долями;

$p_2$  – штрафная процентная ставка, которая будет применена в случае, если не вовремя будет начат возврат кредита.

© Еськова О.И., Кикоть И.И., 2010

Сегодня реальной практикой взаимоотношений отечественных кредитуемых организаций с банками является то, что они соглашаются на условия, которые предлагает банк. Однако зарубежный опыт показывает, что если организация обладает определенным уровнем доверия со стороны кредиторов и при этом предлагает свои условия получения кредита, то банки, как правило, их принимают. Поэтому при реализации серьезных инвестиционных проектов предприятие заинтересовано в проведении исследований о возможных сроках ввода объекта в эксплуатацию и на их основе определении такого параметра кредита, как  $T^{план}$ .

В данной работе срок завершения проекта определяется на основе анализа его вероятностной сетевой модели. Рассматривается существующий аналитический метод исследования такой модели, формулируются его недостатки. Предлагается использовать метод имитационного моделирования для получения более реального результата и снижения вероятности наступления штрафных санкций банка. Описывается алгоритм реализации этого метода в системе GPSS World и табличном процессоре MS Excel.

### **1 Аналитический метод исследования вероятностных сетевых графиков**

Одним из разделов теории сетевого планирования является исследование вероятностных сетевых графиков, т. е. таких сетевых моделей, которые обладают детерминированной структурой, а продолжительности работ задаются

некоторыми случайными величинами. При этом предполагается, что законы распределения этих случайных величин должны быть установлены на основе анализа аналогичных работ, проводившихся ранее. Если же работы являются новыми и малоизученными, то в качестве типового распределения их продолжительности используется бета-распределение [1]. Исследование продолжительности работ и подбор статистических аналогов для них является трудоемким и недостаточно мотивированным занятием для конкретных субъектов хозяйствования, поэтому, как правило, продолжительности работ в вероятностных сетевых графиках задаются именно с помощью бета-распределения на основе экспертных оценок.

Функция плотности бета-распределения (рисунок 1) имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} c(t-a)^p(b-t)^q & \text{для } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{для } -\infty < t < a, b < t < \infty, \end{cases}$$

где  $p, q$  – параметры распределения, зависящие от вида работы;  $c$  – нормирующий множитель, определяемый из условия  $c \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt = 1$ .

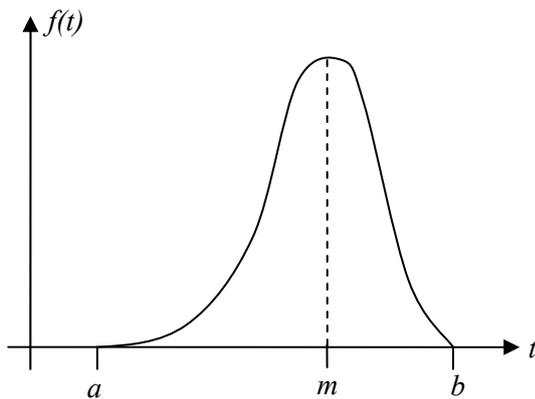


Рисунок 1 – Функция плотности бета-распределения

При задании характеристик этого распределения возможны два подхода:

1. Известны три оценки продолжительности каждой работы:

$a$  – оптимистический срок выполнения работы (наименьшая продолжительность);

$b$  – пессимистический срок выполнения работы (наибольшая продолжительность);

$m$  – наиболее вероятная продолжительность работы.

В этом случае проведенные ранее исследования позволили установить, что  $p+q=4$ , а математическое ожидание и дисперсия данной случайной величины могут быть рассчитаны по формулам:

$$\bar{t} = M[t] = \frac{a+4m+b}{6}; \quad D[t] = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2.$$

2. Известны только две оценки продолжительности работ:  $a$  и  $b$ .

В этом случае значения величин  $p$  и  $q$  близки к постоянным значениям  $p=1$  и  $q=2$  [1], а математическое ожидание и дисперсия рассчитываются по формулам:

$$\bar{t} = M[t] = \frac{3a+2b}{5}; \quad D[t] = \left(\frac{b-a}{5}\right)^2.$$

Применение двух временных оценок существенно уменьшает объем информации, который требуется от эксперта. Поэтому в дальнейшем будем ориентироваться именно на второй подход.

После определения математических ожиданий продолжительностей работ они приписываются дугам сетевого графика и производится расчет его параметров, как и в детерминированном случае. Таким образом, математическое ожидание критического срока проекта находится как сумма соответствующих математических ожиданий работ на критическом пути:

$$M[t_{кр}] = \sum_{(i,j) \in \mu_{кр}} \bar{t}_{ij}.$$

Дисперсию критического срока считают равной сумме дисперсий критических работ, предполагая, что продолжительности работ сетевого графика некоррелированы:

$$D[t_{кр}] = \sum_{(i,j) \in \mu_{кр}} D[t_{ij}].$$

Если продолжительности работ отклоняются от своих средних значений на такую малую величину, что критический путь не изменяется, и, если на критическом пути лежит значительное число работ (5 и более), то на основании центральной предельной теоремы приближенно считают, что его продолжительность подчиняется нормальному закону распределения с параметрами  $\bar{t}_{кр}, D[t_{кр}]$  [1]. Тогда вычисление вероятности того, что фактический срок выполнения проекта  $t_{ф}$  окажется меньше планового срока  $T^{план}$ ,

производится по формуле

$$P(t_{ф} < T^{план}) = \Phi(u) + 0,5,$$

где  $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция Лапласа, значения которой берутся из таблиц;

$$u = \frac{T^{план} - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}; \quad \sigma_{кр} = \sqrt{D[t_{кр}]}.$$

Рассмотрим в качестве примера реализации этого метода расчет вероятностного сетевого графика строительства молотового корпуса кузнечного завода (рисунок 2). На этом графике проставлены математические ожидания длительностей работ, каждая из которых задается бета-распределением с параметрами, указанными в таблице 1. Математическое ожидание и дисперсия продолжительности каждой работы

рассчитаны по формулам, соответствующим второму случаю (две экспертные оценки  $a$  и  $b$ ). Единица измерения времени – 1 день. Один из критических путей выделен жирной линией. Его продолжительность (математическое ожидание критического срока проекта) составляет

$$\bar{t} = 20 + 40 + 75 + 60 + 30 + 140 + 80 + 140 = 585.$$

На этом основании банк предлагает принять в договоре срок начала возврата кредита  $T_1^{план} = 600$  дней.

Рассчитаем дисперсию критического срока как сумму дисперсий критических работ:

$$D[t_{кр}] = 4 + 100 + 6,25 + 6,25 + 25 + 400 + 25 + 25 = 591,5;$$

$$\sigma_{кр} = \sqrt{D[t_{кр}]} = 24,321.$$

Тогда, если критический срок проекта имеет нормальный закон распределения, вероятность

того, что его фактическое значение окажется меньше запланированного, равна

$$P(t_{\phi} < T_1^{план}) = 0,731302$$

(при расчете использовалась функция НОРМ-РАСП() приложения MS Excel). Допустим, что руководство кузнечного завода хочет, чтобы эта вероятность была никак не ниже 0,9. Легко подобрать такое значение планового срока, чтобы это условие выполнялось. Например,  $T_2^{план} = 620$ .

При этом вероятность уложиться в этот срок у кузнечного завода гораздо выше:

$$P(t_{\phi} < T_2^{план}) = 0,924939.$$

Таким образом, результатом аналитического метода анализа данного сетевого графика было бы предложение увеличить срок начала возврата кредита на 20 дней.

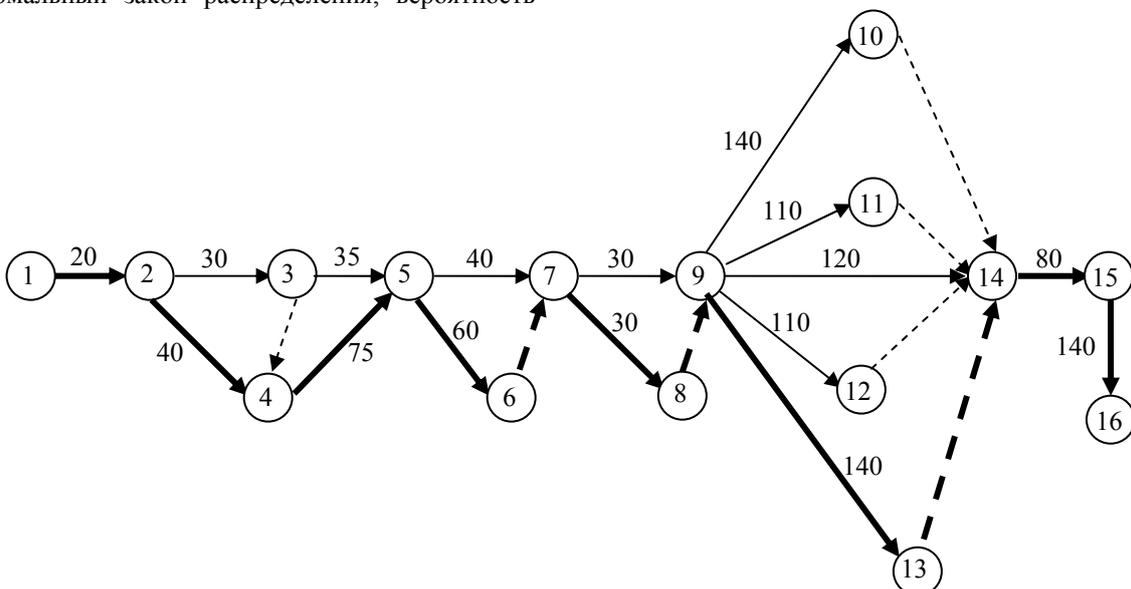


Рисунок 2 – Сетевой график строительства молотового корпуса

Таблица 1 – Параметры работ строительства молотового корпуса

Наименование работы	Код работы	$a$ , дней	$b$ , дней	$\bar{t}$ , дней	$D^2$
Разработка котлована	(1,2)	16	26	20	4
Устройство буронабивных свай	(2,3)	20	45	30	25
Устройство ростверков	(2,4)	20	70	40	100
Обратная засыпка и подсыпка	(3,5)	30	42,5	35	6,25
Установка ж/б колонн и плит	(4,5)	70	82,5	75	6,25
Устройство бетонной подготовки под полы	(5,7)	10	85	40	225
Монтаж блоков покрытий	(5,6)	55	67,5	60	6,25
Устройство кровли	(7,8)	20	45	30	25
Монтаж стеновых панелей	(7,9)	25	37,5	30	6,25
Монтаж отопительных систем	(9,10)	130	155	140	25
Заполнение проемов, окон, фонарей	(9,14)	100	150	120	100
Электроосвещение, монтаж электросилового оборудования	(9,11)	105	117,5	110	6,25
Монтаж водопровода и канализации	(9,12)	90	140	110	100
Отделочные работы	(9,13)	100	200	140	400
Устройство фундаментов под оборудование	(14,15)	70	95	80	25
Монтаж технологического оборудования	(15,16)	130	155	140	25

Укажем недостатки данного метода:

1. При наличии нескольких критических путей можно получить различные результаты, ориентируясь на каждый из них. Так, например, если бы был выбран критический путь

$$\mu = 1 - 2 - 4 - 5 - 6 - 7 - 9 - 10 - 14 - 15 - 16,$$

то его дисперсия составила бы  $D[t_{кр}] = 197,75$ .

Тогда руководство предприятия постаралось бы плановый срок увеличить на 5 дней для достижения результата  $P(t_{ф} < 605) = 0,922521$ . Очевидно, что при наличии нескольких критических путей следует выбирать для расчетов путь с наибольшей дисперсией.

2. Данный метод не является универсальным, поскольку нельзя гарантировать, что критический путь проекта останется неизменным при случайных продолжительностях работ с большими дисперсиями. Гипотеза о том, что критический срок проекта имеет нормальный закон распределения, не подтверждается и с помощью имитационных методов исследования, которые были проведены авторами. На различных сетевых графиках были получены различные законы распределения (в том числе нормальный и логнормальный законы).

3. Применение данного аналитического метода анализа сетевого графика вызывает большие сложности при других законах распределения времени выполнения каждой работы, отличных от бета-распределения.

4. Как будет показано далее, полученный срок завершения проекта является заниженным и на самом деле не обладает требуемой надежностью 0,9.

## 2 Имитационный метод исследования вероятностного сетевого графика

В основу анализа вероятностного сетевого графика положен метод статистических испытаний Монте-Карло [2], [3]. Суть этого метода состоит в проведении ряда экспериментов, в каждом из которых разыгрываются значения продолжительностей каждой работы. Совокупность этих значений определяет продолжительность проекта в целом (критический срок). При достаточно большом количестве статистических экспериментов и последующей обработке их результатов, можно получить выборочные характеристики критического срока: среднее, стандартное отклонение и т. д. Можно также анализировать закон распределения этой случайной величины на основании различных критериев согласия, определить вероятность выполнения проекта в запланированный срок.

Для реализации метода Монте-Карло предлагается использовать систему имитационного моделирования GPSS World, которая обеспечивает генерацию случайных чисел согласно заданным законам распределения, сбор и

предварительную обработку результатов экспериментов, удобство задания логической зависимости работ друг от друга и расчета критического срока проекта. На этапе обработки результатов экспериментов можно подключить приложение MS Excel и использовать его широкие возможности для статистического анализа.

Алгоритм имитационного исследования вероятностного сетевого графика включает следующие шаги:

1. Разработка имитационной модели сетевого графика на языке GPSS.

2. Проведение ряда экспериментов на этой модели в системе GPSS World. Предварительная обработка результатов экспериментов средствами системы.

3. Перенос результатов экспериментов в Excel и более детальный их анализ.

Удобство использования языка GPSS для моделирования сетевых графиков объясняется наличием в данном языке блоков для расщепления и объединения транзактов [4]. При этом блок SPLIT (Расщепить) используется, когда из одного события выходят несколько работ (рис.3). При этом для каждой работы создается отдельная копия транзакта, которая затем задерживается блоком ADVANCE (Задержать) на случайное время выполнения этой работы

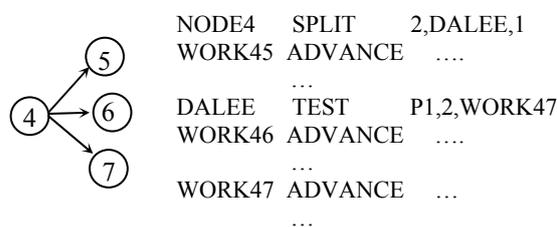


Рисунок 3 – Использование блока SPLIT

Блок ASSEMBLE (Собрать) используется для имитации наступления события, в которое входят несколько работ (рис.4). Этот блок ожидает поступления требуемого числа транзактов и объединяет их в один, который и продолжает движение. Таким образом, указанное событие наступает только тогда, когда завершаются все входящие в него работы.

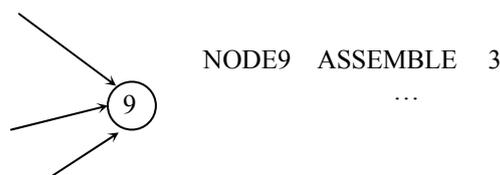


Рисунок 4 – Использование блока ASSEMBLE

Для задания бета-распределения используется функция языка PLUS, расширяющего стандартные возможности языка GPSS:

$$BETA(RN, min, max, \alpha, \beta),$$

где  $RN_j$  – номер используемого генератора равнономерных случайных чисел,  $min=a$  и  $max=b$  – оптимистический и пессимистический сроки выполнения работы (используется второй способ задания бета-распределения),  $\alpha = p + 1 = 2$ ;  $\beta = q + 1 = 3$ .

Имитация выполнения проекта начинается с генерации транзакта, который поступает в блок, соответствующий исходному событию. Затем транзакт проходит все блоки, имитирующие работы задержкой на случайное время их выполнения. Параллельное выполнение и логическая последовательность работ задаются блоками SPLIT и ASSEMBLE. Таким образом, время поступления транзакта на завершающее событие и является сроком выполнения проекта при разыгранных последовательностях работ. Это время сохраняется в файле или фиксируется в таблице GPSS, а транзакт передается на исходное событие для выполнения нового статистического эксперимента. Количество экспериментов регулируется с помощью счетчика цикла и блока LOOP (Цикл).

Объект «таблица» языка GPSS позволяет рассчитать выборочное среднее и стандартное отклонение, а также построить вариационный ряд. На рисунке 5 показан фрагмент отчета системы GPSS по модели молотового корпуса, параметры работ которого приведены в таблице 1.

В таблице с именем ТА были собраны значения срока выполнения проекта для 1000 проведенных экспериментов. В результате выборочное среднее (MEAN) критического срока равно  $\bar{t}_{кр} = 609,589$ , а стандартное отклонение (STD.DEV) равно  $\sigma_{кр} = 18,490$ . Далее показаны диапазоны, на которые была разбита ось значений критического срока (RANGE) и частоты попадания данной случайной величины в эти диапазоны (FREQUENCY). Выборочную вероятность выполнения проекта в заданный срок можно определить, если сложить все частоты по интервалам, меньшим заданного срока, и разделить

на общее количество экспериментов. Так, вероятность выполнения проекта в срок, который предлагал банк ( $T_1^{план} = 600$ ), равна

$$P(t_{\phi} < T_1^{план}) = (1+17+39+94+144)/1000 = 0,295,$$

а вероятность выполнения проекта в срок, который был определен по аналитической модели ( $T_2^{план} = 620$ ), равна

$$P(t_{\phi} < T_2^{план}) = (1+17+39+94+144+203+212)/1000 = 0,710.$$

Таким образом, результаты имитационного моделирования показывают, что срок начала возврата кредита, предлагаемый банком, нельзя признать удовлетворительным, так как вероятность завершения строительства молотового корпуса в этот срок очень мала. Результаты планирования на аналитической модели также не соответствуют выдвинутым ранее требованиям надежности (вероятность выполнения в плановый срок должна быть не ниже 0,9). По результатам моделирования легко подобрать такое значение планового срока, при котором это условие выполняется:  $T_3^{план} = 640$ .

$$P(t_{\phi} < T_3^{план}) = (1+17+39+94+144+203+212+152+94)/1000 = 0,956.$$

Таким образом, результатом имитационного метода исследования вероятностного сетевого графика молотового корпуса будет предложение принять срок окончания проекта, равный 640 дням.

Следует отметить, что процесс имитационного исследования не ограничивается только разработкой модели и однократным ее выполнением. Важной проблемой имитационного моделирования является доказательство адекватности модели, что не всегда удается сделать. В данном примере аргументом для доказательства адекватности может служить принципиальное соответствие результатов аналитического и имитационного метода решения.

TABLE	MEAN	STD. DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY	CUM. %
ТА	609.589	18.490		0		
			– 560.000		1	0.10
		560.000	– 570.000		17	1.80
		570.000	– 580.000		39	5.70
		580.000	– 590.000		94	15.10
		590.000	– 600.000		144	29.50
		600.000	– 610.000		203	49.80
		610.000	– 620.000		212	71.00
		620.000	– 630.000		152	86.20
		630.000	– 640.000		94	95.60
		640.000	– 650.000		35	99.10
		650.000	– 660.000		7	99.80
		660.000	– 670.000		0	99.80
		670.000	– 680.000		2	100.00

Рисунок 5 – Фрагмент отчета системы GPSS по модели молотового корпуса

Также всегда возникает вопрос о «достаточном» количестве экспериментов, которые должны быть проведены на модели. Поскольку в данном примере увеличение числа экспериментов не вызывает трудности в программировании, и не ведет к значительным затратам модельного времени, оставим обсуждение этого вопроса за рамками данной работы. Подчеркнем только, что авторами данные исследования проводились, и было признано, что 1000 экспериментов на модели является вполне достаточным для получения тех выводов, о которых шла речь.

Объект «таблица» языка GPSS представляет уже обработанные результаты экспериментов (в частности, они сгруппированы по интервалам значений). Для более детального исследования этих результатов следует их сохранить в файле, содержимое которого затем импортировать в MS Excel или в другое специальное приложение для обработки статистики. Так, используя надстройку Excel «Пакет анализа» можно определить и другие характеристики полученной выборки, построить гистограмму. С помощью несложных расчетов и стандартных функций категории *Статистические* выполняется исследование закона распределения критического срока с помощью различных критериев согласия.

### 3 Анализ эффективности методов планирования срока начала возврата кредита

Поскольку срок завершения проекта является случайной величиной, оценка эффективности его планирования до момента реализации проекта весьма затруднительна, а после его реализации – никому не нужна. Поэтому предлагаемый далее подход к оценке эффективности планирования можно рассматривать как предварительный и ориентировочный.

Пусть объем кредита составляет  $V=5000000$  у.е., срок возврата кредита с момента начала его выплаты  $T=5$  лет. Пусть для простоты выплата процентов и доли кредита происходит в конце каждого года. Тогда общая сумма процентов, которые следует выплатить по данному кредиту в случае действия первой процентной ставки  $p_1=0,1$  (когда предприятие вовремя начинает выплаты) составляет:

$$Q_1 = Vp_1 \left( T - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-1} i \right),$$

а в случае действия второй процентной ставки  $p_2=0,2$  (штрафные санкции)

$$Q_2 = Vp_2 \left( T - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-1} i \right).$$

Поэтому потери, которые понесет предприятие при наступлении штрафных санкций можно оценить суммой

$$Q_2 - Q_1 = V(p_2 - p_1) \left( T - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-1} i \right).$$

Эти потери предприятие понесет в случае, если реальный срок завершения проекта окажется больше запланированного, поэтому случайную величину «объем потерь» можно оценить выражением

$$\begin{aligned} Z &= V(p_2 - p_1) \left( T - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-1} i \right) P(t_\phi > T^{план}) = \\ &= V(p_2 - p_1) \left( T - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-1} i \right) [1 - P(t_\phi < T^{план})]. \end{aligned}$$

В таблице 2 на основании данной формулы рассчитаны объемы потерь для трех плановых сроков (предложенного банком, рассчитанного аналитическим методом и рассчитанного имитационным методом). Вероятности выполнения проекта в заданный срок определялись по имитационной модели, как наиболее учитывающей сложность исследуемого процесса.

Таблица 2 – Сравнение эффективности планирования срока начала возврата кредита

Наименование метода планирования	Плановый срок ( $T^{план}$ ), дней	$P(t_\phi < T^{план})$	Оценка потерь (Z), у.е.
Предложение банка	600	0,295	1057500
Аналитический метод	620	0,710	435000
Имитационный метод	640	0,956	66000

По результатам, представленным в этой таблице, можно сделать вывод, что переход от планового срока, предлагаемого банком, к сроку, полученному имитационным методом, дает экономии

$$1057500 - 66000 = 991500 \text{ у.е.},$$

а к сроку, полученному аналитическим методом,

$$1057500 - 435000 = 622500 \text{ у.е.}$$

### Заключение

В данной работе на простом примере продемонстрирован метод имитационного моделирования вероятностного сетевого графика. Применение этого метода дает возможность обосновать плановый срок начала возврата кредита, который является одним из параметров кредитного договора по финансированию инвестиционного объекта. Следует отметить, что применение имитационного метода позволяет использовать любой закон распределения для каждой работы сетевого графика, не требует предположений о неизменности критического пути и не накладывает ограничений на структуру сетевого графика. Взвешенное и обоснованное планирование срока возврата кредита способствует экономии значительных средств при выплате

процентов по кредиту. Полученная экономия существенна не только для состояния финансовых ресурсов, но и для деловой репутации организации, информация о которой содержится в кредитной истории и может быть раскрыта по запросу любого юридического лица.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Костевич, Л.С.* Информационные технологии оптимальных решений : учеб. Пособие / Л.С. Костевич – Мн. : Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 1999.

2. *Кельтон, В.* Имитационное моделирование. Классика CS / В. Кельтон, А. Лоу. – 3-е изд. – СПб. : Питер; Киев : ВНУ, 2004. – 847с.

3. *Рыжиков, Ю.И.* Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю.И. Рыжиков. – СПб. : КОРОНА принт; М. : Альтекс-А, 2004. – 384 с.

4. *Шрайбер, Т. Дж.* Моделирование на GPSS / Т. Дж. Шрайбер. – М. : Машиностроение, 1980.

*Поступила в редакцию 20.07.10.*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Допускается сквозная нумерация рисунков и таблиц. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (банделеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of physics, mathematics and technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors, some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific frameworks. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. Through numbering of figures and tables is possible. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of physics, mathematics and technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).