



**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 1 (1) 2009

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
В.Д. Мазуров (Россия)
И.В. Максимей (Беларусь)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
V.D. Mazurov (Russia)
I.V. Maksimei (Belarus)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (1) 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Максименко Н.В. Низкоэнергетическое комптоновское рассеяние и поляризуемости адронов.....	9
Пинчук В.Г., Короткевич С.В., Бобович С.О. Микроструктурные механизмы разрушения металла при фрикционном нагружении.....	15
Рогачев А.А., Ярмоленко М.А., Рогачев А.В. Молекулярная архитектура нанокomпозиционных покрытий на основе политетрафторэтилена и металлов, сформированных из активной газовой фазы.....	21
Рудак Э.А., Максименко Н.В., Андреев В.В., Ячник О.И. Использование корреляционных соотношений для определения вкладов топливной и конденсационной составляющих в чернобыльских радиоактивных выпадениях.....	27
Семченко И.В., Хахомов С.А., Самофалов А.Л. Использование парных спиралей оптимальной формы для создания слабоотражающих покрытий в СВЧ диапазоне.....	33
Сердюков А.Н., Егоров А.Н. Гравитационное взаимодействие в электродинамике сплошной среды.....	40

МАТЕМАТИКА

Васильев А.Ф., Васильева Т.И. Рекурсивно распознаваемые локальные формации конечных групп.....	44
Малинковский Ю.В. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения геометрических распределений.....	51
Миротин А.Р. О многомерном функциональном исчислении Бохнера-Филлипса.....	60
Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. О приводимых τ -замкнутых ω -насыщенных формациях с разрешимым дефектом 2.....	64
Старовойтов А.П., Лабыч Ю.А. Рациональная аппроксимация функций Маркова, порожденных борелевскими мерами степенного типа.....	69

ТЕХНИКА

Ляўчук В.Д., Дземідзенка А.М., Ляўчук А.А. Фармаванне адзінай міжрэгіянальнай інфармацыйнай прасторы на прыкладзе інтэрнэт-праекта, накіраванага на пераадоленне наступстваў Чарнобыльскай катастрофы.....	74
Можаровский В.В., Марьин С.А., Марьина Н.А., Шилько С.В., Кухорев Л.П. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрических труб с учетом неоднородности материала.....	78

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Д. Д. Павловец, Г. Н. Петухова*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 07.12.09. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 9,99. Уч.-изд. л. 8,71. Тираж 100 экз. Заказ № 402.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2009

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (1) 2009

CONTENTS

PHYSICS

Maksimenko N.V. Low-energy compton scattering and polarizabilities of hadrons.....	9
Pinchuk V.G., Korotkevich S.V., Bobovich S.O. Microstructural mechanism of destruction of metal at frictional loading.....	15
Rogachev A.A., Yarmolenko M.A., Rogachou A.V. Molecular architecture of nanocomposite polytetrafluoroethylene and metal based coatings formed from active gas phase.....	21
Rudak E.A., Maksimenko N.V., Andreev V.V., Yachnik O.I. The use of correlation relations for determination of fuel and condensation components in Chernobyl radioactive sediment	27
Semchenko I.V., Khakhomov S.A., Samofalov A.L. The use of pair helices of the optimum form for creation of weak reflecting coatings in the UHF range.....	33
Serdyukov A.N., Yegorov A.N. The gravitational interaction in the electrodynamics of continuous medium.....	40

MATHEMATICS

Vasilyev A.F., Vasilyeva T.I. Recursively recognizable local formations of finite groups.....	44
Malinkovsky Yu.V. Characterization of network stationary distribution with batch moving in geometric product form	51
Mirotin A.R. On multidimensional Bochner-Phillips functional calculus.....	60
Safonov V.G., Safonova I.N. On reducible τ -closed ω -saturated formations with a soluble defect 2	64
Starovoitov A.P., Labych Yu.A. Rational approximation of Markov functions generated by Borelean power-type measures.....	69

TECHNICS

Liauchuk V.D., Demidenko O.M., Liauchuk A.A. Formation of the united interregional information space on the example of the internet-project designed to overcome the effects of Chernobyl disaster.....	74
Mozharovsky V.V., Marjin S.A., Marjina S.A., Shilko S.V., Kuhorev L.P. Calculation and experimental study of stress-strain state of cylindrical pipes taking into account the heterogeneity of the material.....	78

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

УДК 530.1; 539.12

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ И ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ АДРОНОВ

Н.В. Максименко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

LOW-ENERGY COMPTON SCATTERING AND POLARIZABILITIES OF HADRONS

N.V. Maksimenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

На основе релятивистского калибровочно-инвариантного подхода и решений электродинамических уравнений ковариантным методом функций Грина определена амплитуда взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей. Эта амплитуда представлена через электрическую и магнитную поляризации структурной системы без использования разложения по мультиполям. В рамках этого подхода получен лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей и определена амплитуда комптоновского рассеяния на частице спина $\frac{1}{2}$ с учетом электрической и магнитной поляризуемостей.

Ключевые слова: релятивистский калибровочно-инвариантный подход; функция Грина; электрическая, магнитная, спиновая поляризуемости; амплитуда комптоновского рассеяния.

The amplitude of the interaction of the electromagnetic field with structural microparticles was defined on the basis of the gauge invariance approaches and the solutions of the electrodynamics' equations using covariant method of the Green function. This amplitude is presented in terms of the electric and magnetic polarizations of compound system using no multipole expansion. In the framework of this approach the Lagrangian of the interaction of electromagnetic field with compound system and the Compton scattering amplitude were obtained taking into account electric and magnetic polarizabilities of the spin- $\frac{1}{2}$ particles.

Keywords: gauge invariance approaches; Green function; electric, magnetic and spin polarizabilities; Compton scattering amplitude.

Введение

Современные экспериментальные данные по взаимодействию фотонов с адронами в области высоких энергий и больших переданных импульсов находят теоретическое объяснение в рамках теории возмущений квантовой хромодинамики. Однако структурные степени свободы, которые проявляются в области низких энергий, не сводятся к простым представлениям о взаимодействии электромагнитного поля с адронами. Отклик внутренних степеней свободы адронов на действие электромагнитного поля феноменологически можно определить с помощью поляризуемостей и других электромагнитных характеристик.

Низкоэнергетические теоремы, в основе которых лежат общие принципы релятивистской квантовой теории поля и разложение амплитуды комптоновского рассеяния по частоте фотонов, играют важную роль в понимании структуры адронов.

Эквивалентный модельный подход определения амплитуды низкоэнергетического комптоновского рассеяния можно реализовать в рамках релятивистской электродинамики структурных частиц. При этом, если учесть спиновые степени свободы, то получим возможность использовать

основные принципы, характерные не только для релятивистской электродинамики бесспиновых частиц, но и микрочастиц с учетом их спиновых свойств [1], [2], [3].

Низкоэнергетическое представление амплитуды комптоновского рассеяния, установленное на основе общих принципов релятивистской квантовой теории поля, свидетельствует о том, что членам, соответствующим определенному порядку по частоте излучения, присущи характерные электромагнитные свойства микрочастиц [1], [4], [5].

В последнее время ряд работ посвящены исследованию электромагнитных характеристик адронов, которые вносят вклад в амплитуды процессов комптоновского рассеяния реальных и виртуальных фотонов.

При этом большое внимание уделяется проблеме ковариантного и калибровочно-инвариантного определения роли и вкладов феноменологических электромагнитных характеристик адронов в амплитуды и сечения электродинамических процессов (см., например, [6]).

Метод определения сечений рассеяния электромагнитного поля через поляризуемости микрочастиц в рамках нерелятивистской электродинамики сплошных сред представлен в работе [7].

В настоящей статье получим релятивистское ковариантное обобщение этого метода на основе калибровочно-инвариантного подхода и решений электродинамических уравнений методом функции Грина [7], [8], [9].

1 Амплитуда низкоэнергетического комптоновского рассеяния

Уравнение Максвелла-Лоренца для структурной частицы в электромагнитном поле имеет вид [10]:

$$\vec{\partial}\vec{E} = \rho - \vec{\partial}\vec{p}, -\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + [\vec{\partial}\vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} + [\vec{\partial}\vec{m}], \quad (1.1)$$

$$\vec{\partial}\vec{H} = 0; \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + [\vec{\partial}\vec{E}] = 0. \quad (1.2)$$

В этих выражениях использована система единиц в которой $\hbar = c = 1$. Векторы \vec{E} и \vec{H} – векторы напряженностей электрического и магнитного полей, \vec{p} и \vec{m} – плотности электрических и магнитных поляризаций, ρ и \vec{j} определяются соотношениями

$$\rho_Q = Q \delta(\vec{r} - \vec{R}_c), \vec{j}_Q = Q \dot{\vec{R}}_c \delta(\vec{r} - \vec{R}_c),$$

где Q – заряд частицы, R_c – вектор центра масс, $\vec{\partial} = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$, символ точка над вектором обозначает производную по времени.

Уравнения (1.1) и (1.2) можно представить в следующей релятивистской ковариантной форме:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_Q^\nu + j_m^\nu, \quad (1.3)$$

где $j_Q^\nu = \{\rho_Q, \vec{j}_Q\}$, $j_m^\nu = \{\rho_m, \vec{j}_m\}$.

Плотности ρ_m и \vec{j}_m выражаются через векторы плотности поляризации \vec{p} и \vec{m} следующим образом: $\rho_m = -(\vec{\partial}\vec{p})$, $\vec{j}_m = \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} + [\vec{\partial}\vec{m}]$.

Если учтем в уравнении (1.3) условие Лоренца, то в результате получим уравнение Даламбера:

$$\square A^\mu = -j_Q^\mu - j_{(m)}^\mu = -J^\mu, \quad (1.4)$$

где $\square = \Delta - \partial^2/\partial t^2$, $\Delta = \vec{\nabla}^2$.

С помощью причинной функции Грина, которая определяется из уравнения

$$\square G(x-x') = -\delta(x-x'), \quad (1.5)$$

решение уравнения (1.4) можно записать в интегральной форме:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int G(x-x') J_\mu(x') d^4x'. \quad (1.6)$$

Используя представление причинной функции Грина в виде интеграла Фурье, из (1.5) получим:

$$G(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \exp[-ik(x-x')].$$

В уравнении (1.6) первое слагаемое $A_\mu^{(0)}(x)$ – потенциал свободного электромагнитного поля

$$A_\mu^{(0)(\pm)}(x, \lambda) = \frac{e_\mu^{(\lambda)}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \exp(\mp ikx),$$

где $e_\mu^{(\lambda)}$ – вектор поляризации, который удовлетворяет соотношению $ke^{(\lambda)} = 0$, и в соответствии с проекцией спина фотона λ принимает значения ± 1 .

Плоские волны $A_\mu^{(0)(\pm)}(x, \lambda)$ удовлетворяют условию ортонормировки [9]

$$\begin{aligned} \langle A^{(0)(\pm)}(x', \lambda') | A^{(0)(\pm)}(x, \lambda) \rangle = \\ (\mp i) \int \left\{ \partial_t A_\mu^{(0)(\pm)*}(x', \lambda') A^{\mu(0)(\pm)}(x, \lambda) - \right. \\ \left. - A_\mu^{(0)(\pm)*}(x', \lambda') \partial_t A^{\mu(0)(\pm)}(x, \lambda) \right\} d^3x = \\ = \delta_{\lambda'\lambda} \delta(x' - \vec{x}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$.

Для определения амплитуды воспользуемся граничными условиями:

$$A_\mu(x)|_{t=-\infty} = A_\mu^{(0)}(x, l_1), A_\mu(x)|_{t=+\infty} = A_\mu^{(0)}(x, l_2), \quad (1.8)$$

где l_1 и l_2 обозначают совокупность квантовых характеристик падающего и рассеянного фотонов.

Учитывая ортонормировку (1.7) и граничные условия (1.8), амплитуду излучения фотона можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} d(l_2) = \langle A_\mu^{(0)}(x, l_2) | A_\mu(x) \rangle |_{t=+\infty} = \\ = \langle A_\mu^{(0)}(x, l_2) | \int G(x-x') |_{t=+\infty} J^\mu(x', A(x')) d^4x' \rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В свертке (1.9) воспользуемся соотношением [8]

$$\langle A_\mu^{(0)}(x, l_2) | G(x-x') |_{t=+\infty} \rangle = i A_\mu^{(0)*}(x', l_2).$$

В результате получим

$$d(l_2) = i \int A_\mu^{(0)*}(x', l_2) J^\mu(x', A(x')) d^4x', \quad (1.10)$$

где

$$A_\mu^{(0)*}(x', l_2) = \frac{e_\mu^{(\lambda_2)*}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_2}} \exp(ik_2x').$$

Чтобы получить амплитуду рассеяния с учетом поляризуемостей в выражении (1.10), ограничимся вкладом наведенного тока в структурной частице $j_{(m)}^\mu$. Так $j_{(m)}^\mu$ будет удовлетворять условию непрерывности

$$\partial_\mu j_{(m)}^\mu = 0,$$

если его определить через антисимметричный тензор $L^{\mu\nu}$

$$j_{(m)}^\nu = -\partial_\mu L^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

с помощью вектора 4-скорости частицы

$$U^\mu \{\gamma, \gamma\vec{v}\},$$

и тензора $L^{\mu\nu}$ введем векторы p^μ и m^μ [10], [11]

$$p^\mu = L^{\mu\nu} U_\nu, \quad (1.12)$$

$$m^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} L_{\nu\rho} U_\sigma, \quad (1.13)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\bar{v}^2}$, $\varepsilon^{0123} = 1$.

Согласно определениям (1.12)–(1.13) эти векторы удовлетворяют соотношениям

$$p^\mu U_\mu = m^\mu U_\mu = 0. \quad (1.14)$$

На основании соотношений (1.12)–(1.14) тензор $L^{\mu\nu}$ можно выразить через векторы p^μ и m^μ :

$$L^{\mu\nu} = (p^\mu U^\nu - U^\mu p^\nu) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} m_\rho U_\sigma. \quad (1.15)$$

Нетрудно убедиться, что тензор электромагнитного поля $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - A^\mu \partial^\nu$ также принимает форму (1.15), если ввести векторы

$$e^\mu = F^{\mu\nu} U_\nu, \quad (1.16)$$

$$h^\mu = \tilde{F}^{\mu\nu} U_\nu, \quad (1.17)$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

В самом деле, используя векторы (1.16) и (1.17), получим

$$F^{\mu\nu} = (e^\mu U^\nu - U^\mu e^\nu) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} U_\rho h_\sigma.$$

В трехмерных обозначениях (1.16) и (1.17) принимают вид:

$$e^\mu = \left\{ \gamma(\vec{E}\vec{V}), \gamma(\vec{E} - [\vec{H}\vec{V}]) \right\}, \quad (1.18)$$

$$h^\mu = \left\{ \gamma(\vec{H}\vec{V}), \gamma(\vec{H} + [\vec{E}\vec{V}]) \right\}. \quad (1.19)$$

В системе покоя структурной частицы, когда $U^\mu \{1, \vec{0}\}$, из (1.18) и (1.19) следует, что

$$e^\mu = \{0, \vec{E}\}, \quad h^\mu = \{0, \vec{H}\}, \quad (1.20)$$

т.е. e^μ и h^μ такие 4-векторы, пространственные компоненты которых в системе покоя частицы являются векторами электрической и магнитной напряженностей электромагнитного поля.

Аналогично можно показать, что векторы (1.12) и (1.13) в трехмерном представлении определяются так:

$$p^\mu = \left\{ \gamma(\vec{V}\vec{p}), \gamma\vec{p} + \gamma[\vec{m}\vec{V}] \right\},$$

$$m^\mu = \left\{ \gamma(\vec{V}\vec{m}), \gamma\vec{m} - \gamma[\vec{p}\vec{V}] \right\},$$

т.е. если перейдем в систему покоя частицы, то получим

$$p^\mu = \{0, \vec{p}\}, \quad m^\mu = \{0, \vec{m}\}.$$

Таким образом, p^μ и m^μ векторы, пространственные компоненты которых в системе покоя частицы являются векторами плотности электрической и магнитной поляризации частицы.

Подставляя определение тока $j_{(m)}^\mu$ (1.11) в (1.10), получим амплитуду излучения фотона за счет поляризации структурной микрочастицы:

$$d(l_2) = -i \int A_{\mu}^{(0)*}(x', l_2) \partial'_\nu L^{\mu\nu}(x', A(x')) d^4 x'. \quad (1.21)$$

В уравнении (1.21) выполним интегрирование по частям и воспользуемся определением тензора электромагнитного поля излучения. В результате получим:

$$d(l_2) = \frac{i}{2} \int F_{\nu\mu}^{(0)}(x', l_2) L^{\nu\mu}(x', A(x')) d^4 x'. \quad (1.22)$$

Подставим выражение для $L^{\nu\mu}$ (1.15) в уравнение (1.22). В результате приходим к выводу, что амплитуда излучения электромагнитного поля адронов с учетом электрической и магнитной поляризаций принимает калибровочно инвариантную форму:

$$d(l_2) = i \int \left\{ \left[e_\nu(x', l_2) p^\nu(x', A(x')) \right] + \left[h_\nu(x', l_2) m^\nu(x', A(x')) \right] \right\} d^4 x'. \quad (1.23)$$

Выражение (1.23) согласуется с калибровочно-инвариантным определением амплитуды взаимодействия электромагнитного поля с нуклонной системой, в которой электрические и магнитные моменты системы вводятся на основе тождества Фолди [12].

2 Ковариантный формализм Лагранжа для взаимодействия электромагнитного поля с адронами с учетом поляризуемостей

Воспользуемся теперь определением (1.23), чтобы вычислить амплитуду рассеяния электромагнитного поля. Для этого введем электрическую и магнитную поляризуемости структурной системы и воспользуемся ковариантным формализмом Лагранжа.

В правой части уравнения (1.3) ограничимся вкладом индуцированного тока $j_{(m)}^\nu$. В этом случае, из уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0, \quad (2.1)$$

получим уравнение (1.3), если лагранжиан L имеет вид:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_{(m)}^{(\mu)} A^\mu. \quad (2.2)$$

Используя выражение (1.11) для $j_{(m)}^\mu$ и однозначность определения лагранжиана, второе слагаемое в (2.2) можно представить следующим образом:

$$L_I = -j_{(m)}^\mu A_\mu = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} L^{\mu\nu}.$$

Рассмотрим случай, когда векторы поляризации p^μ и m^μ пропорциональны тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$:

$$p^\mu = 4\pi\alpha e^\mu, \quad m^\mu = 4\pi\beta h^\mu, \quad (2.3)$$

где α и β – коэффициенты пропорциональности, а векторы e^μ и h^μ выражаются через $F^{\mu\nu}$ согласно уравнениям (1.16) и (1.17).

Подставляя (2.3) в выражение (1.15), получим

$$L^{\mu\nu} = 4\pi[\alpha(e^\mu U^\nu - U^\mu e^\nu) + \beta\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h_\rho U_\sigma].$$

Чтобы получить согласование уравнения (2.1) с уравнением (1.3) с учетом того, что

лагранжиан L_I будет пропорционален второй степени $F_{\mu\nu}$, следует представить лагранжиан следующим образом:

$$L_I = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = -2\pi(\alpha e^2 + \beta h^2). \quad (2.4)$$

Из уравнений (1.18) и (1.19) следует, что

$$e^2 = \gamma^2 \left\{ (\bar{E}\bar{V})^2 - \bar{E}^2 + 2(\bar{E}[\bar{H}\bar{V}]) - \bar{H}^2\bar{V}^2 + (\bar{H}\bar{V})^2 \right\}, \quad (2.5)$$

$$h^2 = \gamma^2 \left\{ (\bar{H}\bar{V})^2 - \bar{H}^2 - 2(\bar{H}[\bar{E}\bar{V}]) - \bar{E}^2\bar{V}^2 + (\bar{E}\bar{V})^2 \right\}. \quad (2.6)$$

Таким образом, как видно из уравнений (2.5) и (2.6), разность

$$e^2 - h^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \bar{H}^2 - \bar{E}^2$$

инвариантна относительно преобразований Лоренца. Однако e^2 и h^2 по отдельности не являются инвариантами. В системе покоя частицы e^2 и h^2 определяются через вектора \bar{E} и \bar{H}

$$e^2 = -\bar{E}^2, \quad h^2 = -\bar{H}^2,$$

а лагранжиан (2.4) принимает вид

$$L_I = 2\pi(\alpha \bar{E}^2 + \beta \bar{H}^2), \quad (2.7)$$

т. е. коэффициенты α и β являются поляризуемостями частицы.

Учитывая в определении амплитуды излучения фотона (1.23) соотношения (2.3), получим амплитуду рассеяния электромагнитного поля с учетом электрической и магнитной поляризуемостей структурной частицы

$$T = 4\pi i \int \left\{ \alpha \left[e_\nu(x', l_2) e^\nu(x', l_1) \right] + \beta \left[h_\nu(x', l_2) h^\nu(x', l_1) \right] \right\} d^4 x'. \quad (2.8)$$

Дифференциальное сечение рассеяния вперед электромагнитного поля на структурной микрочастице в нерелятивистском приближении, вычисленное с использованием амплитуды (2.8), определяется известным соотношением [14]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda', \lambda} |M^{\lambda', \lambda}|^2,$$

где $M^{\lambda', \lambda} = (\alpha + \beta)\omega^2 (\bar{e}^{\lambda'} \bar{e}^\lambda)$.

Вычисление амплитуды рассеяния фотонов с учетом квантовых свойств частицы и импульса отдачи можно реализовать, если воспользоваться определением векторов поляризации p^μ и m^μ , например, используя диаграммную технику, или, в рамках этой техники, формализмом уравнений Бете-Солпитера [13], или эффективным лагранжианом взаимодействия электромагнитного поля со структурной микрочастицей [1].

Определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина 1/2 с учетом поляризуемостей следующим образом:

$$L^{(pol)} = \frac{(-i)}{2M} \left[\langle \hat{p}^\mu \bar{\partial}^\nu \rangle F_{\mu\nu} + \langle \hat{m}^\mu \bar{\partial}^\nu \rangle \tilde{F}_{\mu\nu} \right]. \quad (2.9)$$

В уравнении (2.9) $\langle \hat{O} \rangle = \bar{\psi}(x) \hat{O} \psi(x)$, $\psi(x)$ – волновые функции частицы спина 1/2, $\bar{\partial}^\nu = \partial^\nu - \bar{\partial}^\nu$, γ^μ – матрицы Дирака.

Операторы \hat{p}^μ и \hat{m}^μ определены так:

$$\hat{p}^\mu = 4\pi\alpha F^{\mu\rho} \gamma_\rho, \quad \hat{m}^\mu = 4\pi\beta \tilde{F}^{\mu\rho} \gamma_\rho.$$

Лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина 1/2 с учетом поляризуемостей представлен в таком виде, чтобы выражение (2.9) при переходе в систему покоя частицы, было в согласовании с (2.7). С другой стороны, амплитуда комптоновского рассеяния, вычисленная с помощью (2.9) в области низких энергий, принимает такую спиновую структуру, которая следует из низкоэнергетической теоремы, когда учитывается вклад статических поляризуемостей частицы.

В случае, когда длина электромагнитной волны порядка размеров структурной частицы, заряды, расположенные в разных местах частицы, будут по-разному реагировать на поле волны. Для того чтобы учесть этот факт, в классической электродинамике разлагают векторы напряженности поля в окрестности центра масс частицы. Аналогичную процедуру выполним ковариантным образом, т.е. представим векторы p^μ и m^μ соотношения (1.15) в виде разложения:

$$p^\mu = 4\pi\alpha e^\mu + \lambda(U^\rho \partial_\rho) e^\mu + L \varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha} U_\sigma \partial_\alpha h_\rho, \quad (2.10)$$

$$m^\mu = 4\pi\beta h^\mu + \chi(U^\rho \partial_\rho) h^\mu + \Omega \varepsilon^{\mu\rho\sigma\alpha} U_\sigma \partial_\alpha e_\rho, \quad (2.11)$$

где λ, χ, L, Ω – инвариантные константы.

Разложения (2.10) и (2.11) допустимы, поскольку в них используется полный набор векторов (пока, кроме вектора Паули-Любанского), с помощью которых определяется движение структурной частицы в электромагнитном поле и учтена инвариантность разложений относительно инверсии пространства.

Подставим разложение (2.10) и (2.11) в соотношения для лагранжиана (2.5). В результате получим

$$L_I = -(pe + mh) = L_I^{(1)} + L_I^{(2)} + L_I^{(3)}. \quad (2.12)$$

В (2.12) введены обозначения:

$$L_I^{(1)} = -2\pi(\alpha e^2 + \beta h^2), \quad (2.13)$$

$$L_I^{(2)} = -(U^\rho \partial_\rho)(\lambda e^2 + \chi h^2), \quad (2.14)$$

$$L_I^{(3)} = -[L \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} U_\mu (\partial_\nu h_\rho) e_\sigma + \Omega \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} U_\mu h_\rho (\partial_\nu e_\sigma)]. \quad (2.15)$$

Из уравнений (2.13)–(2.15) следует, что $L_I^{(1)}$ второго порядка по частоте и напряженностям электромагнитного поля. В свою очередь $L_I^{(2)}$ и $L_I^{(3)}$ второго порядка по напряженностям, но

третьего порядка по частоте электромагнитного поля.

Из уравнений (2.13)–(2.15) следует, что в системе покоя частицы

$$L_I = 2\pi(\alpha\vec{E}^2 + \beta\vec{H}^2) + [\lambda(\vec{E}\vec{E}) + \chi(\vec{H}\vec{H})] + [L(\vec{E}[\vec{\partial}\vec{H}]) - \Omega(\vec{H}[\vec{\partial}\vec{E}])].$$

Лагранжиан взаимодействия структурной частицы спина 1/2 с электромагнитным полем с учетом квантовых свойств установим на основе (2.13)–(2.15), выполнив процедуру аналогичную той, которая была использована при получении (2.12).

В результате получим:

$$L_I^{(2)} + L_I^{(3)} = \frac{i}{m^2} \left\langle \vec{\partial}^{\rho} \hat{\theta}_v^{\sigma} \right\rangle [\lambda \partial_{\rho} (F^{\mu\nu} F_{\mu\sigma}) + \chi \partial_{\rho} (\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\sigma})] + \frac{i}{m^2} \left\langle \vec{\partial}_{\mu} \hat{\theta}^{\lambda\gamma} \right\rangle \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [L(\partial_{\nu} \tilde{F}_{\rho\lambda}) F_{\sigma\gamma} + \Omega \tilde{F}_{\rho\lambda} (\partial_{\nu} F_{\sigma\gamma})], \quad (2.16)$$

где $\hat{Q}_v^{\sigma} = i/2\gamma_v \vec{\partial}^{\sigma}$.

Если вычислим амплитуду комптоновского рассеяния на частице спина 1/2 с помощью эффективного лагранжиана (2.16), то нетрудно убедиться, что спиновые ковариантные структуры амплитуды не удовлетворяют условию перекрестной симметрии ($k_1 \leftrightarrow -k_2, e_2 \leftrightarrow e_1$).

Для получения антисимметричного тензора $L_{(s)}^{\mu\nu}$, аналогичного (1.15), но с учетом спина структурной частицы, используем вектор Паули-Любанского \hat{W}^{μ} . Учитывая инвариантность $L_{(s)}^{\mu\nu}$ относительно инверсии пространства, получим

$$\hat{L}_{(s)}^{\mu\nu} = m_{(s)}^{\mu} \hat{W}^{\nu} - m_{(s)}^{\nu} \hat{W}^{\mu} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{W}_{\sigma} P_{(s)\rho}. \quad (2.17)$$

В этом случае к лагранжиану (2.15) добавится слагаемое

$$L_I^{(s)} = -\frac{1}{2} L_{(s)}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Выполняя все операции, которые были использованы при получении (2.16), определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицами спина 1/2 с учетом спиновых поляризуемостей:

$$L_{I(1)}^{(s)} = -\frac{2\pi}{m} \left\langle \hat{\Sigma}^{v\lambda} \vec{\partial}_{\lambda} \vec{\partial}_{\rho} \right\rangle \cdot [\alpha_s \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\rho} + \beta_s F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\rho}], \quad (2.18)$$

$$L_{I(2)}^{(s)} + L_{I(3)}^{(s)} = -\frac{i}{2m} \left\langle \left(\hat{\Sigma}^{v\alpha} \hat{\theta}_{\sigma}^{\rho} + \hat{\theta}_{\sigma}^{\rho} \hat{\Sigma}^{v\alpha} \right) \vec{\partial}_{\alpha} \right\rangle \cdot \{ \lambda_s \tilde{F}_{\mu\nu} \partial_{\rho} F^{\mu\sigma} + \chi_s F_{\mu\nu} \partial_{\rho} \tilde{F}^{\mu\sigma} \} - \frac{i}{m} \left\langle \left(\hat{\Sigma}^{\lambda\alpha} \hat{\theta}_{\mu}^{\beta} + \hat{\theta}_{\mu}^{\beta} \hat{\Sigma}^{\lambda\alpha} \right) \vec{\partial}_{\alpha} \right\rangle \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot \{ L_s \tilde{F}_{\sigma\lambda} \partial_{\nu} \tilde{F}_{\rho\beta} + \Omega_s F_{\rho\lambda} \partial_{\nu} F_{\sigma\beta} \}. \quad (2.19)$$

В этих выражениях введено обозначение

$$\hat{\Sigma}^{\lambda\alpha} = \frac{i}{8} \varepsilon^{\lambda\rho\sigma\alpha} (\gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} - \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho}).$$

Вычисления амплитуды комптоновского рассеяния на структурной частице спина 1/2, в которых использованы эффективные лагранжианы (2.18) и (2.19), свидетельствует о том, что они вносят вклад в слагаемые амплитуды второго и третьего порядка по частоте электромагнитного поля соответственно. Однако, слагаемые амплитуды, которые определяются лагранжианом (2.18), не удовлетворяют условию перекрестной симметрии. Поэтому амплитуда комптоновского рассеяния в третьем порядке по частоте излучения определяется лагранжианом (2.19).

Гамильтониан, который следует из (2.19), выражается через спиновые структуры вида:

$$\{ (\vec{\sigma}[\vec{E}\vec{E}]), (\vec{\sigma}[\vec{H}\vec{H}]), (E_{ij} S_i H_j), (H_{ij} S_i E_j) \},$$

где введены обозначения:

$$\dot{\vec{E}} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \dot{\vec{H}} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$E_{ij} = \partial_i E_j - \partial_j E_i, \quad H_{ij} = \partial_i H_j - \partial_j H_i.$$

Эти структуры характерны для определения спиновых поляризуемостей.

Заключение

На основе релятивистского калибровочно-инвариантного подхода и решений электродинамических уравнений ковариантным методом функций Грина определена амплитуда взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей. Эта амплитуда представлена через электрическую и магнитную поляризации структурной системы без использования разложения по мультиполям.

В рамках этого подхода получен лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей, что позволяет ковариантным образом вычислять вклад поля поляризуемостей в амплитуду сечения двухфотонных процессов.

С помощью установленного эффективного лагранжиана определена амплитуда комптоновского рассеяния на адроне с учетом электрической и магнитной поляризуемостей.

На основе формализма Лагранжа и согласования с низкоэнергетическими теоремами комптоновского рассеяния получены ковариантные структуры, связанные со спиновыми поляризуемостями микрочастицы.

Используя требования сохранения четности и перекрестной симметрии, показано, что статические поляризуемости, связанные со спиновыми свойствами частицы спина 1/2, вносят вклад в структуры амплитуды комптоновского рассеяния в третьем порядке по частоте излучения электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максименко, Н.В. Феноменологическое описание поляризуемости элементарных частиц в полевой теории / Н.В. Максименко, Л.Г. Мороз // Сборник трудов 11 Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике, Дубна / Д2-11707. – Дубна, 1979. – С. 533–543.
2. Любошиц, В.Л. Ковариантное разложение электромагнитного поля / В.Л. Любошиц, Я.А. Смородинский // ЖЭТФ. – 1962. – Т.42, Вып. 3. – С. 846–855.
3. Дубовик, В.М. Мультипольное разложение в классической и в квантовой теории поля и излучение / В.М. Дубовик, А.А. Чешков // Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ). – 1974. – Т. 5, № 3. – С. 791–837.
4. Левчук, М.И. Гирация нуклона как одна из характеристик его электромагнитной структуры / М.И. Левчук, Л.Г. Мороз // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. – 1985. – № 1. – С. 45–54.
5. Ragusa, S. Third order spin polarizabilities of the nucleon / S. Ragusa // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D47. – P. 3757–3767.
6. Drechsel, D. Dispersion relations in real and virtual Compton scattering / D. Drechsel, B. Pasquini, M. Vanderhaeghen // Phys. Rept. – 2003. – Vol. 378. – P. 99–205.
7. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – Москва : Энергоатомиздат, 1995. – 315 с.
8. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск : Наука и техника, 1968. – 387 с.
9. Богуш, А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А. А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1987. – 359 с.
10. de Groot, С.Р. Электродинамика / С.Р. де Гроот, Л.Г. Сатторп. – Москва : Наука, 1982. – 560 с.
11. Anandan, J.S. Classical and quantum interaction of the dipole / J.S. Anandan // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 1354–1357.
12. Левчук, Л.Г. Об одном обобщении теоремы Зигерта: исправленный вариант / Л.Г. Левчук, А.В. Шебеко // Ядерная физика. – 1993. – Т. 56, № 2. – С. 145–151.
13. Bete, H.A. A relativistic equation for bound-state problems / H.A. Bete, E.E. Salpeter // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84, № 2. – P. 1232–1242.
14. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – Москва : Наука, 1973. – 365 с.

Поступила в редакцию 15.10.09.

УДК 620.17

МИКРОСТРУКТУРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ФРИКЦИОННОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Г. Пинчук¹, С.В. Короткевич², С.О. Бобович²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²РУП «Гомельэнерго», Гомель

MICROSTRUCTURAL MECHANISM OF DESTRUCTION OF METAL AT FRICTIONAL LOADING

V.G. Pinchuk¹, S.V. Korotkevich², S.O. Bobovich²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²RUP Gomelenergo, Gomel

Изучены характерные дислокационные механизмы разрушения поверхностного слоя металла (никель) при трении. Установлена эффективная роль в формировании нарушений сплошности материала полос скольжения, двойников, больших угловых границ разориентации блочной и кристаллитной структуры.

Ключевые слова: действующие зоны скольжения, деформация сдвига, ячеистая структура, зонное расслоение, транскристаллитное и интеркристаллитное разрушение.

This paper analyzes characteristic dislocation mechanisms of metallic (nickel) surface layer destruction under friction. The authors define the effective role of slipping strips of material, doubles, large angle borders of block and crystalline structure disorientation in the formation of uniformity rupture.

Keywords: effective slipping zones (areas), shear deformation, cellular structure, zone stratification, transcrystalline and intercrystalline destruction.

Введение

В настоящее время возрос интерес к изучению микроструктурных особенностей пластической деформации и износа поверхностей металла при фрикционном нагружении с точки зрения дислокационных представлений [1], [2]. В работах [2]–[4] предложен локализованный во времени механизм разрушения, обуславливающий циклический лепестково-послойный характер изнашивания поверхностного слоя, основанный на прямых и косвенных исследованиях его микроструктуры и кинетики износа, базирующийся на анализе спектров смазки электронного (ЭПР) и ядерного магнитного резонансов (ЯМР). Этот механизм связывается с формированием дислокационных источников разрушения, которые частично освещены в статье [5].

В данной работе, которая является продолжением статьи [5], приводятся данные электронно-микроскопических исследований микроструктуры поверхностного слоя при трении скольжения, проведен их анализ с точки зрения формирования источников разрушения. Методика эксперимента приведена в работе [4].

1 Материалы и методика эксперимента

Методами электронной микроскопии и ферромагнитного резонанса изучено изменение дислокационной структуры в приповерхностном слое никеля при фрикционном нагружении.

Исследован поликристаллический никель чистой 99,99%. Образцы в виде тонких дисков 5x0,1 мм² электролитически полировали и отжигали в вакууме 0,133 мПа при 973 К. Испытание на трение проводили на машине типа АЕ–5 с прецизионной установкой плоскости контактирования. Трение скольжения осуществляли в паре Ni – Мо на воздухе в смазке ЦИАТИМ – 201 при нагрузке 82,3 кПа и линейной скорости 0,5 м/с. Число рабочих круговых ходов находилось в интервале 1 – 36·10³. Средняя объёмная температура образца не превышала 40° С. Спектр ферромагнитного резонанса регистрировали по методике, описанной в работе [6]. Электронно-микроскопические исследования никеля осуществляли на микроскопе ЭМВ – 100АК методом тонких фольг на «просвет». Фольги получали путём одностороннего электролитического утончения дисков с противоположной стороны от поверхности трения на установке струйного полирования, оснащённой чувствительным фотодиодным мостом, позволяющим контролировать прозрачность участков на глубине ≈ 0,1 мкм от поверхности трения. Плотность дислокаций определяли по микрофотографиям методом взаимно перпендикулярных секущих. Данные по плотности дислокаций получали путём усреднения при просмотре не менее пяти локальных участков в разных зёрнах.

2 Результаты исследования и их обсуждение

При фрикционном нагружении поверхностей, в силу различной высоты и разнообразия геометрических форм шероховатостей (экструзий и интрузий), в поверхностном слое функционирует знакопеременное нагружение, которое наряду со сдвиговыми силовыми воздействиями обуславливает сложнапряженное состояние кристаллической решетки. Знакопеременное нагружение фрикционно взаимодействующих экструзий и интрузий трансформируется в пульсирующую деформацию поверхностных объемов, вызывая протекание усталостных процессов и заметное снижение предела прочности материала [7]. Эти особенности фрикционного нагружения формируют своеобразную микроструктуру в поверхностном слое металла.

При анализе микроснимков отмечается появление ячеистой микроструктуры, состоящей из зон высокой и низкой плотности дислокаций (рисунок 1а). Зоны высокой плотности дефектов содержат скопления дислокационных петель и диполей с плотностью $\rho \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Первой

особенностью микроструктуры при фрикционном нагружении является формирование нанокристаллической структуры (согласно современной терминологии [8]) с размером блоков $\approx 10^2$ нм квазиравномерно распределенных по объему поверхностного слоя. На этой стадии деформации возрастает склонность к выстраиванию дислокационных скоплений в одном направлении. Кроме того, обнаруживается тенденция к формированию очень мелких микротрещин по границам этих текстурных образований с характерными размерами: 0,01 мкм по диаметру и 0,10 мкм по длине (рисунок 1в). Такие малые трещины должны характеризовать дислокационный механизм зарождения микротрещин в одиночной линии скольжения, не требующий в этом процессе активационного действия соседних линий скольжения или целой полосы [9]. Согласно [9], это безактивационное зарождение приводит к формированию неустойчивых микротрещин в поле внешних напряжений, их слиянию и разрушению материала.

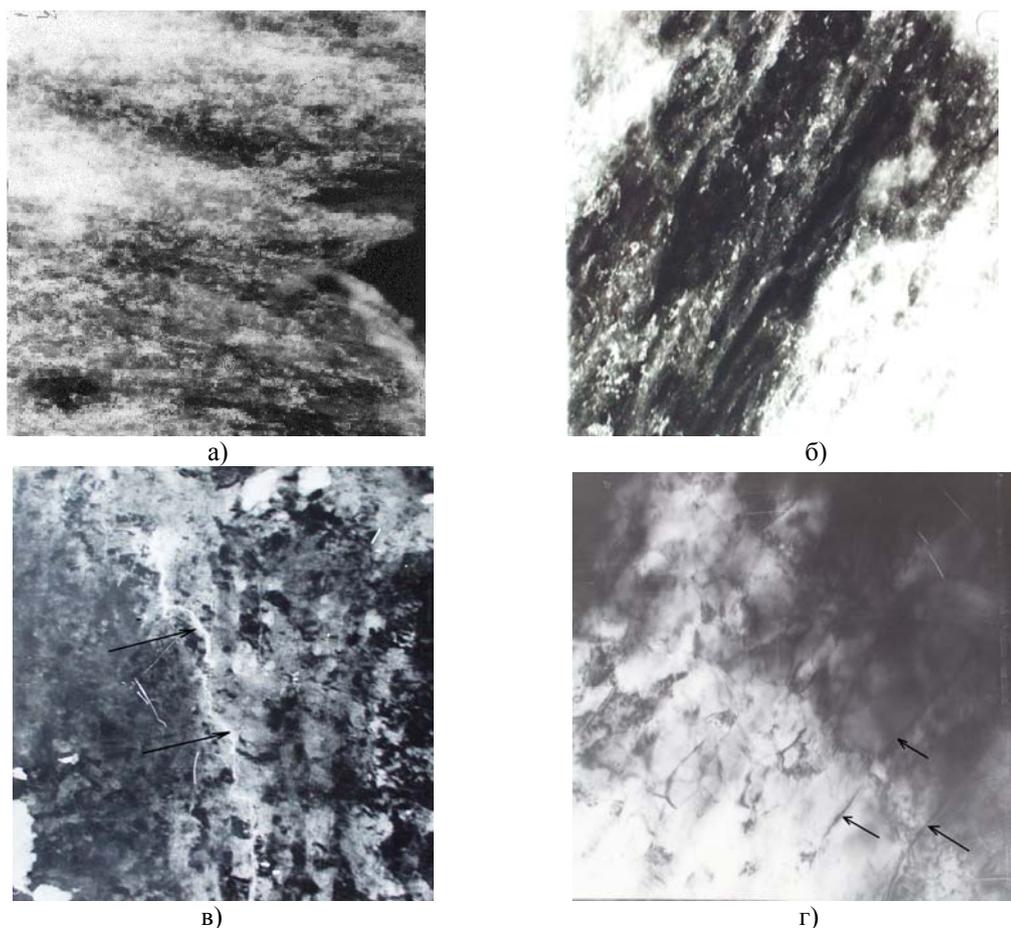


Рисунок 1 – Трансмиссионная электронная микроскопия никеля и микроструктура его поверхностного слоя: а) – ячеистая структура; б) – формирование полос скольжения; в) – зарождение усталостных трещин (стрелки); г) – тонкие расщелины в полосах скольжения (стрелки).

Увеличение – $\times 36000$

Второй особенностью этой фрагментированной структуры является высокая угловая разориентация границ субзерен, сравнимая с зернограницным рассогласованием $\approx 10^\circ$. Как отмечено в работах [10], [11], значение этих вновь образованных большеугловых границ в процессах упрочнения и разрушения весьма существенна. Они являются эффективными источниками зернограницных дислокаций, образующих двойные перегибы, на длине которых может раскрываться микротрещина. Согласно данным, приведенным в статье [12], этот процесс требует, примерно в три раза меньшего количества дислокаций в скоплении, чем при обычном заторможенном сдвиге. Высокоугловая разориентация границ субзерен обуславливает также их барьерную роль при движении дислокаций, способствуя образованию плоских скоплений и формированию из них микротрещин при заторможенном сдвиге.

По мере нагружения наблюдается тенденция к трансформированию ячеистой структуры. Контуры ее размываются, что проявляется в исчезновении отчетливых границ ячеек и появлении объемных дислокационных конфигураций в виде вытянутых жгутов. Отмечается возрастание количества этих образований субструктуры на единицу объема и выстраивание их в текстурированные контуры, формируя полосы скольжения (рисунок 16). Наличие устойчивых полос скольжения является характерной чертой структуры для малоамплитудного усталостного нагружения [13]. Исходя из структурных особенностей, можно установить механизм образования полос скольжения. Зоны с высокой плотностью дислокаций в основном состоят из дислокационных петель и скоплений диполей, которые по мере нагружения становятся менее равноосными. С повышением степени упрочнения и плотности дислокационных диполей в жгутах, часть диполей может распадаться на краевые дислокации противоположного знака, выход которых на поверхность обуславливает сдвиги и экструзии, являющиеся концентраторами упругих напряжений [14].

Анализ субструктурных изменений в процессе трения позволяет отметить доминирующую роль действующих полос скольжения в процессах упрочнения и разрушения поверхностных объемов на стадии установившегося режима, при напряжениях, меньших критических, характерных для малоамплитудной усталости. Свойственная усталостному нагружению локализация деформации в действующих полосах скольжения и наличие в поверхностном слое интрузий и экструзий приводит к зарождению из них усталостных трещин (рисунок 1в; показаны стрелками). Количество трещин и плотность полос растет с повышением уровня упруго напряженного состояния кристаллической решетки. Согласно данным, приведенным в статье [15],

наиболее эффективным механизмом зарождения усталостных трещин является проникновение интрузий вглубь наиболее интенсивных полос скольжения. Неконсервативное движение дислокаций в соседние плоскости скольжения в комбинации с их возвратно-поступательным движением при циклических нагрузках приводит к образованию и присоединению скрытых нарушенных плоскости материала к вершинам интрузий. При дальнейшем нагружении эти поверхностные несовершенства мигрируют в действующие зоны скольжения, образуя тонкие расщелины (рисунок 1г). Формирование клиновидных расщелин происходит также и в развитой блочной структуре при перемещении блоков между действующими полосами скольжения. Конечным этапом развития этих надрывов материала является формирование клиновидных трещин, которые могут распространяться от одной полосы к другой, формируя макротрещины, приводящие к его разрушению (рисунок 2а).

На основании электронномикроскопических исследований субструктуры никеля при фрикционном нагружении установлено, что интрузии развиваются в областях с высокой плотностью дислокаций. Обычно след интрузии составлял 0,1–0,3 мкм, что соответствует нескольким сотням микроступенек вышедших дислокаций. Очевидно, что интрузии можно отождествить с микронадрезами на поверхности, наличие которых обеспечивает не только концентрацию напряжений на их острие, но и реализацию растягивающих напряжений в направлении толщины и ширины образца [16]. В поверхностном слое при трении, в силу наличия надрезов, пластическое течение подавляется вследствие понижения напряжения сдвига и концентрации напряжений, вызванной надрезом, ограничивающим течение в малом локализованном объеме материала. Поэтому в кристаллах, претерпевающих переход из вязкого состояния в хрупкое, характер разрушения изменяется при переходе от разрушения сдвигом к разрушению сколом. Это разрушение связано с расщеплением атомных плоскостей растягивающими напряжениями, ориентированными перпендикулярно поверхности скола. При появлении надреза значения нормальных напряжений значительно превышают касательные напряжения сдвига и ярче проявляется тенденция к росту трещин скола.

Наличие многочисленных тонких двойников по границам полос скольжения (рисунок 2б, стрелки) и в зернах (рисунки 2в, 2г) имитирует большие смещения в решетке и сильную концентрацию напряжений, релаксация которых может осуществляться упруго пластическими деформациями и актами разрушения [17]. Двойникование характеризуется наличием мелких трещин вдоль их поверхности раздела с матрицей, а также большой импульсивностью воздействия на

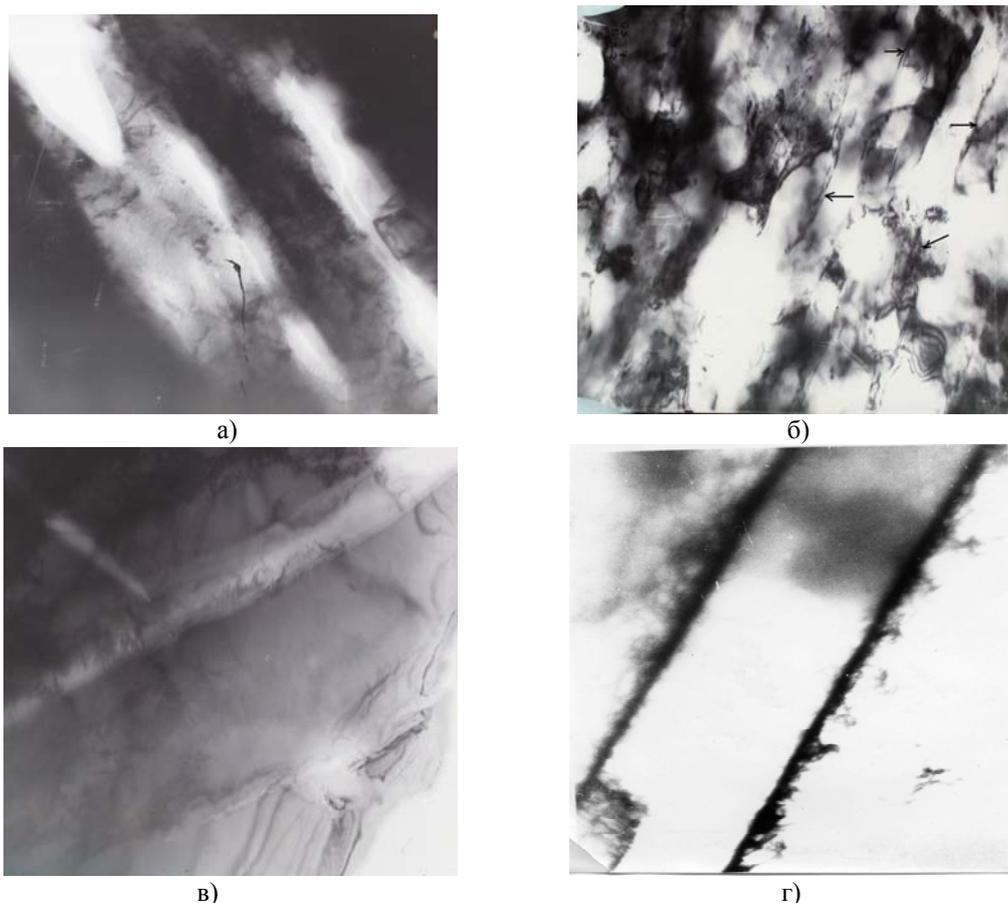


Рисунок 2 – Элементы транскристаллитного разрушения: а) – клиновидные трещины в полосах скольжения; б) – полосы скольжения и двойники; в) и г) – двойники в зернах. Увеличение – $\times 36000$

кристаллическую решетку и препятствия. Согласно данным, приведенным в статье [18], напряжения, связанные с взаимодействием двойников и полос скольжения, стопорение их границами зерен и блоков могут инициировать скол, поскольку с двойниковыми образованиями связаны большие перемещения кристаллической решетки. Поэтому, учитывая интенсивное развитие субструктуры и двойников в полосах скольжения, наблюдаемое на рисунке 2а, серию прямолинейных сколов и расщелин можно отнести и к двойниковым механизмам разрушения.

Характерным механизмом транскристаллитического разрушения при фрикционном нагружении является пересечение границ зерен полосами скольжения. Вероятность образования трещины в месте соприкосновения полосы с границей зерна зависит от угла разориентации кристаллической решетки на границе. При наблюдаемой разориентации границ блоков ($\approx 10^\circ$) взаимодействие полос с ними может привести к серии мелких трещин в зерне, а при больших разворотах – к формированию разрывов на самой границе, особенно на стыке трех зерен (рисунок 3а, позиция А).

Помимо описанных выше механизмов, обуславливающих в основном транскристаллитное разрушение ГЦК металлов (никель), немаловажную роль в протекании процессов изнашивания играет интеркристаллитное разрушение. Электронномикроскопические исследования приповерхностных объемов на стадии приработки поверхностей и начального этапа установившегося режима обнаружили возникновение многочисленных микропор в полосах скольжения (рисунок 3б). При дальнейшем нагружении, по мере развития полос скольжения, в них на фоне возрастающего диспергирования решетки появляются многочисленные микропоры (рисунок 3а, область В). Наблюдаются элементы для коагуляции пор в виде вытянутых и заостренных сегментов (позиция Д). Появление микропор внутри и по границам блоков обуславливается активируемой вспышкой температур в локальных местах фрикционного контакта, диффузионной подвижностью вакансий и их объединением.

При упруго-напряженном состоянии поры становятся концентраторами диспергированного состояния решетки и могут обуславливать транс- и интеркристаллитное разрушение.

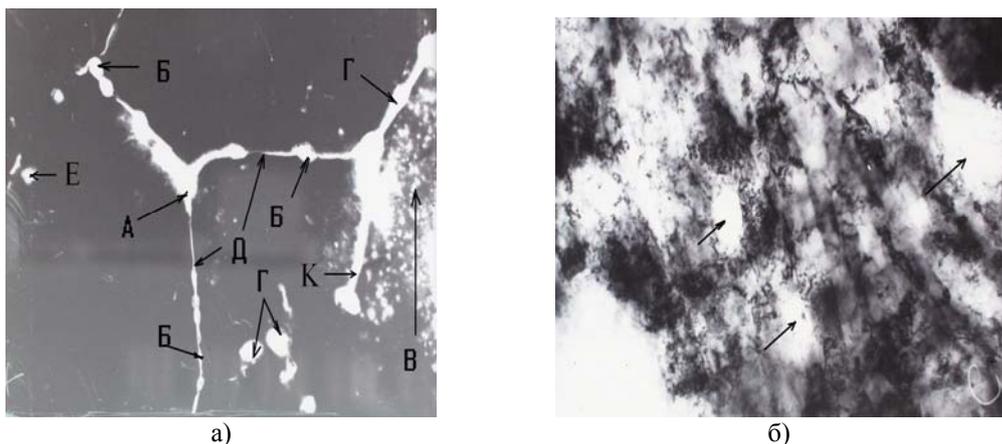


Рисунок 3 – Интеркристаллитное разрушение: а) – разрушение на стыке трех зёрен (А – разрушение на стыке трёх зёрен; Б – микропоры в полосах скольжения (появление вытянутых игл для их коагуляции; В – поры внутри зёрен; Г – транскристаллитное разрушение; К и Д – интеркристаллитное разрушение; Е – микропоры вблизи границ зёрен); б) – развитие пор в полосах скольжения (стрелки). Увеличение – $\times 36000$

Как видно из рисунка 3а, иллюстрирующего зернограничное разрушение, поры образуются вблизи границ зёрен (Е), в самих границах (Б) и внутри зёрен (В). Вблизи некогерентных границ поры, как правило, мигрируют к ним, поскольку пустоты и границы являются хорошими стоками вакансий, за счет которых они расширяются. Однако поры могут образоваться и в самих границах зёрен за счет совместного протекания межзеренного проскальзывания и внутризеренного скольжения с образованием порогов на границе и притока к ним вакансий в результате зернограничной диффузии. Под воздействием приложенных нагрузок микропоры становятся концентраторами напряжений и сами могут обуславливать транс- и интеркристаллитное разрушение (рисунок 3а, К, Д). Как видно из этого рисунка, процесс зернограничного разрушения преимущественно интенсифицируется на тройных стыках зёрен за счет развития и коагуляции микропор, которые для этого удлиняются и выставляют клиновидные сегменты, создавая этим сильную концентрацию напряжений скола.

Заключение

Анализ полученных данных подтверждает мнение, что в приповерхностном слое при фрикционном нагружении действует несколько механизмов образования трещин. На начальных этапах происходит трансформирование ячеистой структуры в квазиравномерное распределение дислокационных скоплений и формирование из них устойчивых полос скольжения. Возрастающая неравновесность этих дислокационных ансамблей со временем нагружения приводит к формированию поверхностных сдвигов и надрывов, являющихся источниками микротрещин. Необходимо отметить наличие транс- и интеркристаллитного разрушения за счет

формирования и коагуляции многочисленных пор; пересечения двойников полосами скольжения и зернограничные механизмы разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панин, В.Е. Синергетические принципы физической мезомеханики / В.Е. Панин // Физическая мезомеханика. – 2000. – Т. 3, № 6. – С. 5–36.
2. Юркова, А.И. Структура и механические свойства железа после поверхностной интенсивной пластической деформации трением. I. Особенности формирования структуры / А.И. Юркова, Ю.В. Мильман, А.В. Бякова // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – № 1. – С. 2–11.
3. Пинчук, В.Г. Кинетика упрочнения поверхностного слоя металла при трении / В.Г. Пинчук // Трение и износ. – 1989. – Т. 10, № 3. – С. 401–405.
4. Пинчук, В.Г. Взаимосвязь микроструктурных изменений с кинетикой износа поверхностного слоя металла при трении / В.Г. Пинчук, Е.Г. Шидловская, // Трение и износ. – 1989. – Т. 10, № 6. – С. 965–972.
5. Пинчук, В.Г. Структурные особенности микропластической деформации поверхностных слоев металла при трении на этапе приработки поверхностей / В.Г. Пинчук // Трение и износ. – 1996. – Т. 17, № 4. – С. 487–490.
6. Булатов, А.С. Зависимость ширины линии ФМР от плотности дислокаций в никеле / А.С. Булатов, В.Г. Пинчук, М.Б. Лазарева // Физика металлов и металловедение. – 1972. – Т. 34, № 5. – С. 1066–1069.
7. Гарбер, Р.И. Физика прочности кристаллических тел / Р.И. Гарбер, И.А. Гиндин // Успехи физических наук. – 1960. – Т. LXX, Вып. 1. – С. 57–110.

8. *Holste, C.* Cyclic plasticity of nickel, from single crystals to submicrocrystalline polycrystals / *C. Holste // Phil. Mag.* – 2004. – Vol. 84, № 3–5. – P. 299–315.
9. *Владимиров, В.И.* Актуальные задачи теории зарождения дислокационных трещин / *В.И. Владимирова, Ш.Х. Ханнанов // ФММ.* – 1970. – Т. 30, Вып. 3. – С. 490–510.
10. *Федоров, Ю.А.* Испускание и поглощение дислокаций границами зерен / *Ю.А. Федоров, О.И. Сысоев // Физика металлов и металлургия.* – 1973. – Т. 36, Вып. 5. – С. 919–924.
11. *Владимиров, В.И.* Энергия активации зарождения микротрещин в голове скопления дислокаций / *В.И. Владимирова, А.Н. Орлов // Физика твердого тела.* – 1969. – Т. 11, № 2. – С. 370–378.
12. *Орлов, А.Н.* Взаимодействие атомов примеси с перегибами на движущихся дислокациях / *А.Н. Орлов // Физика твердого тела.* – 1980. – Т. 22, Вып. 12. – С. 3580–3585.
13. *Иванова, В.С.* Металловедение и термическая обработка / *В.С. Иванова, В.Ф. Терентьев.* – М. : Металлургиздат, 1967. – С. 5–62.
14. *Neumann, P.* Coarse slip model of fatigue / *P. Neumann // Acta metallurgy.* – 1969. – Vol. 17, № 9. – P. 1219–1225.
15. *Фудзита, Ф.Е.* Разрушение твердых тел / *Ф.Е. Фудзита.* – М. : Металлургиздат, 1967. – 450 с.
16. *The fracture of mild steel laminates / J.D. Embury, [et al.] // Trans. AIME.* – 1967. – Vol. 239. – P. 114–118.
17. *Погребной, Э.Н.* О локальных деформациях при взаимодействии полос скольжения и двойников с препятствиями / *Э.Н. Погребной, К.М. Жак // ФММ.* – 1967. – Т. 23, Вып. 1. – С. 106–112.
18. *Хол, Д.* Разрушение твердых тел / *Д. Хол.* – М. : Металлургия, 1967. – 222 с.

Поступила в редакцию 15.10.09.

УДК 678.743.41:620.197:621.793

МОЛЕКУЛЯРНАЯ АРХИТЕКТУРА НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИТЕТРАФТОРЭТИЛЕНА И МЕТАЛЛОВ, СФОРМИРОВАННЫХ ИЗ АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

А.А. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.В. Рогачев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

MOLECULAR ARCHITECTURE OF NANOCOMPOSITE POLYTETRAFLUOROETHYLENE AND METAL BASED COATINGS FORMED FROM ACTIVE GAS PHASE

A.A. Rogachev, M.A. Yarmolenko, A.V. Rogachou

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассмотрены особенности морфологии и ориентации молекул в слоях политetraфторэтилена, сформированных из активной газовой фазы и наполненных наноразмерными металлическими частицами различной природы. Установлено, что наличие металлических частиц в слое обуславливает формирование дисперсных систем и влияет на характер ориентации молекул полимерной матрицы. При этом граничащий с подложкой слой, для которого характерна укладка макромолекул параллельно поверхности подложки, имеет значительно меньшую толщину, чем в однокомпонентных покрытиях. Определены закономерности трансформации молекулярной структуры в процессе роста композиционных слоев.

Ключевые слова: морфология, молекулярная структура, композиционное покрытие, политetraфторэтилен, наночастицы металла.

The peculiarities of the influence on morphology and molecular orientation of polytetrafluoroethylene coatings formed from active gas phase and filled with nanosized metal particles of different nature are observed. Metal doping was established to result in the formation of disperse structures and influence on the character of molecules orientation of polymer matrix. Moreover, the boundary coating-substrate interlayer characterized by macro molecules orientation parallel to the substrate surface has significantly small thickness in comparison with single-component coating. Regularities of the molecular structure transformation in the process of composite layers growth are defined.

Keywords: morphology, molecular structure, composite coating, polytetrafluoroethylene, metal nanoparticles.

Введение

При формировании полимерных слоев из активной газовой фазы процессы полимеризации и надмолекулярной организации протекают одновременно, а на начальных стадиях осаждения – в условиях активного влияния поверхности подложки [1]–[4]. Данное обстоятельство в значительной степени определяет закономерности формирования, особенности молекулярной и надмолекулярной структуры полимерных покрытий, характер их трансформации в процессе роста.

В работах [5]–[7] показано, что осаждение покрытий из летучих продуктов лазерного или электронно-лучевого диспергирования осуществляется по двум основным механизмам: адсорбционно – полимеризационному, включающему в качестве основных стадий адсорбцию летучих продуктов диспергирования на поверхности и их вторичную полимеризацию, и аэрозольному (капельному), который характеризуется образованием на стадии диспергирования или же в результате полимеризации в газовой фазе микро- и/или наночастиц полимера и их закреплением на поверхности.

При формировании покрытий политetraфторэтилена (ПТФЭ) из активной газовой фазы, генерируемой электроннолучевым диспергированием, основным механизмом роста полимерных слоев является адсорбционно-полимеризационный [8], который и определяет в значительной степени изменение морфологии формируемых покрытий при различных условиях формирования в широких пределах: от полностью анизотропной [9] до линейно ориентированной относительно подложки [10]–[11].

Метод электронно-лучевого диспергирования позволяет формировать нано- и микрокомпозиционные металлополимерные слои [12]. Установлено, что введение в полимерную матрицу частиц металла на стадии осаждения покрытия из газовой фазы активизирует процессы адсорбции молекулярных фрагментов и способствует формированию сплошного высокодисперсного покрытия [13]. Концентрация металла определяет плотность кластеров металла, их размер и характер объемного распределения.

Основной целью настоящей работы является установление закономерностей формирования морфологии, молекулярной архитектуры слоев

ПТФЭ при наполнении их наноразмерными частицами металлов различной природы.

1 Методика эксперимента

Композиционные покрытия на основе ПТФЭ наносились из активной газовой фазы, образованной электронно-лучевым диспергированием исходной смеси компонентов в вакууме по методу, описанному в [12]. В качестве компонентов смеси, подвергаемой диспергированию, использовались металлоорганические соединения меди, серебра, молибдена, отличающиеся по данным работ [14], [15] структурообразующей активностью по отношению к полимеру.

В качестве подложки использовалась металлизированная алюминием пленка полиэтилентерефталата. Осаждение покрытий с необходимым градиентом толщины производилось при помощи заслонки, управление скоростью движения которой осуществлялось компьютером. Скорость роста покрытия и его толщина определялись кварцевым измерителем толщины (КИТ).

Морфологию поверхности полимерных пленок исследовали методом АСМ на мультимодовом сканирующем микроскопе Solver-PRO (NT-MDT) в полуконтактном режиме. В качестве зонда использовали кремниевый кантилевер серии NSG 10 с силовой постоянной 11,5 Н/м и радиусом при вершине меньше 10 нм.

Для выявления особенностей образования объемных надмолекулярных структур использовали травление в плазме тлеющего разряда. При построении распределения дисперсных образований по площади основания использовался метод секущей плоскости и маркировки кластеров [16], [17]. Выбиралось такое характерное сечение, в котором число обособленных кластеров, не касающихся границ изображения, было максимальным.

Изучение структуры полимерных покрытий осуществлялось методом ИК Фурье-спектроскопии на спектрометре Vertex 70 (Bruker Optik GmbH, Germany) с помощью приставки МНПВО фирмы «Carl Zeiss, Germany». В качестве отражающего кристалла использовалась пластина из KRS-5 в форме параллелограмма однократного прохождения с 14-ю отражениями. Спектры снимались в спектральном диапазоне 400-4000 см⁻¹ с разрешением не хуже 4 см⁻¹, накопление сигнала проводилось по 24 спектрам. Поляризация света осуществлялась посредством поляроида F 350 MIR (Bruker Optik GmbH, Germany). Визуализация и математическая обработка ИК-спектров проводилась с использованием специализированного программного обеспечения OPUS-NT (Bruker Optik GmbH, Germany).

В качестве полосы внутреннего стандарта для однокомпонентных покрытий ПТФЭ вместо обычно рекомендуемой полосы при 2365 см⁻¹ [18] использовалась полоса при $\tilde{\nu} = 1156$ см⁻¹,

которая является комбинацией полос при $\tilde{\nu} = 1210$ см⁻¹ (валентные колебания $-\text{CF}_2$ и $-\text{CF}_2 - \text{CF}_2$) и $\tilde{\nu} = 1156$ см⁻¹ (валентные и деформационные колебания $-\text{CF}_2$) [18], [19]. Это обусловлено тем, что для исследуемых нами тонких покрытий ПТФЭ рекомендуемая полоса практически не разрешима. Проведенные измерения показали, что с высокой достоверностью (коэффициент корреляции $R^2=0,977$) имеет место линейная зависимость оптической плотности полосы 1156 см⁻¹ от толщины покрытия ПТФЭ. Следует отметить также, что преимущество выбора полосы $\tilde{\nu} = 1156$ см⁻¹ перед полосой $\tilde{\nu} = 1210$ см⁻¹ заключается в ее относительной изолированности (полоса 1210 см⁻¹ перекрывается с близко лежащей полосой 1246 см⁻¹, ответственной за валентные колебания групп C-C и деформационные колебания групп $-\text{CF}_2$) [20]. На основании измерений оптической плотности полосы $\tilde{\nu} = 1156$ см⁻¹ производилась оценка молекулярной архитектуры и ориентационного состояния композиционных слоев с одинаковым по массе содержанием ПТФЭ.

При определении ориентационного состояния сформированных слоев исходили из известных положений о том, что колебания при $\tilde{\nu} = 1156, 1246$ см⁻¹ имеют симметрию типа E_1 (колебания вектора E перпендикулярны оси молекулы), а $\tilde{\nu} = 1210$ см⁻¹ – типа A_2 (колебания вектора E параллельны оси молекулы) [19], [21], [22]. В принятой нами экспериментальной системе координат анализируемое покрытие и поверхность кристалла приставки МНПВО находятся в плоскости (X, Y) (координата Z отсчитывается в направлении, нормальном поверхности покрытия). Тогда при выбранной схеме измерений свет распространяется в направлении оси X . Дихроичное отношение DR определяли как отношение оптических плотностей полосы поглощения параллельно (колебания вектора E параллельны плоскости падения (X, Z)) и перпендикулярно (колебания вектора перпендикулярны плоскости падения) поляризованного света.

Параметр ориентации $f(\gamma)$ рассчитывали с помощью соотношения [11], [23]

$$f(\gamma) = \frac{E_x^2 + E_z^2 - DR \cdot E_y^2}{E_x^2 - 2 \cdot E_z^2 - DR \cdot E_y^2}, \quad (1.1)$$

где $E_{x,y,z}$ – амплитуды проекции вектора E на соответствующие оси.

При рассмотрении связи между данным параметром ориентации и углом γ использовали соотношение, приведенное в [24]:

$$f(\gamma) = \frac{3\langle \cos^2(\gamma) \rangle - 1}{2}, \quad (1.2)$$

где $f(\gamma)$ – параметр ориентации образца вдоль оси Z , γ – угол между осью Z и осью симметрии молекулы.

Методика определения ориентационного состояния однокомпонентного покрытия ПТФЭ более подробно изложена в работе [11].

2 Результаты и их обсуждение

Предварительно нами было показано, что молекулярная архитектура тонких слоев ПТФЭ немонотонно зависит от толщины покрытия [7], [8], [11]. Установлено, что максимальная степень молекулярной ориентации достигается в граничном слое толщиной до 100 нм. Причем на начальных стадиях формируются слои, состоящие из молекул, ось симметрии которых расположена преимущественно параллельно поверхности подложки, о чем свидетельствует большая интенсивность полос с E_1 типом симметрии [11]. Зависимость дихроичного отношения DR однокомпонентного покрытия ПТФЭ от оптической плотности полосы 1159 см^{-1} , значение которой пропорционально массовой толщине покрытия, представлена на рисунке 1.

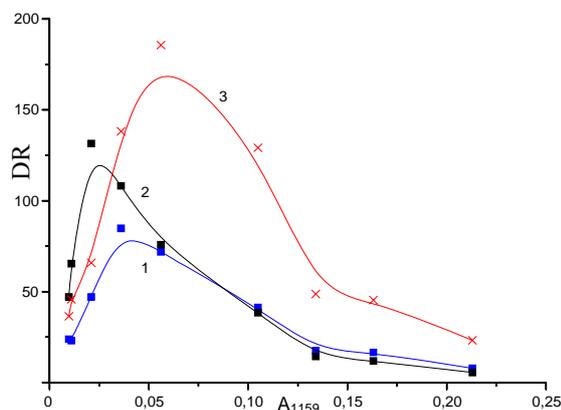


Рисунок 1 – Зависимость дихроичного отношения DR полос 1156 (1), 1210 (2), 1246 см^{-1} (3) от оптической плотности полосы при 1159 см^{-1} , пропорциональной массовой толщине покрытия ПТФЭ

Для металлополимерных покрытий на основе ПТФЭ, формируемых из активной газовой фазы, образованной электронно-лучевым диспергированием исходных компонентов в вакууме, также установлена немонотонная зависимость параметра ориентации молекул ПТФЭ от оптической плотности (массовой толщины) полимерной компоненты (рисунок 2). Следует отметить, что она зависит от природы наполняемого ПТФЭ металла. Так, в случае совместного диспергирования смеси ПТФЭ и медьсодержащего органического соединения установлено формирование высокоупорядоченной компоненты ПТФЭ уже на начальных стадиях роста композиционной системы ПТФЭ+Cu (рисунок 2а). В однокомпонентных покрытиях ПТФЭ (рисунок 1) образование высокоориентированной структуры наблюдается в более толстых слоях.

Подобная картина имеет место и при формировании системы ПТФЭ+Ag (рисунок 2б). При этом можно отметить различия в значениях дихроичного отношения, а, следовательно, и степени упорядоченности различных участков полимерной цепи ПТФЭ. Большие значения дихроичного отношения композиционных систем ПТФЭ+Cu и ПТФЭ+Ag свидетельствуют об образовании в покрытии более ориентированного состояния, формировании системы с более узким распределением различных возможных структурных форм полимерной компоненты по сравнению с однокомпонентными покрытиями ПТФЭ. Расчет усредненного угла между нормалью к подложке и осью симметрии молекулы согласно выражению (1.2) при максимальном дихроичном отношении для системы ПТФЭ+Ag дает значение примерно 6° , что ниже значения для однокомпонентного покрытия ПТФЭ, которое составляет 8° согласно данным, приведенным в работе [11].

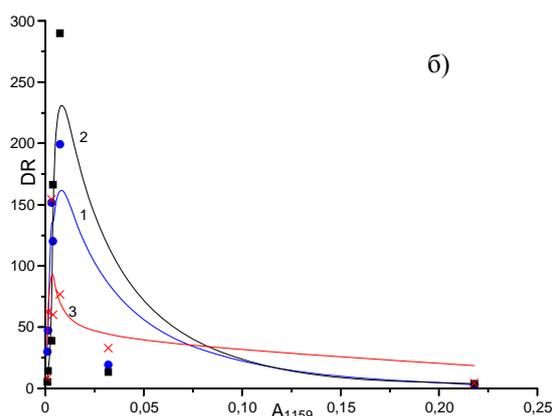
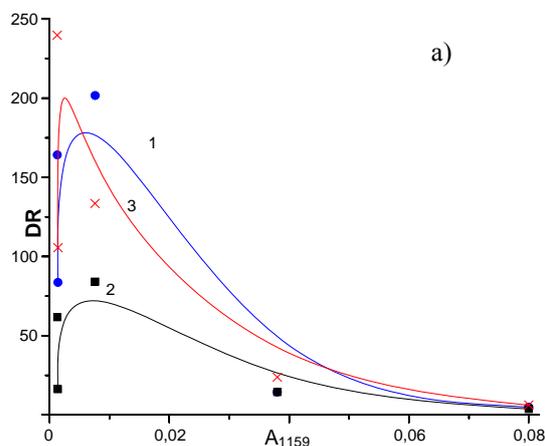


Рисунок 2 – Зависимость дихроичного отношения DR полос 1156 (1), 1210 (2), 1246 см^{-1} (3) от оптической плотности полосы при 1159 см^{-1} композиционного покрытия ПТФЭ+Cu (а), ПТФЭ+Ag (б)

Анализ результатов ИК-спектроскопических измерений в неполяризованном свете позволил установить, что, как и в случае однокомпонентных покрытий ПТФЭ, на начальных стадиях

роста образуются слои с преимущественной ориентацией осей молекул ПТФЭ вдоль поверхности подложки. С ростом композиционного покрытия степень ориентации фторопластовой компоненты значительно увеличивается, причем молекулы располагаются преимущественно перпендикулярно поверхности подложки. Далее с увеличением толщины степень ориентации фторопластовой компоненты снижается.

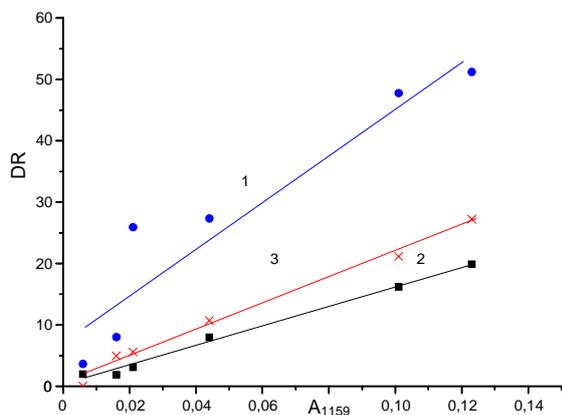


Рисунок 3 – Зависимость дихроичного отношения DR полос 1156 (1), 1210 (2), 1246 см^{-1} (3) от оптической плотности полосы $\tilde{\nu} = 1159 \text{ см}^{-1}$ композиционного покрытия ПТФЭ+Мо

Полученные экспериментальные данные подтверждаются результатами морфологических исследований начальных стадий роста композиционных слоев на основе ПТФЭ, согласно которым образование сплошных слоев наблюдается уже при толщине более 3 нм (при пересчете по плотности ПТФЭ) [12], [25]. Отметим, что при формировании однокомпонентных покрытий ПТФЭ осаждение сплошного конформного

покрытия не наблюдается в значительно более толстых слоях [8]. Такая структура композиционных покрытий обусловлена, по-видимому, инициирующим влиянием металлических дисперсных частиц на процессы адсорбции, вторичную полимеризацию молекулярных фрагментов и последующее структурообразование.

При формировании композиционной системы ПТФЭ+Мо молекулярная организация полимерной компоненты имеет особенности (рисунок 3). Установлено, что с ростом толщины таких покрытий дихроичное отношение (ориентация макромолекул полимера) изменяется практически линейно. В частности, на начальных стадиях образуются слои, в пределах которых молекулы ПТФЭ практически разориентированы. С ростом толщины покрытия степень ориентации фторопластовой компоненты линейно возрастает, молекулы ПТФЭ располагаются преимущественно вдоль поверхности подложки. Важно отметить, что степень ориентации формируемых слоев значительно ниже, чем у однокомпонентного покрытия ПТФЭ, и, конечно же, чем у композиционных систем ПТФЭ+Cu и ПТФЭ+Ag.

Установленные особенности молекулярного строения формируемых слоев сказываются и на их морфологии (рисунок 4). Для систем ПТФЭ+Ag в толстых слоях установлено образование большего числа устойчивых к травлению в плазме тлеющего разряда сферических структур диаметром до 100 нм, которые представляют собой вершины столбчатых надмолекулярных образований. Плотность и размер таких образований в системе ПТФЭ+Мо (рисунок 4) более низкая, но выше чем на начальных стадиях роста однокомпонентных слоев ПТФЭ [8].

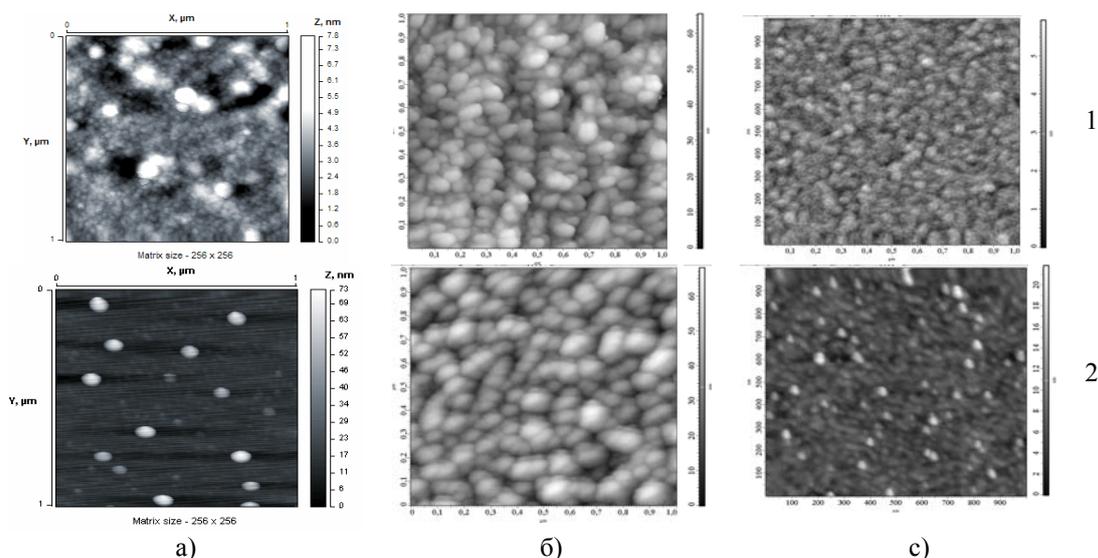


Рисунок 4 – Данные топографии АСМ покрытий ПТФЭ (а), ПТФЭ+Ag (б), ПТФЭ+Мо(с) до (1) и после (2) травления в плазме тлеющего разряда

Выводы

Определены особенности молекулярной архитектуры наноразмерных композиционных металлополимерных слоев на основе ПТФЭ, формируемых из активной газовой фазы. Установлено, что природа металла оказывает влияние на морфологию покрытия и ориентацию молекул полимерной матрицы. Введение металла приводит к формированию дисперсных структур, при этом граничный с подложкой слой, характеризующийся ориентацией молекул параллельно поверхности подложки, по сравнению с однокомпонентными покрытиями имеет значительно меньшую толщину. При осаждении слоев ПТФЭ+Мо ориентирующее влияние дисперсных частиц металла является доминирующим и в таких системах установлено линейное возрастание степени ориентации фторопластовой компоненты с ростом толщины композиционного покрытия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tkachuk, B.V. Thin polymer film deposition from the gas phase / B.V. Tkachuk, V.M. Kolytyrkin. – Moscow Khim, 1977. – 321 с.
2. Yasuda, H. Plasma polymerization / H. Yasuda. – Academic Press : New York, 1985.
3. Laser Ablation and the Production of Polymer Films / G.B. Blanchet [et al.] // Science, 1993, Vol. 262. – P. 719–721.
4. Брук, М.А. Полимеризация на поверхности твердых тел / М.А. Брук, С.А. Павлов. – М. : Химия, 1990. – 184 с.
5. Kodas, T.T. Role of Mass Transport in Laser-Induced Chemistry / T.T. Kodas, P.B. Comit // Ace. Chem. Res. – 1990. – № 23. – P. 188–194.
6. Gritsenko, K.P. Thin-Film Deposition of Polymers by Vacuum Degradation / K.P. Gritsenko, A.M. Krasovsky // Chem. Rev. – 2003. – Vol. 103. – P. 3607–3649.
7. Mindaugas Andrulėvičius Features of Polytetrafluoroethylene Coating Growth on Activated Surfaces from Gas Phase / A.A. Rogachev [et al.]; H.-G. Rubahn, H. Sitter, G. Horowitz, K. Al-Shamery, Ed.s Interface controlled organic thin films. – Springer Proceedings Physics, Berlin, 2009. – P. 85–90.
8. Rogachev, A.A. Morphological Features of the First Growth Steps of Polymeric Coatings from the Active Gas Phase on the Activated Surface / A.A. Rogachev // Russian Journal of Applied Chemistry. – 2004. – Vol. 77, №2. – P. 281–284.
9. Determination of Surface Structure and Orientation of Polymerized Tetrafluoroethylene Films by Near-Edge X-ray Absorption Fine Structure, X-ray Photoelectron Spectroscopy, and Static Secondary Ion Mass Spectrometry / D.G. Castner [et al.] // Langmuir. – 1993. – Vol. 9, №2. – P. 537–542.
10. Study of oriented growth of oligofluorene-thiophene films onto aligned vacuum-deposited polytetrafluoroethylene layers / M. Prelipceanu [et al.] // Materials Science in Semiconductor Processing. – 2007. – № 10. – P. 24–35.
11. The structure and molecular orientation of polytetrafluoroethylene coatings deposited from active gas phase / A.A. Rogachev [et al.] // Applied Surface Science. – 2009. – Vol. 255, №15. – P. 6851–6856.
12. Structure and properties of nanocomposite polymer coatings / A.A. Rogachev [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2008. – № 100. – 082042.
13. Structure and Tribological Properties of Polytetrafluoroethylene Nanocomposite Coatings Formed from Active Gas Phase / A.A. Rogachev [et al.] // ISSN 1392-1320 Materials science. – 2008. – Vol. 14, № 1. – P. 40–43.
14. Натансон, Э.М. Металлополимеры / Э.М. Натансон, М.Т. Брык // Успехи Химии. – 1972. – Вып. 8. – Т. 41. – С. 280–295.
15. Carlo, S.R. Iron Metalization of Fluorinated Organic Films: A Combined X-ray Photoelectron Spectroscopy and Atomic Force Microscopy Study / S.R. Carlo, A.J. Wagner, D.H. Fairbrother // J. Phys. Chem. B. – 2000. – № 104. – P. 6633–6641.
16. Hoshen, J. Percolation and cluster distribution / J. Hoshen, R. Kopelman // Phys. Rev. – 1976. – Vol. B14. – P. 3488–3498.
17. Рогачев, А.А. Фрактальный анализ морфологии поверхности / А.А. Рогачев // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы IX респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 13–15 марта 2006 г. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2006. – С. 108–109.
18. Ultrarotspektroskopische Untersuchungen an Polymeren / J. Dechant [et al.]. – Berlin : Akademie-Verlag, 1972.
19. Moynihan, R.E. The Molecular Structure of Perfluorocarbon Polymers. Infrared Studies on Polytetrafluoroethylene / R.E. Moynihan // J. Am. Chem. Soc. – 1959. – Vol. 81, №5. – P. 1045–1050.
20. Rogachev, A.A. CO-MAT-TECH-2006 Contributed papers / A.A. Rogachev, M.A. Yarmolenko. – Trnava, Slovakia. – 2006. – P. 1089–1092.
21. Conformational Order and Disorder in Poly (tetrafluoroethylene) from the Infrared Spectrum / G. Masetti [et al.] // Macromolecules. – 1973. – Vol. 6, № 5. – 1973. – P. 700–707.
22. Giuseppe, Z. Dynamics of Polymers as Structurally Disordered Systems. Vibrational Spectrum and Structure of Poly (tetrafluoroethylene) / Z. Giuseppe, M. Sacchi // Macromolecules. – 1973. – Vol. 6, № 5. – P. 692–699.
23. Tamm, L.K. Infrared spectroscopy of proteins and peptides in lipid bilayers / L.K. Tamm, S.F. Tatulian // Quarterly Reviews of Biophysics 30. – 4 Cambridge University Press. – 1997. – P. 365–429.

24. *Runge, A.F.* Combination of polarized TIRF and ATR spectroscopies for determination of the second and fourth order parameters of molecular orientation in thin films and construction of an orientation distribution based on the maximum entropy method / A.F. Runge, S.S. Saavedra, S.B. Mendes // *J. Phys. Chem. B.* – 2006. – Apr 6. – Vol. 110, № 13. – P. 6721–6731.

25. *Рогачев, А.А.* Морфология и молекулярная структура наноразмерных металлсодержащих покрытий ПТФЭ, формируемых из активной газовой фазы / А.А. Рогачев, А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко // *Материалы, технологии и инструменты.* – 2006. – Т. 11, № 4. – С. 51–55.

Поступила в редакцию 11.11.09.

УДК 539.12

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВКЛАДОВ ТОПЛИВНОЙ И КОНДЕНСАЦИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ В ЧЕРНОБЫЛЬСКИХ РАДИОАКТИВНЫХ ВЫПАДЕНИЯХ

Э.А. Рудак¹, Н.В. Максименко², В.В. Андреев², О.И. Ячник¹

¹Институт Физики им. Б.И. Степанова НАН РБ, Минск

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE USE OF CORRELATION RELATIONS FOR DETERMINATION OF FUEL AND CONDENSATION COMPONENTS IN CHERNOBYL RADIOACTIVE SEDIMENT

E.A. Rudak¹, N.V. Maksimenko², V.V. Andreev², O.I. Yachnik¹

¹Institute of Physics NAS RB, Minsk

²F. Scorina Gomel State University, Gomel

Описывается метод определения топливной и конденсационной составляющих в чернобыльских радиоактивных выпадениях. Этот метод основан на изучении статистических характеристик активностей пар нуклидов.

Ключевые слова: цезий, активность, радионуклид, радиоактивные выпадения.

The method of determination of fuel and condensation components in Chernobyl radioactive sediments is described. It is based on the investigation of statistic behavior of radionuclid pair radioactivity.

Keywords: caesium, radioactivity, radionuclid, radioactive sediments.

Введение

Для характеристики радиоактивных выпадений чернобыльского происхождения были введены так называемые коэффициенты фракционирования $f_{i,95}=(A_i/A_{95})/(Y_i/Y_{95})$, где A_i и A_{95} – измеренные на местности активности i -го и ^{95}Zr , а Y_i и Y_{95} – рассчитанные теоретически активности тех же нуклидов в активной зоне реактора на момент аварии [1].

Необходимость введения коэффициентов фракционирования объясняется тем, что некоторые радионуклиды чернобыльского происхождения выпали только в составе топливных частиц (топливные радионуклиды), а некоторые в составе топливных частиц и частично и в виде конденсатов на микрочастицах (конденсационные радионуклиды). Ряд нуклидов был выброшен практически полностью в конденсационном виде.

Для характеристики радиоактивных выбросов были введены понятия «летучие» и «нелетучие» радионуклиды. Топливные радионуклиды (^{95}Zr , ^{141}Ce , ^{144}Ce и др.) считаются «нелетучими» и не распространяются на большие расстояния от источника, поскольку основной выброс топлива приходится на 30-км зону ЧАЭС. Конденсационные же радионуклиды, напротив, считаются «летучими» (^{131}I , ^{137}Cs и др.) и могут распространяться на большие расстояния от источника.

Понятия «летучий» и «нелетучий» радионуклида весьма условны. Один и тот же нуклид (например, изотопы рутения ^{103}Ru , ^{106}Ru) в силу разных обстоятельств может вести себя и как «нелетучий», и как «летучий» (конденсационная форма преобладает над топливной). Коэффициенты фракционирования $f_{i,95}=(A_i/A_{95})/(Y_i/Y_{95})$ характеризуют степень «летучести» i -го радионуклида по отношению к «нелетучему» ^{95}Zr . Региональные коэффициенты фракционирования для различных районов Гомельской и Могилевской областей в зависимости от уровня загрязнения почвы ^{137}Cs приведены в [2].

На практике мы можем иметь дело с парой нуклидов, которые оба обладают большей «летучестью», чем топливные радионуклиды. На возможность оценить относительную «летучесть» одного нуклида по отношению к другому и в этом случае указано в [3], [4] на примере оценки запаса ^{90}Sr в почве украинской части 30-км зоны ЧАЭС по известному запасу ^{137}Cs , сделанной в работах [5], [6].

Оказывается, что для этого необходимо рассматривать одновременно средние значения прямых и обратных отношений пар исследуемых активностей. В частности, в [3], [4] проводился анализ только нескольких пар средних прямых и обратных отношений активностей типа $\langle A(^{90}\text{Sr})/A(^{137}\text{Cs}) \rangle$, $\langle A(^{137}\text{Cs})/A(^{90}\text{Sr}) \rangle$, поскольку в [5], [6] решалась довольно узкая задача.

Поэтому имеет смысл расширить круг исследуемых нуклидов и, соответственно, решаемых задач. Например, определение топливного и конденсационного вкладов в загрязнении почвы плутонием.

Поскольку на кафедре теоретической физики ГГУ им. Ф.Скорины и в Институте физики им. Б.И.Степанова НАН РБ в течение ряда лет велись сходные по методике вычислений исследования корреляционных отношений для активностей пар нуклидов чернобыльского происхождения, то есть возможность на более солидном, чем в [3], [4], экспериментальном материале провести аналогичные расчеты.

Проведение таких расчетов и является основной задачей настоящей работы. Предварительно, однако, рассмотрим общие свойства средних прямых и обратных отношений между активностями пар радионуклидов на примере задачи по определению неизвестного запаса одного радионуклида по известному запасу другого радионуклида.

1 Общие положения теории прямых и обратных отношений активностей пар радионуклидов

Для установления общих требований к данным эксперимента и методике определения неизвестного запаса $Q(A)$ нуклида A по известному запасу $Q(B)$ нуклида B , рассмотрим самый простой случай, когда на площади S известен и запас $Q(A)$, и запас $Q(B)$ [3], [4].

Очевидно, что запас $Q(A)$ может быть найден по запасу $Q(B)$ с помощью соотношения

$$Q(A) = Q(B) \langle A/B \rangle_{\text{ар}}, \quad (1.1)$$

где под $\langle A/B \rangle_{\text{ар}}$ следует понимать среднее арифметическое от суммы n локальных прямых отношений активностей a_i/b_i :

$$\langle A/B \rangle_{\text{ар}} = (a_1/b_1 + a_2/b_2 + \dots + a_n/b_n)/n. \quad (1.2)$$

На первый взгляд, казалось бы, что верным должно быть и аналогичное соотношение

$$Q(B) = Q(A) \langle B/A \rangle_{\text{ар}} \quad (1.3)$$

с $\langle B/A \rangle_{\text{ар}}$, равному среднему арифметическому от суммы n локальных обратных отношений активностей b_i/a_i

$$\langle B/A \rangle_{\text{ар}} = (b_1/a_1 + b_2/a_2 + \dots + b_n/a_n)/n. \quad (1.4)$$

В действительности это не так, и формула (1.3) для $Q(B)$ с $\langle B/A \rangle_{\text{ар}}$ (1.4) неверна. Покажем, что вместо $\langle B/A \rangle_{\text{ар}}$ в (1.3) должно стоять среднее гармоническое $\langle B/A \rangle_{\text{гар}}$

$$\langle B/A \rangle_{\text{гар}} = n / (a_1/b_1 + a_2/b_2 + \dots + a_n/b_n). \quad (1.5)$$

Действительно, подставив (1.3) в (1.1) получаем, что для известной величины $\langle A/B \rangle_{\text{ар}}$ и неизвестной величины $\langle B/A \rangle$ должно выполняться условие

$$\langle B/A \rangle = 1 / \langle A/B \rangle_{\text{ар}}. \quad (1.6)$$

Нетрудно проверить, что данное условие

может выполняться только в одном случае, когда $\langle B/A \rangle$ является не средним арифметическим, а средним гармоническим от величин $b_1/a_1 + b_2/a_2 + \dots + b_n/a_n$. Это обстоятельство и необходимо иметь в виду при определении запаса одного нуклида через запас другого нуклида.

Если это обстоятельство не учитывать, то это приведет к ошибке в определении запаса $Q(A)$. Допустим, что мы используем соотношение (1.3) для определения неизвестного запаса $Q(A)$ с $\langle B/A \rangle = \langle B/A \rangle_{\text{ар}}$, т. е. перепишем его в виде

$$Q(A) = Q(B) / \langle B/A \rangle_{\text{ар}}. \quad (1.7)$$

Но $\langle B/A \rangle_{\text{ар}} = 1 / \langle A/B \rangle_{\text{гар}}$, поэтому если в (1.7) под $\langle B/A \rangle$ понимать среднее арифметическое от b_i/a_i , то запас $Q(A) = Q(B) \langle A/B \rangle_{\text{гар}}$.

Ясно, что формула (1.7) в этом случае даст заниженное значение запаса $Q(A)$ по сравнению с формулой (1.1), так как среднее гармоническое $\langle A/B \rangle_{\text{гар}}$ по определению меньше среднего арифметического $\langle A/B \rangle_{\text{ар}}$. Лишь в одном случае, когда все отношения a_i/b_i равны между собой, $\langle A/B \rangle_{\text{ар}} = \langle A/B \rangle_{\text{гар}}$.

Разброс значений отношений a_i/b_i зависит от «летучести» нуклидов A и B . Наименьшим разброс будет в том случае, если оба нуклида A и B топливные. Если же один из нуклидов может выпасть как в топливной, так и в конденсационной форме, то разброс отношений a_i/b_i будет большим. Этот эффект и можно использовать для количественной оценки относительной «летучести» пар радионуклидов на локальном уровне.

В общем случае на примере радиоактивных выпадений в Гомельской и Могилевской областях этот эффект будет рассмотрен позднее. Здесь же проиллюстрируем его на примере работ [5], [6] и покажем, почему в этих работах было получено заниженное значение запаса ^{90}Sr в почве украинской части 30-км зоны по известному запасу ^{137}Cs .

2 Расчетно-экспериментальный метод определения запаса ^{90}Sr ($Q(^{90}\text{Sr})$) в почве украинской части 30-километровой зоны ЧАЭС по запасу ^{137}Cs ($Q(^{137}\text{Cs})$)

Известно, что по ряду причин наиболее надежно в объектах наземной экосистемы экспериментально определяется запас ^{137}Cs ($Q(^{137}\text{Cs})$). В частности, в 30-километровой зоне Украины загрязнение почвы ^{137}Cs практически полностью определяется аварийными выбросами РБМК-1000 ЧАЭС и на начало 1986 г. запас ^{137}Cs составил $Q(^{137}\text{Cs}) \approx 5,5 \cdot 10^{15}$ Бк (см., например, [1], [7], [8] и ссылки в них на другие работы).

Подробная экспериментальная карта-схема распределения локальной плотности загрязнения почвы 30-км зоны Украины ^{137}Cs ($A(^{137}\text{Cs})$) была построена через несколько лет после аварии [8].

В связи с этим появилась возможность использовать эти данные для оценки запаса радионуклида ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})$ и связанных с ним запасов ряда топливных нуклидов и изотопов трансурановых элементов $Q(^{238}\text{Pu})$, $Q(^{239}\text{Pu}+^{240}\text{Pu})$.

Такая экспериментально-расчетная работа по уточнению запаса ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})$ в почве 30-километровой зоны Украины с использованием подробных данных по ^{137}Cs и была сделана в [5]. Результаты этой работы оказались неожиданными. Запас ^{90}Sr на начало 1986 г. в почве 30-километровой зоны Украины оказался равным $Q(^{90}\text{Sr}) \approx 1,25 \cdot 10^{15}$ Бк, что гораздо меньше общепринятого до этого значения $Q(^{90}\text{Sr}) \approx 3 \cdot 10^{15}$ Бк (см. [8], [9] и ссылки в них на другие работы).

В работе [5] для определения запаса ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})$ на локальном уровне для площадки i использовались только формулы типа (1.7), т.е.

$$Q(^{90}\text{Sr})_i = \frac{Q(^{137}\text{Cs})_i}{\langle A(^{137}\text{Cs})/A(^{90}\text{Sr}) \rangle_i} \quad (2.1)$$

Необходимо же было использовать и вторую возможность определения запаса ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})$ по формулам типа (1.2)

$$Q(^{90}\text{Sr})_i = \frac{Q(^{137}\text{Cs})_i}{\langle A(^{90}\text{Sr})/A(^{137}\text{Cs}) \rangle_i} \quad (2.2)$$

Поскольку величины $\langle A(^{90}\text{Sr})/A(^{137}\text{Cs}) \rangle_i$ и $\langle A(^{137}\text{Cs})/A(^{90}\text{Sr}) \rangle_i$ являются средними арифметическими, то

$1/\langle A(^{137}\text{Cs})/A(^{90}\text{Sr}) \rangle_{i, \text{гp}} = \langle A(^{90}\text{Sr})/A(^{137}\text{Cs}) \rangle_{i, \text{гp}}$ (следует из $\langle B/A \rangle_{\text{ap}} = 1/\langle A/B \rangle_{\text{гp}}$). Поэтому использованная в [5] формула (2.1) дает заниженный в 2–3 раза запас ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})$. Если бы в [5] для определения запаса ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})$ в почве украинской части 30-километровой зоны ЧАЭС использовались обе формулы (2.1) и (2.2) одновременно, то разница в его оценке сразу же была бы установлена.

Следует отметить, что в следующей работе [6] для оценки запасов топливных нуклидов (в том числе и изотопов ТУЭ) аналогичная расчетно-экспериментальная методика использовалась для нахождения неизвестного запаса ^{154}Eu по рассчитанному в [5] запасу ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})$. Далее, поскольку нуклид ^{154}Eu является топливным, то по простым отношениям между активностями нуклидов в топливе на момент аварии реактора в [6] оценивались и запасы других топливных нуклидов.

Однако в [6] для перехода от запаса ^{90}Sr к запасу ^{154}Eu использовались формулы не типа (1.7), (1.8), как в случае ^{90}Sr и ^{137}Cs [5], а формулы типа (1.1)

$$Q(^{154}\text{Eu})_i = \frac{Q(^{90}\text{Sr})_i}{\langle A(^{154}\text{Eu})/A(^{90}\text{Sr}) \rangle_i} \quad (2.3)$$

Использованные в [6] формулы (2.3) по структуре выглядят корректными. Однако входящие в них запасы ^{90}Sr $Q(^{90}\text{Sr})_i$, полученные ранее в работе [5], занижены по абсолютной

величине в 2–3 раза. Поэтому и полученные в [6] по локальным запасам ^{154}Eu $Q(^{154}\text{Eu})$, запасы топливных нуклидов и изотопов плутония в 30-сантиметровом слое почвы Украинской части 30-километровой зоны оказались также заниженными в 2–3 раза.

3 Количественные оценки средних арифметических и средних гармонических значений для отношений активностей в почве южных районов Гомельской области

Поверхностная активность почвы для какой-либо площади определяется как среднее арифметическое от нескольких замеров активности. Подробно современная методика таких измерений рассмотрена, например, в [5]. Допустим, что в точках « i » какой-либо площадки S проведены n замеров активности двух нуклидов: A_{1i} и A_{2i} , где $i=1, 2, \dots, n$. Из этих « n » пар активностей A_{1i} и A_{2i} составим « n » пар прямых и обратных отношений

$$\rho_{1i} = A_{1i}/A_{2i}, \quad \rho_{oi} = A_{2i}/A_{1i} \quad (3.1)$$

и найдем для них средние арифметические:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{1i} \rangle_{\text{ap}} &= \frac{1}{n} \sum A_{1i}/A_{2i}, \\ \langle \rho_{oi} \rangle_{\text{ap}} &= \frac{1}{n} \sum A_{2i}/A_{1i}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Как было показано выше, оба этих средних арифметических связаны между собой так, что $\langle \rho_{oi} \rangle_{\text{ap}} = [\langle \rho_{1i} \rangle_{\text{гp}}]^{-1}$. Поэтому произведение двух средних арифметических $\langle \rho_{1i} \rangle_{\text{ap}}$ и $\langle \rho_{oi} \rangle_{\text{ap}}$ (3.2) дает нам величину μ , равную отношению среднего арифметического к среднему гармоническому для прямого отношения активностей A_{1i} и A_{2i}

$$\mu = \langle \rho_{1i} \rangle_{\text{ap}} / \langle \rho_{oi} \rangle_{\text{ap}} = \langle \rho_{1i} \rangle_{\text{ap}} / \langle \rho_{1i} \rangle_{\text{гp}} \quad (3.3)$$

Свойства отношения μ хорошо известны. По абсолютной величине оно тем больше, чем сильнее флуктуируют отношения локальных активностей A_{1i}/A_{2i} . Поскольку флуктуации локальных отношений A_{1i}/A_{2i} напрямую зависят от соотношения топливной и конденсационной форм выпадения нуклидов A_{1i} и A_{2i} , то величину μ можно использовать для характеристики выпавших радиоактивных осадков на данной площади S .

По определению величина $\mu \geq 1$. Она может быть точно равна единице только в одном гипотетическом случае, когда все локальные отношения активностей A_{1i}/A_{2i} равны между собой, т.е. $A_{11}/A_{21} = A_{12}/A_{22} = \dots = A_{1n}/A_{2n}$ и наоборот.

На практике такого варианта не может быть даже у двух изотопов одного и того же химического элемента (^{103}Ru и ^{106}Ru , ^{141}Ce и ^{144}Ce и др.), поскольку активности A_{1i} и A_{2i} являются флуктуирующими величинами. Поэтому на эксперименте всегда должно быть $\mu > 1$. Другое дело, что, как будет показано ниже, для пар нуклидов типа ^{103}Ru и ^{106}Ru , ^{141}Ce и ^{144}Ce отличие отношения μ от единицы невелико.

Второй фактор, влияющий на величину μ и представляющий наибольший практический интерес, – наличие двух форм в выбросе и соответственно в выпадении радиоактивных осадков: в составе топливной матрицы и в виде конденсата на микроскопических частицах. Соотношение этих двух форм выброса для различных нуклидов разное. Подробно этот вопрос обсуждается в работе [1].

Согласно [1], «нелетучие» радионуклиды тугоплавких элементов ($^{95}\text{Zr}+^{95}\text{Nb}$, ^{141}Ce , ^{144}Ce) были выброшены только в составе топливной матрицы в количестве $\sim 3,5\%$ от накопленного количества в активной зоне реактора на момент аварии. К «летучим» радионуклидам относятся ^{131}I , ^{132}Te , ^{137}Cs и др. Выброс некоторых из них в конденсационной форме намного превосходит топливный лимит $\sim 3,5\%$: для ^{131}I – порядка 60%, для ^{137}Cs – порядка 30% и т. д. [9].

Наибольший интерес представляют радионуклиды с переменной «летучестью» – изотопы рутения ^{103}Ru , ^{106}Ru и изотопы плутония. Их выбросы и выпадения могут быть как в чисто

топливном виде (тогда они ведут себя как «нелетучие»), так и в виде смеси топливной и конденсационной форм (тогда они ведут себя как нуклиды с «промежуточной» летучестью).

Подразделение радионуклидов на «летучие» и «нелетучие» в значительной степени условно. Считается, что в пределах нескольких км от ЧАЭС все радионуклиды (в том числе и изотопы рутения ^{103}Ru , ^{106}Ru) выпали в составе топливной матрицы. Однако на больших расстояниях от источника, в районах Могилевской области, изотопы рутения ^{103}Ru , ^{106}Ru выпали преимущественно в конденсационной форме [10]. Возможны и промежуточные варианты со сравнимыми вкладами топливной и конденсационной форм.

В связи с этим на примере загрязнений почвы южных районов Гомельской области покажем, что с помощью экспериментального отношения μ можно судить об относительной «летучести» пар нуклидов с активностями A_{1i} и A_{2i} . Результаты обработки данных эксперимента представлены ниже в Таблице 1.

Таблица 1 – Сравнение средних арифметических $\langle \rho_{\text{ни}} \rangle_{\text{ар}}$ и средних гармонических $\langle \rho_{\text{ни}} \rangle_{\text{гар}}$ значений для отношений пар активностей нуклидов для южных районов Гомельской области (отношение 5 для Могилевской области)

№	Отношение	$\langle \rho_{\text{ни}} \rangle_{\text{ар}}$	$\langle \rho_{\text{oi}} \rangle_{\text{ар}}$	$\langle \rho_{\text{ни}} \rangle_{\text{гар}}$	μ
1	$A(^{106}\text{Ru})/A(^{103}\text{Ru})$	0,221	–	0,216	1,02
	$A(^{103}\text{Ru})/A(^{106}\text{Ru})$	–	4,63	–	–
2	$A(^{144}\text{Ce})/A(^{141}\text{Ce})$	0,592	–	0,571	1,04
	$A(^{141}\text{Ce})/A(^{144}\text{Ce})$	–	1,75	–	–
3	$A(^{95}\text{Zr})/A(^{103}\text{Ru})$	0,85	–	0,65	1,31
	$A(^{103}\text{Ru})/A(^{95}\text{Zr})$	–	1,53	–	–
4	$A(^{95}\text{Zr})/A(^{106}\text{Ru})$	3,86	–	3,03	1,27
	$A(^{106}\text{Ru})/A(^{95}\text{Zr})$	–	0,33	–	–
5	$A(^{90}\text{Sr})/A(^{95}\text{Zr})$	0,223	–	0,107	2,08
	$A(^{95}\text{Zr})/A(^{90}\text{Sr})$	–	9,32	–	–
6	$A(^{141}\text{Ce})/A(^{103}\text{Ru})$	0,81	–	0,63	1,29
	$A(^{103}\text{Ru})/A(^{141}\text{Ce})$	–	1,59	–	–
7	$A(^{141}\text{Ce})/A(^{106}\text{Ru})$	3,72	–	2,86	1,3
	$A(^{106}\text{Ru})/A(^{141}\text{Ce})$	–	0,35	–	–
8	$A(^{144}\text{Ce})/A(^{103}\text{Ru})$	0,51	–	0,4	1,28
	$A(^{103}\text{Ru})/A(^{144}\text{Ce})$	–	2,52	–	–
9	$A(^{144}\text{Ce})/A(^{106}\text{Ru})$	2,35	–	1,82	1,29
	$A(^{106}\text{Ru})/A(^{144}\text{Ce})$	–	0,55	–	–
10	$A(^{95}\text{Zr})/A(^{137}\text{Cs})$	5,76	–	2,17	2,65
	$A(^{137}\text{Cs})/A(^{95}\text{Zr})$	–	0,46	–	–
11	$A(^{141}\text{Ce})/A(^{137}\text{Cs})$	5,51	–	2,08	2,65
	$A(^{137}\text{Cs})/A(^{141}\text{Ce})$	–	0,48	–	–
12	$A(^{131}\text{I})/A(^{141}\text{Ce})$	5,62	–	1,54	3,65
	$A(^{141}\text{Ce})/A(^{131}\text{I})$	–	0,65	–	–
13	$A(^{131}\text{I})/A(^{144}\text{Ce})$	8,9	–	2,5	3,56
	$A(^{144}\text{Ce})/A(^{131}\text{I})$	–	0,4	–	–
14	$A(^{137}\text{Cs})/A(^{131}\text{I})$	0,21	–	0,075	2,81
	$A(^{131}\text{I})/A(^{137}\text{Cs})$	–	13,4	–	–
15	$A(^{144}\text{Ce})/A(^{137}\text{Cs})$	3,54	–	1,33	2,66
	$A(^{137}\text{Cs})/A(^{144}\text{Ce})$	–	0,75	–	–

Продолжение таблицы 1

№	Отношение	$\langle \rho_{ni} \rangle_{ap}$	$\langle \rho_{oi} \rangle_{ap}$	$\langle \rho_{ni} \rangle_{гап}$	μ
16	$A(^{103}\text{Ru})/A(^{137}\text{Ce})$	6,02	—	4,17	1,44
	$A(^{137}\text{Ce})/A(^{103}\text{Ru})$	—	0,24	—	—
17	$A(^{106}\text{Ru})/A(^{137}\text{Ce})$	1,33	—	0,89	1,49
	$A(^{137}\text{Ce})/A(^{106}\text{Ru})$	—	1,12	—	—
18	$A(^{95}\text{Zr})/A(^{239,240}\text{Pu})$	2490	—	1320	1,89
	$A(^{239,240}\text{Pu})/A(^{95}\text{Zr})$	—	$7,57 \cdot 10^{-4}$	—	—
19	$A(^{141}\text{Ce})/A(^{239,240}\text{Pu})$	2410	—	1280	1,88
	$A(^{239,240}\text{Pu})/A(^{141}\text{Ce})$	—	$7,79 \cdot 10^{-4}$	—	—
20	$A(^{144}\text{Ce})/A(^{239,240}\text{Pu})$	1530	—	810	1,89
	$A(^{239,240}\text{Pu})/A(^{144}\text{Ce})$	—	$1,24 \cdot 10^{-3}$	—	—
21	$A(^{239,240}\text{Pu})/A(^{103}\text{Ru})$	$5,22 \cdot 10^{-4}$	—	$3,24 \cdot 10^{-4}$	1,61
	$A(^{103}\text{Ru})/A(^{239,240}\text{Pu})$	—	3090	—	—
22	$A(^{239,240}\text{Pu})/A(^{106}\text{Ru})$	$2,37 \cdot 10^{-3}$	—	$1,47 \cdot 10^{-3}$	1,61
	$A(^{106}\text{Ru})/A(^{239,240}\text{Pu})$	—	680	—	—
23	$A(^{239,240}\text{Pu})/A(^{137}\text{Ce})$	$3,06 \cdot 10^{-3}$	—	$1,32 \cdot 10^{-3}$	2,32
	$A(^{137}\text{Ce})/A(^{239,240}\text{Pu})$	—	760	—	—
24	$A(^{239}\text{Pu})/A(^{137}\text{Cs})$	$1,30 \cdot 10^{-3}$	—	$5,68 \cdot 10^{-4}$	2,29
	$A(^{137}\text{Cs})/A(^{239}\text{Pu})$	—	1760	—	—
25	$A(^{240}\text{Pu})/A(^{137}\text{Cs})$	$1,79 \cdot 10^{-3}$	—	$7,58 \cdot 10^{-4}$	2,36
	$A(^{137}\text{Cs})/A(^{240}\text{Pu})$	—	1320	—	—

Прокомментируем результаты Таблицы 1.

1. Для пар нуклидов ^{103}Ru и ^{106}Ru , ^{141}Ce и ^{144}Ce , являющихся изотопами одного и того же химического элемента, отношение μ близко к единице. Поскольку форма выпадения радиоактивных осадков здесь не играет роли, то отсюда следует, что статистические флуктуации активностей пар нуклидов мало влияют на величину отношения μ , оно близко к минимальному значению 1.

2. Наибольшее значение величина μ должна иметь для наиболее «летучего» ^{131}I и «нелетучих» нуклидов. Такими являются отношения 12,13 с участием ^{131}I и ^{141}Ce , ^{144}Ce . Для них μ порядка 3,5. Поскольку ^{131}I является наиболее «летучим» из всех нуклидов, представленных в Таблице, то для остальных отношений значение отношения μ не должно превышать лимит в 3,5, что и имеет место на самом деле.

3. Особый практический интерес имеет отношение 14 для ^{131}I и ^{137}Cs , поскольку ^{131}I представляет большую опасность, но был плохо измерен из-за малого периода полураспада. По ^{137}Cs обычно пытаются реконструировать запас ^{131}I . Полученное отношение $\mu \sim 2,8$ свидетельствует о том, что ^{131}I значительно более «летуч», чем ^{137}Cs . Качественно это согласуется с тем фактом, что интегральный выброс ^{131}I (~60%) примерно вдвое больше интегрального выброса ^{137}Cs (~30%).

4. Принципиальное значение имеют отношения 18-20, связывающие суммарную активность изотопов плутония $^{239}\text{Pu} + ^{240}\text{Pu}$ с активностью топливных нуклидов ^{95}Zr , ^{141}Ce , ^{144}Ce . Если бы плутоний выпал только в виде топлива, то отношение μ должно было бы быть немного

больше 1. Эксперимент же дает $\mu \sim 1,9$, т. е. плутоний на юге Гомельской области частично выпал и в конденсационном виде. Согласно [1], интегральный выброс плутония в конденсационном виде (летучие оксидные соединения плутония) был примерно равен интегральному выбросу плутония в топливном виде. Так что отношение $\mu \sim 2$ качественно согласуется с [1] в отношении выброса плутония.

5. Известно, что изотопы рутения в чернобыльских выпадениях ведут себя примерно так же, как и изотопы плутония [11]. Это можно проверить на отношениях 3, 4, 6, 7, 8, 9, связывающих между собой активности изотопов рутения ^{103}Ru и ^{106}Ru с активностями топливных нуклидов ^{95}Zr , ^{141}Ce , ^{144}Ce . Отношение $\mu \sim 1,3$. Очевидно, что, как и изотопы плутония, изотопы рутения частично выпали и в конденсационной форме. Но изотопы плутония более «летучие», чем изотопы рутения.

6. Последнее утверждение в п. 5 можно проверить на отношениях 21, 22, связывающих суммарную активность изотопов плутония $^{239}\text{Pu} + ^{240}\text{Pu}$ с активностью изотопов рутения ^{103}Ru и ^{106}Ru . Отношение $\mu \sim 1,6$. Это подтверждает вывод п. 5 о том, что изотопы плутония более «летучи», чем изотопы рутения.

7. По аналогии с п. 6 здесь с помощью отношений 23-25 рассматривается связь ^{137}Cs с активностью изотопов плутония $^{239}\text{Pu} + ^{240}\text{Pu}$. Отношение $\mu \sim 2,3$, т. е. ^{137}Cs более «летуч», чем изотопы рутения и изотопы плутония.

8. С помощью отношений 16, 17 рассматривается связь между активностями изотопов рутения ^{103}Ru и ^{106}Ru и ^{137}Cs . Здесь отношение $\mu \sim 1,4$, что значительно меньше, чем в предыдущем

случае. В общем это довольно очевидный результат, так как изотопы плутония более «летучи», чем изотопы рутения.

9. Соотношение 15 связывает активности топливного ^{144}Ce и ^{137}Cs . Отношение $\mu \sim 2,7$, что качественно согласуется с 4, для которого $\mu \sim 1,8$. Это и понятно, поскольку ^{137}Cs более «летуч», чем изотопы плутония.

10. Соотношение 5, связывающее активности ^{90}Sr и ^{95}Zr , единственное для почвы Могилевской области. Отношение $\mu \sim 2,1$, что свидетельствует о наличии конденсационной формы в выпадениях ^{90}Sr на больших расстояниях от источника. Этот результат свидетельствует о том, что вопреки утверждениям [6], ^{90}Sr мог быть выброшен и в конденсационной форме и распространится на большие расстояния от источника.

Заключение

Кратко полученные в статье результаты могут быть сформулированы следующим образом:

1. Наряду с коэффициентами фракционирования $f_{i,95}$ [1], для характеристики типа загрязнений почвы радионуклидами чернобыльского происхождения можно использовать и величину μ , являющуюся отношением среднего арифметического к среднему гармоническому для активностей пары нуклидов.

2. Для активностей пары нуклидов A_1 и A_2 , являющихся изотопами одного и того же химического элемента, указанное отношение μ зависит только от статистических флуктуаций активностей A_1 и A_2 и близко к 1.

3. Если пары нуклидов с активностями A_1 и A_2 не являются изотопами одного и того же химического элемента, то отклонение величины μ от 1 определяется разной «летучестью» нуклидов (в терминологии [1]).

4. Результаты анализа данных эксперимента по загрязнению почвы юга Гомельской области радионуклидами чернобыльского происхождения показывают, что изотопы плутония выпали как в виде топлива, так и в конденсационном виде.

5. Данные анализа форм выпадения радионуклидов на локальном уровне могут быть использованы при составлении долгосрочного прогноза по загрязнению почвы α -излучающими изотопами ТУЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Израэль, Ю.А. Радиоактивные выпадения после ядерных взрывов и аварий / Ю.А. Израэль. – С.-П. : Прогноз-погода, 1996. – 356 с.
2. Щекин, Ю.К. Региональные коэффициенты фракционирования некоторых радионуклидов чернобыльского происхождения на территории Республики Беларусь / Ю.К. Щекин // Минск : Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны, 2003. – 36 с. (Препринт ОИЭЯИ-5, Минск).
3. Rudak, E.A. On the activity ratio $^{90}\text{Sr}/^{137}\text{Cs}$ in soil of the Chernobyl nuclear power plant 30-km zone in Ukraine / E.A. Rudak, O.I. Yachnik // Lithuanian Journal of Physics. – 2009. – Vol. 49, № 1. – P. 117–122.
4. Рудак, Э.А. Оценка выброса топлива при аварии на Чернобыльской АЭС по концентрации ^{90}Sr в почве 30-км зоны / Э.А. Рудак, О.И. Ячник // Атомная энергия. – 2009. – Т. 107. – Вып. 1. – С. 57–60.
5. Загрязнение ^{90}Sr территории ближней зоны аварии на ЧАЭС / В.А. Кашпаров [и др.] // Радиохимия. – 2000. – Т. 42, № 6. – С. 550–559.
6. Загрязнение территории радионуклидами топливной компоненты чернобыльских радиоактивных выпадений / В.А. Кашпаров [и др.] // Радиохимия. – 2003. – Т. 45, № 2. – С. 173–183.
7. Атлас загрязнения Европы цезием после Чернобыльской аварии. Комиссия европейских сообществ. Под научным руководством Ю.А. Израэля. Люксембург, 1998. – 72 с.
8. 20 лет Чернобыльской катастрофы: взгляд в будущее. Национальный доклад Украины. – Киев : Атика, 2006. – 232 с.
9. Боровой, А.А. Выброс радионуклидов из разрушенного блока Чернобыльской АЭС / А.А. Боровой, А.Ю. Гагаринский // Атомная энергия. – 2001. – Т. 90, Вып. 2. – С. 137–145.
10. Оценка выброса плутония в аэрозольной форме при аварии на Чернобыльской АЭС / В.В. Андреев [и др.] // Минск : ИФ НАН Б, 2005. – 25 с. (Препринт ИФ НАН Б №742, Минск).
11. Содержание плутония в почвах европейской части страны после аварии на Чернобыльской АЭС / И.А. Лебедев [и др.] // Атомная энергия. – 1992. – Т. 72. – Вып. 6. – С. 593–599.

Поступила в редакцию 31.10.09.

УДК 621.396

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРНЫХ СПИРАЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ СОЗДАНИЯ СЛАБОУТРАЖАЮЩИХ ПОКРЫТИЙ В СВЧ ДИАПАЗОНЕ

И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE USE OF PAIR HELICES OF THE OPTIMUM FORM FOR CREATION OF WEAK REFLECTING COATINGS IN THE UHF RANGE

I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Проведено исследование взаимодействия электромагнитного излучения СВЧ диапазона с двумерной решеткой, состоящей из взаимно ортогональных пар спиралей, содержащих левосторонние и правосторонние одновитковые или двухвитковые спиральные элементы с предварительно рассчитанными оптимальными параметрами. Полученные искусственные структуры обладают одинаково значимыми диэлектрическими и магнитными свойствами и компенсированной киральностью. Целью исследования является демонстрация того, что такие структуры могут применяться для создания слабоотражающих покрытий.

Ключевые слова: безотражательные покрытия, композитные среды, киральность, электрический дипольный момент, магнитный момент.

Research of interaction of electromagnetic radiation of the UHF (ultra high frequency) range with the bi-dimensional lattice consisting of mutually orthogonal pairs of helices, containing left-handed and right-handed one-turn or double-turn helical elements with precalculated optimum parameters is carried out. The obtained artificial structures possess equally significant dielectric and magnetic properties and compensated chirality. The purpose of the research is demonstration of the possibility to use such structures for creation of weak reflecting coatings.

Keywords: nonreflecting coatings, composite media, chirality, the electric dipole moment, the magnetic moment.

Введение

Искусственные композитные среды, обладающие киральными свойствами в микроволновом диапазоне, активно исследовались в течение последних пятнадцати лет [1]–[7]. Основным мотивом исследований было предположение, что на основе искусственных киральных материалов могут быть созданы безотражательные покрытия металлических поверхностей. Исследования возможного использования искусственных киральных материалов для уменьшения отражения электромагнитных волн проводились во многих статьях [2]–[5].

Однако в работе [7] сделан вывод о том, что киральность не является существенным свойством при создании безотражательных покрытий. Достичь существенного снижения интенсивности отраженных электромагнитных волн на определенной частоте можно также с помощью некиральных поглощающих слоев. Авторы работы [7] пришли к такому выводу в результате расчета рассеяния электромагнитных волн на металлических спиральных в диэлектрической среде.

Безотражательную среду можно создать искусственно, поместив парные металлические проволочные включения спиральной формы с правой и левой намоткой в диэлектрический материал.

В качестве элементов искусственных структур выбраны спирали, поскольку они характеризуются одновременно диэлектрической и магнитной восприимчивостью. Сочетание диэлектрических и магнитных свойств и, более того, их одинаковая значимость является необходимым условием создания безотражательных покрытий. Однако каждая спираль характеризуется также магнитоэлектрической восприимчивостью, поскольку не обладает зеркальной симметрией и проявляет киральные свойства.

Если киральные свойства будут присущи образцу в целом, то это может вызвать поляризационную селективность искусственного материала. Другими словами, образец может проявлять разные свойства по отношению к волнам с правой и левой циркулярной поляризацией, что может повлечь за собой ухудшение безотражательных свойств. Следовательно, киральные свойства искусственного образца должны быть скомпенсированы.

С этой целью мы предлагаем использовать пары, состоящие из правой и левой спирали с оптимальными параметрами. В результате искусственный материал приобретает равнозначные диэлектрические и магнитные свойства и в то же время не является киральным.

Пары спиралей ориентированы в плоскости искусственного образца во взаимно перпендику-

лярных направлениях. Это позволяет достичь одинаковых свойств образца по отношению к волне с произвольной поляризацией в случае нормального падения волны (рисунок 1).

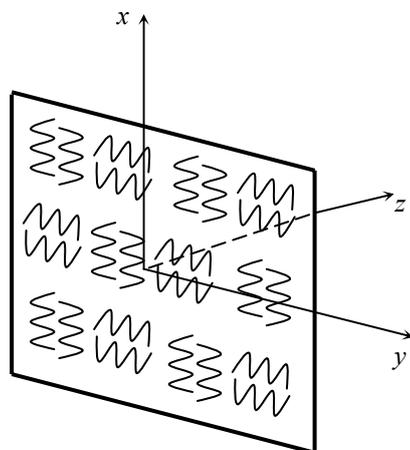


Рисунок 1

1 Анализ взаимодействия электрического и магнитного поля с парой спиралей при различной ориентации плоскости поляризации падающей волны

Характеристики электромагнитного излучения, рассеянного на спиральном элементе, зависят от соотношения геометрических размеров спирали и длины волны. Рассмотрим случай, когда линейные геометрические размеры спирали много меньше длины падающей волны, что позволяет применить дипольное приближение теории излучения [8].

Для этого случая найдем электрический дипольный и магнитный моменты спирали. Одновременное возникновение в каждом спиральном элементе не только электрического дипольного, но и магнитного моментов, связанных между собой и индуцированных внешним полем, является главным условием проявления гиротропных свойств такой структуры.

Необходимо вычислить все компоненты электрического дипольного момента и магнитного момента спирали, такие расчеты были нами проделаны в работах [9]–[10].

Рассмотрим действие электрического поля \vec{E} , осциллирующего вдоль оси ox (рисунок 2, расширяющаяся часть витка – ближняя к читателю). Обозначим суммарный электрический дипольный момент, возникающий в паре спиралей, как \vec{p} . Соответственно \vec{m} – суммарный магнитный момент, индуцированный в паре спиралей.

Для такой пары вертикально расположенных спиралей справедливо соотношение:

- 1) $p_x \neq 0, m_x = 0$ – так как в паре есть правая и левая спираль;
- 2) $p_y = 0, m_y = 0$ – поскольку ток и заряды распределены симметрично относительно центра каждой спирали;

3) $p_z \neq 0$ – но эта составляющая момента не будет давать вклада в волну, распространяющуюся вдоль оси z или навстречу оси z , то есть в прошедшую и отраженную волны; $m_z = 0$, так как в паре есть правая и левая спирали, в которых магнитные моменты взаимно компенсируются.

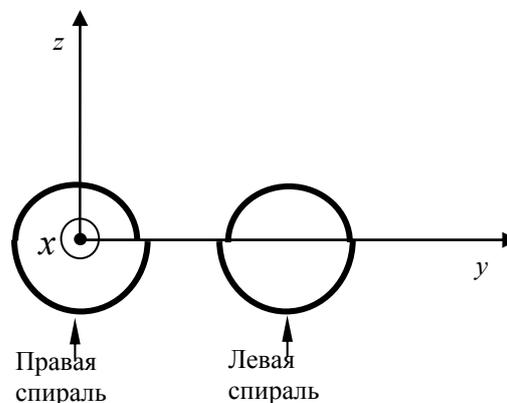


Рисунок 2

Рассмотрим воздействие на пару горизонтально расположенных спиралей электрического поля \vec{E} , осциллирующего вдоль оси oy (рисунок 3, расширяющаяся часть витка – ближняя к читателю).

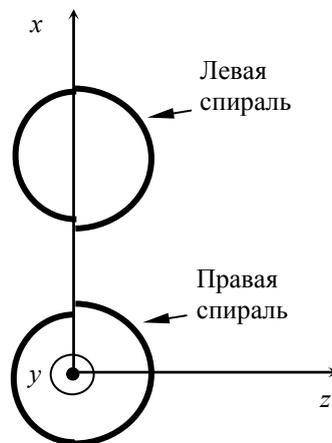


Рисунок 3

Рассуждая аналогично, для такой пары горизонтально расположенных спиралей можно записать:

- 1) $p_y \neq 0, m_y = 0$;
- 2) $p_x = 0, m_x = 0$;
- 3) $p_z \neq 0$.

Теперь рассмотрим влияние магнитного поля \vec{B} , ориентированного в обоих случаях вдоль осей спиралей.

Для горизонтально расположенных спиралей (\vec{B} колеблется вдоль оси oy) имеют место соотношения:

- 1) $m_y \neq 0, p_y = 0$;
- 2) $m_x = 0, p_x = 0$;
- 3) $m_z \neq 0, p_z = 0$.

Используя прежнюю аргументацию для вертикально расположенных спиралей (\vec{B} осциллирует вдоль оси ox) получаем:

- 1) $m_x \neq 0, p_x = 0;$
- 2) $m_y = 0, p_y = 0;$
- 3) $m_z \neq 0, p_z = 0.$

В дипольном приближении напряженность электрического поля излучаемой волны имеет вид [8]:

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \left(\left[\ddot{\vec{p}} \vec{n} \right] \vec{n} + \frac{1}{c} \left[\vec{n} \ddot{\vec{m}} \right] \right), \quad (1.1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, c – скорость света в вакууме, \vec{R} – радиус-вектор, проведенный от спирали в точку наблюдения, \vec{n} – единичный вектор волновой нормали, точки над векторами означают дифференцирование по времени.

Рассмотрим падающую электромагнитную волну, ориентация векторов которой показана на рисунке 4 (индекс i означает падающую волну).

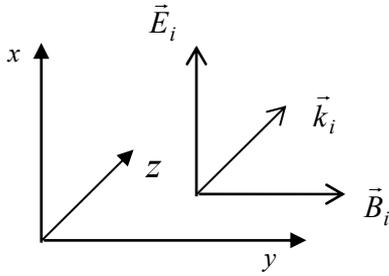


Рисунок 4

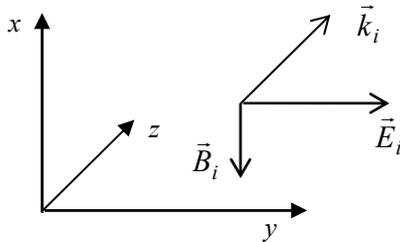


Рисунок 5

Вектор \vec{E}_i создает электрические дипольные моменты в вертикальных спиралах, вектор \vec{B}_i индуцирует ток в горизонтальных спиралах, следовательно, в них возникают магнитные моменты.

Поскольку все спирали оптимальные, то в них возникают одинаково значимые электрические дипольные и магнитные моменты:

$$|p_x| = \frac{1}{c} |m_y|. \quad (1.2)$$

Это соотношение было получено нами ранее в работах [9]–[10].

Если повернуть плоскость поляризации падающей волны на 90° (рисунок 5), то соотношение (1.2) принимает вид:

$$|p_y| = \frac{1}{c} |m_x|. \quad (1.3)$$

Теперь рассмотрим отраженную волну: $\vec{n} = -\vec{z}_0$, \vec{z}_0 – единичный вектор вдоль оси z (\vec{x}_0, \vec{y}_0 – векторы вдоль осей x и y).

Индукцированные моменты можно представить в комплексной форме

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}, \quad \vec{m} = \vec{m}_0 e^{-i\omega t}, \quad (1.4)$$

где ω – циклическая частота волны.

Используя (1.1), вычислим электрическое поле отраженной волны, созданное электрическим дипольным моментом (индекс r означает отраженную волну):

$$\begin{aligned} \vec{E}_p^{(r)} &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \left[\left[\ddot{\vec{p}} \vec{n} \right] \vec{n} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi R} \omega^2 \left[\left[\vec{p} \vec{n} \right] \vec{n} \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi R} \omega^2 \left[\left[p_x \vec{x}_0, (-\vec{z}_0) \right] - \vec{z}_0 \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi R} \omega^2 \left[-p_x \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right] = \frac{\mu_0}{4\pi R} \omega^2 p_x \vec{x}_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $p_x \vec{x}_0 = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ – электрический дипольный момент пары спиралей, $m_y \vec{y}_0 = \vec{m}_0 e^{-i\omega t}$ – магнитный момент пары спиралей.

Аналогично вычисляем электрическое поле отраженной волны, созданное магнитным моментом:

$$\begin{aligned} \vec{E}_m^{(r)} &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{1}{c} \left[\vec{n} \ddot{\vec{m}} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\omega^2}{c} \left[-\vec{z}_0, \vec{m} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\omega^2}{c} \left[\vec{z}_0, m_y \vec{y}_0 \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\omega^2}{c} m_y \vec{x}_0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Складывая выражения (1.5) и (1.6), получаем для отраженной волны:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(r)} &= \vec{E}_p^{(r)} + \vec{E}_m^{(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \omega^2 \vec{x}_0 \left(p_x - \frac{m_y}{c} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \omega^2 \vec{x}_0 \left(|p_x| - \frac{|m_y|}{c} \right) \cdot e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следовательно,

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{E}_p^{(r)} + \vec{E}_m^{(r)} = 0, \quad (1.8)$$

если выполняется условие оптимальности спиралей (1.2).

Рассмотрим другую ориентацию поляризации падающей волны (рисунок 5). Теперь $\vec{p} = p_y \vec{y}_0$, $\vec{m} = m_x \vec{x}_0$. Выполняя аналогичные вычисления, получаем

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{E}_p^{(r)} + \vec{E}_m^{(r)} = 0 \quad (1.9)$$

в случае оптимальных спиралей, для которых верно условие (1.3).

Следовательно, для любой элементарной ячейки состоящей из двух пар спиралей, которые

являются взаимно ортогональными, выполняют соотношения (1.8) и (1.9).

Поскольку спирали имеют оптимальную форму, то соотношения (1.2) и (1.3) выполняются вблизи резонансной частоты при любой ориентации плоскости поляризации падающей волны. Это обеспечивает отсутствие отраженной волны в случае нормального падения.

Рассматривая решетку в целом, на основании (1.2) и (1.3) получаем соотношение для диэлектрической и магнитной проницаемости структуры

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \mu_{xx} = \mu_{yy}, \quad (1.10)$$

которое будет выполняться вблизи резонансной частоты.

Таким образом, искусственная структура проявляет одинаково значимые диэлектрические и магнитные свойства.

2 Сравнительный анализ отражения и прохождения электромагнитных волн при их взаимодействии с различными решетками на основе парных спиралей оптимальной формы

Для проведения экспериментальных исследований изготовлен ряд искусственных образцов двумерных решеток, состоящих из различного числа взаимно ортогональных пар спиралей, содержащих левосторонние и правосторонние одновитковые или двухвитковые спиральные элементы.

Одновитковые спирали обладают параметрами: $N_e = 1$, $\alpha = 13,6^\circ$, $L = 0,05$ м, $r = 7,75 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 0,012$ м, $d = 1 \cdot 10^{-3}$ м; двухвитковые – $N_e = 2$, $\alpha = 7,1^\circ$, $L = 0,05$ м, $r = 3,9 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 3,1 \cdot 10^{-3}$ м, $d = 0,6 \cdot 10^{-3}$ м, где N_e – число витков спирали, α – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали, L – длина проволоки, из которой изготовлена спираль, r – радиус витка, h – шаг спирали, d – диаметр проволоки.

Для простоты проведения сравнительного анализа проведем нумерацию образцов:

№ 1 – образец двумерной решетки, состоящей из 81 (9x9) взаимно ортогональной пары спиралей, содержащей левосторонние и правосторонние одновитковые спиральные элементы, с расстоянием между парами 5 см;

№ 2 – образец двумерной решетки, состоящей из 144 (12x12) взаимно ортогональных пар одновитковых спиралей, с расстоянием между парами 3,5 см (рисунок 6);

№ 3 – образец двумерной решетки, состоящей из 81 (9x9) взаимно ортогональной пары двухвитковых спиралей, с расстоянием между парами 5 см;

№ 4 – образец двумерной решетки, состоящей из 169 (13x13) взаимно ортогональных пар двухвитковых спиралей, с расстоянием между парами 3 см;

№ 5 – образец двумерной решетки, состоящей из 196 (14x14) взаимно ортогональных пар двухвитковых спиралей, с расстоянием между парами 3 см (рисунок 7);

№ 6 – образец двумерной решетки, состоящей из парных линейных вибраторов длиной 5 см и с расстоянием между парами 6 см (рисунок 8).

Результаты экспериментальных исследований с данными образцами приведены на графиках (рисунки 9–14).

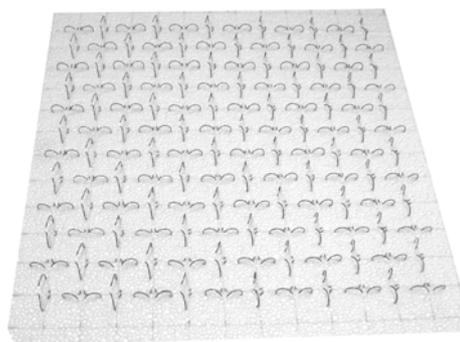


Рисунок 6 – Образец № 2

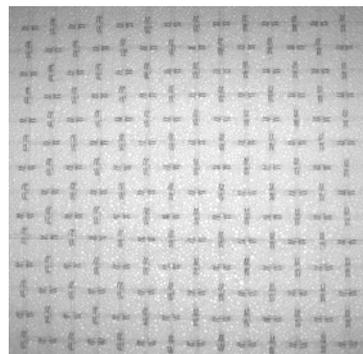


Рисунок 7 – Образец № 5

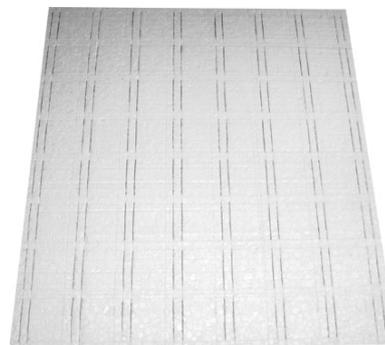


Рисунок 8 – Образец № 6

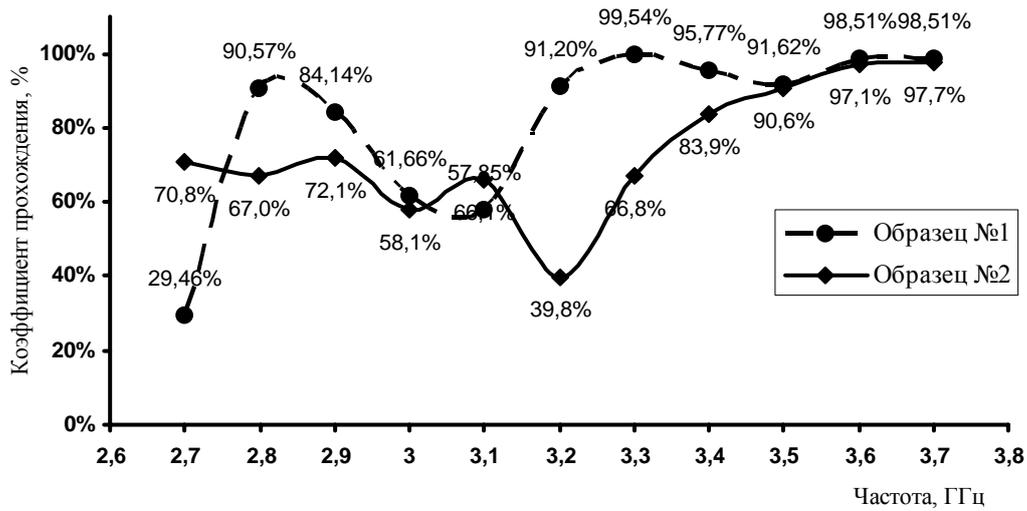


Рисунок 9 – Частотная зависимость коэффициента прохождения электромагнитной волны при взаимодействии с образцами № 1–2 на основе одновитковых спиралей

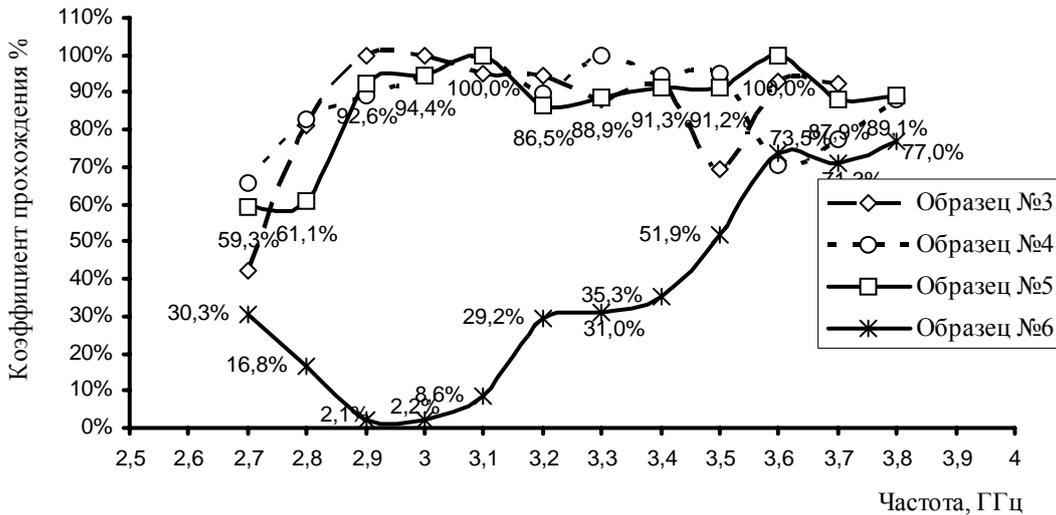


Рисунок 10 – Частотная зависимость коэффициента прохождения электромагнитной волны при взаимодействии с образцами № 3–6 на основе двухвитковых спиралей и линейных вибраторов

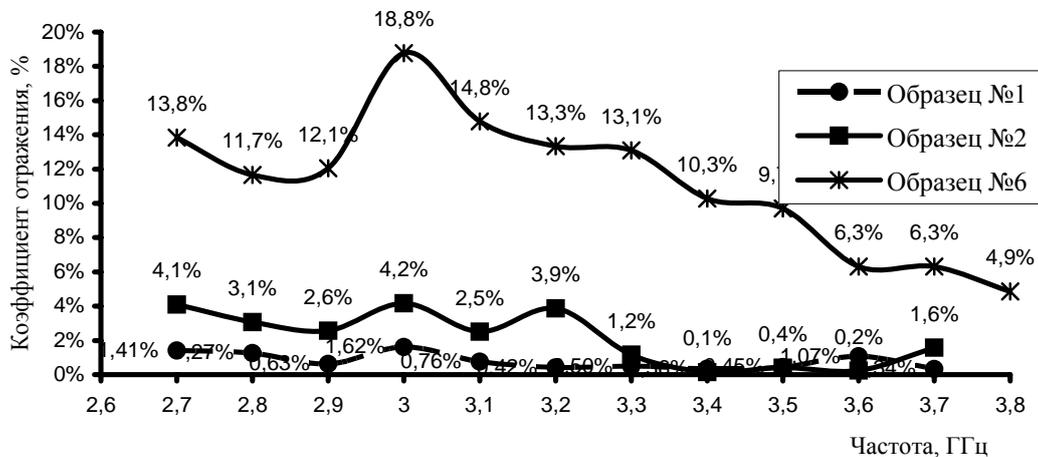


Рисунок 11 – Частотная зависимость коэффициента отражения электромагнитной волны при взаимодействии с образцами № 1, 2, 6 на основе одновитковых спиралей и линейных вибраторов

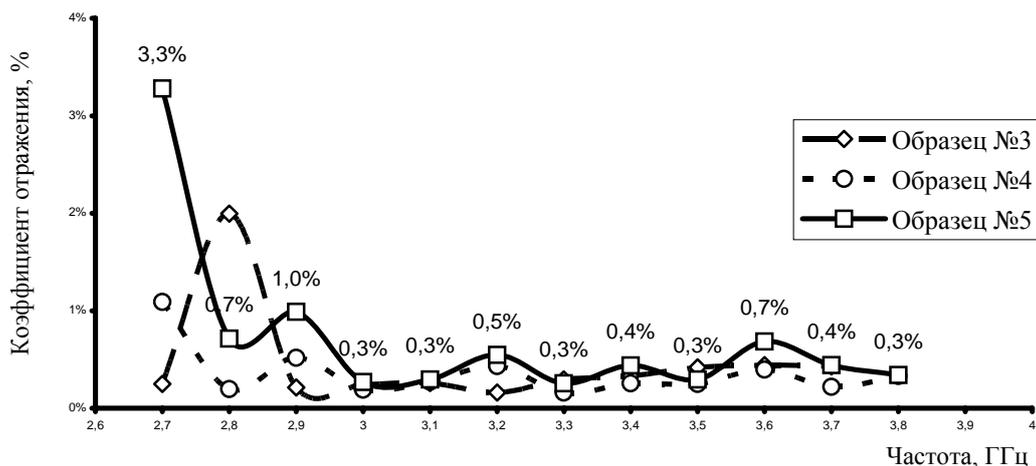


Рисунок 12 – Частотная зависимость коэффициента отражения электромагнитной волны при взаимодействии с образцами № 3–5 на основе двухвитковых спиралей

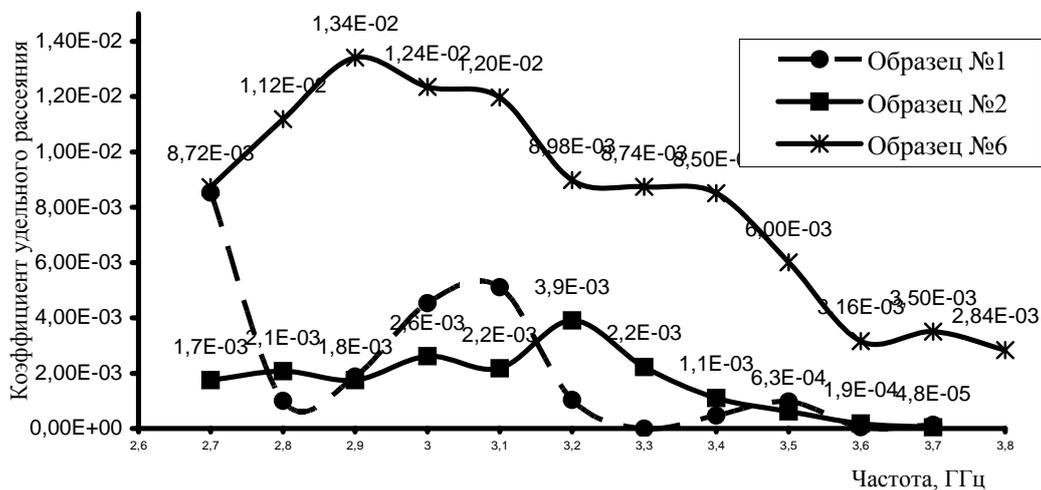


Рисунок 13 – Частотная зависимость коэффициента удельного рассеяния электромагнитной волны при взаимодействии с образцами № 1, 2, 6 на основе одновитковых спиралей и линейных вибраторов

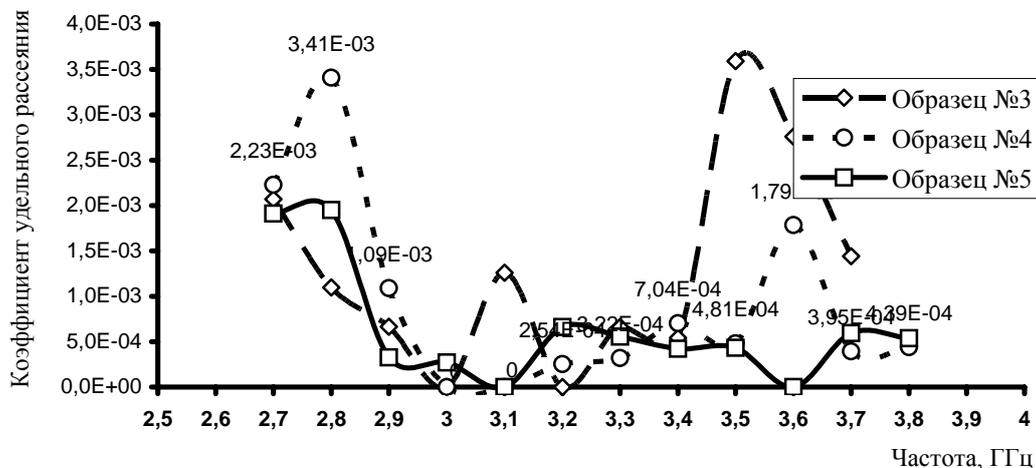


Рисунок 14 – Частотная зависимость коэффициента удельного рассеяния электромагнитной волны при взаимодействии с образцами № 3–5 на основе двухвитковых спиралей

Анализ графиков на рисунках 9 и 11 показывает, что вблизи резонансной частоты (приблизительно 3 ГГц) коэффициент прохождения сигнала для образцов № 1 и № 2 значительно уменьшается, при этом коэффициент отражения на этой частоте достигает максимального значения. Характер кривых для данных образцов схож с кривыми для образца № 6, состоящего из парных линейных вибраторов (возможно, это связано с большими линейными размерами одновитковых спиралей). Но значение коэффициента отражения для образца № 1 не превышает 1,62%, а для образца № 2 – 4,2%, что значительно ниже коэффициента отражения образца № 6, равного 18,8%. Этот результат подтверждает теоретические расчёты и показывает, что двумерные решетки на основе взаимно ортогональных пар, содержащих левосторонние и правосторонние одновитковые спиральные элементы с оптимальными параметрами, проявляют существенно ослабленные отражательные свойства.

Анализ графиков на рисунках 10 и 12 показывает, что образцы № 3–5, состоящие из взаимно ортогональных пар, содержащих левосторонние и правосторонние двухвитковые спиральные элементы, обладают высоким коэффициентом прохождения, независимо от количества пар в образце. Коэффициент отражения для этих образцов не превышает 3,3%, а на резонансной частоте – 0,3%, при этом потери сигнала на рассеяние незначительны (рисунок 14). Этот результат показывает преимущество образцов № 3–5 перед образцами № 1 и № 2 при их использовании в качестве слабоотражающих покрытий.

Для учета влияния количества пар приведены графики частотной зависимости коэффициента удельного рассеяния электромагнитной волны при взаимодействии с образцами. Коэффициент удельного рассеяния рассчитывался как отношение коэффициента рассеяния искусственной структуры на данной частоте к количеству пар спиралей в образце.

Рисунки 13 и 14 показывают ещё одно преимущество оптимальных спиралей перед линейными вибраторами, помимо слабого отражения электромагнитных волн. Образцы, состоящие из парных спиралей с оптимальными параметрами, гораздо слабее рассеивают электромагнитные волны, чем образцы на основе линейных вибраторов. Это приводит к снижению потерь в целом и, следовательно, к возрастанию коэффициента прохождения электромагнитной волны.

Анализируя графики коэффициента удельного рассеяния, можно сделать вывод, что лучшие свойства демонстрируют образцы № 2 и № 5, которые содержат четное количество пар спиралей. Для этих образцов коэффициент удельного рассеяния изменяется в более узком интервале и в среднем принимает более низкие значения по сравнению с образцами № 1, № 3 и

№ 4, которые тоже образованы оптимальными спиральями. Причина заключается в том, что образцы № 2 и № 5 состоят из целого количества завершённых ячеек, каждая из которых включает в себя пару горизонтальных и пару вертикальных спиралей.

Заключение

Проведенные в данной работе исследования позволяют сделать вывод о возможности использования искусственных структур, состоящих из парных одновитковых или двухвитковых спиралей оптимальной формы для создания слабоотражающих покрытий в СВЧ диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Advances in Complex Electromagnetic Materials* / A. Priou [et al.] // Kluwer Academic Publishers, 1997. – Vol. 28. – P. 32–37.
2. Whites, K.W. Composite uniaxial bianisotropic chiral materials characterization: comparison of predicted and measured scattering / K.W. Whites, C.Y. Chang // *J. Electromagn. Waves Applic.* – 1997. – Vol. 11. – P. 371–394.
3. Tretyakov, S.A. Influence of chiral shapes of individual inclusions on the absorption in chiral composite coatings / S.A. Tretyakov, A.A. Sochava, C.R. Simovski // *Electromagnetics.* – 1996. – Vol. 16. – P. 113–127.
4. Cloete, J.H. The role of chirality in synthetic microwave absorbers / J.H. Cloete, M. Bingle, D.B. Davidson // *Proc. Int. Conf. Electromagnetics in Advanced Application.* – 1999. – P. 55–58.
5. Tretyakov, S.A. Proposed composite material for nonreflecting shields and antenna radomes / S.A. Tretyakov, A.A. Sochava // *Electron. Lett.* – 1993. – Vol. 29. – P. 1048–1049.
6. *Reflection and transmission by a uniaxially bi-anisotropic slab under normal incidence of plane waves* / I.V. Semchenko [et al.] // *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1998. – № 31. – P. 2458–2464.
7. *Microwave-absorbing chiral composites: Is chirality essential or accidental?* / C.F. Bohren [et al.] // *Applied Optics.* – 1992. – Vol. 31, № 30. – P. 6403–6407.
8. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 504 с.
9. *Исследование поляризации электромагнитного излучения, рассеянного на металлической спирали* / И.В. Семченко [и др.] // *Лазерная и оптико-электронная техника.* – 2002. – Вып. 7. – С. 84–91.
10. Семченко, И.В. Преобразование поляризации электромагнитных волн спиральными излучателями / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // *Радиотехника и электроника.* – 2007. – Т. 52, № 8. – С. 917–922.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Поступила в редакцию 15.10.09.

УДК 519.12

ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

А.Н. Сердюков, А.Н. Егоров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE GRAVITATIONAL INTERACTION IN THE ELECTRODYNAMICS OF CONTINUOUS MEDIUM

A.N. Serdyukov, A.N. Yegorov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Построены уравнения электродинамики сплошной среды, находящейся в сильном гравитационном поле. Рассмотрено влияние тяготения на распространение электромагнитных волн в среде с эффектом Фарадея. Полученные решения для неоднородных электромагнитных волн позволяют моделировать процесс распространения электромагнитного излучения в материи нейтронных звезд.

Ключевые слова: гравитационное взаимодействие, электромагнитные волны.

The electrodynamic equations for continuous medium in strong gravitational field are constructed. The influence of gravitation on propagation of electromagnetic waves in the medium with Faraday effect is considered. The received solutions for non-uniform electromagnetic waves allow to model the propagation of electromagnetic radiation in the matter of neutron stars.

Keywords: gravitational interaction, electromagnetic waves.

Введение

Универсальность гравитационного взаимодействия предполагает его участие в формировании реального распределения энергии (массы) в любой физической системе. При этом следует подчеркнуть, что влияние поля тяготения на реальное распределение массы в любой физической системе не исчерпывается только вкладом собственной массы этого поля в общую массу системы. Не менее важным фактором, влияющим на формирование реального распределения энергии, является гравитационный дефект массы. Это означает, что без включения в рассмотрение энергии присутствующего в системе поля тяготения и без учета гравитационного дефекта массы, связанной гравитационным взаимодействием, формулировка закона сохранения энергии для любой системы в принципе остается незавершенной и, вообще говоря, нуждается в корректировке.

1 Дефект массы при гравитационном взаимодействии

Зависимость реальной массы материальных частиц и полей от гравитационного потенциала является важным обстоятельством, прежде не замечавшимся при анализе энергетики гравитирующих систем. Принципиальную необходимость учета гравитационного дефекта массы тел убедительно демонстрирует подсчет баланса энергии простейших систем при изменении их конфигурации. В частности, проведенный в [1] полный анализ изменения энергетического

состояния незаряженной гравитирующей сферической оболочки при ее расширении под действием внешних сил позволил получить выражение

$$w_g = \frac{g^2}{8\pi k c^2} e^{\Phi/c^2}$$

для реальной плотности массы поля тяготения и доказать ее положительную определенность.

Для физической системы, пространственное распределение затравочной массы которой известно, учет дефекта массы при гравитационном взаимодействии является достаточно простой задачей, которая для точечной пробной частицы во внешнем поле тяготения была решена еще в работе [2]. Постулируя ковариантную форму уравнения движения частицы в гравитационном поле со скалярным потенциалом Φ

$$\frac{d}{d\tau} m u_\mu = -m \partial_\mu \Phi, \quad (1.1)$$

где $d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2} dt$ – собственное время, Нордстрём в [2] показал, что из этого уравнения с необходимостью следует зависимость массы (энергии) частицы от потенциала поля. Он допустил, что эффективная масса m частицы в гравитационном поле является переменной величиной и в результате умножения (1.1) на четырехмерную скорость $u_\mu = \partial x_\mu / \partial \tau$ с учетом ортогональности 4-векторов u_μ и $\partial u_\mu / \partial \tau$ пришел к уравнению

$$c^2 \frac{dm}{d\tau} = m \frac{d\Phi}{d\tau},$$

интегрируя которое, получил связь

$$m = m_0 e^{\Phi/c^2}. \quad (1.2)$$

между реальной массой m частицы в гравитационном поле и ее затравочной массой m_0 .

Если частица занимает некоторый не равный нулю объём и ее затравочная масса распределена в пространстве с плотностью M_0 , то в соответствии с (1.2) мы должны предположить для реальной массы M аналогичную зависимость от потенциала:

$$M = M_0 e^{\Phi/c^2}. \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) автоматически учитывает дефект массы системы, затравочная масса которой связана гравитационным взаимодействием.

2 Уравнения Максвелла с учетом гравитационного взаимодействия

Приведенные выше рассуждения показывают, что вследствие гравитационного взаимодействия плотность затравочной массы действительно не соответствует реальному распределению массы физической системы. Это обстоятельство в полной мере относится и к рассматриваемому в настоящей статье электромагнитному полю. Реальная плотность энергии микроскопического электромагнитного поля \mathbf{d} , \mathbf{h} с учетом вычитания энергии связи, согласно (1.3), должна записываться в виде

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2) e^{\Phi/c^2}, \quad (2.1)$$

где Φ – потенциал поля тяготения, создаваемого материальными частицами и электромагнитным полем.

В системе уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \mathbf{b} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \mathbf{d} = 4\pi \rho \quad (2.5)$$

и материальных уравнений

$$\mathbf{d} = \varepsilon^{(0)} \mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = \mu^{(0)} \mathbf{h} \quad (2.6)$$

с вещественными константами $\varepsilon^{(0)}$ и $\mu^{(0)}$ закон сохранения энергии электромагнитного поля имеет обычный вид

$$\nabla \frac{c}{4\pi} \mathbf{e} \times \mathbf{h} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}\mathbf{d} + \mathbf{h}\mathbf{b}) = -\mathbf{e}\mathbf{j}.$$

Из сравнения входящей сюда стандартной плотности энергии

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}\mathbf{d} + \mathbf{h}\mathbf{b})$$

и формулы (2.1) следует, что для учета гравитационного взаимодействия в структуре микроскопического электромагнитного поля следует в соотношениях (2.6) положить

$$\varepsilon^{(0)} = e^{-\Phi/c^2}, \quad \mu^{(0)} = e^{\Phi/c^2}. \quad (2.7)$$

Таким образом, электромагнитное поле в присутствии поля тяготения описывается уравнениями Максвелла (2.2)–(2.5), включающими четыре полевых вектора, которые связаны материальными уравнениями (2.6), (2.7).

3 Уравнения макроскопической электродинамики

Переход к макроскопическому электромагнитному полю осуществим путем обычного усреднения по физически бесконечно малым объемам входящих в уравнения Максвелла величин. Для усредненных полей \mathbf{e} и \mathbf{b} введем обозначения

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}, \quad \langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{B}.$$

В соответствии с (2.6) будем иметь

$$\langle \mathbf{d} \rangle = e^{-\Phi/c^2} \mathbf{E}, \quad \langle \mathbf{h} \rangle = e^{-\Phi/c^2} \mathbf{B}.$$

Проведем также обычное разбиение связанных со средой токов на токи поляризации и токи намагничивания, записав

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \nabla \times \mathbf{M},$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_{ext} + \nabla \mathbf{P},$$

где ρ_{ext} и \mathbf{j}_{ext} – плотности внешних зарядов и электрического тока. При усреднении второй пары уравнений Максвелла такое разбиение позволяет выделить две линейные комбинации

$$\mathbf{D} = e^{-\Phi/c^2} \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H} = e^{-\Phi/c^2} \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad (3.2)$$

включающие векторы электрической и магнитной поляризации среды.

В результате мы приходим к обычной форме уравнений Максвелла макроскопической электродинамики

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{ext}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi \rho_{ext}. \quad (3.6)$$

Эти уравнения, как обычно, должны быть дополнены материальными уравнениями, конкретная форма которых определяется соотношениями (3.1), (3.2), если конкретизирована зависимость электрической поляризации \mathbf{P} и намагниченности \mathbf{M} среды от полей \mathbf{E} и \mathbf{B} .

4 Электромагнитные волны в магнитоактивной среде в присутствии поля тяготения

Обратимся далее к рассмотрению электромагнитных волн в намагниченной среде с эффектом Фарадея, находящейся в постоянном поле тяготения $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$. Материальные уравнения

для поля в такой среде с учетом (3.1), (3.2) представим в виде

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (4.1)$$

где

$$\varepsilon^{-1} = e^{\Phi/c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} + i \mathbf{G} \times \right), \quad (4.2)$$

$$\mu = e^{\Phi/c^2}, \quad (4.3)$$

\mathbf{G} – вектор магнитной гирации.

Из (3.3)–(3.6), (4.1)–(4.3) при отсутствии в среде внешних токов и зарядов находим уравнение для напряженности магнитного поля \mathbf{H}

$$\begin{aligned} & \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} + i \mathbf{G} \times \right) \nabla \times \mathbf{H} - \\ & - \frac{1}{c^2} \mathbf{g} \times \left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} + i \mathbf{G} \times \right) \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Его решение будем искать в виде плоской волны с постоянной комплексной векторной амплитудой \mathbf{H}_0 .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.4), приходим к алгебраическому уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^{(0)}} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{H} + i \mathbf{k} \times \mathbf{G} \times \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \frac{i}{c^2 \varepsilon^{(0)}} \mathbf{g} \times \mathbf{k} \times \mathbf{H} - \\ & - \frac{1}{c^2} \mathbf{g} \times \mathbf{G} \times \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Учитывая далее вытекающее из (3.4) равенство

$$\mathbf{k}\mathbf{H} + \frac{i}{c^2} \mathbf{g}\mathbf{H} = 0,$$

а также известное тождество для двойного векторного произведения, из (4.6) получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k^2}{\varepsilon^{(0)}} - \frac{i}{c^2 \varepsilon^{(0)}} \mathbf{k}\mathbf{g} - i \mathbf{k}\mathbf{G} \circ \mathbf{k} \times \right) \mathbf{H} - \\ & - \frac{1}{c^2} \mathbf{g} \times \mathbf{k} \circ \mathbf{G}\mathbf{H} + \frac{1}{c^2} \mathbf{k}\mathbf{G} \circ \mathbf{g} \times \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рассмотрим далее случай, когда электромагнитная волна распространяется в направлении, коллинеарном вектору напряженности поля тяготения \mathbf{g} . При таком предположении можем записать

$$\mathbf{k} = N \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{g} = g \mathbf{n}, \quad (4.9)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, N – показатель преломления волны (в общем случае комплексный). Использование (4.8), (4.9) позволяет существенно упростить уравнение (4.7):

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon^{(0)} - \left(N^2 + i \frac{Ng}{c\omega} \right) - \right. \\ & \left. - i \varepsilon^{(0)} \left(N^2 + i \frac{Ng}{c\omega} \right) \mathbf{n}\mathbf{G} \circ \mathbf{n} \times \right) \mathbf{H} = 0. \end{aligned}$$

Условием существования нетривиальных

решений для поля \mathbf{H} будет равенство нулю определителя этого уравнения

$$\left| \varepsilon^{(0)} - \left(N^2 + i \frac{Ng}{c\omega} \right) - i \varepsilon^{(0)} \left(N^2 + i \frac{Ng}{c\omega} \right) \mathbf{n}\mathbf{G} \circ \mathbf{n} \times \right| = 0.$$

Отсюда следует уравнение для показателей преломления поперечных волн

$$\left[\varepsilon^{(0)} - \left(N^2 + i \frac{Ng}{c\omega} \right) \right]^2 - \left[\varepsilon^{(0)} \left(N^2 + i \frac{Ng}{c\omega} \right) \mathbf{n}\mathbf{G} \right]^2 = 0.$$

Два его решения с положительной вещественной частью имеют вид

$$N^\pm = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{n}\mathbf{G}} - \frac{g^2}{4c^2 \omega^2} - i \frac{g}{2c\omega}}. \quad (4.10)$$

Эти решения соответствуют двум поперечным циркулярно-поляризованным (правой и левой) волнам, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^\pm = \pm i \mathbf{H}^\pm. \quad (4.11)$$

Равенства (4.8), (4.10) позволяют окончательно определить комплексные волновые векторы этих волн:

$$\mathbf{k}^\pm = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{n}\mathbf{G}} - \frac{g^2}{4c^2 \omega^2}} \mathbf{n} - i \frac{\mathbf{g}}{2c^2}. \quad (4.12)$$

В итоге с учетом (4.12) можем записать окончательные решения для векторов магнитного поля неоднородных циркулярно-поляризованных электромагнитных волн, распространяющихся в магнитоактивной среде в мощном поле тяготения:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^\pm = \mathbf{H}_0^\pm \exp\left(\frac{\mathbf{g}\mathbf{r}}{2c^2}\right) \cdot \\ & \cdot \exp\left[i \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{n}\mathbf{G}} - \frac{g^2}{4c^2 \omega^2}} \cdot \mathbf{n}\mathbf{r} - \omega t \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из уравнения Максвелла (3.5) при $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$ также легко находим поле электрической индукции этих волн

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}^\pm = \mp \left(i \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{n}\mathbf{G}} - \frac{g^2}{4c^2 \omega^2}} + \frac{g}{2c\omega} \right) \times \\ & \times \mathbf{H}_0^\pm \exp\left(\frac{\mathbf{g}\mathbf{r}}{2c^2}\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\cdot \exp\left[i \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{n}\mathbf{G}} - \frac{g^2}{4c^2 \omega^2}} \cdot \mathbf{n}\mathbf{r} - \omega t \right) \right].$$

Используя уравнения Максвелла и материальные уравнения, построим также решения для полей напряженности электрического поля \mathbf{E} и магнитной индукции \mathbf{B} , связанные с найденными решениями для вектора \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}^\pm = \mathbf{H}_0^\pm \exp\left(-\frac{\mathbf{g}\mathbf{r}}{2c^2}\right) \cdot \\ & \cdot \exp\left[i \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{n}\mathbf{G}} - \frac{g^2}{4c^2 \omega^2}} \cdot \mathbf{n}\mathbf{r} - \omega t \right) \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{E}^{\pm} = \mp \left(\sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{nG}} - \frac{\mathbf{g}^2}{4c^2 \omega^2} + \frac{\mathbf{g}}{2c\omega}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^{(0)}} \mp \mathbf{nG} \right) \times \mathbf{H}_0^{\pm} \exp \left(-\frac{\mathbf{gr}}{2c^2} \right) \cdot \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon^{(0)}}{1 \mp \varepsilon^{(0)} \mathbf{nG}} - \frac{\mathbf{g}^2}{4c^2 \omega^2}} \cdot \mathbf{nr} - \omega t \right) \right]. \quad (4.16)$$

Векторы поля (4.13)–(4.16) неоднородных плоских электромагнитных волн в среде составляют единое решение уравнений Максвелла (3.3)–(3.6) и материальных уравнений (4.1)–(4.3).

Заключение

Подводя итог, отметим, что последовательный учет дефекта массы в распределении связанной гравитационным взаимодействием плотности энергии электромагнитного поля позволяет обосновать конкретный вид электродинамических материальных уравнений, учитывающих влияние тяготения на электромагнитные процессы. Предложенный способ описания гравитационного взаимодействия в структуре электромагнитного поля позволяет рассматривать распределенное в пространстве поле тяготения как свое-

образную среду с экспоненциальной зависимостью диэлектрической и магнитной проницаемости от гравитационного потенциала.

На примере решения задачи о распространении электромагнитных волн в магнитоактивной гиротропной среде в присутствии поля тяготения показана перспективность применения предлагаемого подхода в макроскопической электродинамике нейтронных звезд.

Авторы признательны В.Н. Белому за полезные обсуждения полученных результатов и поддержку. Мы благодарим В.А. Карпенко за интерес к работе и стимулирующую дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюков, А.Н. Минимальная модель тяготения в рамках стандартных ограничений теории классических полей / А.Н. Сердюков // Письма в ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 6, № 3 (152). – С. 312–331.
2. Nordström, G. Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik / G. Nordström // Ann. d. Phys. – 1913. – Bd.40. – S. 856–878.

Поступила в редакцию 06.10.09.

УДК 512.542

РЕКУРСИВНО РАСПОЗНАВАЕМЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Ф. Васильев¹, Т.И. Васильева²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

RECURSIVELY RECOGNIZABLE LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS

A.F.Vasilyev¹, T.I. Vasilyeva²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

Пусть φ – некоторое подгрупповое свойство и n – натуральное число. Формация \mathfrak{F} называется φ_n -распознаваемой, если \mathfrak{F} содержит всякую группу G , имеющую n φ -подгрупп, принадлежащих \mathfrak{F} . В статье предлагается оригинальный подход, основанный на концепции Т-модели, для установления φ_n -распознаваемости локальных формаций конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, локальная формация, локальный экран, Т-модель, φ_n -распознаваемость.

Let φ be some subgroup property and n is a natural number. A formation \mathfrak{F} is called φ_n -recognizable if \mathfrak{F} contains each group G having n φ -subgroups belonging \mathfrak{F} . In the paper an original method, based on the concept of T-models for study φ_n -recognizable formations is proposed.

Keywords: finite group, local formation, local screen, T-model, φ_n -recognition.

1 Введение

Рассматриваются только конечные группы. В теории групп довольно распространенным является доказательство утверждений следующего типа: если какая-то выделенная часть подгрупп данной группы принадлежит классу \mathfrak{X} , то и сама группа принадлежит \mathfrak{X} . К настоящему времени получено значительное число теорем отмеченного выше типа (для конкретных классов \mathfrak{X} и различных подгрупповых свойств), которые рассеяны по многочисленным работам. Рядом авторов были предложены утверждения, для которых система подгрупп, устанавливающая принадлежность группы данному классу \mathfrak{X} , зависит от натурального n . Например, Х. Виландт [1] показал, что группа G разрешима, если она имеет три разрешимые подгруппы, чьи индексы в группе G попарно взаимно просты. Аналогичный результат для класса нильпотентных групп доказал О. Кегель [2]. К. Дерк [3] установил сверхразрешимость группы, у которой имеются четыре сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. О. Крамер [4]–[6] в классе конечных разрешимых групп исследовал локальные формации \mathfrak{F} , содержащие всякую группу, у которой имеется n \mathfrak{F} -подгрупп с попарно взаимно простыми индексами. При этом он установил рекурсивную зависимость между выполнимостью данного свойства для самой формации и значений ее локального экрана. Ряд результатов из отмеченных выше работ вошел в монографию [7]–[8].

Отметим еще один пример построения утверждений отмеченного выше типа. В.А. Белоголов в [9] доказал, что конечная группа нильпотентна, если она имеет три попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы. В [10] В.Н. Семенчук в классе разрешимых групп получил аналогичный результат для формации всех p -замкнутых групп. В [11]–[12] изучались в классе разрешимых групп Ω_n -замкнутые насыщенные формации, т.е. формации \mathfrak{F} , содержащие всякую группу G , имеющую n попарно несопряженных максимальных подгрупп, принадлежащих \mathfrak{F} . Здесь также была установлена рекурсивная зависимость для данного свойства между формацией и значениями ее локального экрана. В частности, было доказано, что разрешимая группа имеет нильпотентную длину, не превосходящую n , если она имеет $n+2$ попарно несопряженных максимальных подгруппы с нильпотентной длиной, не превосходящей n . Ряд результатов и следствий из них, установленных в работе [11], были позднее снова получены Б. Хёфлингом в [13] и составили основу его работы.

Наблюдающийся параллелизм в построении утверждений и в методах их доказательства в отмеченных выше работах приводит к задаче построения общей схемы получения теорем указанного выше вида и выработки единого способа их доказательства. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья. Ряд результатов этого исследования был анонсирован без доказательств в работе [14].

В дальнейшем рассматриваются только конечные группы. В обозначениях, определениях и используемых результатах мы следуем монографиям [7], [15]. Напомним некоторые из них. Используются обозначения для конкретных классов групп: \mathcal{A} – класс всех абелевых групп; \mathcal{N} – класс всех нильпотентных групп; \mathcal{S} – класс всех разрешимых групп; \mathcal{G} – класс всех групп; \mathcal{N}^n – класс всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит натуральное число n ; $\mathcal{L}_p(n)$ – класс всех p -разрешимых групп, нильпотентная p -длина которых не превосходит натуральное число n . Через π обозначается некоторое множество простых чисел, π' – дополнение к π в множестве \mathbf{P} всех простых чисел. Если \mathcal{X} – класс групп, то \mathcal{X}_π – класс всех π -групп из \mathcal{X} .

Всякая функция $f: \mathbf{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация \mathcal{F} называется локальной [7], [15], если существует локальный экран f такой, что $\mathcal{F} = (G \mid G/F_p(G) \in f(p))$ для любого $p \in \pi(G)$. Обозначается $\mathcal{F} = LF(f)$. По теореме Гашюца-Любезедер-Шмида формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна (см., например, [15, гл. IV, теорема 4.6]).

2 Т-модели и рекурсивная распознаваемость формаций конечных групп

Пусть \mathcal{X} – некоторый класс групп. Отображение θ , которое ставит в соответствие каждой группе $G \in \mathcal{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым \mathcal{X} -функтором, если $\theta(G)^\alpha = \theta(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α группы G .

Пусть отображение Δ ставит в соответствие каждой группе G из данного класса \mathcal{X} некоторое бинарное отношение на множестве $S(G)$ всех подгрупп группы G . Через Δ_G обозначается значение отображения Δ на группе $G \in \mathcal{X}$. В дальнейшем данное отображение Δ будем называть просто отношением Δ на классе групп \mathcal{X} .

Тройка $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$ называется [14] Т-моделью (теорем моделью) на классе групп \mathcal{X} . Всякое множество $\{H_1, \dots, H_n\}$ попарно несопряженных подгрупп группы $G \in \mathcal{X}$ называется \wp -тестом группы G в модели $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$, если $H_i \in \theta(G)$ для любого $i = 1, \dots, n$ и $(H_i, H_j) \in \Delta_G$ для любых $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. Число n – длина теста.

Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$ – некоторая Т-модель. В дальнейшем будем предполагать, что отношение Δ_G симметрично для любой группы $G \in \mathcal{X}$, т. е., если $(A, B) \in \Delta_G$, то $(B, A) \in \Delta_G$.

Определение 2.1. Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$ – Т-модель и n – натуральное число. Класс \mathcal{F} будем называть \wp_n -распознаваемым, если \mathcal{F} содержит всякую \mathcal{X} -группу, у которой имеется \wp -тест $\{H_1, \dots, H_n\}$ такой, что $H_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n$. По определению, пустой класс является \wp_n -

распознаваемым для любой Т-модели $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$.

Используя это определение, сформулируем задачу рекурсивной распознаваемости для локальных формаций. Пусть $\mathcal{F} = LF(f)$ – локальная формация, заданная локальным экраном f , и $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$ – Т-модель. Найти рекурсивную зависимость между \wp_n -распознаваемостью \mathcal{F} и \wp_m -распознаваемостью значений ее экрана f .

3 Основные результаты

Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$ – Т-модель и n – натуральное число. Следующие две леммы элементарны.

Лемма 3.1. Пусть \mathcal{F} и \mathcal{Y} – \wp_n -распознаваемые классы групп. Тогда класс групп $\mathcal{F} \cap \mathcal{Y}$ также \wp_n -распознаваем.

Лемма 3.2. Если класс групп \mathcal{F} является \wp_n -распознаваемым для некоторого натурального числа n , то \mathcal{F} также является \wp_k -распознаваемым для всех $k \geq n$.

Пусть \mathcal{X} – некоторый гомоморф. Отношение Δ на \mathcal{X} будем называть проективным на \mathcal{X} , если для любой \mathcal{X} -группы G и ее эпиморфизма φ из $(A, B) \in \Delta_G$ следует, что $(A^\varphi, B^\varphi) \in \Delta_{G^\varphi}$.

Определение 3.3. Пусть \mathcal{X} – класс групп. Бинарное отношение Δ на \mathcal{X} называется F-связанным, если для любой монолитической \mathcal{X} -группы G и любой пары $(A, B) \in \Delta_G$ всегда выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:

- 1) либо $F(G) \subseteq A$, либо $F(G) \subseteq B$;
- 2) либо $G = AF(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq B$, либо $G = BF(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq A$.

Подгрупповой \mathcal{X} -функтор θ называется нижнерегулярным, если из $H \in \theta(G)$ и $N \triangleleft G$ всегда следует, что $HN/N \in \theta(G/N)$.

Предложение 3.4. Пусть \mathcal{F} – формация, $\wp = (\theta, \Delta, \mathcal{X})$ – Т-модель, где \mathcal{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathcal{X} -функтор, Δ – F-связанное проективное отношение на классе \mathcal{X} и n – натуральное число, причём $n \geq 2$. Если формация \mathcal{F} является \wp_n -распознаваемой в \mathcal{X} , то формация $\mathcal{E}_\pi \mathcal{F}$ является \wp_{n+1} -распознаваемой в \mathcal{X} .

Доказательство. Пусть \mathcal{X} -группа G имеет \wp -тест $\{U_1, U_2, \dots, U_{n+1}\}$ такой, что $U_i \in \mathcal{E}_\pi \mathcal{F}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Нетрудно видеть, что при любом гомоморфизме группы G все условия переносятся на образы подгрупп U_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Поэтому по индукции можно считать, что $\mathcal{E}_\pi \mathcal{F}$ -корадикал N группы G является единственной минимальной нормальной подгруппой в G . Так как $G \in \mathcal{X}$, то можно считать, что N – абелева p -группа, где p – некоторое простое число. Если $p \in \pi$, то из

$G/N \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$. Поэтому будем считать, что $p \in \pi'$. Из разрешимости группы G и единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является p -группой.

Рассмотрим произвольную пару подгрупп U_i и U_j , где $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Покажем, что $U_i \in \mathfrak{F}$, или $U_j \in \mathfrak{F}$. Так как по условию отношение Δ на классе \mathfrak{X} является F -связанным, то возможны следующие случаи.

1. Пусть $F \subseteq U_i$. Так как

$$O_\pi(U_i) \subseteq C_G(F) \subseteq F, \text{ то } O_\pi(U_i) = 1.$$

Отсюда и из $U_i \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ следует, что $U_i \in \mathfrak{F}$.

2. Если $F \subseteq U_j$, то, рассуждая, как и выше, получаем, что $U_j \in \mathfrak{F}$.

3. Предположим, что $G = U_i F$. Рассмотрим два случая.

3а. Пусть $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда $F(G/N) = F(G)/N$ и из включения $C_{G/N}(F(G)/N) \subseteq F(G)/N$ следует, что $O_\pi(G/N) = 1$. Используя этот факт и то, что $G/N \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$, получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Так как $G/N = U_i N/N F(G)/N$, то из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $U_i F/N = G/N$ следует, что $U_i F/N \in \mathfrak{F}$. С другой стороны, из $U_i \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ следует, что $U_i/O_\pi(U_i) \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из $U_i F/F \cong U_i / U_i \cap F \in \mathfrak{F}$ следует, что $U_i / U_i \cap F \cap O_\pi(U_i) \cong U_i \in \mathfrak{F}$.

3б. Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда $N = C_G(N) = F$. В силу 2) определения 3.3 группа $G = [N]U_i$ и $N \subseteq U_j$. Так как N – π' -группа и $N = C_G(N)$, то $O_\pi(U_j) = 1$. Отсюда и из $U_j \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ следует, что $U_j \in \mathfrak{F}$.

4. Если предположить, что $G = U_j F$, то, рассуждая, как и в случае 3), получаем, что $U_i \in \mathfrak{F}$ или $U_j \in \mathfrak{F}$.

Итак, доказано, что для любой пары подгрупп U_i и U_j , где $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ либо $U_i \in \mathfrak{F}$, либо $U_j \in \mathfrak{F}$. Отсюда, не теряя общности рассуждений, можно заключить, что $U_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Теперь из \wp_n -распознаваемости \mathfrak{F} получаем, что $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$. Предложение доказано.

Лемма 3.5. Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где \mathfrak{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathfrak{X} -функтор, Δ – F -связанное проективное отношение на классе \mathfrak{X} и π – некоторое множество простых чисел. Тогда классы \mathfrak{S}_π и \mathfrak{S}_π являются \wp_2 -распознаваемыми.

Доказательство. Пусть класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ не является \wp_2 -распознаваемым. Пусть \mathfrak{X} -группа G – контрпример минимального порядка. Тогда в G имеется \wp -тест $\{U_1, U_2\}$ такой, что $U_i \in \mathfrak{S}_\pi$ для всех $i \in \{1, 2\}$, но сама группа G не является π -группой.

Так как $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, то G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Для группы G/N все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то

$N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и N – p -группа для некоторого простого числа p . Если $p \in \pi$, то $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, N – q -группа, где q – простое число и $q \in \pi'$. Заметим, что G – монолитическая группа. Так как отношение Δ является F -связанным, то выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:

1) либо $F(G) \subseteq U_1$, либо $F(G) \subseteq U_2$;

2) либо $G = U_1 F(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq U_2$, либо $G = U_2 F(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq U_1$.

Заметим, что в первом и втором случаях получаем, что $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{S})$ – Т-модель. Локальный \mathfrak{X} -экран f будем называть \wp_n -распознаваемым, если формация $f(p)$ является \wp_n -распознаваемой для любого простого p .

Теорема 3.6. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где \mathfrak{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathfrak{X} -функтор, Δ – проективное F -связанное отношение на классе \mathfrak{X} и n – натуральное число, причём $n \geq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если \mathfrak{F} имеет \wp_n -распознаваемый локальный \mathfrak{X} -экран f , то \mathfrak{F} является \wp_{n+2} -распознаваемой формацией;

2) если \mathfrak{F} имеет полный \wp_n -распознаваемый локальный \mathfrak{X} -экран h , то \mathfrak{F} является \wp_{n+1} -распознаваемой формацией.

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 4.5 из [7] $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{S}_p \mathfrak{R}_p f(p))$.

Из предложения 3.4 следует, что формация $\mathfrak{R}_p f(p)$ является \wp_{n+1} -распознаваемой для каждого $p \in \pi$. Снова, применяя предложение 3.4, получаем \wp_{n+2} -распознаваемость формации $\mathfrak{S}_p \mathfrak{R}_p f(p)$ для каждого $p \in \pi$. Теперь из лемм 3.1, 3.2 и 3.5 следует, что формация \mathfrak{F} будет \wp_{n+2} -распознаваема. Утверждение 1) доказано.

Докажем 2). Если h – полный локальный экран формации \mathfrak{F} , то $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{R}_p h(p)) = \mathfrak{S}_p h(p)$ для каждого простого p . Из предложения 3.4 следует, что $\mathfrak{S}_p \mathfrak{R}_p h(p)$ – \wp_{n+1} -распознаваемая формация в классе \mathfrak{X} . Применяя леммы 3.1, 3.2 и 3.5, получаем, что \mathfrak{F} – \wp_{n+1} -распознаваемая формация. Теорема доказана.

Теорема 3.7. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где \mathfrak{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathfrak{X} -функтор, Δ – проективное F -связанное отношение на классе групп \mathfrak{X} и n – натуральное число ($n \geq 2$), а t – целое неотрицательное число. Тогда из \wp_n -распознаваемости формации

\mathfrak{F} следует \wp_{n+m} -распознаваемость формации $\mathfrak{N}^m\mathfrak{F}$.

Доказательство. Если $m = 0$, то утверждение очевидно. Предположим, что $m \geq 1$. Тогда $\mathfrak{N}^m\mathfrak{F} = \mathfrak{N}(\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F})$. По индукции теорема справедлива для $\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$. Поэтому, заменяя $\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$ на \mathfrak{F} , нам нужно доказать утверждение только для случая $m = 1$. Так как $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то согласно пункту 10 из [7, с. 36] $\mathfrak{H} = LF(f)$, где f – локальный экран формации \mathfrak{H} и $f(p) = \mathfrak{F}$ для каждого простого p .

Предположим, что теорема для случая $m = 1$ неверна и \mathfrak{X} -группа G – контрпример минимального порядка. Тогда G имеет \wp -тест $\{U_1, U_2, \dots, U_{n+1}\}$ такой, что $U_i \in \mathfrak{H}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, но сама G формации \mathfrak{H} не принадлежит. Рассуждая, как и при доказательстве предложения 3.4, получим, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , совпадающую с \mathfrak{H} -корадикалом $G^\mathfrak{H}$. Из $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ следует, что N – абелева p -группа, p – некоторое простое число. Так как \mathfrak{H} – насыщенная формация, то $\Phi(G) = 1$. Поэтому $N = C_G(N) = F(G)$ и $G = [N]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G .

Учитывая свойство F -связанности отношения Δ на классе \mathfrak{X} и рассуждая аналогично, как в предложении 3.4, получаем, что подгруппа N содержится в n подгруппах нашей системы подгрупп H_1, H_2, \dots, H_{n+1} . Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $N \subseteq H_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$H_i = H_i \cap NM = N(H_i \cap M), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим множество подгрупп $\{R_i \mid R_i = H_i \cap M, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n\}$. Из $H_i \in \theta(G)$ и нижнее регулярности подгруппового функтора θ следует, что $H_i/N \in \theta(G/N)$. Откуда из $R_i N/N \cong R_i$ вытекает, что $R_i \in \theta(M)$. Из свойства проективности отношения Δ на классе \mathfrak{X} следует, что $(R_i, R_j) \in \Delta_M$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Покажем, что $R_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

С одной стороны, так как $H_i \in \mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то \mathfrak{H} – локальная формация. По лемме 4.5 из [7] получаем, что $H_i/F_p(H_i) \in f(p) = \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Так как $N \subseteq H_i$ и $N \subseteq F_p(H_i)$ и $C_G(N) = N$, то $F_p(H_i)$ является p -группой для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому $H_i/F_p(H_i) = R_i F_p(H_i)/F_p(H_i) \cong \cong R_i/R_i \cap F_p(H_i) \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

С другой стороны, из $M \in \mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ и наследственности формации \mathfrak{F} получаем $R_i F(M)/F(M) \in \mathfrak{F}$. По лемме 3.9 из [7] $F(M)$ является p' -группой.

Так как \mathfrak{F} – формация, то $R_i \cong R_i/F(M) \cap R_i \cap F_p(H_i) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Теперь из \wp_n -распознаваемости формации \mathfrak{F} получаем, что $M \in \mathfrak{F}$. Откуда $G \in \mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 3.8. Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{S})$ – Т-модель, где θ – нижнерегулярный \mathfrak{S} -функтор, Δ – проективное F -связанное отношение на классе \mathfrak{S} и n – целое неотрицательно число. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) класс \mathfrak{N}^n ($n \geq 1$) является \wp_{n+2} -распознаваемым;
- 2) класс $\mathfrak{L}_p(n)$ является \wp_{2n+2} -распознаваемым.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения 1). Пусть $n = 1$. Известно [7], что $\mathfrak{N} = LF(h)$, где h – максимальный внутренний локальный экран \mathfrak{N} такой, что $h(p) = \mathfrak{N}_p$ для каждого простого p . Ввиду леммы 3.5 экран h является \wp_2 -распознаваемым. Из 2) теоремы 3.6 вытекает \wp_3 -распознаваемость \mathfrak{N} . Применяя теорему 3.7, получаем \wp_{n+2} -распознаваемость \mathfrak{N}^n .

Докажем \wp_{2n+2} -распознаваемость класса $\mathfrak{L}_p(n)$, где p – простое число, а n – целое неотрицательное число.

Если $n = 0$, то $\mathfrak{L}_p(0) = \mathfrak{S}_p$. По лемме 3.5 класс $\mathfrak{L}_p(0)$ является \wp_2 -распознаваемым.

Пусть $n \geq 1$. Из доказательства теоремы 5.6 [7] вытекает, что $\mathfrak{L}_p(n)$ имеет такой локальный экран f , что $f(q) = \mathfrak{L}_p(n-1)$ при $q = p$, $f(p) = \mathfrak{S}$ при $q \neq p$. По индукции теорема для $\mathfrak{L}_p(n-1)$ верна. Так как класс всех разрешимых групп \mathfrak{S} является \wp_n -распознаваемым для любого $n \geq 1$, то утверждение следует из 1) теоремы 3.6. Теорема доказана.

4 Приложения для конкретных Т-моделей

Рассмотрим некоторые приложения полученных выше общих результатов.

Пусть Σ – бинарное отношение на группах такое, что для любой группы G пара ее подгрупп $(H, K) \in \Sigma_G$, тогда и только тогда, когда $(|G:H|, |G:K|) = 1$. Нетрудно показать, что Σ – проективное F -связанное отношение на классе \mathfrak{S} . Для класса групп \mathfrak{X} и подгруппового \mathfrak{X} -функтора θ рассмотрим Т-модель $\wp = (\theta, \Sigma, \mathfrak{X})$. Для этой модели вместо \wp_n -распознаваемый класс \mathfrak{F} будем говорить Σ_n^θ -распознаваемый класс \mathfrak{F} . Из теорем 3.6 и 3.7 вытекают следующие результаты.

Теорема 4.1. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, $\wp = (\theta, \Sigma, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где \mathfrak{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathfrak{X} -функтор, n – натуральное число, причем ($n \geq 2$). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если \mathfrak{F} имеет Σ_n^θ -распознаваемый локальный экран f , то \mathfrak{F} является Σ_{n+2}^θ -распознаваемой формацией;
- 2) если \mathfrak{F} имеет полный Σ_n^θ -распознаваемый

локальный экран h , то \mathfrak{F} является Σ_{n+1}^θ -распознаваемой формацией.

Теорема 4.2. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, $\wp = (\theta, \Sigma, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где \mathfrak{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathfrak{X} -функтор и n – натуральное число ($n \geq 2$), а t – целое неотрицательное число. Тогда из Σ_n^θ -распознаваемости формации \mathfrak{F} в классе \mathfrak{X} следует Σ_{n+t}^θ -распознаваемость формации $\mathfrak{X}^m \mathfrak{F}$ в классе \mathfrak{X} .

Как отмечалось выше, в работах О. Крамера [4]–[6] изучались Σ_n^θ -распознаваемые (Σ -замкнутые) разрешимые формации в случае, когда \mathfrak{X} – класс всех разрешимых групп и θ такой подгрупповой функтор, что $\theta(G)$ совпадает с множеством всех подгрупп для любой группы G . Теоремы 4.1 и 4.2 существенно расширяют результаты работ [10]–[11]. Применяя отмеченные выше результаты для других конкретных значений \mathfrak{X} и θ , можно получить новые результаты. Отметим некоторые из них. Рассматривая различные подгрупповые функторы, мы можем получать новые признаки принадлежности группы локальным формациям в терминах систем подгрупп с попарно взаимно простыми индексами. Остановимся на некоторых из них.

Напомним [7], что подгруппа H группы G называется абнормальной в G , если $x \in \langle H^x, H \rangle$, для любого $x \in H$. Пусть S_{an} – подгрупповой функтор, который сопоставляет каждой группе G множество всех ее абнормальных подгрупп. Нетрудно убедиться, что S_{an} – нижнерегулярный подгрупповой функтор.

Согласно Ж. Роузу [16] подгруппа H группы G называется контрнормальной в G , если $H^G = G$. Будем обозначать: H *сп* G . Пусть S_{cn} – подгрупповой функтор, который сопоставляет каждой группе G множество всех ее контрнормальных подгрупп. Проверкой устанавливаем, что S_{cn} – нижнерегулярный подгрупповой функтор. Заметим, что $S_{an}(G) \subseteq S_{cn}(G)$. Обратное включение неверно.

Лемма 4.3. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{X}$, где \mathfrak{X} – формация, причем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда \mathfrak{F} является $\Sigma_2^{S_{cn}}$ -распознаваемой формацией в классе \mathfrak{E} .

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда в G найдутся две подгруппы H_1 и H_2 такие, что H_i *сп* G , $H_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$ и $(|G : H_1|, |G : H_2|) = 1$, но $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G .

Для группы G/N все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то $N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Если N – p -группа, то из $G/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоре-

чие. Следовательно, N – q -группа, где q – простое число и $q \neq p$.

Если G нильпотентна, то из H_1 *сп* G следует, что $H_1 = G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть G ненильпотентна. Тогда $F = F(G) \subset G$. Из единственности N следует, что F – q -группа. Так как $(|G : H_1|, |G : H_2|) = 1$, то можно считать, что $F \subseteq G_q \subseteq H_1$, где G_q – некоторая силовская q -подгруппа группы G . Из $C_{H_1}(F) \subseteq C_G(F) \subseteq F$ заключаем, что $O_q(H_1) = O_p(H_1) = 1$. Отсюда и из $H_1 \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{X}$ следует, что $H_1 \in \mathfrak{X}$. Из нильпотентности \mathfrak{X} получаем, что $H_1 = F$. Тогда из H_1 *сп* G следует, что $H_1 = G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

Теорема 4.4. Любая локальная подформация формации \mathfrak{N}^2 всех метанильпотентных групп является $\Sigma_3^{S_{cn}}$ -распознаваемой.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – локальная подформация формации \mathfrak{N}^2 . Тогда \mathfrak{F} имеет внутренний локальный \mathfrak{N} -экран f . Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Согласно теореме 3.3 из [7] для любого простого p имеет место равенство $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Так как по условию формация $f(p)$ состоит из нильпотентных групп, то по лемме 4.3 формация $h(p)$ является $\Sigma_2^{S_{cn}}$ -распознаваемой. Теперь результат следует из 2) теоремы 4.1. Теорема доказана.

Следствие 4.4.1. Группа G является сверхразрешимой, если она имеет три контрнормальные сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G .

Следствие 4.4.2. Пусть группа G имеет три контрнормальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, и их индексы в G попарно взаимно просты. Тогда G имеет нильпотентный коммутант.

Следствие 4.4.3. Группа G является сверхразрешимой, если она имеет три абнормальные сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G .

Следствие 4.4.4. Пусть группа G имеет три абнормальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, и их индексы в G попарно взаимно просты. Тогда G имеет нильпотентный коммутант.

Лемма 4.5. Любая формация нильпотентных групп является $\Sigma_2^{S_{cn}}$ -распознаваемой.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – некоторая непустая формация нильпотентных групп. Предположим, что существует группа $G = AB$, где A и B – контрнормальные \mathfrak{F} -подгруппы группы G , но сама G не является \mathfrak{F} -группой. Выберем среди них группу G наименьшего порядка.

По теореме Виландта-Кегеля группа G является разрешимой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Для G/N все условия леммы выполняются. Так как \mathfrak{F} – формация, то G

является монолитической группой с цоколем, равным N .

Предположим, что $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда из $G/N \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ и насыщенности \mathfrak{N} следует, что $G \in \mathfrak{N}$. Но тогда из контрнормальности подгрупп A и B следует, что $A=B=G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G . Поэтому можно считать, что $\Phi(G) = 1$. В этом случае $G = [N]M$, где $N = C_G(N) = F(G)$, $|N| = p^\alpha$, p – простое число, а M – некоторая максимальная подгруппа группы G и $M \in \mathfrak{F}$.

Так как $G = AB$ и $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Рассмотрим подгруппы $R = NA$ и $F = NB$. Если $R = F = G$, то A и B являются максимальными подгруппами группы G , дополняющими подгруппу N в G . Так как все дополнения к N в G сопряжены, то по теореме Ore [15] $AB \neq G$. Поэтому можно считать, что $F \neq G$. Из контрнормальности подгруппы F в G следует, что $F \neq N$. Отсюда следует, что F/N – неединичная подгруппа в G/N . Так как $G/N \cong M \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$, то из контрнормальности F/N в G/N следует, что $F/N = G/N$. Откуда $G = F$. Получили противоречие.

Так как из условия $(|G : A|, |G : B|) = 1$ всегда следует, что $G = AB$, то из приведенных выше рассуждений получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 4.6. Класс \mathfrak{N}^n ($n \geq 1$) является $\Sigma_{n+1}^{S_n}$ -распознаваемым.

Доказательство. Индукцией по n . Если $n = 1$, то результат следует из леммы 4.5. Пусть $n > 1$. Так как $\mathfrak{N}^n = \mathfrak{N} \mathfrak{N}^{n-1}$, то результат следует из теоремы 3.7. Теорема доказана.

Следствие 4.6.1. Если группа G имеет $n + 1$ контрнормальные подгруппы, нильпотентная длина которых не превосходит n и чьи индексы в G попарно взаимно просты, то и нильпотентная длина группы G также не превосходит n .

Следствие 4.6.2. Если группа G имеет $n + 1$ абнормальные подгруппы, нильпотентная длина которых не превосходит n и чьи индексы в G попарно взаимно просты, то и нильпотентная длина группы G также не превосходит n .

Пусть Ω – бинарное отношение на классе \mathfrak{S} всех разрешимых групп такое, что для любой группы G пара ее подгрупп $(H, K) \in \Omega_G$ тогда и только тогда, когда, либо H и K – несопряженные максимальные подгруппы в G , либо, по крайней мере, одна из подгрупп H или K совпадает с G . Нетрудно показать, что Ω – проективное F -связанное отношение на классе \mathfrak{S} . Для класса разрешимых групп \mathfrak{X} и подгруппового \mathfrak{X} -функтора θ рассмотрим T -модель $\wp = (\theta, \Omega, \mathfrak{X})$. Для этой модели вместо \wp_n -распознаваемый класс \mathfrak{F} будем говорить Ω_n^θ -распознаваемый класс \mathfrak{F} .

Из теорем 3.6 и 3.7 вытекают следующие

результаты.

Теорема 4.7. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, $\wp = (\theta, \Omega, \mathfrak{X})$ – T -модель, где \mathfrak{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathfrak{X} -функтор, n – натуральное число, причём $n \geq 2$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если \mathfrak{F} имеет Ω_n^θ -распознаваемый локальный экран f , то \mathfrak{F} является Ω_{n+2}^θ -распознаваемой формацией;
- 2) если \mathfrak{F} имеет полный Ω_n^θ -распознаваемый локальный экран h , то \mathfrak{F} является Ω_{n+1}^θ -распознаваемой формацией.

Теорема 4.8. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, $\wp = (\theta, \Omega, \mathfrak{X})$ – T -модель, где \mathfrak{X} – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный \mathfrak{X} -функтор и n – натуральное число ($n \geq 2$), а t – целое неотрицательное число. Тогда из Ω_n^θ -распознаваемости формации \mathfrak{F} следует Ω_{n+t}^θ -распознаваемость формации $\mathfrak{N}^m \mathfrak{F}$.

В случае, когда подгрупповой функтор θ выделяет в каждой группе множество всех ее подгрупп, в качестве следствий из теорем 4.7 и 4.8 вытекают соответствующие результаты работ [11], [13].

Лемма 4.9. Любая формация нильпотентных групп является $\Omega_2^{S_n}$ -распознаваемой.

Доказательство. Проводим рассуждения аналогично доказательству леммы 4.5.

Отметим следующий новый результат, вытекающий из леммы 4.9 и теоремы 4.8.

Теорема 4.10. Класс \mathfrak{N}^n ($n \geq 1$) является $\Omega_{n+1}^{S_n}$ -распознаваемым в классе \mathfrak{S} .

В частности, из этой теоремы получаем следующие следствия.

Следствие 4.10.1. Любая разрешимая группа, нильпотентная длина которой больше натурального числа n , имеет не более n классов сопряженных абнормальных максимальных подгрупп, чья нильпотентная длина не превосходит натурального числа n .

Следствие 4.10.2. Любая неметанильпотентная разрешимая группа имеет не более двух несопряженных абнормальных метанильпотентных максимальных подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wielandt, H. Über die Normalstruktur von mehrfach faktorizierbaren Gruppen / H. Wielandt // J. Austral. Math. Soc. – 1960. – № 1. – S. 143–146.
2. Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – Vol. 87, № 1. – P. 42–48.
3. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

4. *Kramer, O.-U.* Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilfremden Indizes / O.-U. Kramer // *Math. Z.* – 1974. – Vol. 139, № 1. – P. 63–68.
5. *Kramer, O.-U.* Zur Struktur endlicher auflösbarer Gruppen mit mindestens drei Untergruppen von paarweise teilfremden Indizes / O.-U. Kramer // *Arch. Math.* – 1975. – Vol. 26, № 4. – P. 361–366.
6. *Kramer, O.-U.* Properties of critical groups / O.-U. Kramer // *J. Algebra.* – 1980. – Vol. 65. – P. 98–103.
7. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.
8. *Guo, W.* The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 257 p.
9. *Белоногов, В.А.* Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп / В.А. Белоногов // Докл. Акад. наук СССР. – 1965. – Т. 161, № 6. – С. 1255–1256.
10. *Семенчук, В.Н.* Конечные группы с системами минимальных не \mathfrak{F} -групп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника. – 1981. – С. 138–149.
11. *Васильев, А.Ф.* О некоторых свойствах локальных формаций / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1985. – Вып. 1. – С. 4–9.
12. *Васильев, А.Ф.* К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.
13. *Höfling, B.* On the number of conjugacy classes of maximal subgroups in a finite soluble group / B. Höfling // *Arch. Math.* – 1999. – Vol. 72. – P. 1–8.
14. *Васильев, А.Ф.* Формации и их распознавание / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2007. – № 2 (41). – С. 23–29.
15. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
16. *Rose, J.S.* Nilpotent subgroups of finite soluble groups / J.S. Rose // *Math. Z.* – 1968. – Vol. 106. – P. 97–112.

Поступила в редакцию 19.10.09.

УДК 519.2

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТЕЙ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ В ФОРМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Ю.В. Малинковский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

CHARACTERIZATION OF NETWORK STATIONARY DISTRIBUTION WITH BATCH MOVING IN GEOMETRIC PRODUCT FORM

Yu.V. Malinkovsky

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассмотрена экспоненциальная сеть с двумя независимыми входными пуассоновскими потоками групп: основным и дополнительным, заявки которого поступают в пустые узлы. Группы, требуемые для обслуживания, маршрутизируются в другие узлы с возможным изменением размера или покидают сеть в соответствии с некоторой неприводимой марковской матрицей. Группы, не достигшие требуемого размера, обслуживаются, но после обслуживания покидают сеть. Установлен критерий существования стационарного распределения в форме произведения геометрических распределений.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, группы требований, стационарное распределение, геометрическое распределение, форма произведения, квазиобратимость.

We consider the exponential network with two independent Poisson enter flows of customer batches: general and additional. The customers of additional flow arrive in empty nodes. The batches required for the service move to other nodes with possible change of size or leave the network according to some irreducible Markov matrix. The batches which don't achieve the required size are served but after the service is done they leave the network. The criterion of existence of stationary distribution in the form of the product of geometric distributions is established.

Keywords: queueing networks, bathes of customers, stationary distribution, geometric distribution, product form, quasireversibility.

1 Введение

В последние годы большой популярностью пользуются G -сети – сети с положительными и отрицательными заявками, введенные Геленбе [1], [2]. В отличие от классических сетей уравнения трафика для G -сетей нелинейны, хотя для большинства моделей стационарное распределение имеет мультипликативную форму. Во многих случаях маргинальные распределения узлов имеют геометрическое распределение (см., например, [3], [4], [5]).

В [6] рассмотрен несколько иной класс сетей с нелинейными уравнениями трафика – сети с *групповым поступлением и ассамблейно-трансферным групповым обслуживанием (assemble-transfer batch service)*. Эта работа обобщает работы [7], [3] для сетей с групповыми уходами на случай, когда размеры передаваемых групп могут меняться в соответствии с марковской матрицей маршрутов. При этом предполагалось, что принимающие и передающие узлы, а также размеры, с которыми передаются группы и поступают группы, могут зависеть друг от друга. Предложенный в [6] способ характеристики стационарного распределения недостаточно эффективен, к тому же авторами были наложены

ограничения на радиусы сходимости некоторых степенных рядов.

В настоящей работе в постановке авторов [6] строится более эффективный альтернативный алгоритм характеристики геометрической формы произведения, не накладывающий ограничений на радиусы сходимости степенных рядов. В отличие от [6], где необходимо решать систему бесконечного числа нелинейных уравнений трафика, данная работа основывается на системе конечного числа уравнений трафика, для решения которой предлагается итерационный алгоритм.

2 Модель однолинейного узла

Сначала рассмотрим однолинейную систему с групповым поступлением и групповым обслуживанием. Группы поступают в систему пуассоновским потоком интенсивности λ . Когда система пуста, в нее поступает простейший дополнительный поток групп интенсивности λ^* . Обслуживание – экспоненциальное с интенсивностью μ , включающееся, когда в системе есть хотя бы одна заявка. Когда начинается обслуживание, обслуживается группа заявок. Процессы поступления и обслуживания независимы.

Пусть Y_i – размер i -й поступающей группы, Y_i^* – размер дополнительной группы, поступающей, когда система пуста, и Z_i – размер i -й группы, требующей обслуживания. Предполагается, что $\{Y_i\}, \{Y_i^*\}, \{Z_i\}$ взаимно независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с произвольными функциями распределения A, A^* и B , функциями вероятностных масс a, a^* и b и производящими функциями \tilde{A}, \tilde{A}^* и \tilde{B} соответственно. Предположим также, что A и B имеют конечные средние m_A и m_B соответственно.

Пусть $X(t)$ – число заявок в системе в момент t . Семейство случайных величин $\{X(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем с пространством состояний $Z_+ = \{0, 1, \dots\}$. Интенсивности ее перехода есть

$$\begin{aligned} q(0, k) &= \lambda a(k) + \lambda^* a^*(k) \quad (k \geq 1), \\ q(n, n+k) &= \lambda a(k) \quad (k \geq 1, n \geq 1), \\ q(n, n-k) &= \mu b(k) \quad (n > k \geq 1), \\ q(n, 0) &= \mu \bar{B}(n) \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\bar{B}(n) = 1 - B(n-1) = 1 - b(1) - \dots - b(n-1)$.

Лемма 2.1. Если выполнено условие

$$\lambda m_A < \mu m_B, \quad (2.2)$$

то марковский процесс $X(t)$ – эргодический.

Доказательство этого интуитивно понятного факта достаточно громоздкое. Сначала рассматривается цепь Маркова, вложенная в процесс $X(t)$ в моменты ухода групп из системы, и доказывается ее эргодичность с помощью эргодической теоремы Мустафы [8]. При этом процесс обслуживания представляется не как единое целое со средним временем обслуживания μ^{-1} , а как процесс обслуживания, состоящий из последовательного обслуживания заявок в группе со средним временем обслуживания каждой заявки $\frac{1}{\mu j}$, если группа состоит из j заявок. Обслуженные заявки собираются за прибором и уходят из системы все вместе в момент окончания обслуживания последней заявки в группе. Поскольку вложенная цепь эргодична, а средние времена между последовательными уходами групп из системы конечны, то цепь Маркова с непрерывным временем $X(t)$ также эргодична.

Известно, что вероятностное распределение π на Z_+ является стационарным распределением $X(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода q^R , удовлетворяющая соотношениям

$$\pi(n)q(n, n') = \pi(n')q^R(n', n) \quad (n, n' \in Z_+) \quad (2.3)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(n, k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^R(n, k) \quad (n \in Z_+). \quad (2.4)$$

Функция q^R является функцией интенсивностей перехода обращенного по времени процесса $\{X(-t)\}$, который также имеет стационарное распределение π .

Предположим, что стационарное распределение π цепи Маркова $\{X(t)\}$ существует и является геометрическим, т.е. $\pi(n) = (1-c)c^n$ для числа $0 < c < 1$. Подставляя q из (2.1) и предполагаемое геометрическое распределение в (2.3), имеем

$$\begin{aligned} q^R(0, k) &= \mu \bar{B}(k)c^k \quad (k \geq 1), \\ q^R(n, n+k) &= \mu b(k)c^k \quad (k \geq 1, n \geq 1), \\ q^R(n, n-k) &= \lambda a(k)c^{-k} \quad (n > k \geq 1), \\ q^R(n, 0) &= (\lambda a(n) + \lambda^* a^*(n))c^{-n} \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя это в (2.4) с $n=0$, имеем

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}(k)c^k = \lambda + \lambda^*, \quad (2.6)$$

и из (2.4) с $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mu \sum_{k=1}^{\infty} b(k)c^k + \lambda \sum_{k=1}^n a(k)c^{-k} + \\ + \lambda^* a^*(n)c^{-n} = \lambda + \mu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.6) следует, что

$$\frac{\mu c}{1-c} (1 - \tilde{B}(c)) = \lambda + \lambda^*. \quad (2.8)$$

Умножая (2.8) на $(cz)^n$ и складывая по всем $n \geq 1$, получим

$$\lambda \tilde{A}(z) + \lambda^* \tilde{A}^*(z)(1-cz) = cz[\lambda + \mu(1 - \tilde{B}(c))]. \quad (2.9)$$

Таким образом, при выполнении условия эргодичности (2.2) для существования геометрического стационарного распределения $\{\pi(n) = (1-c)c^n, n=0, 1, \dots\}$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $0 < c < 1$ выполнялись равенства (2.8) и (2.9). Полагая в (2.9) $z=1$, получим (2.8). Итак, (2.8) и (2.9) эквивалентны (2.9). Подставляя (2.8) в (2.9), получим

$$\lambda \tilde{A}(z) + \lambda^* \tilde{A}^*(z)(1-cz) = z[\lambda + \lambda^*(1-c)]. \quad (2.10)$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2.2. При выполнении условия эргодичности (2.2) для существования геометрического стационарного распределения необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $0 < c < 1$ выполнялись равенства (2.8) и (2.10).

Лемма 2.3. Для того чтобы уравнение (2.8) имело корень $c \in (0, 1)$, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\lambda + \lambda^* < \mu t_B. \quad (2.11)$$

Этот корень при фиксированных λ, λ^* и μ единственный.

Доказательство. Известно, что для того, чтобы функция $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n$ являлась производящей функцией некоторого вероятностного распределения на $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно монотонна на $(0, 1)$ и $P(0) = 0, P(1) = 1$. В частности, она строго возрастает и нестрого выпукла вниз на $(0, 1)$. Перепишем уравнение (2.8) в виде

$$\tilde{B}(c) = \varphi(c), \quad (2.12)$$

где

$$\varphi(c) = \frac{(\mu + \lambda + \lambda^*)c - (\lambda + \lambda^*)}{\mu c}.$$

Тогда на $(0, 1]$ функция $\varphi(c)$ возрастает и выпукла вверх, $\varphi(1) = 1, \lim_{c \rightarrow 0} \varphi(c) = -\infty$. Функция $\tilde{B}(c)$ строго возрастает и нестрого выпукла вниз на $(0, 1]$, $\tilde{B}(0) = 0, \tilde{B}(1) = 1$. Для того, чтобы существовал корень $c \in (0, 1)$ уравнения (2.12), необходимо и достаточно, чтобы

$$m_B = \tilde{B}'(1) > \varphi'(1) = \frac{\lambda + \lambda^*}{\mu},$$

т.е. чтобы $\lambda + \lambda^* < \mu m_B$. При выполнении последнего неравенства этот корень, очевидно, единственный.

Зафиксируем λ и μ и будем менять λ^* . Определим $c = c(\lambda^*)$ как корень уравнения (2.8), удовлетворяющий неравенству (2.11) при каждом фиксированном λ^* . Выясним, каким образом должны быть выбраны λ^* и $a^*(n)$, чтобы стационарное распределение имело форму $\{\pi(n) = (1-c)c^n\}$ с выбранным выше $c = c(\lambda^*)$. В силу леммы 2.2 для этого необходимо и достаточно, чтобы для этого c выполнялось (2.10).

Из (2.10) находим

$$\lambda^* \tilde{A}^*(z) = \lambda \frac{z - \tilde{A}(z)}{1 - cz} + \lambda^* \frac{(1-c)z}{1 - cz}. \quad (2.13)$$

Из леммы 2.2 и (2.13) следует, что

1) если стационарное распределение является геометрическим и $\lambda^* \neq 0$, то $\tilde{A}^*(z) \geq \frac{(1-c)z}{1-cz}$, т.е. размеры дополнительных поступающих групп по распределению не меньше геометрических с параметром c ;

2) если основной поступающий поток ординарен (т.е. $a(1) = 1$), то для того, чтобы стационарное распределение $X(t)$ было геометрическим с параметром c , необходимо и достаточно, чтобы либо дополнительный поток отсутствовал (т.е. $\lambda^* = 0$), либо размеры дополнительных поступающих групп имели геометрическое распределение с параметром c ;

3) если основной поток не ординарен (т.е. $\tilde{A}(z) < z$ для некоторого $z \in (0, 1)$), то из (2.13) для этого z

$$\lambda^* \tilde{A}^*(z) > \lambda^* \frac{(1-c)z}{1-cz},$$

откуда $\lambda^* \neq 0$.

Следовательно, для того чтобы стационарное распределение процесса $X(t)$ было геометрическим, дополнительный поступающий поток необходим, если основной поток не ординарен.

Из (2.13) следует, что

$$\lambda^* \tilde{A}^*(z) = \frac{[\lambda + \lambda^*(1-c)]z - \lambda \tilde{A}(z)}{1 - cz}. \quad (2.14)$$

Подставляя сюда $\tilde{A}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k)z^k$ и раскладывая правую часть полученного равенства в ряд по степеням z , получим

$$\lambda^* \tilde{A}^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [\lambda + \lambda^*(1-c)]c^{k-1} - \lambda \sum_{s=0}^{k-1} a(k-s)c^s \right\} z^k,$$

откуда

$$\lambda^* a^*(k) = [\lambda + \lambda^*(1-c)]c^{k-1} - \lambda \sum_{s=0}^{k-1} a(k-s)c^s, \quad (2.15)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Для того, чтобы при каждом λ^* (2.15) определяло распределение вероятностей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$[\lambda + \lambda^*(1-c)]c^{k-1} \geq \lambda \sum_{s=0}^{k-1} a(k-s)c^s, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Заметим, что при $k=1$ (2.16) выполняется автоматически. Поскольку (2.15) эквивалентно (2.14), то при $\lambda^* \neq 0$ тот факт, что сумма всех вероятностей $a^*(k)$ равна 1, выполняется, если положить в (2.14) $z=1$. Если же $\lambda^* = 0$, то $a^*(k)$ можно вообще не определять.

Проведенные рассуждения и леммы 2.1 – 2.3 показывают, что имеет место

Теорема 2.1. Для того чтобы $\{\pi(n) = (1-c)c^n, n = 0, 1, \dots\}$ являлось стационарным распределением $X(t)$, необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности (2.2), неравенств (2.11) и (2.16) для $k \geq 2$, где $c = c(\lambda^*)$ – корень уравнения (2.8), принадлежащий $(0, 1)$. При фиксированном λ^* этот корень существует, единственен и удовлетворяет неравенствам (2.11).

Доказательство. Для доказательства теоремы 2.1 остается доказать, что условие эргодичности (2.2) является необходимым для существования стационарного распределения в геометрическом виде. Пусть стационарное распределение имеет геометрическую форму. В силу

леммы 2.3 тогда выполняется неравенство (2.11). Так как $\tilde{A}^*(z)$ абсолютно монотонна, то из (2.14) следует, что

$$\lambda^* \tilde{A}^{**}(1) = \frac{\lambda + \lambda^* - \lambda m_A}{1 - c} > 0,$$

т.е.

$$\lambda m_A < \lambda + \lambda^*. \quad (2.17)$$

Теперь условие эргодичности (2.2) следует из сравнения (2.11) и (2.17).

Замечание 2.1 Теорема 2.1 в эквивалентной форме может быть сформулирована следующим образом:

Для того чтобы $\{\pi(n) = (1 - c)c^n, n = 0, 1, \dots\}$ являлось стационарным распределением $X(t)$, необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности (2.2), неравенства (2.11) и абсолютной монотонности функции $\lambda^* \tilde{A}^*(z)$, определяемой равенством (2.14).

Параметры дополнительного потока могут быть при этом найдены либо из (2.15), либо из (2.14).

Пример 2.1 Пусть $\tilde{A}(z) = z, \tilde{B}(z) = z$. С помощью теоремы 2.1 получаем: $\pi(n) = (1 - c)c^n$ тогда и только тогда, когда $\lambda + \lambda^* < \mu, c = \frac{\lambda + \lambda^*}{\mu}$, $\lambda^* \in [0, \mu - \lambda]$ и $a^*(k) = (1 - c)c^{k-1}$ при $\lambda^* \neq 0$.

Пример 2.2 Пусть

$$\tilde{A}(z) = \frac{z + z^2}{2}, \quad \tilde{B}(z) = z,$$

$$m_A = \tilde{A}'(1) = \frac{3}{2}, \quad m_B = \tilde{B}'(1) = 1.$$

Применение теоремы 2.1 дает: распределение $\{\pi(n)\}$ – геометрическое в том и только том случае, если

$$\frac{3\lambda}{2} < \mu, \quad \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\mu}}{2} \leq \lambda^* < \mu - \lambda, \quad (2.18)$$

причем последний интервал значений не пуст в силу выполнения условия эргодичности. В этом случае

$$\pi(n) = (1 - c)c^n, \quad \text{где } c = c(\lambda^*) = \frac{\lambda + \lambda^*}{\mu}.$$

При этом $\lambda^* a^*(k) = (1 - c)(\lambda^* - \frac{\lambda}{2})c^{k-2}, k = 1, 2, \dots$. Меняя λ^* в пределах неравенства (2.18), получаем различные геометрические распределения.

Пример 2.3 Пусть

$$\tilde{A}(z) = \frac{(1 - a)z}{1 - az}, \quad \tilde{B}(z) = \frac{(1 - b)z}{1 - bz},$$

$$m_A = \frac{1}{1 - a}, \quad m_B = \frac{1}{1 - b}.$$

С помощью теоремы 2.1 можно получить следующий результат: стационарное распределение в геометрической форме существует, если и только если выполняются неравенства

$$\frac{\lambda c}{c - a} < \frac{\mu}{1 - b}, \quad a < c, \quad (2.19)$$

$$\frac{\lambda a}{c - a} \leq \lambda^* < \frac{\mu}{1 - b} - \lambda, \quad (2.20)$$

где $c = \frac{\lambda + \lambda^*}{\mu + (\lambda + \lambda^*)b}$. Заметим, что (2.19) задает более узкую область, чем область, задаваемую условием эргодичности. При выполнении (2.19) промежуток значений λ^* , определяемый (2.20), не пуст. Параметры дополнительного потока определяются из

$$\lambda^* a^*(k) = [\lambda + \lambda^*(1 - c)]c^{k-1} - \lambda(1 - a)\frac{c^k - a^k}{c - a}, \quad k \geq 1.$$

3 Модель сети

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с конечным множеством узлов, пронумерованных элементами множества $J = \{1, 2, \dots, N\}$. В узлы сети поступают независимые пуассоновские потоки групп заявок с параметром λ_i для узла $i \in J$. Длительности обслуживания групп в узлах сети независимы, имеют показательное распределение с параметром μ_i для узла $i \in J$. Размеры поступающих групп и требуемых для обслуживания групп – независимые положительные целочисленные случайные величины с функциями распределения \bar{A}_i и \bar{B}_i , функциями вероятностных масс a_i и b_i , а также производящими функциями \tilde{A}_i и \tilde{B}_i соответственно для узла i . Когда узел i пуст, в него поступает дополнительный поток групп с интенсивностью λ_i^* . Размеры таких групп – независимые положительные целочисленные случайные величины с функцией распределения \bar{A}_i^* , функцией вероятностной массы a_i^* и производящей функцией \tilde{A}_i^* для узла i . Обслуженная в узле i группа, достигая требуемого размера k , переходит с вероятностью $p_{(i,k)(j,m)}$ в узел j как группа размера m , а с вероятностью $p_{(i,k),0}$ покидает сеть. Неполные группы, не достигшие требуемого размера (назовем их некомплектными), также обслуживаются, но после обслуживания в любом узле покидают сеть. Предполагается, что размеры основных поступающих групп и размеры групп, требуемых для обслуживания, не зависят от процессов поступления и обслуживания и имеют конечные средние m_A и m_B для i -го узла соответственно ($i \in J$).

Пусть $c_{i,j}(k, m) = b_j(k)p_{(i,k)(j,m)}$, $c_{i,0}(k) = b_i(k)p_{(i,k),0}$, если $i, j \in J$. Для простоты предположим, что $c_{i,i}(k, m) = 0$ для всех $i \in J, k, m \geq 1$ и что

маршрутная матрица $R = \{r_{i,j}\}_{i,j \in J \cup \{0\}}$ неприводима, где

$$r_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k,m), & i, j \in J, \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,0}(k,0), & i \in J, j = 0, \\ \frac{\lambda_j}{\sum_{l \in J} \lambda_l}, & i = 0, j \in J, \\ 0, & i = 0, j = 0. \end{cases}$$

Пусть $X_i(t)$ – число заявок в узле i в момент t . Состояние сети будем описывать цепью Маркова $\{\mathbf{X}(t)\}$ с непрерывным временем с пространством состояний \mathbb{Z}_+^N , где $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$. Обозначим через q функцию интенсивностей перехода для этой цепи. Остальные обозначения будут такими же, как для модели однолинейного узла в разделе 2, но с дополнительным индексом i , указывающим номер узла из множества J , к которому относится рассматриваемая величина. Очевидно, для рассматриваемой модели при $i, j \in J$ и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$

$$\begin{aligned} q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - k\mathbf{e}_i + m\mathbf{e}_j) &= \mu_i c_{i,j}(k,m), \quad 1 \leq k \leq n_i, 1 \leq m, \\ q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) &= \mu_i (c_{i,0}(k) + \bar{B}_i(n_i + 1)1_{\{n_i\}}(k)), \\ &1 \leq k \leq n_i, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + m\mathbf{e}_j) = \lambda_j a_j(m) + \lambda_j^* a_j^*(m) 1_{\{0\}}(n_j), \quad 1 \leq m,$$

где \mathbf{e}_i – единичный вектор, i -я координата которого равна 1, 1_A – индикаторная функция множества A , а $\bar{B}_i(n) = 1 - B_i(n-1)$. Определим полную функцию интенсивности выхода α посредством $\alpha(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}_+^N} q(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$. Пусть $J_0(\mathbf{n}) = \{i \in J : n_i = 0\}$ и $J_+(\mathbf{n}) = J \setminus J_0(\mathbf{n})$. Тогда имеем

$$\alpha(\mathbf{n}) = \sum_{i \in J_+(\mathbf{n})} \mu_i + \sum_{j \in J} \lambda_j + \sum_{j \in J_0(\mathbf{n})} \lambda_j^*. \quad (3.2)$$

Аналогично (2.3) и (2.4) вероятностное распределение π на \mathbb{Z}_+^N является стационарным распределением $\mathbf{X}(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода q^R , удовлетворяющая

$$\pi(\mathbf{n})q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \pi(\mathbf{n}')q^R(\mathbf{n}', \mathbf{n}), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}_+^N, \mathbf{n} \neq \mathbf{n}',$$

$$\text{и} \quad \alpha(\mathbf{n}) = \alpha^R(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N, \quad (3.4)$$

где $\alpha^R(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}_+^N} q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$.

Предположим, что π имеет геометрическую форму произведения, т.е.

$$\pi(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^N (1 - c_i) c_i^{n_i}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N, \quad (3.5)$$

для $0 < c_i < 1 (i \in J)$. Подставляя это в (3.3), получим

$$\begin{cases} q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n} + k\mathbf{e}_i - m\mathbf{e}_j) = c_i^k c_j^{-m} \mu_i c_{i,j}(k,m), \\ 1 \leq k, 1 \leq m \leq n_j; \\ q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n} + k\mathbf{e}_i) = c_i^k \mu_i (c_{i,0}(k) + \\ + \bar{B}_i(k+1)1_{\{0\}}(n_i)), 1 \leq k; \\ q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n} - m\mathbf{e}_j) = c_j^{-m} (\lambda_j a_j(m) + \\ + \lambda_j^* a_j^*(m) 1_{\{n_j\}}(m)), 1 \leq m \leq n_j. \end{cases} \quad (3.6)$$

Перед вычислением α^R рассмотрим общую интенсивность поступления ординарных групп размера m в узел j . Обозначим ее через $\gamma_j(m)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \gamma_j(m) &= \lambda_j a_j(m) + \sum_{i \in J} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_i (1 - c_i) c_i^k \sum_{l=1}^k c_{i,j}(l,m) = \\ &= \lambda_j a_j(m) + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k c_{i,j}(k,m), \quad j \in J. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Определим $\gamma_j(m)$ с помощью (3.7). При нашем предположении о π стационарным распределением системы является такое, как если в один и тот же момент каждый узел функционирует независимо от других узлов. Следовательно, судя по (2.8) и (2.10) для случая единственного узла, мы должны также ожидать, что для всех $i \in J$

$$\frac{\mu_i c_i}{1 - c_i} (1 - \tilde{B}_i(c_i)) = \tilde{\Gamma}_i(1) + \lambda_i^* \quad (3.8)$$

и

$$\tilde{\Gamma}_i(z_i) + \lambda_i^* \tilde{A}_i^*(1 - c_i z_i) = z_i [\tilde{\Gamma}_i(1) + (1 - c_i) \lambda_i^*], \quad (3.9)$$

где $\tilde{\Gamma}_i(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m) z_i^m$. При этом

$$\tilde{\Gamma}_i(1) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m)$$

является интенсивностью потока основных групп на узел i , а $\tilde{\Gamma}_i^{-1}(1) \tilde{\Gamma}_i(z_i)$ производящей функцией распределения размеров основных групп, принимаемых узлом i .

Заметим, что из определения (3.7) следует, что для всех $m \geq 1$ и $j \in J$

$$\begin{aligned} \gamma_j(m) &\geq \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k c_{i,j}(k,m) \geq \\ &\geq \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} b_i(k) c_i^k = \sum_{i \in J} \mu_i \tilde{B}_i(c_i) > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поэтому в предположении неприводимости маршрутной матрицы R многомерная цепь Маркова $\{\mathbf{X}(t)\}$ неприводима.

Вычислим α^R :

$$\begin{aligned} \alpha^R(\mathbf{n}) &= \sum_{i \in J} \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n_j} c_{i,j}(k,m) c_i^k c_j^{-m} + \\ &+ \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,0}(k) c_i^k + \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_i(k+1) c_i^k + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \left(\lambda_j \sum_{m=1}^{n_j} a_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} \right). \quad (3.11)$$

Используя определение $\gamma_i(m)$ и тождество

$$c_{i,0}(k) = b_i(k) - \sum_{j \in J} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m),$$

преобразуем (3.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha^R(\mathbf{n}) &= \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^{n_j} (\gamma_j(m) - \lambda_j a_j(m)) c_j^{-m} + \\ &+ \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_i(k) - \sum_{j \in J} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m) \right) c_i^k + \\ &+ \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} \mu_i \left(c_i \frac{1 - \tilde{B}_i(c_i)}{1 - c_i} - \tilde{B}_i(c_i) \right) + \\ &+ \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \left(\lambda_j \sum_{m=1}^{n_j} a_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} \right) = \\ &= \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^{n_j} (\gamma_j(m) - \lambda_j a_j(m)) c_j^{-m} + \\ &+ \sum_{i \in J_+(\mathbf{n})} \mu_i \tilde{B}_i(c_i) - \sum_{j \in J} \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_j(m) - \lambda_j a_j(m)) + \\ &+ \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} \mu_i c_i \frac{1 - \tilde{B}_i(c_i)}{1 - c_i} + \\ &+ \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \left(\lambda_j \sum_{m=1}^{n_j} a_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} \right) = \\ &= \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \left[\sum_{m=1}^{n_j} (\gamma_j(m) - \lambda_j a_j(m)) c_j^{-m} + \mu_j \tilde{B}_j(c_j) + \right. \\ &+ \lambda_j \sum_{m=1}^{n_j} a_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} - \\ &\left. - \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_j(m) - \lambda_j a_j(m)) \right] + \\ &+ \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} \left[\mu_i c_i \frac{1 - \tilde{B}_i(c_i)}{1 - c_i} - \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_j(m) - \lambda_j a_j(m)) \right] = \\ &= \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \left[\sum_{m=1}^{n_j} \gamma_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} + \right. \\ &+ \mu_j \tilde{B}_j(c_j) - \tilde{\Gamma}_j(1) + \lambda_j \left. \right] + \\ &+ \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} \left[\mu_i c_i \frac{1 - \tilde{B}_i(c_i)}{1 - c_i} - \tilde{\Gamma}_i(1) + \lambda_i \right]. \end{aligned}$$

Используя (3.2), находим разность

$$\begin{aligned} \alpha^R(\mathbf{n}) - \alpha(\mathbf{n}) &= \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \left[\sum_{m=1}^{n_j} \gamma_j(m) c_j^{-m} + \right. \\ &+ \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} + \mu_j (\tilde{B}_j(c_j) - 1) - \tilde{\Gamma}_j(1) \left. \right] + \\ &+ \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} \left[\mu_i c_i \frac{1 - \tilde{B}_i(c_i)}{1 - c_i} - \tilde{\Gamma}_i(1) - \lambda_i^* \right]. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_j(n_j, c_j) &= \sum_{m=1}^{n_j} \gamma_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} + \\ &+ \mu_j (\tilde{B}_j(c_j) - 1) - \tilde{\Gamma}_j(1), \quad n_j \geq 1, j \in J, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$g_j(c_j) = \mu_j c_j \frac{1 - \tilde{B}_j(c_j)}{1 - c_j} - \tilde{\Gamma}_j(1) - \lambda_j^*, \quad j \in J. \quad (3.14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_j(n_j, c_j) - g_j(c_j) &= \sum_{m=1}^{n_j} \gamma_j(m) c_j^{-m} + \\ &+ \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} + \lambda_j^* + \frac{\mu_j (\tilde{B}_j(c_j) - 1)}{1 - c_j}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Соотношение (3.12) с помощью функций (3.13) и (3.14) запишется как

$$\begin{aligned} \alpha^R(\mathbf{n}) - \alpha(\mathbf{n}) &= \\ &= \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} f_j(n_j, c_j) + \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} g_j(c_j). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Очевидно, $\alpha^R(\mathbf{n}) = \alpha(\mathbf{n})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} f_j(n_j, c_j) + \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} g_j(c_j) = 0. \quad (3.17)$$

Докажем, что для того, чтобы при всех $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N$ выполнялось равенство $\alpha^R(\mathbf{n}) = \alpha(\mathbf{n})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_j(n_j, c_j) = 0 \quad \text{для всех } j \in J, n_j \geq 1$$

и $g_j(c_j) = 0$ для всех $j \in J$.

Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости положим в (3.17) $\mathbf{n} = n_j \mathbf{e}_j$; тогда для любого $n_j \geq 1$

$$f_j(n_j, c_j) + \sum_{i \in J \setminus \{j\}} g_i(c_i) = 0. \quad (3.18)$$

Далее положим в (3.17) $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, тогда получим

$$\sum_{j \in J} g_j(c_j) = 0. \quad (3.19)$$

Из сравнения (3.18) и (3.19) следует, что $f_j(n_j, c_j) - g_j(c_j) = 0$ для всех $j \in J, n_j \geq 1$. (3.20)

Подставляя (3.15) в (3.20), получим для любого $j \in J$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n_j} \gamma_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} + \lambda_j^* + \\ + \frac{\mu_j (\tilde{B}_j(c_j) - 1)}{1 - c_j} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Умножая (3.21) на $c_j^{n_j}$ и складывая по $n_j \geq 1$, получим

$$\frac{\tilde{\Gamma}_j(1)}{1 - c_j} + \lambda_j^* + \frac{c_j}{1 - c_j} \left[\lambda_j^* + \frac{\mu_j (\tilde{B}_j(c_j) - 1)}{1 - c_j} \right] = 0,$$

т.е.

$$\mu_j c_j \frac{1 - \tilde{B}_j(c_j)}{1 - c_j} = \tilde{\Gamma}_j(1) + \lambda_j^*, \quad j \in J.$$

В силу определения (3.14) функции g_j это означает, что

$$g_j(c_j) = 0 \quad \text{для любого } j \in J.$$

Но тогда в силу (3.20) будет выполняться также равенство

$$f_j(n_j, c_j) = 0 \quad \text{для всех } j \in J \text{ и } n_j \geq 1.$$

Необходимость доказана.

Таким образом, для того, чтобы π имело геометрическую форму произведения (3.5), необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_j c_j \frac{1 - \tilde{B}_j(c_j)}{1 - c_j} = \tilde{\Gamma}_j(1) + \lambda_j^*, \quad j \in J. \quad (3.22)$$

$$\sum_{m=1}^{n_j} \gamma_j(m) c_j^{-m} + \lambda_j^* a_j^*(n_j) c_j^{-n_j} + \mu_j \tilde{B}_j(c_j) = \tilde{\Gamma}_j(1) + \mu_j, \quad n_j \geq 1, \quad j \in J. \quad (3.23)$$

Умножая (3.23) на $(c_j z_j)^{n_j}$, складывая по всем $n_j \geq 1$ и используя (3.22), получим

$$\tilde{\Gamma}_j(z_j) + \lambda_j^* A_j^*(z_j)(1 - c_j z_j) = z_j [\tilde{\Gamma}_j(1) + (1 - c_j) \lambda_j^*]. \quad (3.24)$$

Очевидно, (3.22) и (3.23) эквивалентны (3.22) и (3.24). Применяя к (3.22) и (3.24) рассуждения, подобные примененным к (2.8) и (2.10), получим следующие результаты.

Лемма 3.1. Для того чтобы при всех $j \in J$ уравнения (3.22) имели корни $c_j \in (0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\tilde{\Gamma}_j(1) + \lambda_j^* < \mu_j m_{B_j}, \quad j \in J. \quad (3.25)$$

Эти корни при фиксированных $\tilde{\Gamma}_j(1)$, λ_j^* и μ_j единственные.

Теорема 3.1. Для того чтобы $\left\{ \pi(\mathbf{n}) = \prod_{j \in J} (1 - c_j) c_j^{n_j}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N \right\}$ являлось стационарным распределением $\mathbf{X}(t)$, необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности

$$\tilde{\Gamma}'_j(1) < \mu_j m_{B_j}, \quad j \in J, \quad (3.26)$$

неравенств (3.25) и

$$\begin{aligned} [\tilde{\Gamma}_j(1) + \lambda_j^*(1 - c_j)] c_j^{k-1} &\geq \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_j(k-s) c_j^s, \\ k &= 2, 3, \dots, \quad j \in J, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $c_j = c_j(\lambda_j^*)$ – корни уравнений (3.22), принадлежащие $(0, 1)$. При фиксированных λ_j^* они существуют, единственны и удовлетворяют (3.25). При выполнении условий теоремы параметры дополнительного потока могут быть найдены из соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_j^* a_j^*(k) &= [\tilde{\Gamma}_j(1) + \lambda_j^*(1 - c_j)] c_j^{k-1} - \\ &- \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_j(k-s) c_j^s, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Остается доказать, что условие эргодичности достаточно для существования стационарно-

го распределения в геометрической форме. В самом деле, цепь $\{\mathbf{X}(t)\}$ неприводима и регулярна, поскольку $\sup q(\mathbf{n}) \leq \sum_{i \in J} [\mu_i + \lambda_i + \lambda_i^*]$. Урав-

нения равновесия для стационарных вероятностей имеют нетривиальное решение

$$\left\{ \prod_{i \in J} c_i^{n_i}; \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N \right\}.$$

По эргодической теореме Фостера [9] цепь Маркова $\{\mathbf{X}(t)\}$ эргодична.

Следствие 3.1. При выполнении условий теоремы 3.1 выходящие из сети потоки комплектных групп являются независимыми пуассоновскими потоками, а текущее состояние сети не зависит от предыстории этих потоков.

4 Алгоритм проверки существования стационарного распределения $\mathbf{X}(t)$ в геометрической форме произведения и итерационная процедура решения нелинейных уравнений трафика

Пусть \mathfrak{X} – линейное пространство векторов $\mathbf{x} = \{x_i, i \in J\}$ с евклидовой метрикой. Введем в \mathfrak{X} отношение частичной упорядоченности: скажем, что $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, если $x_i \leq y_i$ для всех $i \in J$ (здесь y_i – i -я координата \mathbf{y}). Пусть

$$S_0(i) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{X} : \mathbf{x} \geq 0, x_i + \lambda_i^* < \mu_i m_{B_i}\}, \quad i \in J.$$

Если $\gamma \in S_0(j)$, то по лемме 3.1 уравнение

$$\mu_j c_j \frac{1 - \tilde{B}_j(c_j)}{1 - c_j} = \gamma_j + \lambda_j^* \quad (4.1)$$

имеет корень $c_j \in (0, 1)$; при этом по теореме о неявной функции $c_j = c_j(\gamma_j)$ – непрерывная функция переменной γ_j . Если $\gamma \notin S_0(j)$, то для этого j корня из $(0, 1)$ нет, есть только корень $c_j = c_j(\gamma_j) = 1$. Чтобы $c_j = c_j(\gamma_j)$ оставалась непрерывной всюду, положим $c_j(\gamma_j) = 1$ для $\gamma \notin S_0(j)$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}_+ = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{X} : \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \neq 0\}$. Определим функцию $F : \mathfrak{X}_+ \rightarrow \mathfrak{X}_+$ с помощью равенства

$$F(\gamma) = \left\{ \lambda_j + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k(\gamma_i) \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m), j \in J \right\}.$$

Очевидно, для $\lambda = \{\lambda_j, j \in J\}$ и

$$\mathbf{s} = \left\{ \lambda_j + \sum_{i \in J} \mu_j \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m), j \in J \right\}$$

в силу того, что $c_i(\gamma_i) \leq 1$, выполняется неравенство $\lambda \leq F(\gamma) \leq \mathbf{s}$. Поскольку $c_j(\gamma_j)$ – непрерывные функции, то сужение F на $[\lambda, \mathbf{s}] = [\lambda_1, s_1] \times \dots \times [\lambda_N, s_N]$ является непрерывным отображением $F : [\lambda, \mathbf{s}] \rightarrow [\lambda, \mathbf{s}]$. Следовательно, по теореме

Брауэра о неподвижной точке [10] существует решение уравнения $\gamma = F(\gamma)$, т.е. системы уравнений

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k(\gamma_i) \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m), \quad j \in J. \quad (4.2)$$

Отметим, что система уравнений (4.2) получается из (3.7) сложением по $m \geq 1$ и что в силу (3.10) решение (4.2) строго положительно, т.е. $\gamma_j > 0, j \in J$.

Таким образом, получаем следующий алгоритм проверки существования стационарного распределения $\mathbf{X}(t)$ в геометрической форме произведения.

1. Находим корни $c_j = c_j(\gamma_j)$ уравнений (4.1) для $\gamma_j + \lambda_j^* < \mu_j m_{B_j}$; при выполнении противоположного неравенства полагаем $c_j(\gamma_j) = 1$.

2. Решаем систему нелинейных уравнений трафика (4.2) относительно $\gamma = \{\gamma_j, j \in J\}$.

3. Подставляя найденные γ_j в $c_j = c_j(\gamma_j)$, находим $c_j, j \in J$. Предполагая выполненным неравенство $\gamma_j + \lambda_j^* < \mu_j m_{B_j}$, находим $\tilde{\Gamma}_j(1) = \gamma_j$.

4. Проверяем выполнение неравенств (3.25). Если хотя бы одно из них нарушено, делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения.

5. Подсчитываем $c_{i,j}(k, m) = b_i(k) p_{(i,k)(j,m)}$, а затем $\gamma_j(m)$ по формуле (3.7). Находим

$$\tilde{\Gamma}_i(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m) z_i^m \text{ и ее производную в точке } 1.$$

6. Проверяем выполнение условия эргодичности (3.26). При нарушении хотя бы одного из этих неравенств делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения. При выполнении (3.26) переходим к следующему пункту алгоритма.

7. Проверяем выполнение неравенств (3.27). Если они нарушены, то делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения. При выполнении (3.27) переходим к следующему пункту алгоритма.

8. Подсчитываем параметры дополнительного потока по формуле (3.28). Решая систему неравенств (3.25), (3.26), (3.27) относительно λ_j^* , находим область значений интенсивностей дополнительных потоков на узлы сети, когда они пусты. Эта область определяет значения $\lambda_j^*, j \in J$, при которых стационарное распределение $\{\pi\}$ имеет форму произведения геометрических распределений.

9. Записываем искомое решение для стационарного распределения

$$\left\{ \pi(\mathbf{n}) = \prod_{j \in J} (1 - c_j) c_j^{n_j}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N \right\}.$$

Отметим, что, в отличие от [6], в которой необходимо решать бесконечную систему нелинейных уравнений трафика, основанную на (3.7), нам достаточно решить конечную систему уравнений трафика (4.2). Для ее решения предлагается следующая итерационная процедура:

$$\gamma_j^{(n+1)} = \lambda_j + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k(\gamma_i^{(n)}) \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m), \quad (4.3)$$

$$j \in J, \quad n \geq 1.$$

$$\gamma_j^{(0)} = \lambda_j, \quad j \in J.$$

Покажем, что эта процедура сходится, т.е. $\gamma_j^{(n)} \rightarrow \gamma_j, j \in J$, при $n \rightarrow \infty$, где $\gamma_j - j$ -я координата неподвижной точки отображения F .

Лемма 4.1. Корень $c_j = c_j(\gamma_j)$ уравнения (4.1) является неубывающей функцией переменной γ_j .

Доказательство. Запишем уравнение (4.1) в форме

$$\tilde{B}_j(c_j) = \varphi_j(c_j, \gamma_j), \quad (4.4)$$

где

$$\varphi_j(c_j, \gamma_j) = \frac{(\mu_j + \gamma_j + \lambda_j^*)c_j - (\gamma_j + \lambda_j^*)}{\mu_j c_j}.$$

Так как $c_j \leq 1$, то $\varphi_j'(c_j, \gamma_j) = \frac{c_j - 1}{\mu_j c_j} \leq 0$. Поэтому при $\gamma_{j_1} > \gamma_{j_2}$ и фиксированном c_j будет выполнено $\varphi_j(c_j, \gamma_{j_1}) \leq \varphi_j(c_j, \gamma_{j_2})$. Учитывая, что левая часть (4.4) – возрастающая нестрогая выпуклая вниз функция, $\tilde{B}_j(0) = 0, \tilde{B}_j(1) = 1$; правая часть (4.4) – возрастающая выпуклая вверх функция от $c_j, \lim_{c_j \downarrow 0} \varphi(c_j, \gamma_j) = -\infty, \varphi(1, \gamma_j) = 1$, делаем вывод, что $c_j(\gamma_{j_1}) \geq c_j(\gamma_{j_2})$. Лемма доказана.

Докажем, что последовательность $\{\gamma_j^{(n)}, n \geq 1\}$ при каждом $j \in J$ не убывает. Действительно, $\gamma_j^{(1)} \geq \lambda_j = \gamma_j^{(0)}$. Предположим, что для некоторого n выполнено $\gamma_i^{(n)} \geq \gamma_i^{(n-1)}, i \in J$. Из (4.3) следует

$$\gamma_j^{(n+1)} - \gamma_j^{(n)} = \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} [c_i^k(\gamma_i^{(n)}) - c_i^k(\gamma_i^{(n-1)})] \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m), \quad j \in J. \quad (4.5)$$

В силу леммы 4.1 $c_i(\gamma_i)$ не убывает по γ_i , поэтому $c_i(\gamma_i^{(n)}) \geq c_i(\gamma_i^{(n-1)}), i \in J$. Но тогда из (4.5) следует, что $\gamma_j^{(n+1)} \geq \gamma_j^{(n)}, j \in J$. Значит, по индукции последовательность $\{\gamma_j^{(n)}, n \geq 1\}$ не

убывает при каждом $j \in J$. Очевидно, она ограничена:

$$\lambda_j \leq \gamma_j^{(n)} \leq \lambda_j + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k, m), \quad j \in J.$$

Следовательно существуют пределы

$$\gamma_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_j^{(n)}, \quad j \in J.$$

Переходя к пределу в равенстве (4.3), получаем, что $\gamma = \{\gamma_j, j \in J\}$ является неподвижной точкой отображения F , т.е. решением системы нелинейных уравнений (4.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe, E.* Product Form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / *E. Gelenbe*, // *J. Appl. Probab.* – 1991. – Vol. 28. – P. 656-663.
2. *Gelenbe, E.* Stability of Product-Form G-networks / *E. Gelenbe, R. Shassberger* // *Probab. in Eng. and Inform. Sci.* – 1992. – № 6. – P. 271-276.
3. *Chao, X.* On Generalized Networks of Queues with Positive and Negative Arrivals / *X. Chao, M. Pinedo* // *Prob. Eng. Inf. Sci.* – 1993. – Vol. 7. – P. 301-304.

4. *Gelenbe, E.* G-networks with Signals and Batch Removal / *E. Gelenbe* // *Prob. Eng. Inf. Sci.* – 1993. – Vol. 7. – P. 335-342.

5. *Gelenbe, E.* G-networks with Triggered Customer Movement / *E. Gelenbe* // *J. Appl. Prob.* – 1993. – Vol. 30. – P. 742-748.

6. *Miyazawa, M.* A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers / *M. Miyazawa, P.G. Taylor* // *Adv. Appl. Prob.* – 1997. – Vol. 29. – № 2. – P. 523-534.

7. *Chao, X.* A Network of Assembly Queues with Product-form Solution / *X. Chao, M. Pinedo, D. Shaw* // *J. Appl. Prob.* – 1996. – Vol. 33. – P. 858-869.

8. *Климов, Г.П.* Стохастические системы обслуживания / *Г.П. Климов*. – М.: Наука, 1966.

9. *Foster, F.G.* On Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Process / *F.G. Foster* // *Ann. Math. Statist.* – 1953. – Vol. 24. – № 2. – P. 355-360.

10. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / *Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц*. – М.: ИЛ, 1962.

Поступила в редакцию 14.09.09.

УДК 519.2

О МНОГОМЕРНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ БОХНЕРА-ФИЛЛИПСА

А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON MULTIDIMENSIONAL BOCHNER-PHILLIPS FUNCTIONAL CALCULUS

A.R. Mirotin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Развивается принадлежащее автору многомерное функциональное исчисление генераторов полугрупп, основанное на классе функций Бернштейна нескольких переменных. Уточняется основная теорема этого исчисления, дается условие голоморфности полугрупп, порождаемых операторами, возникающими в исчислении, и для одномерного случая доказывается неравенство моментов для этих операторов.

Ключевые слова: полугруппа операторов, генератор полугруппы, функциональное исчисление, функция Бернштейна.

The functional calculus of semigroup generators, based on the class of Bernstein functions in several variables is developed, the condition for holomorphy of semigroups, generated by operators which arised in the calculus is given, and the inequality of moments for such operators in the one-dimensional case is proved.

Keywords: semigroup of operators, semigroup generator, functional calculus, Bernstein function.

Введение и предварительные сведения

Одномерное функциональное исчисление Бохнера-Филлипса является существенной частью теории полугрупп операторов (см., например, [1]–[3]) и находит важные применения в теории случайных процессов. Основы многомерного исчисления были заложены автором в [4]–[6]. Целью настоящей работы является дальнейшее развитие этого исчисления. Прежде всего, мы уточняем и дополняем основную теорему из [6]. Далее, указываются условия, при которых операторы, возникающие в рассматриваемом исчислении, порождают голоморфные полугруппы. Как следствие получается положительный ответ на один вопрос Кишимото и Робинсона [1] для равномерно выпуклых пространств. Наконец, для одномерного случая мы доказываем полезное неравенство моментов, обобщающее неравенство из [7].

Для формулировки результатов напомним необходимые понятия и факты из [6].

Определение 1 [4]. Будем говорить, что неположительная функция $\psi \in C^\infty((-\infty; 0)^n)$ принадлежит классу \mathcal{T}_n , если все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны (функция из $C^\infty((-\infty; 0)^n)$ называется *абсолютно монотонной*, если она неотрицательна вместе со своими частными производными всех порядков).

Последнее условие на ψ равносильно тому, что $\partial^\alpha \psi \geq 0$ для любого мультииндекса $\alpha \neq 0$.

Очевидно также, что \mathcal{T}_n есть конус относительно поточечного сложения функций и умножения на скаляр.

Известно [6], что каждая функция $\psi \in \mathcal{T}_n$ допускает интегральное представление ($s \in (-\infty; 0)^n$)

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u), \quad (1.1)$$

где $c_0 = \psi(-0) := \lim_{s \rightarrow -0} \psi(s)$, а c_1 из \mathbb{R}_+^n и положительная мера μ на $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ определяются однозначно (здесь и ниже точкой мы обозначаем скалярное произведение в \mathbb{R}_+^n ; запись $s \rightarrow -0$ означает, что $s_1 \rightarrow -0, \dots, s_n \rightarrow -0$).

Всюду далее через T_1, \dots, T_n будут обозначаться попарно коммутирующие однопараметрические C_0 -полугруппы (т. е. сильно непрерывные на \mathbb{R}_+ полугруппы) в комплексном банаховом пространстве X , удовлетворяющие условию $\|T_j(t)\| \leq M$ ($t \geq 0; j = 1, \dots, n; M = \text{const}$). Через A_j обозначим генератор полугруппы T_j с областью определения $D(A_j)$ и положим $A = (A_1, \dots, A_n)$. Далее коммутирование операторов A_1, \dots, A_n означает коммутирование соответствующих полугрупп. Через $\text{Gen}(X)$ мы будем обозначать множество всех генераторов равномерно ограниченных C_0 -полугрупп в X , а через I – единичный оператор в X .

Операторнозначная функция $T(u) := (T_1(u_1) \dots T_n(u_n))$ ($u \in \mathbb{R}_+^n$) является C_0 - n -параметрической полугруппой, а потому линейное многообразие $D(A) := \bigcap_{j=1}^n D(A_j)$ плотно в X ([8], с. 98–99).

Определение 2 [6]. Определим значение функции ψ из \mathcal{T}_n вида (1.1) на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ при $x \in D(A)$ формулой

$$\psi(A)x = c_0x + c_1 \cdot Ax + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (T(u) - I)xd\mu(u), \quad (1.2)$$

где $c_1 \cdot Ax := \sum_{j=1}^n c_1^j A_j x$.

Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n, t \geq 0$. Тогда функция $g_t(s) := e^{\psi(s)}$ будет абсолютно монотонной на $(-\infty; 0)^n$. Очевидно также, что $g_t(s) \leq 1$. В силу многомерного варианта теоремы Бернштейна-Уиддера (см., например, [9], с. 281) существует такая единственная ограниченная положительная мера ν_t на \mathbb{R}_+^n , что при $s \in (-\infty; 0)^n$

$$g_t(s) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} d\nu_t(u) = (\mathcal{L}\nu_t)(-s),$$

где \mathcal{L} обозначает n -мерное преобразование Лапласа.

Определение 3. Используя обозначения, введенные выше, положим ($x \in X$)

$$g_t(A)x = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)xd\nu_t(u) \quad (1.3)$$

(интеграл понимается в смысле Бохнера).

Очевидно, что $\|g_t(A)\| \leq M^n e^{\psi(-0)} \leq M^n$.

Поскольку $g_{t+r}(s) = g_t(s)g_r(s)$, то ν_t образуют сверточную полугруппу ограниченных мер на \mathbb{R}_+^n . Поэтому $g(A) : t \mapsto g_t(A)$ есть равномерно ограниченная полугруппа операторов на X . В частности, $g(A)$ есть C_0 -полугруппа.

Введенные выше обозначения и ограничения далее будут применяться без дополнительных пояснений.

2 Основные результаты

Теорема 4. Замыкание оператора $\psi(A)$ существует и является генератором полугруппы $g(A)$ класса C_0 , определенной формулой (1.3).

Доказательство. В [6] было доказано, что оператор $\psi(A)$ замыкаем, и его расширением является генератор G C_0 -полугруппы $g(A)$. Поэтому замыкание $\overline{\psi(A)} \subseteq G$. Покажем, что здесь имеет место равенство. Поскольку операторы $g_t(A)$ коммутируют с $T_k(s)$ при всех k , то, как легко проверить, $g_t(A) : D(A_k) \rightarrow D(A_k)$ при всех k , а потому и $g_t(A) : D(A) \rightarrow D(A)$. Отсюда следует, что $D(A)$ есть существенная

область для генератора G (см. [10], следствие 3.1.7). С другой стороны, $D(A)$ есть существенная область для оператора $\overline{\psi(A)}$, причем сужения операторов $\overline{\psi(A)}$ и G на $D(A)$ совпадают с $\psi(A)$. Поэтому $\overline{\psi(A)} = G$, что и завершает доказательство.

Теорема 4 мотивирует окончательный вариант основного определения.

Определение 5 [6]. Под значением функции ψ из \mathcal{T}_n на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ коммутирующих операторов из $\text{Gen}(X)$ будем понимать генератор полугруппы $g(A)$. Это значение мы далее обозначаем $\psi(A)$. Возникающее функциональное исчисление будем называть *многомерным исчислением Бохнера-Филлипса*, или \mathcal{T}_n -исчислением.

Следующая теорема обобщает на многомерный случай одно утверждение из [11].

Теорема 6. Предположим, что полугруппы T_j сжимающие и удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^n \lim_{t \rightarrow +0} \|I - T_j(t)\| < 2.$$

Тогда для любой функции ψ из \mathcal{T}_n оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $c_0 = \psi(0) = 0$. Положим

$b_j = \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|I - T_j(t)\|$ и выберем $\varepsilon > 0$ таким, что

$\sum_{j=1}^n b_j + \varepsilon < 2$. Найдется такое $\delta > 0$, что

$\|I - T_j(t)\| < b_j + \varepsilon/n$ при всех $j = 1, \dots, n; t \in [0; \delta)$.

Далее, заметим, что при $n > 1$

$$I - T(u) = I - T_1(u_1) + T_1(u_1)(I - T_2(u_2) \dots T_n(u_n)),$$

и значит

$$\|I - T(u)\| \leq \|I - T_1(u_1)\| + \|(I - T_2(u_2) \dots T_n(u_n))\|.$$

Отсюда по индукции получаем, что

$$\|I - T(u)\| \leq \sum_{j=1}^n \|I - T_j(u_j)\|,$$

а потому при $u \in [0; \delta)^n$ справедливо неравенство

$\|I - T(u)\| \leq \sum_{j=1}^n b_j + \varepsilon$. Следовательно, если

$x \in X, \|x\| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \|(I - g_t(A))x\| &\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u) \|x\| \leq \\ &\leq \int_{[0; \delta)^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n b_j + \varepsilon + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u). \end{aligned}$$

То есть

$$\|I - g_t(A)\| \leq \sum_{j=1}^n b_j + \varepsilon + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta]^n} \|I - T(u)\| dv_t(u). \quad (2.1)$$

Заметим теперь, что направленность мер ν_t узко сходится к мере Дирака δ_0 при $t \rightarrow +0$. В самом деле, преобразование Лапласа $\mathcal{L}\nu_t(s) = e^{tw(s)}$ непрерывно в точке $s = 0$ и $\mathcal{L}\nu_t(s) \rightarrow 1 = \mathcal{L}\delta_0(s)$ при $t \rightarrow +0$. Поэтому узкая сходимость вытекает из теоремы непрерывности для многомерного преобразования Лапласа (см., например, [12], гл. IX, §5, теорема 3с). Но так как полугруппы T_j становятся равномерно непрерывными, ограниченная функция $u \mapsto \|I - T(u)\|$ непрерывна на $\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta]^n$. Следовательно, переходя в (2.1) к верхнему пределу при $t \rightarrow +0$, получим $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|I - g_t(A)\| \leq \sum_{j=1}^n b_j + \varepsilon < 2$. В силу известного свойства сильно непрерывных полугрупп (см., например, [13], следствие 2.5.7) отсюда следует голоморфность полугруппы $g(A)$, что и требовалось доказать.

Следствие 7. Пусть пространство X равномерно выпукло, T_1 – голоморфная полугруппа сжатий в X , а операторы A_2, \dots, A_n ограничены (если $n > 1$). Тогда для любой функции ψ из \mathcal{T}_n оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы сжатий.

Доказательство. Условие теоремы выполнено, поскольку $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|I - T_1(t)\| < 2$ (см., например, [13], следствие 2.5.8) и при $j > 1$ справедливы равенства $\lim_{t \rightarrow +0} \|I - T_j(t)\| = 0$.

Следствие 8. Пусть пространство X равномерно выпукло. Если T – голоморфная полугруппа сжатий в X с генератором A , то для любой функции ψ из \mathcal{T}_1 оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы сжатий.

Для одномерного исчисления справедливо следующее неравенство моментов.

Теорема 9. Для любого оператора $A \in \text{Gen}(X)$, порождающего полугруппу T с оценкой $\|T(u)\| \leq M$, и любой функции $\psi \in \mathcal{T}_1$ справедливо неравенство ($x \in D(A), x \neq 0$)

$$\|\psi(A)x\| \leq -C_M \psi(-\|Ax\|/\|x\|)\|x\|,$$

где $C_M = (M + 1)/(1 - e^{-(M+1)/M})$.

Доказательство. Можно считать, что в (1.1) $c_0 = c_1 = 0$. Можно считать также, что $\|x\| = 1$. Формулы (1.2) и (1.1) показывают, что

достаточно доказать неравенство

$$\|(T(u) - I)x\| \leq C_M \left(1 - e^{-\|Ax\|u}\right), \quad u > 0.$$

Обозначим через $t(r)$ функцию, обратную возрастающей функции $r(t) = t/(1 - e^{-t})$, $r(0) = 1$. Для фиксированного $r \geq 1$ возможны два случая.

1) $\|Ax\|u \leq t(r)$. Тогда $r(\|Ax\|u) \leq r(t(r)) = r$, т. е. $\|Ax\|u \leq r \cdot (1 - e^{-\|Ax\|u})$, а потому

$$\|(T(u) - I)x\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} T(usu) x ds \right\| =$$

$$\left\| \int_0^1 T(usu) Ax u ds \right\| \leq M \|Ax\|u \leq Mr \cdot (1 - e^{-\|Ax\|u}).$$

2) $\|Ax\|u > t(r)$. Тогда

$$\|(T(u) - I)x\| \leq M + 1 \leq \frac{M + 1}{1 - e^{-t(r)}} (1 - e^{-\|Ax\|u}).$$

В любом случае справедливо неравенство

$$\|(T(u) - I)x\| \leq C(r) (1 - e^{-\|Ax\|u}),$$

где $C(r) = M \max\{r; (M + 1)/M (1 - e^{-t(r)})\}$. Для минимизации $C(r)$ заметим, что функция $t(r)$ возрастает от 0 до $+\infty$ при $1 \leq r < +\infty$. Поэтому уравнение $r = (M + 1)/M (1 - e^{-t(r)})$, т. е. $t(r) = (M + 1)/M$, имеет единственное решение $r_0 = r((M + 1)/M)$. Если $r < r_0$, то в силу отмеченной монотонности

$$\frac{M + 1}{M (1 - e^{-t(r)})} > \frac{M + 1}{M (1 - e^{-t(r_0)})} = \frac{M + 1}{M (1 - e^{-(M+1)/M})} = r_0.$$

Таким образом,

$$\min\{C(r) : r \geq 1\} = Mr_0 = (M + 1)/(1 - e^{-(M+1)/M}),$$

и теорема доказана.

Следствие 10. Если функция $\psi \in \mathcal{T}_1$ ограничена на $(-\infty; 0)$, то оператор $\psi(A)$ ограничен при всех $A \in \text{Gen}(X)$. Обратно, если в некотором банаховом пространстве X оператор $\psi(A)$ ограничен при всех $A \in \text{Gen}(X)$, то функция $\psi \in \mathcal{T}_1$ ограничена на $(-\infty; 0)$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для проверки второго достаточно взять $A = sI$, где $s < 0$, и заметить, что тогда $\psi(A)x = \psi(s)x$.

Следствие 11. Если последовательность функций $\psi_n \in \mathcal{T}_1$ сходится к нулю поточечно на $(-\infty; 0]$, то $\psi_n(A)x \rightarrow 0$ при всех $x \in D(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kishimoto, A. Subordinate semigroups and order properties / A. Kishimoto, D. Robinson // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1981. – Vol. 31. – P. 59-76.

2. *Generation of generators of holomorphic semigroups* / C. Berg [et al.] // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1993. – Vol. 55. – P. 246–269.
3. *Carasso, A.S.* On subordinated holomorphic semigroups / A.S. Carasso, T. Kato // Trans. Am. Math. Soc. – 1991. – Vol. 327. – P. 867–878.
4. *Миротин, А.Р.* Действие функций класса Шенберга T на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры / А.Р. Миротин // Мат. заметки. – 1997. – Т. 61, № 4. – С. 630–633.
5. *Миротин, А.Р.* Функции класса Шенберга T действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры, II / А.Р. Миротин // Мат. заметки. – 1998. – Т. 64, № 3. – С. 423–430.
6. *Миротин, А.Р.* Многомерное T -исчисление от генераторов C_0 -полугрупп / А.Р. Миротин // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11, № 2. – С. 142–170.
7. *Пустыльник, Е.И.* О функциях позитивного оператора / Е.И. Пустыльник // Мат. сборник. – 1982. – Т. 119, № 1. – С. 32–47.
8. *Хилле, Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.
9. *Ахиезер, Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И. Ахиезер – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
10. *Браттели, У.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика / У. Браттели, Д. Робинсон – М.: Мир, 1982. – 511 с.
11. *Миротин, А.Р.* О T -исчислении генераторов C_0 -полугрупп / А.Р. Миротин // Сибирский мат. журнал. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 571–582.
12. *Бурбаки, Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. / Н. Бурбаки – М.: Наука, 1977. – 600 с.
13. *Pazy, A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy – N.Y.: Springer-Verlag, 1983. – 472 p.

Поступила в редакцию 01.10.09.

УДК 519.542

О ПРИВОДИМЫХ τ -ЗАМКНУТЫХ ω -НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ С РАЗРЕШИМЫМ ДЕФЕКТОМ 2

В.Г. Сафонов¹, И.Н. Сафонова²

¹Министерство образования Республики Беларусь, Минск

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON REDUCIBLE τ -CLOSED ω -SATURATED FORMATIONS WITH A SOLUBLE DEFECT 2

V.G. Safonov¹, I.N. Safonova²

¹Ministry of Education of the Republic of Belarus, Minsk

²F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть \mathfrak{F} – некоторая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, \mathfrak{S} – формация всех разрешимых групп. Тогда через $\mathfrak{F}_\tau^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ обозначают решетку всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций \mathfrak{H} таких, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}_\tau^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ называют разрешимым l_τ^ω -дефектом τ -замкнутой ω -насыщенной формации \mathfrak{F} . Получено описание приводимых τ -замкнутых ω -насыщенных формаций с разрешимым l_τ^ω -дефектом 2.

Ключевые слова: формация конечных групп, ω -насыщенная формация, дефект формации, решетка формаций, τ -замкнутая формация.

Let \mathfrak{F} be some τ -closed ω -saturated formation, \mathfrak{S} be the formation of all soluble groups. Then $\mathfrak{F}_\tau^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ denotes the lattice of all τ -closed ω -saturated formations \mathfrak{H} such that $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. A length of the lattice $\mathfrak{F}_\tau^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ is called a soluble l_τ^ω -defect of the τ -closed ω -saturated formation \mathfrak{F} . The description of reducible τ -closed ω -saturated formations of finite groups with a soluble l_τ^ω -defect 2 is obtained.

Keywords: formation of finite groups, ω -saturated formation, defect of a formation, lattice of formations, τ -closed formation.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются определения и обозначения, принятые в [1]–[3].

Изучение структурного строения насыщенной формации на основе свойств достаточно хорошо изученной ее подформации впервые было проведено А.Н. Скибой и Е.А. Таргонским [4]. Данный подход базировался на введенном ими понятии \mathfrak{H} -дефекта насыщенной формации. В работе [4] изучены основные свойства насыщенных формаций с конечным \mathfrak{H} -дефектом, а также получена классификация насыщенных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2 .

В теории ω -насыщенных формаций такой подход использовали Дж. Джехад [5] и Н.Г. Жевнова [6] при изучении p -насыщенных и ω -насыщенных формаций с нильпотентным l^ω -дефектом 1, а авторы при классификации неразрешимых ω -насыщенных формаций с l^ω -дефектом ≤ 2 [7], n -кратно ω -насыщенных формаций с максимальной разрешимой подформацией [8] и τ -замкнутых ω -насыщенных формаций с

разрешимым l_τ^ω -дефектом 1 [9]. В работах В.Г. Сафонова и А.И. Рябченко [10]–[12] изучено решеточное строение не π -нильпотентных (не π -специальных, не π -разложимых) ω -насыщенных формаций с π -нильпотентным (π -специальным, π -разложимым) l^ω -дефектом 1. В дальнейшем, А.И. Рябченко [13]–[15] получено описание ω -насыщенных формаций с \mathfrak{H}^ω -дефектом ≤ 2 , где \mathfrak{H} – произвольная формация классического типа.

В данной статье, развивая наблюдения работы [9], нами получено описание приводимых τ -замкнутых ω -насыщенных формаций с разрешимым l_τ^ω -дефектом 2.

1 Определения и обозначения

Пусть ω – непустое множество простых чисел. Символом G_{od} обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является ωd -группой (если таких подгрупп в G нет, то полагают $G_{od} = 1$). Всякую функцию вида

$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называют ω -локальным спутником. Через $LF_\omega(f)$ обозначают класс всех таких групп G , что $G/G_{od} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, то говорят, что \mathfrak{F} является ω -локальной формацией, а f – ω -локальным спутником формации \mathfrak{F} . Формация \mathfrak{F} называется ω -насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq O_\omega(G) \cap \Phi(G)$. Как было показано в [3], [16] формация \mathfrak{F} является ω -насыщенной тогда и только тогда, когда она ω -локальна.

Пусть всякой группе G сопоставлена такая система ее подгрупп $\tau(G)$, что $G \in \tau(G)$. Тогда τ называют подгрупповым функтором [2], если для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место: $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Класс групп \mathfrak{F} называется τ -замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть \mathfrak{X} – некоторый класс групп. Тогда через $l_\tau^\omega \text{form} \mathfrak{X}$ обозначают τ -замкнутую ω -насыщенную формацию, порожденную классом групп \mathfrak{X} , т. е. пересечение всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций, содержащих \mathfrak{X} . При этом, если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формацию $l_\tau^\omega \text{form} G$ называют однопорожденной τ -замкнутой ω -насыщенной формацией. Заметим, что множество l_τ^ω всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций относительно включения \subseteq образует полную модулярную решетку [17]. Понятно, что в этой решетке $\bigvee_{i \in I} (\mathfrak{F}_i | i \in I) = l_\tau^\omega \text{form} (\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$ и $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ являются, соответственно, точной верхней и точной нижней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ из l_τ^ω .

Пусть \mathfrak{F} – некоторая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, \mathfrak{H} – произвольный класс групп. Формацию \mathfrak{F} называют минимальной τ -замкнутой ω -насыщенной не \mathfrak{H} -формацией (\mathfrak{H}_τ^ω -критической формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные τ -замкнутые ω -насыщенные подформации из \mathfrak{F} содержатся в классе групп \mathfrak{H} .

Если \mathfrak{H} – τ -замкнутая ω -насыщенная формация, то \mathfrak{H}_τ^ω -дефектом τ -замкнутой ω -насыщенной формации \mathfrak{F} называют длину решетки $\mathfrak{F}_\tau^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ τ -замкнутых ω -насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и \mathfrak{F} , и

обозначают через $|\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_\tau^\omega$. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, то \mathfrak{E}_τ^ω -дефект τ -замкнутой ω -насыщенной формации называют её разрешимым l_τ^ω -дефектом.

τ -Замкнутую ω -насыщенную формацию \mathfrak{F} называют l_τ^ω -неприводимой, если $\mathfrak{F} \neq l_\tau^\omega \text{form} (\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i) = \bigvee_{i \in I} (\mathfrak{X}_i | i \in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i | i \in I\}$ – набор всех собственных τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций из \mathfrak{F} . В противном случае, формацию \mathfrak{F} называют l_τ^ω -приводимой.

2 Вспомогательные результаты

Лемма 1 [9]. Пусть \mathfrak{F} – τ -замкнутая ω -насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_τ^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \bigvee_{\tau}^\omega \mathfrak{H}$, где \mathfrak{M} – разрешимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, \mathfrak{H} – минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная неразрешимая формация, при этом:

1) всякая разрешимая τ -замкнутая ω -насыщенная подформация из \mathfrak{F} входит в $\mathfrak{M} \bigvee_{\tau}^\omega (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{E})$;

2) всякая неразрешимая τ -замкнутая ω -насыщенная подформация \mathfrak{F}_1 из \mathfrak{F} имеет вид $\mathfrak{H} \bigvee_{\tau}^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{E})$.

Следующие две леммы являются частным случаем лемм 5.2.7 и 5.2.8 [2, с.193–194] соответственно.

Лемма 2. Пусть \mathfrak{M} , \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – τ -замкнутые ω -насыщенные формации, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда если m и n – \mathfrak{H}_τ^ω -дефекты формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{F} соответственно, то $m \leq n$.

Лемма 3. Пусть \mathfrak{F} , \mathfrak{M} , \mathfrak{X} и \mathfrak{H} – τ -замкнутые ω -насыщенные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \bigvee_{\tau}^\omega \mathfrak{X}$. Тогда если m , r и t – \mathfrak{H}_τ^ω -дефекты формаций \mathfrak{M} , \mathfrak{X} и \mathfrak{F} соответственно, то $t \leq m + r$.

3 Основной результат

Теорема. Пусть \mathfrak{F} – приводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_τ^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 2, когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \bigvee_{\tau}^\omega \mathfrak{H}_2 \bigvee_{\tau}^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 – различные минимальные τ -замкнутые ω -насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \bigvee_{\tau}^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, \mathfrak{H} – неприводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация разрешимого l_τ^ω -дефекта 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть \mathfrak{X} – такая максимальная τ -замкнутая ω -насыщенная подформация \mathfrak{F} , что $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 1$. По лемме 1 имеем $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}$, где \mathfrak{H}_1 – минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная неразрешимая формация, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$. Тогда если в \mathfrak{F} имеется еще одна минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная неразрешимая подформация \mathfrak{H}_2 , отличная от \mathfrak{H}_1 , то в силу леммы 1 получим $\mathfrak{H}_2 \not\subseteq \mathfrak{X}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_r^\omega \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{H}_2 \vee_r^\omega \mathfrak{M}$, т. е. формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь в \mathfrak{F} нет отличных от \mathfrak{H}_1 минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных неразрешимых формаций. Поскольку \mathfrak{F} – приводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, то в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$ найдется такая группа G , что $\mathfrak{X} = l_r^\omega \text{form} G \neq \mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_r^\omega \mathfrak{X}$. Ввиду леммы 2 имеет место $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega \leq 2$. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_r^\omega \mathfrak{X}$ и $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 1$, то $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega \neq 0$. Допустим, что $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 1$. Тогда, поскольку в силу нашего предположения \mathfrak{H}_1 единственная минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная формация, входящая в \mathfrak{F} , по лемме 1 получаем $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{E}$. Значит,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{X} \vee_r^\omega \mathfrak{X} = (\mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}) \vee_r^\omega (\mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_1) = \\ &= \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega (\mathfrak{M} \vee_r^\omega \mathfrak{M}_1). \end{aligned}$$

В силу леммы 1, получим $|\mathfrak{F}:\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 1$. Противоречие. Поэтому $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 2$. Заметим, что $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{X}$, так как в противном случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$. Последнее противоречит максимальнойности формации \mathfrak{X} .

Если \mathfrak{X} – неприводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, то

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_r^\omega \mathfrak{X} = (\mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}) \vee_r^\omega \mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee_r^\omega \mathfrak{X}$$

и формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию 2) теоремы.

Пусть \mathfrak{X} – приводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация. Как известно (см. замечание 3 [3, с.127]), любая однопорожденная ω -насыщенная формация содержит конечное число разрешимых ω -насыщенных подформаций.

Поскольку \mathfrak{X} – однопорожденная τ -замкнутая ω -насыщенная формация и для любого подгруппового функтора τ множество τ -подгрупп произвольной группы A конечно, то формация \mathfrak{X} является однопорожденной ω -насыщенной формацией. Поэтому \mathfrak{X} содержит конечное число разрешимых ω -насыщенных

подформаций, а значит и разрешимых τ -замкнутая ω -насыщенных подформаций.

Пусть k – число разрешимых τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций формации \mathfrak{X} . Индукцией по k покажем, что формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию 2).

Обозначим через \mathfrak{L} такую максимальную τ -замкнутую ω -насыщенную подформацию формации \mathfrak{X} , что $|\mathfrak{L}:\mathfrak{L} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 1$. Если $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E} \not\subseteq \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L} \vee_r^\omega (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}) = \mathfrak{X}$ и $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 1$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{L}$. В силу леммы 1 имеет место равенство $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{E}$. Поскольку \mathfrak{X} – приводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, то в $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{L}$ найдется такая группа A , что $\mathfrak{X}_1 = l_r^\omega \text{form} A \neq \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{L} \vee_r^\omega \mathfrak{X}_1$. Если $|\mathfrak{X}_1:\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{E}|_r^\omega < 2$, то в силу леммы 3 имеем $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 1$. Противоречие. Значит, $|\mathfrak{X}_1:\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{E}|_r^\omega = 2$. Так как в \mathfrak{F} нет отличных от \mathfrak{H}_1 минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных неразрешимых формаций, то с учетом леммы 3 имеем $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1$. Поскольку \mathfrak{L} максимальная τ -замкнутая ω -насыщенная подформация \mathfrak{X} , то $\mathfrak{M}_2 \not\subseteq \mathfrak{X}_1$, так как в противном случае $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}$. Поэтому число разрешимых τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций формации \mathfrak{X}_1 меньше k . Значит, если \mathfrak{X}_1 – приводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, то по индукции мы можем считать, что $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{H} \vee_r^\omega \mathfrak{M}_3$, где \mathfrak{H} – неприводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация разрешимого l_r^ω -дефекта 2. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{X} \vee_r^\omega \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_r^\omega \mathfrak{X}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M} = \\ &= \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_2 \vee_r^\omega \mathfrak{X}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M} = \\ &= \mathfrak{H} \vee_r^\omega (\mathfrak{M} \vee_r^\omega \mathfrak{M}_2 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_3) = \mathfrak{H} \vee_r^\omega \mathfrak{M}_4, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{M}_4 \subseteq \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}_4 \not\subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию 2) теоремы.

Если \mathfrak{X}_1 – неприводимая τ -замкнутая ω -насыщенная формация, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{X} \vee_r^\omega \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_r^\omega \mathfrak{X}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M} = \\ &= \mathfrak{H}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_2 \vee_r^\omega \mathfrak{X}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M} = \\ &= \mathfrak{X}_1 \vee_r^\omega (\mathfrak{M}_2 \vee_r^\omega \mathfrak{M}) = \mathfrak{X}_1 \vee_r^\omega \mathfrak{M}_5, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{M}_5 \subseteq \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}_5 \not\subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, и в этом случае формация \mathfrak{F} также удовлетворяет условию 2). Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет многочисленные следствия для заданных подгрупповых функторов τ и множеств простых чисел ω . Приведем

некоторые из них. В случае когда $\omega = \{p\}$ из теоремы получаем

Следствие 1. Пусть \mathfrak{F} – приводимая τ -замкнутая p -насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый I_r^p -дефект формации \mathfrak{F} равен 2, когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_r^p \mathfrak{H}_2 \vee_r^p \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 – различные минимальные τ -замкнутые p -насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_r^p \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, \mathfrak{H} – неприводимая τ -замкнутая p -насыщенная формация разрешимого I_r^p -дефекта 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Если ω – множество всех простых чисел из теоремы вытекает

Следствие 2. Пусть \mathfrak{F} – приводимая τ -замкнутая насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый I_1^r -дефект формации \mathfrak{F} равен 2, когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_1^r \mathfrak{H}_2 \vee_1^r \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 – различные минимальные τ -замкнутые насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_1^r \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, \mathfrak{H} – неприводимая τ -замкнутая насыщенная формация разрешимого I_1^r -дефекта 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть теперь τ – тривиальный подгрупповой функтор. Тогда из теоремы вытекает

Следствие 3 [7]. Пусть \mathfrak{F} – приводимая ω -насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый I^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 2, когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{H}_2 \vee^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 – различные минимальные ω -насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, \mathfrak{H} – неприводимая ω -насыщенная формация разрешимого I^ω -дефекта 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

В случае, когда $\omega = \{p\}$, из теоремы получаем

Следствие 4 [7]. Пусть \mathfrak{F} – приводимая p -насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый I^p -дефект формации \mathfrak{F} равен 2, когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee^p \mathfrak{H}_2 \vee^p \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 – различные минимальные p -насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee^p \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, \mathfrak{H} – неприводимая p -насыщенная формация разрешимого I^p -дефекта 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Если ω – множество всех простых чисел, из теоремы вытекает

Следствие 5 [7]. Пусть \mathfrak{F} – приводимая насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый дефект формации \mathfrak{F} равен 2, когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_1 \mathfrak{H}_2 \vee_1 \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 – различные минимальные насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_1 \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, \mathfrak{H} – неприводимая насыщенная формация разрешимого дефекта 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Заключение

Полученное в данной работе описание приводимых τ -замкнутых ω -насыщенных формаций с разрешимым I_r^ω -дефектом 2 для любого подгруппового функтора τ , позволяет классифицировать формации такого вида по их внутреннему структурному строению. Доказанная теорема существенно расширяет основные результаты работ авторов [7, 9], где, соответственно, получено описание ω -насыщенных формаций с разрешимым I^ω -дефектом 2, для случая, когда τ тривиальный подгрупповой функтор, и τ -замкнутых ω -насыщенных формаций с разрешимым I_r^ω -дефектом 1 для произвольного подгруппового функтора τ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41. – № 4. – С. 490–499.
5. Джехад, Дж. Классификация p -локальных формаций длины 3: автореф. : дис. канд. физ.-мат. наук: 02.12.01 / Дж. Джехад; Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины. – Гомель, 1996. – 15 с.
6. Жевнова, Н.Г. ω -Локальные формации с дополняемыми подформациями: автореф. : дис. канд. физ.-мат. наук: 02.12.01 / Н.Г. Жевнова;

Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины. – Гомель, 1997. – 17 с.

7. Сафонов, В.Г. О приводимых ω -насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф.Скорины. – 2005. – № 5 (32). С. 162–165.

8. Сафонов, В.Г. О n -кратно ω -насыщенных формациях с максимальной разрешимой подформацией / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия Математика. – 2008. – № 2. – С. 53–57.

9. Сафонов, В.Г. О τ -замкнутых ω -насыщенных формациях разрешимого I_τ^ω -дефекта 1 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2008, №2 (48). – С. 120–125.

10. Сафонов, В.Г. Частично насыщенные формации с π -нильпотентным дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вестник Мозырского гос. пед. ун-та. – 2005. – № 2 (13). – С. 16–20.

11. Рябченко, А.И. Частично насыщенные формации с π -специальным дефектом 1 / А.И. Рябченко // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5. – С. 59–68.

12. Сафонов, В.Г. О ω -насыщенных формациях с π -разложимым дефектом 1 /

В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вес. Магілёўскага дзярж. ун-та ім. А.А.Куляшова. – 2006. – № 4 (25). – С. 204–211.

13. Рябченко, А.И. О частично насыщенных формациях с X -дефектом 1 / А.И. Рябченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 28–34.

14. Рябченко, А.И. О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф.Скорины. – 2008. – № 5 (50), Ч. 2. – С. 216–222.

15. Рябченко, А.И. К теории частично насыщенных формаций / А.И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф.Скорины. – 2008. – № 6 (51), Ч. 2. – С. 153–160.

16. Скиба, А.Н. О частично локальных формациях / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Докл. АН Беларуси. – 1995. – Т.39, № 3. – С. 9–11.

17. Шабалина, И.П. О решетке τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Весці НАН Беларусі, Сер. фіз.-мат. навук. – 2003, № 1. – С. 28–30.

Поступила в редакцию 23.11.09.

УДК 517.538.52+517.538.53

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МАРКОВА, ПОРОЖДЕННЫХ БОРЕЛЕВСКИМИ МЕРАМИ СТЕПЕННОГО ТИПА

А.П. Старовойтов, Ю.А. Лабыч

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

RATIONAL APPROXIMATION OF MARKOV FUNCTIONS GENERATED BY BORELEAN POWER-TYPE MEASURES

A.P. Starovoitov, Yu.A. Labych

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Для функции Маркова $\hat{\mu}(z)$, порожденной положительными борелевскими мерами степенного типа, установлена асимптотика поведения строчных последовательностей ее таблицы Паде. Это позволило найти точные порядки убывания наилучших приближений $\hat{\mu}(z)$ рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. Полученные теоремы дополняют известные результаты А.А. Гончара, Т. Ганелиуса, Г. Шталя, Д. Браесса, А.А. Пекарского, Е.А. Ровбы и др. авторов, относящиеся к исследованиям аппроксимационных свойств функций Маркова.

Ключевые слова: функции Маркова, аппроксимации Паде, рациональные аппроксимации, полиномиальные аппроксимации, наилучшие равномерные приближения.

Asymptotic behavior of Pade table rows for Markov functions $\hat{\mu}(z)$ generated by Borelean power-type measures is found. This enabled us to find sharp decreasing orders of the best approximations of $\hat{\mu}(z)$ by rational functions with fixed number of poles. The obtained theorems supplement the known results of A.A. Gonchar, T. Ganelius, H. Stahl, D. Braess, A.A. Pekarskii, E.A. Rovba dealing with research of approximating properties of Markov functions.

Keywords: Markov function, Pade approximants, rational approximations, polynomial approximations, best approximations in the uniform norm.

Введение

Пусть ν – положительная мера с компактным носителем $\Delta = \Delta_\nu = [a, b]$. Тогда аналитическую функцию

$$\hat{\nu}(z) = \int_{\Delta} \frac{d\nu(t)}{t-z}, \quad z \in \bar{C} \setminus \Delta,$$

называют функцией Маркова меры ν .

Обозначим через $\mathfrak{R}_{n,m}$ множество всех рациональных функций вида $p_n(z)/q_m(z)$, где p_n и q_m – многочлены степени, не выше n и m соответственно. Пусть K – компакт в комплексной плоскости, а функция f непрерывна на K . Через $R_{n,m}(f; K)$ будем обозначать наилучшие равномерные приближения f на K элементами из $\mathfrak{R}_{n,m}$, т. е.

$$R_{n,m}(f; K) = \inf \{ \|f - r\|_K : r \in \mathfrak{R}_{n,m} \},$$

где $\|g\|_K = \max \{ |g(z)| : z \in K \}$.

В частности, $E_n(f; K) = R_{n,0}(f; K)$, а $R_n(f; K) = R_{n,n}(f; K)$.

Порядки убывания $R_n(\hat{\nu}; K)$ для компактов K , не пересекающихся с отрезками, содержащи-

ми носитель меры Δ_ν , впервые были получены в работе А.А. Гончара [1]. Этим вопросам посвящены также статьи Т. Ганелиуса [2], Г. Шталя [3], Д. Браесса [4]. При этом в качестве K берется компакт, симметричный относительно действительной прямой. В случае пересечения носителя меры Δ_ν и компакта K в одной или нескольких точках порядки убывания $R_n(\hat{\nu}; K)$ сначала были найдены для индивидуальных функций, позднее – для классов функций в работах Я. Андерсона, А.А. Пекарского и других авторов (см., например, [5], [6]). При этом в работах [5] и [6] K есть отрезок $[-1, 1]$ или круг $\bar{D} = \{z : |z| \leq 1\}$, а мера ν удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta_\nu = [1, a], \quad a > 1, \quad b > 0,$$

$$d\nu(t) = \varphi(t)dt, \quad \varphi(t) \asymp (t-1)^b \text{ при } 1 \leq t \leq a. \quad (0.1)$$

В [6] изучались также и свойства наилучших приближений $R_{n,m}(\hat{\nu}; K)$. В частности, доказано

Утверждение 1. Если меры λ и ν с носителем на $[1, a]$, $a > 1$, удовлетворяют условиям:

$$d\lambda(t) \leq d\nu(t) \text{ на } [1, a] \text{ и } \int (t-1)^{-1} d\nu(t) < \infty, \text{ то}$$

$$R_{n,m}(\hat{\lambda}; D) \leq 8R_{n,m}(\hat{\nu}; D) \text{ при } n \geq m. \quad (0.2)$$

Отметим также работы А.А. Пекарского,

Е.А. Ровбы [7] и Н.С. Вячеслава [8]. В [7] при ограничениях (0.1) на меру ν установлены порядки уклонений от $\hat{\nu}$ ортопроекции $\hat{\nu}$ на $\mathfrak{R}_{n,n}$, а в [8] при аналогичных условиях на ν изучается рациональная аппроксимация $\hat{\nu}$ в пространствах Харди H^p , $0 < p \leq \infty$.

Далее предполагаем, что $\Delta = \Delta_\mu = [0, 1]$, $d\mu(x) = \varphi(x)dx$, а

$$\varphi(x) = \frac{1}{B(\alpha, \gamma - \alpha)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\gamma-\alpha-1}, \quad 0 < x < 1, \quad (0.3)$$

где $\alpha, \gamma \in R$, $\gamma > \alpha > 0$, $B(\cdot; \cdot)$ – бета-функция Эйлера. При этих предположениях определим функцию Маркова

$$\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}_{\gamma, \alpha}(z) = \int_{\Delta_\mu} \frac{d\mu(x)}{1 - xz}, \quad (0.4)$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом по лучу $\{x : 1 \leq x < \infty\}$. Отметим, что рассмотренный в [5] и [6] случай соответствует значениям параметров $\gamma = b + 2$, $\alpha = 1$, $b > 0$.

В данной статье найдены точные порядки убывания строчных последовательностей таблицы Чебышева $[R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q)]_{n,m}^\infty$, где $D_q = \{z : |z| \leq q < 1\}$. В отличие от работ [5], [6], где при аппроксимации применяются многоточечные аппроксимации Паде, в качестве приближающих рациональных функций для $\hat{\mu}$ нами выбраны классические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z; \hat{\mu}) = P_n(z; \hat{\mu})/Q_m(z; \hat{\mu})$, т.е. рациональные функции из $\mathfrak{R}_{n,m}$, числитель и знаменатель которых удовлетворяют условию

$$Q_m(z; \hat{\mu})\hat{\mu}(z) - P_n(z; \hat{\mu}) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0.$$

Прежде, чем перейти к формулировке основных результатов статьи, введем аналитическую в $D = \{z : |z| < 1\}$ функцию

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(m + \gamma - \alpha)} \cdot \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-t})^{m+\gamma-\alpha-1} e^{-(n+\alpha+1)t} dt}{(1 - ze^{-t})^{m+1}},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Положим также

$$L_{n,0} = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}},$$

$$L_{n,m} = m! \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \prod_{k=1}^m \frac{\gamma - \alpha + k - 1}{(\gamma + n + k - 1)_2},$$

при $m \geq 1$. Здесь и далее $(\alpha)_k = \Gamma(\alpha + k)/\Gamma(\alpha)$.

Будем говорить, что бесконечно малые величины (a_n) и (b_n) имеют одинаковый порядок малости при $n \rightarrow \infty$ ($a_n \asymp b_n$), если для некоторых положительных чисел A и B $A|a_n| \leq |b_n| \leq B|a_n|$, $n \geq n_0$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. Для любых фиксированных $m \in N \cup \{0\}$ локально равномерно по $|z| < 1$ при $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\mu}(z) - \pi_{n,m}(z; \hat{\mu}) = L_{n,m} \frac{\psi_{n,m}(z)}{(1-z)^m} z^{n+m+1} (1 + o(1)).$$

Теорема 2. Для любых фиксированных $m \in N \cup \{0\}$ при $n \rightarrow \infty$

$$L_{n,m} \frac{q^{n+m+1}}{(1+q)^{2m+1}} (1 - |o(1)|) \leq R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q) \leq L_{n,m} \frac{q^{n+m+1}}{(1-q)^{2m+1}} (1 + |o(1)|).$$

Следствие 1. Для любого фиксированного $m \in N \cup \{0\}$ при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}}.$$

В частности, при $\gamma = 2$, $\alpha = 1$, $d\mu(t) = dt$, $0 < t < 1$, $\hat{\mu}_{2,1}(z) = z^{-1} \ln(1-z)^{-1}$. Поэтому

$$R_{n,m}(\hat{\mu}_{2,1}; D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+1}} \asymp \frac{q^m}{n^{2m}} R_{n,0}(\hat{\mu}_{2,1}; D_q).$$

Утверждение 1 остается в силе, если в (0.2) D заменить на D_q . Поэтому из теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть $d\lambda(x) = \omega(x)dx$, а $\omega(x) \asymp \varphi(x)$ при $0 < x < 1$. Тогда при любом фиксированном m и $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(\hat{\lambda}; D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}}.$$

При отдельных значениях параметров α, γ теорема 3 доказана ранее в работе [10].

1 Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть ${}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция, которая, как известно (см. [9]), при $|z| < 1$ представима в виде

$${}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n. \quad (1.1)$$

Обозначая через $f_n = (\alpha)_n / (\gamma)_n$ коэффициенты степенного ряда (1.1), рассмотрим определители Адамара функции ${}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z)$

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}$$

и определители вида

$$D_{n,m,k} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \dots & f_{n+k+m-1} & f_{n+k+m} \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. Пусть функция f представима в виде (1.1). Тогда, если $m \geq 1$, то

$$D_{n,m} = \prod_{i=1}^m \frac{(\alpha)_{n-m+i}}{(\gamma)_{n-m+i}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m-1} (\gamma - \alpha + i - 1)^{m-i} (m-i)!}{\prod_{j=1}^{m-1} \prod_{i=j}^{m-1} (\gamma + n - i + 2j - 2)_2}. \quad (1.2)$$

При $m \geq 2$

$$D_{n,m,k} = \prod_{i=0}^m \frac{(\alpha)_{n+k+i}}{(\gamma)_{n+k+i}} \cdot \prod_{i=1}^m (k+i-1) \frac{(\gamma + n - m + i + 1)_{m+k-2}}{(\alpha + n - m + i)_{m+k}} \cdot \frac{(\gamma - \alpha)^m \prod_{i=1}^{m-1} (\gamma - \alpha + i - 1)^{m-i} (m-i)!}{\prod_{j=1}^{m-1} \prod_{i=j}^{m-1} (\gamma + n - i + 2j - 2)_2}. \quad (1.3)$$

Равенство (1.2) доказано в [9] (см. § 2.1, формула (1.6)). Доказательство равенства (1.3) проводится аналогично. При $\alpha = 1$ и $\gamma = 2$ соотношение (1.3) другим методом установлено в [10].

Замечание 1. Равенство (1.3) справедливо и при $m=1$, если положить последний множитель равным $\gamma - \alpha$.

Из (1.2) и (1.3) с помощью несложных преобразований получаем, что

$$L_{n,m} = \frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} m! \prod_{i=1}^m \frac{(\gamma - \alpha + i - 1)}{(\gamma + n + i - 1)_2}, \quad (1.4)$$

$$\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} = \frac{(k)_m}{m!} \frac{(\alpha + n + 1)_{k-1}}{(\gamma + n + m + 1)_{k-1}} = \frac{(m+1)_{k-1} (\alpha + n + 1)_{k-1}}{(\gamma + n + m + 1)_{k-1}}. \quad (1.5)$$

Утверждение 2. Если $d\mu(x) = \varphi(x)dx$, а функция $\varphi(x)$ определяется равенством (0.3), то

$$\hat{\mu}(z) = {}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z), \quad z \in \bar{C} \setminus [1, \infty),$$

Доказательство. Разложим ядро Коши функции $\hat{\mu}(z)$ в ряд

$$\frac{1}{1 - xz} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n,$$

сходящийся абсолютно и равномерно по $x \in \Delta_\mu$ и $|z| < 1$. Интегрируя этот ряд почленно по мере μ , получим

$$\hat{\mu}(z) = \int_{\Delta_\mu} \frac{d\mu(x)}{1 - xz} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^n d\mu(x) \right) z^n.$$

Теперь, учитывая явное выражение $d\mu(x)$, будем иметь

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n + \alpha; \gamma - \alpha)}{B(\alpha; \gamma - \alpha)} z^n.$$

Далее, исходя из выражения бета-функции Эйлера через гамма-функцию и равенства $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$, окончательно получим, что

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n.$$

Утверждение 2 доказано.

Лемма 2. Для любых фиксированных $m = 0, 1, 2, \dots$ и $z \in D$ при $n \rightarrow \infty$

$$Q_m(z; \hat{\mu}) = D_{n,m} (1 - z)^m (1 + o(1)). \quad (1.6)$$

Доказательство. Представим многочлен $Q_m(z; \hat{\mu})$ в виде

$$Q_m(z; \hat{\mu}) = \sum_{j=0}^m l_j z^j.$$

Учитывая равенство (1.8) из [9], при $j \geq 1$ получим

$$(-1)^j l_j = D_{n,m} C_m^j \prod_{i=1}^j \frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i},$$

где $C_m^j = \frac{m!}{(m-j)! j!}$.

Тогда, принимая во внимание, что $l_0 = D_{n,m}$, для любого $z \in D$

$$D_{n,m} (1 - z)^m - Q_m(z; \hat{\mu}) = D_{n,m} \sum_{j=1}^m C_m^j (-z)^j \left\{ 1 - \prod_{i=1}^j \frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i} \right\}.$$

Так как

$$0 \leq 1 - \prod_{i=1}^j \frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i} \leq 1 - \left(\frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i} \right)^j \leq j \left(1 - \frac{\alpha + n - j + 1}{\gamma + n + m - j} \right) \leq m \frac{m + \gamma - \alpha}{n},$$

то, учитывая предыдущее равенство, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| D_{n,m}(1-z)^m - Q_m(z; \hat{\mu}) \right| \leq \\ & \leq D_{n,m} \frac{(\gamma - \alpha + m)}{n} \sum_{j=0}^m C_m^j |z|^j = \\ & = \frac{(m + \gamma - \alpha) m (1 + |z|)^m}{n} D_{n,m}. \end{aligned}$$

Отсюда для любого $z \in D$

$$Q_m(z; \hat{\mu}) = D_{n,m} (1-z)^m (1 + A_{n,m}(z)),$$

где

$$|A_{n,m}(z)| \leq \frac{(m + \gamma - \alpha) m (1 + |z|)^m}{n(1 - |z|)^m}.$$

Из последних двух соотношений и следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. Для любых фиксированных $m = 0, 1, 2, \dots$ и $z \in D$

$$\begin{aligned} Q_m(z; \hat{\mu}) \hat{\mu}(z) - P_n(z; \hat{\mu}) &= \\ &= D_{n,m,1} \psi_{n,m}(z) z^{n+m+1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Доказательство. Согласно теореме Паде (см. [9], глава 1, § 1.1, формула (1.11)), при выбранной нормировке многочленов Паде

$$\begin{aligned} Q_m(z; \hat{\mu}) \hat{\mu}(z) - P_n(z; \hat{\mu}) &= \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k} = \\ &= D_{n,m,1} z^{n+m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}. \end{aligned}$$

Покажем, что при $z \in D$ $\psi_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}$.

Для этого в интеграле, определяющем функцию $\psi_{n,m}(z)$, сделаем замену $u = e^{-t}$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(z) &= \frac{\Gamma(\gamma + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(m + \gamma - \alpha)} \cdot \\ & \cdot \int_0^1 \frac{(1-u)^{m+\gamma-\alpha-1} u^{n+\alpha} du}{(1-zu)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Далее, разложим функцию $1/(1-zu)^{m+1}$ в ряд, равномерно сходящийся по $u \in [0, 1]$ при фиксированном $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-zu)^{m+1}} &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)_m z^k u^k = \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{\infty} (k)_m z^{k-1} u^{k-1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя теперь (1.9) в (1.8) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим, что

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(m + \gamma - \alpha)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k)_m}{m!} B(n + \alpha + k; m + \gamma - \alpha) z^{k-1},$$

где $B(n + \alpha + k; m + \gamma - \alpha)$ – бета-функция Эйлера. Выразим бета-функцию через гамма-функции, затем умножим и разделим правую часть последнего равенства на произведение гамма-функций $\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(n + m + \gamma + 1)$. Тогда, учитывая, что $(\xi)_k = \Gamma(\xi + k) / \Gamma(\xi)$, будем иметь

$$\psi_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k)_m (n + \alpha + 1)_{k-1}}{m! (n + m + \gamma + 1)_{k-1}} z^{k-1}.$$

Наконец, из равенства (1.5) следует, что

$$\psi_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. При $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по всем $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1 + |z|)^{m+1}} \leq |\psi_{n,m}(z)| \leq \frac{1}{(1 - |z|)^{m+1}}. \quad (1.10)$$

Доказательство. Сделав в интеграле функции $\psi_{n,m}(z)$ замену $u = e^{-t}$ и применив теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(z) &= \frac{1}{(1 - z\xi)^{m+1}} \cdot \frac{\Gamma(\gamma + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(m + \gamma - \alpha)} \cdot \\ & \cdot B(n + \alpha + 1; m + \gamma - \alpha), \end{aligned}$$

где $\xi \in [0, 1]$. Тогда из последнего равенства, учитывая, что

$$B(n + \alpha + 1; m + \gamma - \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(m + \gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma + n + m + 1)},$$

окончательно получим утверждение (1.10). Лемма 4 доказана.

2 Доказательство основных результатов

Утверждение теоремы 1 следует из лемм 2, 3 и равенства (1.4). Поэтому перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

Рассмотрим функцию $\eta(z) = \hat{\mu}(z) - \pi_{n,m}(z; \hat{\mu})$. Учитывая неравенство (1.10), для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\min_{|z|=q} |\eta(z)| \leq R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q) \leq \max_{|z|=q} |\eta(z)|. \quad (2.1)$$

Поскольку правое неравенство в (2.1) вполне очевидно, остановимся на доказательстве левого неравенства. Для этого нам необходима следующая лемма Гончара-Дзядыка ([11], лемма 3.1).

Лемма 5. Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на \bar{G} функция f имеет в G с учетом кратности, по крайней мере, $n + 1$

нуль, то при произвольном $m \geq 0$ справедливо неравенство

$$R_{n,m}(f; \bar{G}) \geq \min_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Из теоремы 1 следует, что при достаточно больших значениях n функция $\eta(z)$ является аналитической внутри круга $D_{q_1} = \{z : |z| < q_1\}$, $0 < q < q_1 < 1$ и имеет в D_q нуль кратности $n+m+1$. Пусть $r_{n,m}^* \in \mathfrak{R}_{n,m}$ является рациональной функцией наилучшего равномерного приближения $\hat{\mu}$ в круге D_q . Тогда

$$\begin{aligned} R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q) &= \|\hat{\mu} - r_{n,m}^*\|_{D_q} = \\ &= \|\hat{\mu} - \pi_{n,m} - (r_{n,m}^* - \pi_{n,m})\|_{D_q} = \\ &= \|\eta - \tilde{r}_{n+m,2m}\|_{D_q} \geq R_{n+m,2m}(\eta; D_q). \end{aligned}$$

Из леммы 5 следует, что

$$R_{n+m,2m}(\eta; D_q) \geq \min_{|z|=q} |\eta(z)|.$$

Тем самым левое неравенство в (2.1) доказано. Следовательно, и теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончар, А.А. О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций / А.А. Гончар // Матем. сборник, 1978. – Т. 105 (147), № 2. – С. 147 – 163.
2. Ganelius, T. Orthogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function / T. Ganelius // Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turan). – Basel. : Birkhäuser Verlag, 1978. – С. 237 – 243.
3. Stahl, H. Best Rational Approximants to Markov Function / H. Stahl // Colloquia Math. Soc

Janos Bolai. Racskelement (Hungary), 1990. – Vol. 58. – P. 627 – 643.

4. Braess, D. Rational Approximation of Stieltjes by the Caratheodory–Fejer Method / D. Braess // Constr. Appr., 1987. – Vol. 3. – P. 43 – 50.

5. Andersson, J.-E. Rational approximation to function like x^α in integral norms / J.-E. Andersson // Anal. Math, 1988. – Vol. 14, № 1. – P. 11 – 25.

6. Пекарский, А.А. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ, 1995. – Т. 7, № 2. – С. 121 – 132.

7. Пекарский, А.А. Равномерные приближения функций Стильтьеса посредством ортогональных проекций на множество рациональных функций / А.А. Пекарский, Е.А. Ровба // Мат. заметки, 1999. – Т. 65, № 3. – С. 362 – 368.

8. Вячеславов, Н.С. Рациональные приближения функций типа Маркова–Стилтьеса в пространствах Харди H^p , $0 < p \leq \infty$ / Н.С. Вячеславов // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика, 2008. – № 4. – С. 3 – 13.

9. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс–Моррис. – М. : Мир, 1986.

10. Старовойтов, А.П. Об асимптотике строк таблицы Паде аналитических функций с логарифмическими точками ветвления / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. заметки, 2008. – Т. 84, № 3. – С. 409 – 419.

11. Дзядык, В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ / В.К. Дзядык // Матем. сб, 1979. – Т. 108(150), № 2. – С. 247 – 267.

Поступила в редакцию 07.10.09.

УДК 004.5

**ФАРМАВАННЕ АДЗІНАЙ МІЖРЭГІЯНАЛЬНАЙ ІНФАРМАЦЫЙНАЙ
ПРАСТОРЫ НА ПРЫКЛАДЗЕ ІНТЭРНЭТ–ПРАЕКТА,
НАКІРАВНАГА НА ПЕРААДОЛЕННЕ НАСТУПСТВАЎ
ЧАРНОБЫЛЬСКОЙ КАТАСТРОФЫ**

В.Д. Ляўчук, А.М. Дземідзенка, А.А. Ляўчук

Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Ф. Скарыны, Гомель

**FORMATION OF THE UNITED INTERREGIONAL INFORMATION SPACE
ON THE EXAMPLE OF THE INTERNET–PROJECT DESIGNED
TO OVERCOME THE EFFECTS OF CHERNOBYL DISASTER**

V.D. Liauchuk, O.M. Demidenko, A.A. Liauchuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Паспяховы досвед рэалізацыі тыповага актуальнага Інтэрнэт–праекта выкладзены ў артыкуле. Апрабаваная тэхналогія зносін забяспечвае хуткі абмен ведамі, усебаковую, якасную прапрацоўку ідэй, метадаў і рашэнняў. Прапанаваны аўтарамі праект разглядаецца як мадэль для фармавання навуковай міжрэгіяльнай інфармацыйнай прасторы, што з’яўляецца прыярытэтным накірункам развіцця дзяржаўнай сістэмы навукова–тэхнічнай інфармацыі Рэспублікі Беларусь.

Ключавыя словы: навуковая міжрэгіяльная інфармацыйная прастора, Інтэрнэт–праект, партал, мадэль узаемадзеяння, пераадоленне наступстваў Чарнобыльскай катастрофы.

The successful implementation of a typical actual Internet-project is described in the paper. Approved technology of communication provides a quick exchange of knowledge, comprehensive, qualitative elaboration of ideas, methods and solutions. The proposed project is considered by the authors as a model for the formation of inter-regional scientific information space, which is the priority directions of the development of the state system of scientific and technical information of the Republic of Belarus.

Keywords: interregional scientific information space, the Internet project, a portal, a model of interaction, overcoming the effects of the Chernobyl disaster.

Уступ

Поспех любога інфармацыйнага праекта ў сучасных умовах вызначаецца тым, у якіх аб’ёмах, наколькі правільна і з якім сэрвісам ён прадстаўлены ў самым масавым і дынамічным глабальным інфармацыйным асяроддзі Інтэрнэт. Па дадзеным глабальнай Інтэрнэт–статыстыкі Internet World Stats: Usage and Population Statistics [1], на кастрычнік 2009 года ў Беларусі налічвалася 2,8 млн. інтэрнэт–карыстальнікаў, што складае 29,1% ад насельніцтва, якое пастаянна пражывае ў краіне. Аднак сярод навуковай супольнасці такіх карыстальнікаў 97% ад усёй іх колькасці. Менавіта для гэтай катэгорыі насельніцтва ўзаемадзеянне праз Інтэрнэт з’яўляецца найбольш адпаведным і прымальным для каардынацыі агульных намаганняў.

Прыкладу рэалізацыі навуковай міжрэгіяльнай інфармацыйнай прасторы прысвечаны дадзены артыкул.

1 Абгрунтаванне выбару вобласці даследаванняў

Супярэчлівыя ацэнкі маштабаў Чарнобыльскай катастрофы звязаны з недастатковым

аб’ёмам інфармацыі адносна ўздзеяння фактараў катастрофы на пацярпелую папуляцыю, а таксама з ігнараваннем сучасных ведаў пра ўздзеянне малых доз радыяцыі на біялагічныя аб’екты. Аварыя на Чарнобыльскай АЭС прывяла да радыяцыйнага забруджвання 23% тэрыторыі Рэспублікі Беларусь, 1,5% – Расійскай Федэрацыі і ад 7 да 10% – Украіны, што складае больш за 150 000 кв. км. Апрамяненню патрапілася 8,4 млн. чалавек, з іх было пераселена 404000. Мільёны людзей па-ранейшаму жывуць ва ўмовах дзеяння малых доз радыяцыі. За межамі былога Савецкага Саюза на многіх тэрыторыях у Паўночнай і Усходняй Еўропе шчыльнасць выпадзення ^{137}Cs знаходзілася ў дыяпазоне ад 37 да 200 кБк кв.м. Плошча гэтых раёнаў складае 45 000 кв. км, гэта ёсць каля траціны плошчы забруджаных тэрыторый у былым Савецкім Саюзе.

Большая частка доўгажывучых радыёнуклідаў лакалізаваная ў зонах адчужэння трох найбольш пацярпелых краін. Цягам стагоддзяў зварот людзей на гэтыя землі немагчымы. На тэрыторыі трох пацярпелых краін доўгажывучыя радыёнукліды цэзію, стронцыю, плутонію, аме-

рышчыю будуць сотні гадоў наносіць шкоду прыродзе і чалавеку. Мае месца перанос радыенуклідаў у водныя басейны рэк Прыпяць і Дняпро, у донныя адклады азёр. Надоўга забруджаныя лясныя масівы прыводзяць да распаўсюджвання радыенуклідаў у жывёльным свеце. На шмат гадоў не прадбачыцца прыкметнага зніжэння канцэнтрацыі радыенуклідаў у прадуктах харчавання. Гэта складае сур'ёзную радыялагічную праблему ва ўмовах беднасці сельскага насельніцтва, якое спажывае забруджаныя радыенуклідамі прадукты штодня. Чакаецца, што эфектыўныя пажыццёвыя дозы будуць прыкладна на 40% большыя, чым дозы, атрыманыя ў першыя 10 гадоў пасля аварыі [2].

За 23 гады, якія прайшлі пасля Чарнобыльскай катастрофы ў Інтэрнэце было створана некалькі дзесяткаў праектаў, частка з якіх ужо спыніла сваё існаванне ці не суправаджаецца апошнімі гады. Найбольш стабільную працу паказваюць праекты, створаныя пад эгідай ААН і розных дзяржаўных прадпрыемстваў і арганізацый, што фінансуюцца з дзяржбюджэту.

Адной з асноўных ідэй навуковага даследавання, накіраванага на распрацоўку Інтэрнэт-партала, з'яўляецца стварэнне новых механізмаў і метадаў работы сэрвісаў, што забяспечваюць максімальны рост наведвальнасці. Запуск новага Web-рэсурсу па навуковых праблемах пераадолення наступстваў Чарнобыльскай катастрофы калі не згуляе ключавую ролю, то прынамсі будзе спрыяць вырашэнню некаторых з гэтых праблем. У дадатак, многім навукоўцам, якія пачыналі вырашаць праблемы наступстваў катастрофы ў 1986 годзе, ужо за шэсцьдзесят, а адпаведныя праблемы не знікаюць, а з кожным годам трансфармуюцца і мадыфікуюцца, ахопліваючы ўсё новыя сферы жыццядзейнасці чалавека і навакольнага асяроддзя.

Згодна з агульнапрынятай канцэпцыяй радыёнуклідны павінны быць размешчаны ва ўстойлівыя матрыцы з наступным іх кантраляваным захоўваннем ў спецыяльна арганізаваным рэгіянальным магільніку на працягу не менш за 10 перыядаў паўраспаду. Для гама-, бэта-выпраменьвальнікаў (^{137}Cs , ^{90}Sr) – гэта 300 гадоў, для альфа-выпраменьвальнікаў – тысяча гадоў. Працягласць патэнцыйнай радыеэкалагічнай небяспекі альфа-актыўных радыенуклідаў у складзе мас, якія ўтрымліваюць паліва і ўтварыліся ў выніку аварыі на ЧАЭС, не супастаўленыя з часам ўстойлівасці аб'ектаў, у якіх яны лакалізаваны.

Таму яшчэ адна з асноўных ідэй работы партала – прыцягнуць да вырашэння праблем пераадолення наступстваў Чарнобыльскай катастрофы новае пакаленне навукоўцаў, каб наступны этап мінімізацыі наступстваў аварыі быў больш прадукцыйны і больш ўдалы.

2 Мэты і задачы Інтэрнэт-праекта

Мэтай праекта з'яўляецца стварэнне ўмоў для сістэмнага ўкаранення і актыўнага выкарыстання сучасных інфармацыйных і камунікацыйных тэхналогій у сумеснай працы міжнародных размеркаваных калектываў навукоўцаў і грамадзянскага сектара, інфармацыйнае забеспячэнне дзейнасці дзеючых ініцыятыў па навуковых даследаваннях, накіраваных на ліквідацыю наступстваў Чарнобыльскай катастрофы. Галоўным інструментам дасягнення пастаўленай мэты з'яўляецца Інтэрнэт, які ад іншых медыякрыніц і сродкаў інфармацыі адрозніваецца вялікай колькасцю разнастайных сэрвісаў, што даюць магчымасць арганізацыі зваротнай сувязі, г.зн. актыўнага ўзаемадзеяння з карыстальнікамі ў рэальным часе. Асноўная задача праекта заключаецца ў распрацоўцы канцэпцыі і рэалізацыі інфармацыйнай сістэмы: Міжрэгіянальны навуковы партал «Праблемы пераадолення наступстваў Чарнобыльскай катастрофы: фундаментальныя даследаванні і практычная рэалізацыя», яе навукова-метадычным і тэхнічным суправаджэнні.

Праект накіраваны на рэалізацыю сучасных навуковых поглядаў і ідэй у пераадоленні наступстваў Чарнобыльскай катастрофы калектывамі навукоўцаў і грамадзянскім сектарам з Гомельскай, Бранскай і Чарнігаўскай абласцей па наступных напрамках фундаментальных навуковых даследаванняў: 1) хімія і навукі аб матэрыялах; 2) біялогія і медыцынская навука; 3) навукі аб Зямлі; 4) навукі аб грамадстве. Гэта дазволіць павысіць эфектыўнасць і якасць сумесных навуковых распрацовак, накіраваных на ліквідацыю наступстваў Чарнобыльскай катастрофы, а таксама зрабіць важкі ўклад у стварэнне адзінага міжрэгіянальнага інфармацыйнага асяроддзя як неабходнай ўмовы для шырокага абмеркавання навуковай грамадскасцю наяўных сацыяльна-эканамічных праблем на постчарнобыльскай прасторы і пошуку іх рашэння.

Такім чынам, стварэнне адзінай міжрэгіянальнай інфармацыйнай прасторы на сучасным этапе развіцця грамадства з'яўляецца неабходнай умовай для рэалізацыі сучасных навуковых поглядаў і ідэй у пераадоленні наступстваў Чарнобыльскай катастрофы. Аналагаў спецыялізаваных на чарнобыльскай тэматыцы міжрэгіянальных інфармацыйных рэсурсаў і сеткавых супольнасцяў не маеца. Дадзены праект можа служыць мадэллю а) каардынацыі намаганняў размеркаваных навуковых калектываў, якія прымаюць удзел у будаўніцтве і эксплуатацыі небяспечных вытворчасцяў, б) іх ўзаемадзеяння з грамадзянскім сектарам, бізнэсам і дзяржаўнымі органамі кіравання для маніторынгу і фармавання грамадскай думкі, выяўлення крыніц патэнцыйных сацыяльна-эканамічных праблем.

3 Рэалізацыя Інтэрнэт-партала

Для рэалізацыі інтэрактыўнага Інтэрнэт-партала (далей Партал), які адпавядае пастаўленым мэтам, даводзіцца вырашаць такія задачы, як узаемадзеянне сайта з карыстальнікамі, пошук інфармацыі ў базе дадзеных і забеспячэнне даступнасці матэрыялу на розных платформах. Для эфектыўнага, надзейнага і гнучкага функцыянавання, праграма-тэхналагічная платформа Партала павінна задавальняць наступным агульным патрабаванням:

- адпаведнасць міжнародным стандартам адкрытых сістэм, у тым ліку стандартам распрацоўкі, суправаджэння і дакументавання;
- інтэгранасць. Наяўнасць развітых тэхналагічных сродкаў інтэграцыі з прыкладнымі сістэмамі і базамі дадзеных навуковых калектываў;
- адаптаванасць. Сродкі наладкі Партала пад функцыянальныя патрабаванні груп карыстальнікаў;
- размеркаванасць. Магчымасць пабудовы Партала на некалькіх, у тым ліку тэрытарыяльна аддаленых, серверах;
- маштабаванасць: па колькасці карыстальнікаў, аб'ёму захоўваемых дадзеных, інтэнсіўнасці абмену дадзенымі, хуткасці апрацоўкі запытаў і дадзеных, набору паслуг, спосабам забеспячэння доступу і г.д.;
- сродкі кантролю.

Партал павінен валодаць наступнымі функцыянальнымі магчымасцямі:

- аўтарызацыя і кіраванне карыстальнікамі;
- публікацыя, рэдагаванне дакументаў, падтрымка сумесных праектаў;
- камунікацыі карыстальнікаў, забяспечаныя сістэмамі форумаў і сэрвісам абмену імгненнымі паведамленнямі;

– прадастаўленне доступу да інфармацыйных баз дадзеных навуковых калектываў;

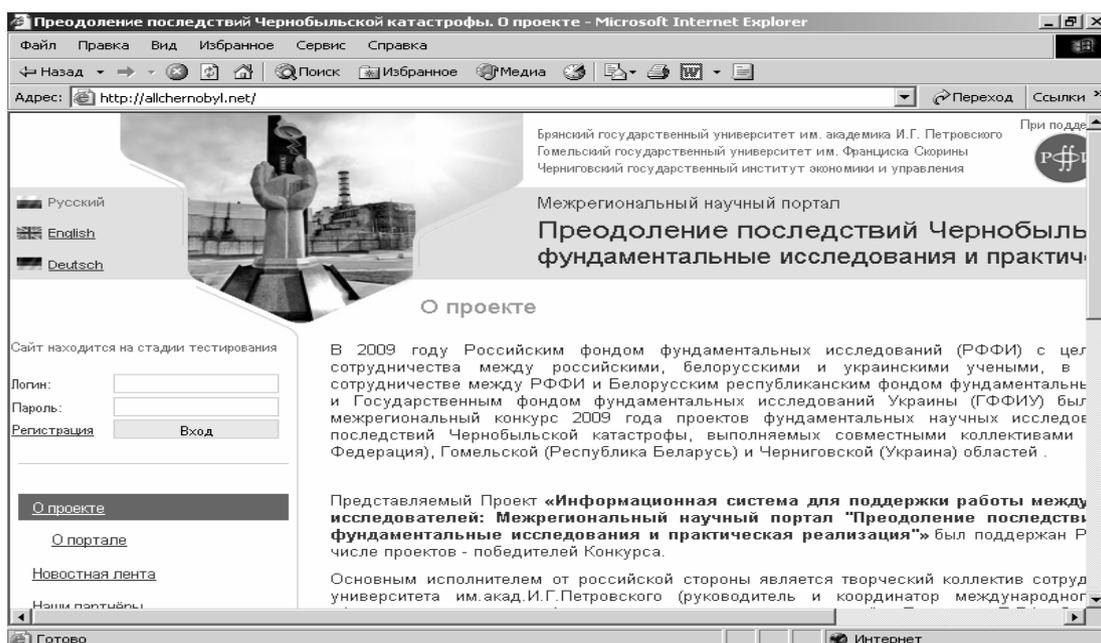
– арганайзэр віртуальнага працоўнага месца, які дазваляе захоўваць нататкі, нагадванні, працаваць з календаром, захоўваць гіперпасылкі і інш. Арганайзэр цесна звязаны з кантэнт-мэнэджэрам, электроннай поштай, тэлефонным даведнікам і г.д.;

– публікацыя навін і аб'яваў, прывязаных да іерархіі калектываў, члены якіх зарэгістраваны на Партале;

– кантэкстны пошук інфармацыі па раздзелах з улікам бягучых правоў карыстальніка;

– работа з электроннай поштай праз паштовы сервер.

Інтуітыўна зразумелым, простым і магутным інструментам для рашэння вышэйпазначаных праблем з'яўляюцца сістэмы кіравання кантэнтам (CMS – Content management system) [3]. Яны забеспячваюць і арганізуюць агульны працэс стварэння, рэдагавання і кіравання тэкставымі і відэа дакументамі з якасна новым функцыянальным напаўненнем. Кантэнт разглядаецца як неструктураваны дадзены ў супрацьлегласць структураванай інфармацыі базы дадзеных. З выкарыстаннем CMS на базе мовы PHP рэалізавана першая версія інфармацыйнай сістэмы: Міжрэгіянальны навуковы партал «Праблемы пераадолення наступстваў Чарнобыльскай катастрофы: фундаментальныя даследаванні і практычная рэалізацыя». Яна знаходзіцца па адрасу <http://www.allchernobyl.net/>, а знешні выгляд галоўнай старонкі прыведзены на малюнку 1.



Малюнак 1 – Знешні выгляд галоўнай старонкі Партала

Першая версія Партала мае іерархічна-сеткавую структуру. Шэраг раздзелаў прысвечаны асвятленню асноўных падзей, якія адбываюцца ў жыцці навуковай супольнасці Гомельскай, Бранскай, Чарнігаўскай абласцей, апошнім навінам дадзенага праекта, размяшчаюцца спасылкі аб запланаваных конкурсах і семінарах.

Наступная група раздзелаў змяшчае розныя пастаянна папаўняемыя навукова-метадычныя матэрыялы па 4-х напрамках праекта: 1) хімія і навукі аб матэрыялах; 2) біялогія і медыцынская навукі; 3) навукі аб Зямлі; 4) навукі аб грамадстве. У раздзеле «Конкурсы» публікуюцца інфармацыя аб праводзімых навуковых конкурсах у рамках гэтага праекта і іх выніках. У раздзеле «Семінары» публікуюцца графік правядзення Інтэрнэт-канферэнцый і семінараў, інфармацыя аб іх арганізацыі і правядзенні. У раздзеле «Нарматыўна-прававая інфармацыя» змешчаны даступныя для запампоўкі файлы з рэгіянальнымі законамі, загадамі, інструкцыйнымі лістамі, а таксама плануецца стварэнне FAQ (найбольш частыя пытанні і адказы).

Найбольш інтэрактыўнымі раздзелаў на Партале з'яўляюцца, вядома, «Навуковыя блогі» і «Форумы». Гэта месца для абмеркавання даследчыкамі – членамі сеткавай навуковай супольнасці актуальных пытанняў, звязаных з вынікамі рэалізацыі праекта ў памежных абласцях і ў свеце ў цэлым, а таксама для віртуальных прафесійных зносін даследчыкаў па Чарнобыльскай тэматыцы.

Заклучэнне

Фармаванне навуковай міжрэгіянальнай інфармацыйнай прасторы з'яўляецца прыярытэтным накірункам развіцця дзяржаўнай сістэмы навукова-тэхнічнай інфармацыі Рэспублікі Беларусь. Магчымы розныя шляхі вырашэння дадзенай задачы. Паспяхова досвед рэалізацыі тыповага актуальнага праекта выкладзены у артыкуле. Аднапрацаваная тэхналогія зносінаў забяспечвае хуткі абмен ведамі, ўсебаковую, якасную прапрацоўку ідэй, метадаў і рашэнняў. Аўтары дадзенага праекта спадзяюцца прыцягнуць у ствараемую Інтэрнэт-супольнасць Рэспублікі Беларусь, Расійскай Федэрацыі і Украіны маладых вучоных, як актыўных удзельнікаў інавацыйнага працэсу стварэння новых ведаў.

ЛІТАРАТУРА

1. *Internet World Stats: Usage and Population Statistics [Virtual Resource] / Internet Usage in Europe.* – 2009. – Access Path: <http://www.internet-worldstats.com/stats4.htm#europe>.

2. *Медицинские последствия Чернобыльской катастрофы и стратегия их преодоления: резолюция международной конференции* (Киев, 29 мая – 3 июня 2006 г.) – К.: 2006. – 15 с.

3. *Content management system [Virtual Resource] / Wikipedia, the free encyclopedia.* – 2009. – Access Path: http://en.wikipedia.org/wiki/Content_management_system.

Поступила в редакцию 07.10.09.

УДК 539.4

**РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ
МАТЕРИАЛА**

**В.В. Можаровский¹, С.А. Марьин¹, Н.А. Марьина²,
С.В. Шилько³, Л.П. Кухорев³**

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

³Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

**CALCULATION AND EXPERIMENTAL STUDY
OF STRESS-STRAIN STATE OF CYLINDRICAL PIPES
TAKING INTO ACCOUNT THE HETEROGENEITY OF THE MATERIAL**

**V.V. Mozharovsky¹, S.A. Marjin¹, S.A. Marjina²,
S.V. Shilko³, L.P. Kuhorev³**

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

³V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute National Academy of Sciences of Belarus, Gomel

Рассмотрена задача расчетно-экспериментального определения напряжений и перемещений композитных труб под действием гидростатического давления. С использованием ранее полученных теоретических зависимостей и алгоритмов разработан модуль конечноэлементного расчета напряженно-деформированного состояния трубы в виде полого цилиндрического тела неоднородной структуры. Экспериментальная часть работы включает механические испытания цилиндрических труб из армированных материалов. С использованием разработанного программного модуля изучено влияние армирующих волокон на концентрацию напряжений.

Ключевые слова: композитные трубы, армирование, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, механические испытания.

The problem of calculation and experimental determination of stresses and displacements of composite pipes under hydrostatic pressure is considered. Based on previously obtained theoretical relations and algorithms, the program module of finite-element calculation of stress-strain state of pipe which assumed as hollow cylindrical body with heterogenous structure, has been developed. Experimental part of study includes mechanical tests of cylindrical pipes made of reinforced materials. Using developed software, the influence of reinforcing fibers on the stress concentration has been studied.

Keywords: composite pipes, reinforcement, stress-strain state, finite element method, mechanical tests.

Введение

Достижения в области технологии производства легких и коррозионно-стойких трубопроводов из высокопрочных полимерных композитов в значительной степени связаны с расчетным прогнозированием оптимального наполнения полимерной матрицы армирующими волокнами или частицами. Применение методов механики композитов позволяет также обосновать геометрические и упругие характеристики функциональных слоев при изготовлении труб слоистой конструкции.

Если для оценки прочности и деформативности традиционных металлических трубопроводов пригодны относительно простые модели и методы сопротивления материалов с использованием справочных данных, то для проектирования полимерных композитных (неоднородных) труб необходимо использовать теорию

упругости анизотропного тела с последующей численной реализацией, а также проводить специальные экспериментальные исследования по определению комплекса механических характеристик указанных неоднородных и физически нелинейных материалов.

В настоящей статье приведены результаты расчетно-экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) композитных труб, использованные в хозяйственной тематике ИММС НАНБ.

1 О влиянии неоднородности материала на напряженно-деформированное состояние слоистой цилиндрической трубы

Поляризационно-оптическое исследование фрагмента армированной трубы на фотоупругой полимерной матрице выявляет сильную концентрацию напряжений, отображаемую

картины изохром при прямом просвечивании (рисунок 1).



Рисунок 1 – Картина изохром при осевом сжатии композитной трубы (полиуретан, армированный стальной проволокой в форме спирали)

Однако указанный метод не позволяет определить НДС труб, изготовленных из большинства конструкционных полимерных материалов, не обладающих оптической прозрачностью и фотоупругостью. Малые размеры армирующих включений и толщины слоев затрудняют применение электротензометрии и других методов экспериментальной механики.

С целью расчета напряженно-деформированного состояния трубы из композиционного материала может быть рассмотрена ее модель в виде протяженного полого цилиндра (модель плоской деформации) или тонкого кольца (модель плоского напряженного состояния), с заданной на поверхности равномерно распределенной нагрузкой в виде гидростатического давления. Неоднородность упругих свойств материала учитывается путем макроскопического описания процесса деформирования на основе анизотропной теории упругости. Подразумевается, что модули упругости (радиальные и касательные) зависят от радиуса r и угла φ . Если свойства материала изменяются дискретно (труба слоистой конструкции), модули упругости представляют собой дискретные функции. Погрешность аналитического описания обусловлена неопределенностью в задании упругих свойств компонентов и параметров армирования (объемного содержания наполнителя, ориентации волокон, характеристик межфазного взаимодействия и т. д.). В этой связи прикладные методики расчета анизотропных конструкций из неоднородных материалов разработаны недостаточно. Так, в работе [1] предложено решение краевой задачи для изотропных цилиндров в одномерной постановке, когда модуль упругости меняется по радиусу цилиндра. Это решение требует компьютерной реализации и использования базы данных, содержащей полный набор

упругих характеристик матрицы и армирующих элементов.

Более адекватная оценка прочности и деформативности композитных труб включает вывод определяющих соотношений; численное решение, учитывающее реальную геометрию конструкции; проведение механических испытаний и экспериментальное определение упругих характеристик материала слоев; проведение расчета НДС и его экспериментальную проверку на образцах изделий. В частности, расчетно-экспериментальные исследования композитных подобных конструкций (трубопроводы, автомобильные шины) описаны авторами в работах [2]–[6].

Для успешной разработки методики расчета неоднородных труб ранее указанной конструкции рассмотрим пример численного расчета.

Пример расчета.

Постановка задачи. Исследовать напряженно-деформированное состояние неоднородной слоистой цилиндрической трубы, находящейся под действием внутреннего давления.

Допущения. При исследовании напряженно-деформированного состояния сделаем следующие допущения:

- труба лишена дна и имеет длину, значительно превышающую наружный диаметр ($l \gg d$);

- давление в трубе равномерно распределено по всей длине ($p = const$);

- геометрия слоистости и неоднородности (сечение) неизменна по всей длине трубы;

Исходные данные. Геометрические конструкционные особенности исследуемой слоистой неоднородной трубы показаны на рисунке 2.

Внутренне давление $p = 6 \text{ ГПа}$;

1-й слой трубы:

- внутренний радиус слоя – $r_1 = 19 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

- толщина – $h_1 = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

- технические характеристики материала: модуль упругости – $E_1 = 6,6 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона – $\nu_1 = 0,33$;

2-й слой трубы:

- внутренний радиус слоя – $r_2 = 21,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

- толщина – $h_2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

- технические характеристики материала: модуль упругости – $E_2 = 14 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона – $\nu_2 = 0,27$;

- характеристики неоднородного включения: диаметр – $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; модуль упругости – $E_2 = 200 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона – $\nu_2 = 0,27$;

3-й слой трубы:

- внутренний радиус слоя – $r_3 = 24,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

- толщина – $h_3 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

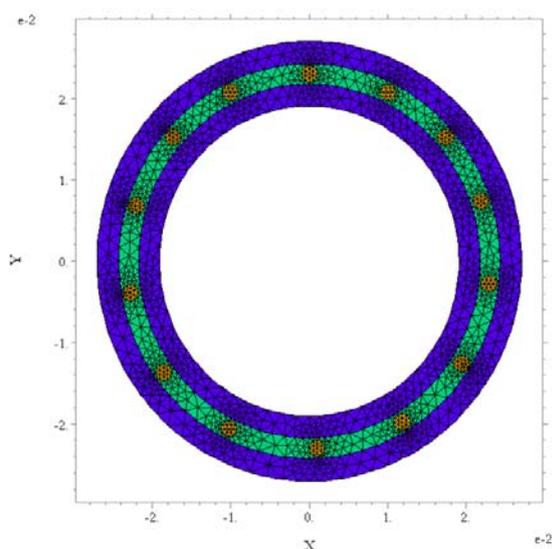
- технические характеристики материала:

модуль упругости – $E_3 = 6,6 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона – $\nu_3 = 0,33$;

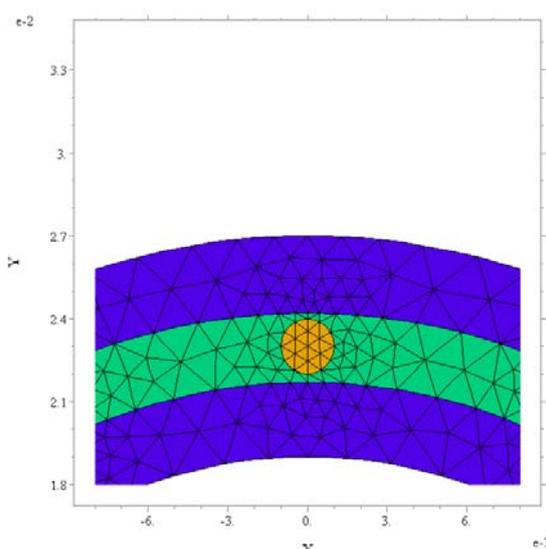
Методика проведения расчета. Расчет проведем с использованием аппарата конечно-элементного моделирования. Разбиение расчетной области производим нерегулярной сеткой, треугольными конечными элементами. Увеличение количества конечных элементов (процедура дробления) в местах концентрации напряжений

позволяет достичь наибольшей точности при расчетах.

Анализ результатов расчета. При проведении расчета исследуемая конструкция разбивалась на 6289 узлов, что позволило достичь точности $6,2 \cdot 10^{-5}$. Общая схема нерегулярной дискретизации представлена на рисунке 2а, укрупненная схема дискретизации в области, содержащей неоднородное включение отражена на рисунке 2б.



а) Общая схема



б) Фрагмент, содержащий включение

Рисунок 2 – Дискретизация расчетной области

На рисунке 3 представлена картина распределения напряжений σ_x . Здесь и далее напряжения представлены в фрагменте, содержащем неоднородное включение, в относительных величинах $\sigma' = \sigma / p$.

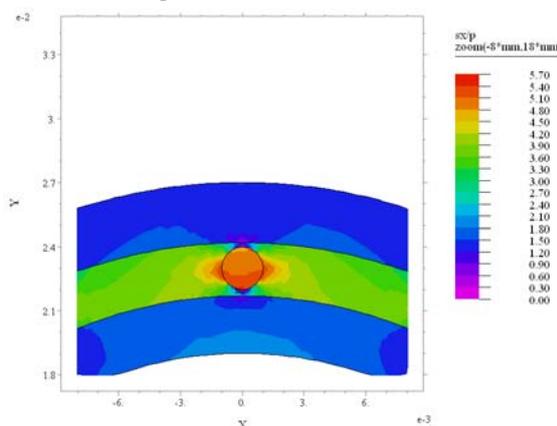


Рисунок 3 – Распределение напряжений σ_x

Максимальные значения напряжений σ_x сосредоточены в неоднородном включении (армирующем волокне) и в материале 2-го слоя (матрицы – материал заливки армирующих волокон) вблизи области контакта волокна с мат-

рицей и достигают значения $5,7p$, что более чем в два раза превышает значения напряжений на внутренней поверхности трубы.

При рассмотрении напряжений σ_y , представленных на рисунке 4, наблюдается характерный всплеск напряжений в области непосредственно под включением, а также на границе волокно-матрица.

В самом волокне напряжения незначительны (абсолютная величина не превышает значения $0,3p$).

Напряжения σ_y принимают значения в следующем диапазоне: от $-1,4p$ до $1,4p$.

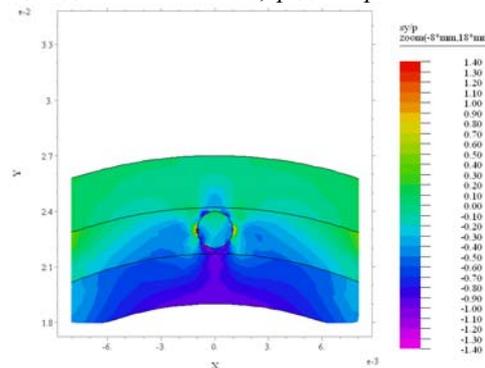


Рисунок 4 – Распределение напряжений σ_y

На рисунке 5 представлен график распределения полей касательных напряжений τ_{xy} , на котором четко прослеживается симметричный характер.

Комплексный анализ напряженного состояния цилиндрической слоистой трубы с включениями проведем с использованием оценки максимальных касательных напряжений τ_{max} , где

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

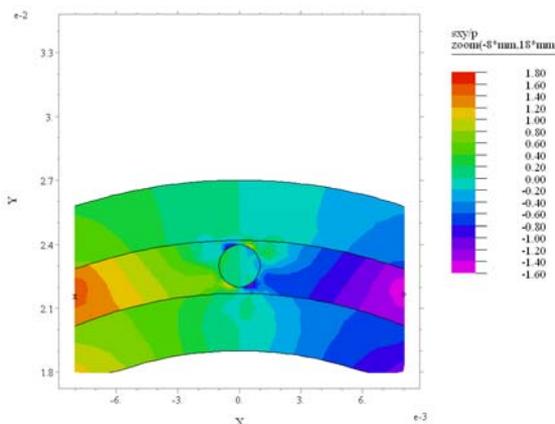


Рисунок 5 – Распределение касательных напряжений τ_{xy}

На рисунке 6 представлено распределение полей максимальных касательных напряжений τ_{max} .

Максимум максимальных касательных напряжений достигается во включении (армирующем волокне) и принимает значение равное $3,1p$. Наблюдаются также зоны концентрации пиковых напряжений и в матрице вблизи области контакта волокно-матрица.

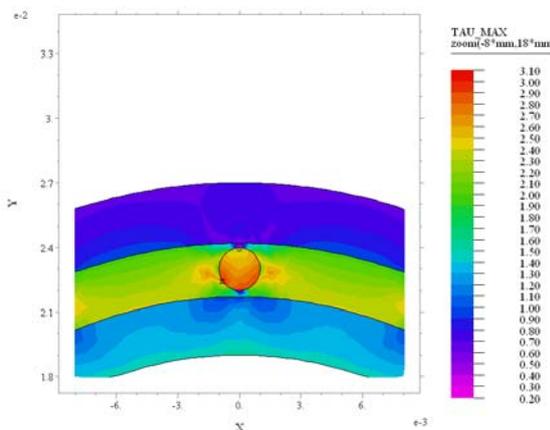


Рисунок 6 – Распределение напряжений τ_{max}

На внутренней поверхности слоистой трубы напряжения незначительны, составляют около $1,5p$.

Во внешней оболочке (слой – 3) также прослеживаются незначительные всплески, вызванные влиянием армирующего волокна (значение напряжений в диапазоне $0,2p - p$).

На рисунках 7, 8 изображено распределение перемещений u и v соответственно (m^{-5}).

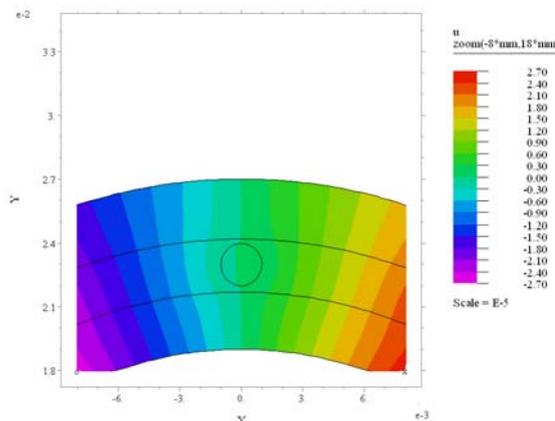


Рисунок 7 – Распределение полей перемещений u , m^{-5}

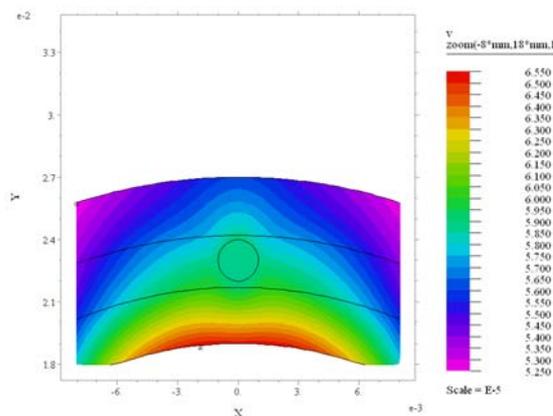


Рисунок 8 – Распределение полей перемещений v , m^{-5}

2 Экспериментальное исследование

Для определения физико-механических характеристик композитных труб была разработана методика экспериментального исследования (рисунок 9), которая успешно применяется при выполнении хозяйственных работ.

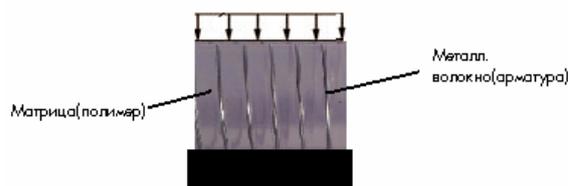


Рисунок 9 – Схема проведения испытания образца на сжатие по боковой поверхности. Деформирование армированной трубы

С привлечением поляризационно-оптического метода проводились экспериментальные

исследования напряженного состояния при сжатии (рисунок 10) и изгибе (рисунок 11) армированной трубы на основе оптически прозрачного полимерного материала полиуретана с высокой оптической чувствительностью. Механические испытания на сжатие выполнялись на машине INSTRON 5567.

Показано, что для малых усилий связь «напряжения-деформация» носит практически линейный характер.

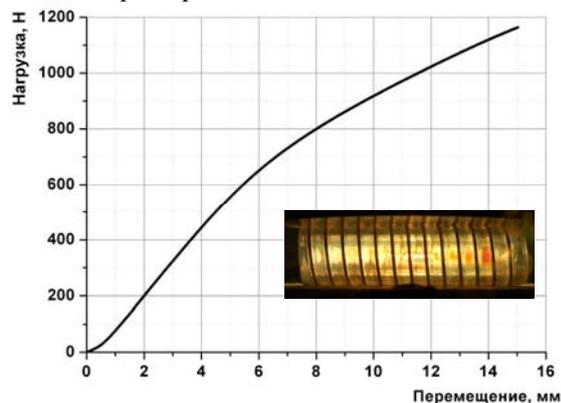


Рисунок 10 – Зависимость «сила – перемещение» при сжатии образца по боковой поверхности

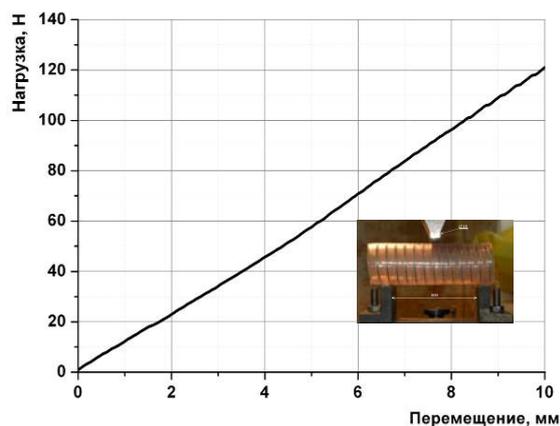


Рисунок 11 – Зависимость «сила – перемещение» в условиях трехточечного изгиба

Приведем некоторые особенности методики механических испытаний труб из композитов. Испытания проводятся для образцов, вырезанных из материала трубы вдоль оси и по меридиану. При заданных усилиях растяжения трубы определяются деформации на концах трубы на внутренней и внешней поверхности. Исходя из закона Гука, вычисляются напряжения и упругие константы. Для изотропной трубы методика нахождения констант упрощается путем использования уравнений, приведенных в [5].

С использованием описанных методик в ИММС НАН Беларуси в рамках договора И-69/2008 были определены механические характеристики трубчатых изделий на основе полиэтилена (рисунки 12, 13).



Рисунок 12 – Внешний вид композитной полиэтиленовой трубы-оболочки Ø560 мм (ООО «СарматТермо-Инжиниринг»).

Из натуральных изделий (собственно трубы и соединительных термоусаживаемых муфт) вырезалось по 10 образцов в виде полосок, которые кондиционировались при температуре 23±2 °С по ГОСТ 12423-66. Затем проводились испытания на машине Instron 5567. Относительное удлинение и предел текучести при разрыве определялись по ГОСТ 11262-80.



Рисунок 13 – Внешний вид композитной полиэтиленовой трубы-оболочки Ø315 мм (ЗАО «Завод полимерных труб»).

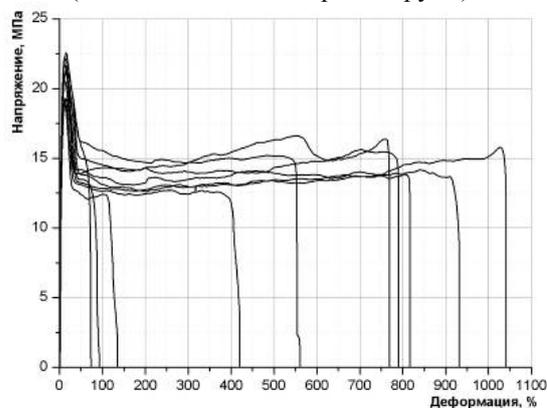


Рисунок 14 – Диаграмма «напряжение-деформация» при испытании образцов трубы Ø560 мм (ООО «СарматТермо-Инжиниринг»)

Исследования включали определение плотности по ГОСТу 15139-86, процентного содержания компонентов по ГОСТ 26311-84, определение показателя текучести расплава (ПТР), испытания на термоусадку, статические механические испытания, относительное удлинение и предел текучести при разрыве по ГОСТ 11262-80. На рисунке 14 представлены некоторые результаты механических испытаний.

Средние статические механические характеристики материала трубы-оболочки Ø560 мм (ООО «СарматТермо-Инжиниринг») следующие:

- модуль упругости, МПа – 447,49;
- деформация в момент текучести –13,98%;
- предел текучести МПа – 13,15;
- деформация при разрыве, 562,93%.

Установлено, что средняя величина относительного удлинения при разрыве материала полиэтиленовой трубы-оболочки Ø560 мм (поставщик ПИ-трубы ООО «СарматТермо-Инжиниринг») составляет 562,93 %, что соответствует документу о качестве. Средняя величина относительного удлинения при разрыве материала полиэтиленовой трубы-оболочки Ø315 мм (поставщик ПИ-трубы ЗАО «Завод полимерных труб») составляет 542,04%, что соответствует паспорту о качестве №2018, а предел текучести при растяжении составляет 12,27 МПа, что не соответствует сертификату о качестве №2018. Средняя величина относительного удлинения при разрыве материала муфты полиэтиленовой термоусаживаемой Ø200 мм (поставщик ЗАО «Завод полимерных труб») составляет 841,03%, что соответствует сертификату качества №43. Величина относительного удлинения при разрыве материала муфты полиэтиленовой термоусаживаемой Ø560 мм (поставщик ООО «СарматТермо-Инжиниринг») составляет 625,67%, что соответствует документу о качестве.

Заключение

На основе построенных в работе численных и экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы:

– в материале волоконно-армированной трубы волокна воспринимают основную нагрузку и тем самым разгружают матричный материал;

– оптимальный состав и количество элементов армирования определяется специальным расчетом;

– зоны концентрации напряжений вблизи контакта «волокно-матрица» являются критическими и необходимо их определение для конкретных материалов и конструкций;

– для качественной оценки эксплуатируемых труб необходимо проведение комплексных испытаний композитов и входящих в него компонентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел / В.И. Андреев. – М.: АСБ, 2002. – 288 с.

2. Марьин, С.А. Напряженно-деформированное состояние слоистой трубы из ортотропных материалов / С.А. Марьин, В.В. Можаровский // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2004. – Т. 9, № 3. – С. 16–21.

3. Марьин, С.А. Влияние конструкционных параметров футерованных труб из композиционных материалов на их напряженно-деформированное состояние / С.А. Марьин, В.В. Можаровский // Полимерные композиты и трибология «ПОЛИКОМТРИБ-2005»: Тез. докл. междунаучной конф. – Гомель, 2005. – С. 33-34.

4. Напряженно-деформированное состояние композиционных трубопроводов с покрытиями / В.В. Можаровский [и др.] // Materialy II Symposjum Mechaniki Zniszczenia Materialow I Konstrukcji. – Augustow, 2003. – С. 255–258.

5. Шилько, С.В. Численное моделирование напряженного состояния автомобильной шины / С.В. Шилько, С.Б. Анфиногенов, А.В. Хотько // Теоретическая и прикладная механика. – 2007. – № 22. – С. 297–303.

6. Инженерная методика расчета и экспериментальное определение механических характеристик композитных труб при повышенной температуре / Л.П. Кухорев [и др.] // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2009. – Т. 14, № 3. – С. 8–13.

Поступила в редакцию 02.11.09.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется.

Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандералями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения высылается по запросу авторов по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

GUIDELINES FOR AUTORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of physics, mathematics and technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors, some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific frameworks. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

In case of questions relating to paper submission and acceptance and the status of accepted papers, please, contact the Editorial Office (e-mail:pfmt@gsu.by).