

## ИЗГИБ ПЯТИСЛОЙНОГО СИММЕТРИЧНОГО ПО ТОЛЩИНЕ СТЕРЖНЯ

Э.И. Старовойтов, К.В. Суслов

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

## BENDING OF A FIVE-LAYER SYMMETRICAL THICKNESS ROD

E.I. Starovoitov, K.V. Suslov

*Belarusian State University of Transport, Gomel*

**Аннотация.** Приведена постановка краевой задачи об изгибе пятислойного симметричного по толщине стержня. Центральный и внешние слои предполагаются несущими, тонкими, повышенной жесткости, воспринимают основную часть механической нагрузки. В них деформирование подчиняется гипотезам Бернулли. Два относительно толстых жестких заполнителя обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Для них справедливы гипотезы Тимошенко. Для вывода системы дифференциальных уравнений равновесия стержня применен принцип возможных перемещений. Получены аналитическое решение краевой задачи и расчетные формулы для перемещений при равномерно распределенной нагрузке. Проведена численная апробация полученного решения.

**Ключевые слова:** пятислойный симметричный стержень, упругость, изгиб.

**Для цитирования:** Старовойтов, Э.И. Изгиб пятислойного симметричного по толщине стержня / Э.И. Старовойтов, К.В. Суслов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 51–55. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_4\\_65\\_51](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_51). – EDN: ULZAYM

**Abstract.** The formulation of the boundary value problem of bending a five-layer symmetrical thickness rod is given. The central and outer layers are assumed to be load-bearing, thin, of increased rigidity, and absorb the bulk of the mechanical load. In them, the deformation obeys the Bernoulli hypothesis. Two relatively thick rigid fillers provide a redistribution of forces between the load-bearing layers. Timoshenko's hypotheses are valid for them. The principle of possible displacements is applied to derive a system of differential equations for the equilibrium of the rod. An analytical solution of the boundary value problem and calculation formulas for displacements under uniformly distributed load are obtained. Numerical approbation of the obtained solution is carried out.

**Keywords:** five-layer symmetrical rod, elasticity, bending.

**For citation:** Starovoitov, E.I. Bending of a five-layer symmetrical thickness rod / E.I. Starovoitov, K.V. Suslov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 51–55. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_4\\_65\\_51](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_51) (in Russian). – EDN: ULZAYM

**Введение**

Применение слоистых конструкций в различных сферах современной техники и строительства интенсивно продолжается с начала 40-х годов прошлого века. Это потребовало разработку методик расчета слоистых элементов конструкций, учитывающих воздействие внешней среды. В монографиях [1]–[7] предлагаются расчетные модели трехслойных стержней, пластин и оболочек, учитывающие не только различные внешние силовые нагрузки, но и влияние температурных и радиационных воздействий.

В статьях [8]–[13] приведены решения ряда частных задач о динамическом воздействии на композитные, в том числе трехслойные стержни и пластины, в которых кинематические гипотезы приняты индивидуально для каждого слоя. Несущие слои жесткие, подчиняются гипотезам Бернулли (Кирхгофа). В легких заполнителях справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация относительного сдвига.

В статьях [14], [15] исследованы закономерности, присущие волнам в одномерных и двумерных элементах конструкций, проводится сравнение характеристик волн, распространяющихся в пластинах на упругом основании. Уравнения свободных колебаний пятислойных круглых симметричных по толщине пластин и стержней получены и исследованы в работах [16]–[18]. Решения получены в виде разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций.

Влияние сжимаемости заполнителя на деформирование трехслойной пластины исследовано в [19], функция сжимаемости принята линейной по толщине заполнителя. Термосиловое деформирование круговой упругопластической пластины нагрузкой, параллельной плоскости пластины, рассмотрено в статье [20]. Влияние упругого основания на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин исследуется в работах [21]–[24].

В статье [25] рассмотрен изгиб круглой пятислойной пластины локальными нагрузками. В работе [26] для получения системы дифференциальных уравнений равновесия пятислойного стержня с двумя заполнителями применен метод Лагранжа.

Здесь приводится решение задачи об изгибе симметричного по толщине пятислойного стержня и его численное исследование.

### 1 Постановка задачи об изгибе пятислойного стержня

В пятислойном, симметричном по толщине стержне введена декартова система координат, связанная со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1.1). В достаточно тонких жестких несущих слоях (1, 2, 4) справедливы гипотезы Бернулли о плоскостности и нормальности поперечных сечений деформированной осевой линии. Для описания деформирования сравнительно толстых заполнителей (3, 5) применяется гипотеза Тимошенко, учитывающая поворот нормали на дополнительный угол  $\psi(x)$  – относительный сдвиг. Вместе с прогибом стержня  $w(x)$  эти функции являются искомыми. Нагрузка  $q$  равномерно распределена по поверхности стержня.

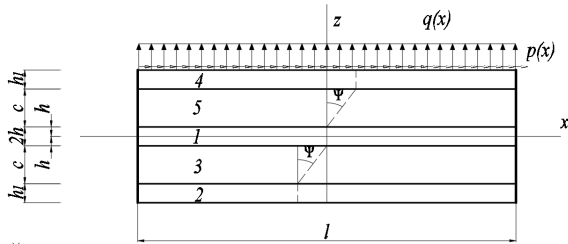


Рисунок 1.1 – Нумерация слоев и нагрузка в пятислойном стержне

Продольные перемещения  $u_x^{(k)}$  в слоях ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$  – номер слоя) выражаются через искомые функции формулами, следующими из принятых гипотез:

$$\begin{aligned} u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, \quad \text{при } c+h \leq z \leq c+h+h_1, \\ u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z-h)\psi, \quad \text{при } h \leq z \leq c+h, \\ u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, \quad \text{при } -h \leq z \leq h, \\ u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z+h)\psi, \quad \text{при } -h-c \leq z \leq -h, \\ u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, \quad \text{при } -h-h_1-c \leq z \leq -h-c, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $z$  – координата рассматриваемой точки поперечного сечения;  $h, h_1, c$  – толщины слоев; запятой в индексе обозначена операция дифференцирования по координате  $x$ .

Используя перемещения (1.1) и соотношения Коши [1], получим продольные деформации (нумерация в соответствии с рисунком 1.1):

$$\varepsilon_x^{(4)} = -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(4)} = 0;$$

$$\varepsilon_x^{(5)} = -zw_{,xx} + (z-h)\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(5)} = \frac{\psi}{2};$$

$$\varepsilon_x^{(1)} = -zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0;$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = -zw_{,xx} + (z+h)\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\psi}{2};$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = -zw_{,xx} - c\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0. \quad (1.2)$$

Напряжения в слоях определяются через деформации (1.2) с помощью закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\begin{aligned} s_{xx}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\ s_{xz}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}, \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \vartheta_{xz}^{(5)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $s_{ij}^{(k)}, \vartheta_{ij}^{(k)}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформаций,  $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – средние напряжения и деформации в слоях;  $G_k, K_k$  – модули упругости материалов слоев.

Система дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемого стержня получена с использованием принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (1.4)$$

где  $\delta A$  – вариация работы внешней нагрузки;  $\delta W$  – виртуальная работа внутренних усилий

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_S q \delta w dS = b_0 \int_0^l q \delta w dx; \\ \delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3} + \sigma_{xz}^{(5)} \delta \varepsilon_{xz}^{(5)} \delta_{k5}) dz dS; \end{aligned}$$

$b_0$  – ширина поперечного сечения;  $\delta$  – оператор варьирования;  $\delta_{ki}$  – символы Кронекера.

С помощью соотношений (1.1)–(1.4) получена [26] система дифференциальных уравнений равновесия в виде:

$$\begin{aligned} a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} - a_3 \psi &= 0, \\ a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[ c^2 \left( \frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right], \\ a_2 &= \left[ \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right], \\ a_3 &= [2G^{(2)} c], \\ a_4 &= \left[ \frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right]. \end{aligned}$$

Для замыкания краевой задачи к системе (1.5) необходимо добавить граничные условия. В этом качестве принимаем условия жесткой заделки торцов стержня ( $x=0; l$ ):

$$\psi(x) = w(x) = w_{,x}(x, t) = 0. \quad (1.6)$$

## 2 Аналитическое решение краевой задачи

Проинтегрируем второе уравнение системы (1.5) и с его помощью из первого уравнения получим отдельное уравнение для определения относительного сдвига  $\psi(x)$ :

$$\psi_{,xx} - \beta^2 \psi = \gamma q x + C_1, \quad (2.1)$$

где  $C_1$  – константа интегрирования,

$$\beta^2 = \frac{a_3 a_4}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Вид решения уравнения (2.1) зависит от знака перед коэффициентом  $\beta^2$ . Численное исследование показало, что разность  $a_1 a_4 - a_2^2 > 0$  и не уходит в бесконечность [26].

В результате решение уравнения (2.1) и прогиб стержня, следующий из второго уравнения системы (1.5), будут

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{\gamma q_0 x}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2}, \\ w &= \frac{a_2}{a_4} \left( \frac{C_2}{\beta} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{C_3}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) \right) - \frac{a_2 \gamma q_0 x^2}{2 a_4 \beta^2} + \\ &+ \frac{q_0}{24 a_4} x^4 + C_1 \left( -\frac{a_2 \gamma}{a_4 \beta^2} x + \frac{1}{6 a_4} x^3 \right) - \\ &\frac{1}{2} C_4 x^2 - C_5 x + C_6. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определим константы интегрирования для случая жесткого защемления торцов стержня. Удовлетворяя решением (2.2) требованиям (1.6) получим следующую алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l) - \frac{\gamma q_0 l}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} &= 0, \quad C_3 - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} = 0, \\ \frac{a_2}{a_4} (C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0 l}{a_4 \beta^2} + \frac{q_0 l^3}{6 a_4} + \\ &+ C_1 \left( \frac{l^2}{2 a_4} - \frac{a_2 \gamma}{a_4 \beta^2} \right) - l C_4 - C_5 = 0, \\ \frac{a_2}{a_4} C_3 - \frac{\gamma a_2}{a_4 \beta^2} C_1 - C_5 &= 0, \quad \frac{a_2}{a_4 \beta} C_2 + C_6 = 0, \\ \frac{a_2}{a_4 \beta} (C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0 l^2}{2 a_4 \beta^2} + \frac{C_1 l^3}{6 a_4} - \\ &- \frac{C_1 a_2 \gamma l}{a_4 \beta^2} + \frac{q_0 l^4}{24 a_4} - \frac{C_4 l^2}{2} - l C_5 + C_6 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решив систему уравнений (2.3) получим константы интегрирования при жесткой заделке торцов стержня:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta l (\beta^2 l^3 + 12 a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 \beta a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2 l \beta (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{((\beta^3 l^4 + 12 a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2 l \beta (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1)} \end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{\gamma}{\beta^2} C_1,$$

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{\beta l (72 \gamma^2 (l+2)(l-1) a_2^3 - \\ &- 6 \beta^2 \gamma l^2 (l^2 + l - 4) a_2 + \beta^4 l^5) \operatorname{sh}(\beta l) + \\ &+ 24 (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) a_2 \gamma \times \\ &\times (-6 \gamma (l+2)(l-1) a_2 + \beta^2 l^2 (l^2 + l - 3))}{12 l \beta^2 a_4 (\beta l (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 12 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1))} q_0, \\ C_5 &= 0, \\ C_6 &= -\frac{a_2}{a_4 \beta} C_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 3 Численные результаты

Получены при равномерно распределенной нагрузке  $q_0 = 2,5$  МПа. Для основной расчетной модели принимаем несущие слои выполненными из дюралюминия Д16-Т, заполнители – из фторопласта-4. Толщины слоев, отнесенные к длине стержня, в (2.2), (2.3) полагались  $h = h_1 = 0,02$ ,  $c = 0,1$ ,  $l = 1$  м. Упругие характеристики используемых материалов заимствованы в [1].

На рисунке 3.1 приведены графики изменения прогиба –  $a$ ) и относительного сдвига –  $b$ ) по длине стержня с различными материалами внешних несущих слоев: 1 – Д16-Т; 2 – титановый сплав; 3 – кордиерит. Центральный несущий слой – Д16-Т, заполнители – фторопласт-4. При замене дюралюминия на титановый сплав максимальный прогиб уменьшается примерно на 12%, относительный сдвиг практически не изменяется. В случае кордиерита расчетный прогиб уменьшается на 43%. Относительный сдвиг уменьшается на 38%.

На рисунке 3.2 показано уменьшение максимального прогиба –  $a$ ) и максимального относительного сдвига –  $b$ ) при увеличении толщины внешних несущих слоев  $h_1$ . Нумерация кривых прежняя. Центральный несущий слой – Д16-Т, заполнители – фторопласт-4. При замене дюралюминия на более жесткие материалы скорость уменьшения максимальных прогибов и относительных сдвигов возрастает с увеличением толщины несущих внешних слоев.

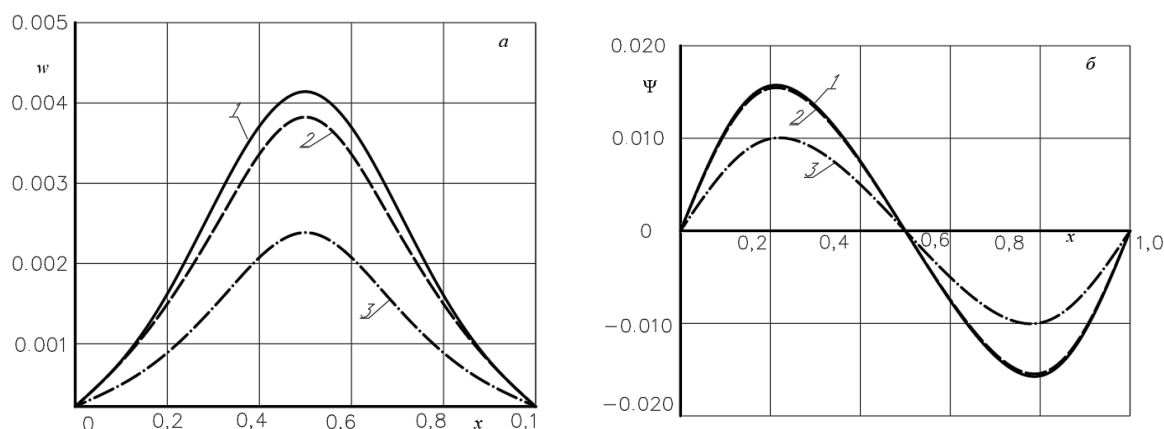
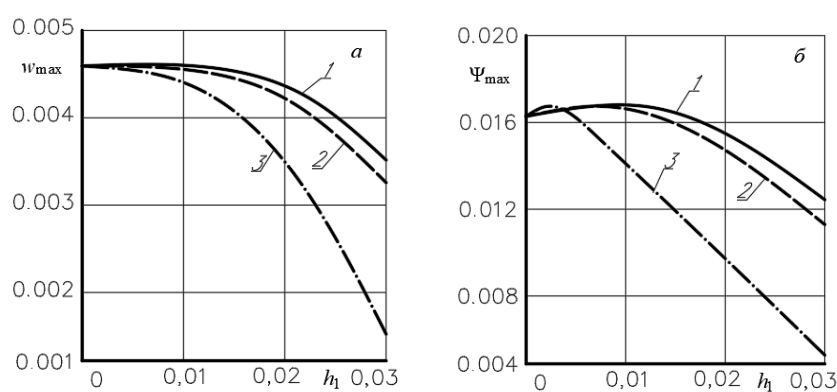


Рисунок 3.1. – Изменение перемещений по длине стержня

Рисунок 3.2. – Изменение максимальных перемещений в зависимости от толщины внешних несущих слоев  $h_1$ 

### Выводы

Предложенная система дифференциальных уравнений равновесия, полученное аналитическое решение и проведенный численный анализ позволяют исследовать перемещения при изгибе пятислойного упругого стержня с двумя заполнителями, симметричного по толщине.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.
2. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
3. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body // M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.

5. *Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields* / E.I. Starovoitov, M.A. Zhuravkov, D.V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd, 2024. – 384 p.

6. *Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках* / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель: БелГУТ, 2024. – 395 с.

7. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А.В. Яровая. – Гомель: БелГУТ, 2013. – 447 с.

8. *Vibrations of sandwich beam on an elastic foundation* / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.

9. Старовойтов, Э.И. Особенности колебания трехслойного стержня при локальных и импульсных воздействиях / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 122–129.

10. Старовойтов, Э.И. Свободные колебания в нейтронном потоке круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Проблемы

машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 2. – С. 92–97.

11. *Tarlovskii, D.V.* Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.

12. *Fedotenkov, G.V.* Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlovskii, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, № 4. – P. 439–447.

13. *Paimushin, V.N.* Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V.N. Paimushin, R.K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, № 3. – P. 407–436.

14. *Kaplunov, J.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate / J. Kaplunov, D.A. Prikazchikov, L.A. Prikazchikova // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol. 113–114. – P. 169–179.

15. *Ерофеев, В.И.* О некоторых кинематических и энергетических соотношениях для волн, распространяющихся в упругих системах / В.И. Ерофеев, Е.Е. Лисенкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2025. – Т. 65, № 5. – С. 641–653.

16. *Лачугина, Е.А.* Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – № 16. – С. 111–116.

17. *Лачугина, Е.А.* Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

18. *Будникова, Д.А.* Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 33–39.

19. *Захарчук, Ю.В.* Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

20. *Нестерович, А.В.* Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.

21. *Старовойтов, Э.И.* Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62.

22. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

23. *Козел, А.Г.* Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

24. *Старовойтов, Э.И.* Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

25. *Салицкий, В.С.* Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

26. *Суслов, К.В.* Методика решения задачи о равновесии пятислойного симметричного по толщине стержня / К. В. Суслов // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 134–139.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».*

*Поступила в редакцию 17.07.2025.*

#### Информация об авторах

*Старовойтов Эдуард Иванович* – д.ф.-м.н., профессор  
*Суслов Константин Валерьевич* – магистрант