

ТЕОРЕМА ФОСТЕРА ДЛЯ АНТЕННЫ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**С.Л. Соловцов¹, И.А. Фаняев¹, В.П. Кудин²**¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины²Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого**FOSTER'S THEOREM FOR A FREE-SPACE ANTENNA****S.L. Solovtsov¹, I.A. Fanyaev¹, V.P. Kudzin²**¹Francisk Skorina Gomel State University²Sukhoi State Technical University of Gomel

Аннотация. Рассматривается обобщение теоремы Фостера на случай антенны, излучающей в свободное пространство. Показано, что производная по частоте от фазы коэффициента отражения на входе антенны является положительной величиной и пропорциональна временной задержке излучаемого радиоимпульса. На основе леммы Лоренца и анализа энергетического баланса в объёме, окружающем антенну, выведено соотношение, связывающее эту задержку с запасом реактивной энергии в ближней зоне антенны. Полученное соотношение позволяет экспериментально определять время задержки по измеренным параметрам коэффициента отражения и использовать эту величину в качестве диагностической и сравнительной характеристики антенн. Теорема имеет практическую ценность для проектирования антенн и понимания фундаментальных физических ограничений.

Ключевые слова: теорема Фостера, антenna, вектор Пойнтинга, фаза коэффициента отражения, время задержки, радиоимпульс.

Для цитирования: Соловцов, С.Л. Теорема Фостера для антенн в свободном пространстве / С.Л. Соловцов, И.А. Фаняев, В.П. Кудин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 47–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_47. – EDN: WJVEXT

Abstract. A generalization of Foster's theorem to the case of an antenna radiating into free space is considered. It is demonstrated that the frequency derivative of the phase of the antenna input reflection coefficient is a positive quantity and is proportional to the time delay of the radiated radio pulse. By employing the Lorentz reciprocity lemma and analyzing the energy balance within a volume surrounding the antenna, a relationship is derived that links this time delay to the stored reactive energy in the antenna's near field. The obtained relation enables experimental determination of the time delay from measured reflection coefficient parameters and permits the use of this quantity as a diagnostic and comparative metric for antennas. The theorem holds practical significance for antenna design and for understanding fundamental physical limitations.

Keywords: Foster's theorem, antenna, Poynting vector, reflection coefficient phase, delay time, radio pulse.

For citation: Solovtsov, S.L. Foster's theorem for a free-space antenna / S.L. Solovtsov, I.A. Fanyaev, V.P. Kudzin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 47–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_47 (in Russian). – EDN: WJVEXT

Введение

В классической теории цепей и пассивных линейных систем широко известна теорема Фостера [1], утверждающая, что для любого пассивного двухполюсника без потерь производная реактивного сопротивления (или проводимости) по частоте строго положительна. Эта теорема является прямым следствием принципа положительности запасённой реактивной энергии и играет ключевую роль при анализе резонансных цепей, синтезе фильтров и оценке физической реализуемости импедансов [2], [3]. Однако её применение традиционно ограничено закрытыми или внутренними цепями, где энергия локализована в реактивных элементах (индуктивностях и ёмкостях), а излучение отсутствует.

В то же время, антenna, как физическая система, принципиально отличается от классического

двухполюсника: она представляет собой открытую электродинамическую структуру, предназначенную для преобразования энергии источника в излучаемые электромагнитные волны. В такой системе энергия не только запасается в ближней зоне в виде реактивных полей, но и непрерывно уходит в дальнюю зону в виде излучения. Это делает прямое применение классической теоремы Фостера к антеннам некорректным и требует её обобщения с учётом излучательных процессов.

Несмотря на значительный прогресс в антенной теории и теории электромагнитного излучения, в доступной литературе отсутствует строгое обобщение теоремы Фостера на случай антенн, излучающей в свободное пространство. Большинство работ, посвящённых анализу частотных характеристик антенн, ограничиваются

либо численным моделированием, либо эмпирическими оценками ширины полосы пропускания и добротности [4], [5]. В то же время понимание связи между фазой коэффициента отражения, запасённой реактивной энергией и временной задержкой излучаемого сигнала имеет фундаментальное значение как для теории, так и для практики – особенно в задачах сверхширокополосной связи, импульсной радиолокации и миниатюризации антенн.

Интерес к этой проблеме возобновился в контексте анализа фундаментальных пределов антенн. В работах [6]–[8] показано, что минимально достижимая добротность антенны связана с объёмом её реактивного поля и определяет пределы полосы пропускания и временной дисперсии. Особенно актуальной становится связь между временной задержкой радиоимпульса и фазовой характеристикой коэффициента отражения, поскольку именно эта задержка определяет искажения сигнала в импульсных системах.

В настоящей работе предлагается обобщение теоремы Фостера на случай антennы в свободном пространстве. Показано, что производная по частоте от фазы коэффициента отражения на входе антennы является положительной величиной и пропорциональна временной задержке излучаемого радиоимпульса. На основе леммы Лоренца и анализа энергетического баланса в объёме, окружающем антенну, выведено соотношение, связывающее эту задержку с запасом реактивной энергии в ближней зоне. Полученный результат позволяет экспериментально определять временную задержку по измеренным S -параметрам и использовать её в качестве диагностической и сравнительной характеристики антenn. Теорема имеет не только теоретическую, но и практическую ценность для проектирования антenn, особенно в условиях жёстких требований к временной и частотной стабильности сигнала.

1 Формулировка задачи

Пусть поле \vec{E}_1 , \vec{H}_1 – поле антennы на частоте ω_1 , \vec{E}_2 , \vec{H}_2 – на частоте ω_2 . Поле \vec{E}_2^* , $-\vec{H}_2^*$, удовлетворяет уравнениям Максвелла, поэтому можно применить лемму Лоренца к полям \vec{E}_1 , \vec{H}_1 и \vec{E}_2^* , $-\vec{H}_2^*$ в объеме V .

Поверхности, ограничивающие V (рисунок 1.1), состоят из S_R , которая охватывает антенну во внешнем пространстве, S_a – поверхность антennы, условно изображенной в виде рупора, повторяющая идеально проводящую конструкцию антennы, и участок S_ϕ – поперечное сечение питающего волновода, \vec{n} – нормаль.

Учитывая, что в объеме V отсутствуют стоячие токи и на поверхности S_a тангенциальная

составляющая поля \vec{E} равна нулю, лемма Лоренца примет следующий вид:

$$\int_{S_\phi + S_R} \left\{ \left[\vec{E}_2^* \vec{H}_1 \right] + \left[\vec{E}_1 \vec{H}_2^* \right] \right\} d\vec{S} = \\ = i(\omega_2 - \omega_1) \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV. \quad (1.1)$$

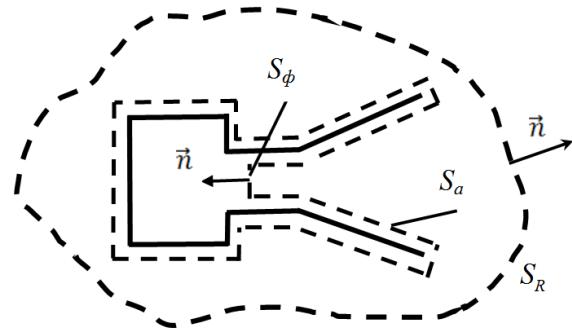


Рисунок 1.1 – Рупорная антenna в свободном пространстве

В сечении волновода S_ϕ поля представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= a_1 \vec{e} + b_1 \vec{e}^*; \\ \vec{E}_2^* &= a_2^* \vec{e}^* + b_2^* \vec{e}; \\ \vec{H}_1 &= a_1 \vec{h} - b_1 \vec{h}^*; \\ -\vec{H}_2^* &= -a_2^* \vec{h}^* + b_2^* \vec{h}, \end{aligned}$$

где \vec{e} , \vec{h} – поле рабочего типа волны; a_1 , b_1 – амплитуды падающей от генератора на антенну и отраженной волны на частоте ω_1 ; a_2 , b_2 – амплитуды на частоте ω_2 .

Примем условия нормировки (учитывая направление нормали \vec{n})

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{S_\phi} \left[\vec{e} \vec{h}^* \right] d\vec{S} \right) = 1.$$

После вставки в (1), получим

$$4a_1 a_2^* (1 - \Gamma_1 \Gamma_2^*) = \oint_{S_\phi} \left\{ \left[\vec{E}_2^* \vec{H}_1 \right] + \left[\vec{E}_1 \vec{H}_2^* \right] \right\} d\vec{S} - \\ - i(\omega_2 - \omega_1) \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV, \quad (1.2)$$

где $\Gamma = \frac{b}{a}$ – коэффициент отражения в волноводе,

$\Gamma = |\Gamma| e^{-i\varphi}$, φ – фаза коэффициента отражения.

2 Доказательство теоремы Фостера для антennы

Предположим, что поверхность S_R – сфера радиусом R в дальней зоне антennы. Учитывая связь \vec{E} и \vec{H} в этой области, получим

$$1 - \Gamma_1 \Gamma_2^* = \frac{1}{2w a_1 a_2} \oint_{S_\phi} (\bar{E}_1 \bar{E}_2^*) dS - \\ - i \frac{\omega_2 - \omega_1}{4 a_1 a_2^*} \int_V (\varepsilon \bar{E}_1 \bar{E}_2^* + \mu \bar{H}_1 \bar{H}_2^*) dV, \quad (2.1)$$

где $w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ – волновое сопротивление пространства.

Представим поле \bar{E} антенны в дальней зоне в виде

$$\bar{E}(R, \theta, \varphi) = \bar{\xi}(\theta, \varphi) \frac{e^{-ik(R+\Delta)}}{R}. \quad (2.2)$$

Здесь $\bar{\xi}(\theta, \varphi)$ определяет ненормированную амплитудно-фазовую и поляризованную характеристику антенны в зависимости от угловых координат; $\Delta \ll R$ – разность хода между точкой в сечении S_ϕ фидера антенны и началом выбранной системы координат R, θ, φ .

После подстановки (2.2) в (2.1) получаем

$$\frac{1 - \Gamma_1 \Gamma_2^*}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{2w a_1 a_2} \int_{4\pi} \left(\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2^* \right) e^{i(R+\Delta)(k_2 - k_1)} \frac{d\Omega}{\omega_2 - \omega_1} - \\ - \frac{i}{4 a_1 a_2^*} \int_V (\varepsilon \bar{E}_1 \bar{E}_2^* + \mu \bar{H}_1 \bar{H}_2^*) dV. \quad (2.3)$$

Далее выделим мнимую часть (2.3) и найдём предел $\omega_1 \rightarrow \omega_2$:

$$-|\Gamma|^2 \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{(R + \Delta)\sqrt{\varepsilon\mu}}{2w|a|^2} \oint_{4\pi} |\bar{\xi}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega - \\ - \frac{1}{4|a|^2} \int_V (\varepsilon |\bar{E}|^2 + \mu |\bar{H}|^2) dV. \quad (2.4)$$

Учитывая баланс энергии

$$|a|^2 (1 - |\Gamma|^2) = \frac{1}{2w} \oint_{4\pi} |\bar{\xi}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$$

получим

$$-|\Gamma|^2 \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu} (R + \Delta) (1 - |\Gamma|^2) - \\ - \frac{1}{4|a|^2} \int_V (\varepsilon |\bar{E}|^2 + \mu |\bar{H}|^2) dV. \quad (2.5)$$

В свободном пространстве $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$, где c – скорость света.

Формулу (2.5) перепишем в виде

$$\frac{|\Gamma|^2}{1 - |\Gamma|^2} \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \\ = \frac{1}{4} \int_V (\varepsilon |\bar{E}|^2 + \mu |\bar{H}|^2) dV - \frac{(R + \Delta)}{c}. \quad (2.6)$$

Здесь в первом слагаемом в правой части числитель – полная энергия электромагнитного поля в объеме V , а знаменатель – излучаемый

антеннной поток мощности, их отношение имеет размерность времени. Поэтому обозначим

$$\frac{\frac{1}{4} \int_V (\varepsilon |\bar{E}|^2 + \mu |\bar{H}|^2) dV}{|a|^2 (1 - |\Gamma|^2)} = t. \quad (2.7)$$

Это время, требуемое для заполнения электромагнитным полем объема V с момента включения генератора, питающего антенну. В результате получим

$$\frac{|\Gamma|^2}{1 - |\Gamma|^2} \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = t - t_0, \quad (2.8)$$

где $t_0 = \frac{(R + \Delta)}{c}$ – время распространения сигнала от точки в сечении S_ϕ волноводе антенны до точки наблюдения в дальней зоне расходящейся сферической волны (2.2) на расстоянии R в выбранной системе координат.

Отметим, что в левой части (2.8) присутствуют экспериментально измеряемые параметры сигнала в волноводном тракте антенны. Проведя соответствующие измерения, можно определить разность

$$t - t_0 \geq 0, \quad (2.9)$$

так как c – максимальная скорость распространения сигналов.

Из (2.8), (2.9) следует неравенство

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \geq 0. \quad (2.10)$$

Время $\Delta t = t - t_0$ можно интерпретировать как задержку сигнала антенной данного типа (данной конструкции) при передаче радиоимпульсов по сравнению со скоростью света, что нужно учитывать, например, в радиолокации.

Конструкция антенны определяет в том числе количество запасаемой мнимой реактивной энергии в ближней зоне антенны [9]. Эта энергия влияет на величину объемного интеграла в (2.7) и увеличивает время t по сравнению с t_0 , что и является причиной задержки радиоимпульса.

Действительно, в промежуточной и дальней зоне антенны её электромагнитное поле имеет поперечный характер локально-плоской волны, вектор Пойнтинга направлен радиально и его мнимая часть равна нулю [9]

$$\frac{1}{2} [\bar{E} \bar{H}^*] \bar{R}_0 = \frac{1}{4w} |\bar{E}|^2 \bar{R}_0, \text{ а также } |\bar{H}|^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} |\bar{E}|^2.$$

Баланс энергии антенны выполняется для любой сферы интегрирования S_R с радиусом

$$R_\delta \leq R \leq \infty : \quad |a|^2 (1 - |\Gamma|^2) = \frac{1}{2w} \oint_{S_R} |\bar{E}|^2 dS, \quad \text{где}$$

$R_\delta = \frac{D}{4} + \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$ – верхняя граница ближней зоны, D – максимальный размер антенны.

Рассмотрим в (2.7) часть объемного интеграла, включающего только промежуточную и дальнюю зоны антенны. С учетом вышеперечисленных допущений получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{V_{np} + V_A} \left(\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right) dV = \\ = \frac{\epsilon}{2} \int_{R_\delta}^R dR \oint_{S_R} |\vec{E}|^2 dS = \frac{R - R_\delta}{c} |a|^2 (1 - |\Gamma|^2). \end{aligned}$$

Это означает, что расстояние от R_δ до R сигнал преодолевает со скоростью света.

Таким образом, промежуточная и дальняя зоны антенны не влияют на величину задержки радиоимпульса. Кстати, это открывает возможность использования компактного полигона для прямых измерений времени Δt задержки радиоимпульса с применением выносного приемного зонда, либо отражающей цели на расстоянии $R \geq R_\delta$.

В ближней зоне для расчета электромагнитного поля антенны, которое может иметь все пространственные составляющие, следует применять строгие формулы, вектор Пойнтинга становится комплексным, движение энергии имеет сложный характер [9].

Теоретическое излучение конкретных антенн и определение влияния ближнего поля на их входные характеристики не всегда возможно из-за трудности создания адекватных математических моделей и громоздкости расчетов.

Формула (2.8) открывает реальные возможности экспериментальных исследований в этом направлении и использовании времени задержки радиоимпульсов Δt в качестве одной из характеристик антенн.

Заключение

В настоящей работе показано, что производная по частоте от фазы коэффициента отражения на входе произвольной антенны представляет собой положительную величину, пропорциональную временной задержке радиоимпульса, излучаемого антенной. Эта задержка обусловлена тем, что конструкция антенны определяет количество реактивной энергии, запасаемой в её ближней зоне. Именно запас реактивной энергии в окрестности антенны является физической причиной наблюдаемой временной задержки излучаемого импульса.

Полученное соотношение (2.8) открывает возможности для экспериментальных исследований в данной области и позволяет использовать измеряемую величину временной задержки радиоимпульсов Δt в качестве одной из диагностических и сравнительных характеристик антенн.

Таким образом, доказательство теоремы Фостера представляет собой не просто формальную математическую процедуру, а обладает значительной практической ценностью. Данная теорема может служить критерием физической корректности, выступать как эффективный инструмент проектирования, а также способствовать пониманию фундаментальных физических ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Foster, R.M. A reactance theorem / R.M. Foster // Bell System technical journal. – 1924. – Vol. 3, № 2. – P. 259–267.
2. Альтман, Д.Л. Устройства сверхвысоких частот: пер. с англ. / Д.Л. Альтман. – Москва: Мир, 1968. – 488 с.
3. Collin, R.E. Foundations for microwave engineering: 2-ed. / R.E. Collin. – NY: John Wiley & Sons, 2001. – 945 p.
4. Capek, M. Stored electromagnetic energy and quality factor of radiating structures / M. Capek, L. Jelinek, G.A.E. Vandebosch // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2016. – Vol. 472, № 2188. – P. 20150870.
5. Best, S.R. The Foster reactance theorem and quality factor for antennas / S.R. Best // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2004. – Vol. 3. – P. 306–309.
6. Geyi, W. The Foster reactance theorem for antennas and radiation Q / W. Geyi, P. Jarmuszewski, Y. Qi // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2002. – Vol. 48, № 3. – P. 401–408.
7. Study of generalized resonance in multi-antenna system and generalized Foster reactance theorem / L. Li, H.-X. Liu, Y. Shi, C.-H. Liang // Progress In Electromagnetics Research. – 2005. – Vol. 52. – P. 255–276.
8. Reincorporating circuit theory into information theory / A. Mezghani [et al.] // IEEE BITS the Information Theory Magazine. – 2023. – Vol. 4. – P. 40–58.
9. Сазонов, Д.М. Антенны и устройства СВЧ: учебник для радиотехнических спец. вузов / Д.М. Сазонов. – Москва: Высшая школа, 1988. – 432 с.

Работа выполнена в рамках проекта БРФФИ № Ф24КИТГ-005.

Поступила в редакцию 10.10.2025.

Информация об авторах

Соловцов Сергей Леонидович – научный сотрудник
Фаняев Иван Александрович – к.т.н., доцент
Кудин Виктор Пантелейевич – д.т.н., профессор