

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ

В.С. Салицкий

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

EQUATIONS OF EQUILIBRIUM OF AN ELASTIC-PLASTIC PENTALAYER SYMMETRIC IN THICKNESS PLATE

V.S. Salicki

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Предложена постановка краевой задачи об изгибе симметричной по толщине упругопластической круглой пятислойной пластины с двумя заполнителями. Деформирование внутреннего и внешних несущих слоев подчиняется гипотезам Кирхгофа. В сравнительно толстых заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия пластины получена вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителях. Для ее решения предложен итерационный метод, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Искомые функции являются прогиб пластины и относительный сдвиг в заполнителях.

Ключевые слова: круглая пятислойная пластина, симметрия по толщине, упругопластическое деформирование, уравнения равновесия.

Для цитирования: Салицкий, В.С. Уравнения равновесия упругопластической пятислойной симметричной по толщине пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 42–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_42. – EDN: VWYSNY

Abstract. The paper proposes a formulation of the boundary value problem for the bending of a thickness-symmetric elastoplastic circular five-layer plate with two fillers. The deformation of the inner and outer load-bearing layers is governed by Kirchhoff's hypotheses. In the relatively thick fillers, Timoshenko's hypothesis is assumed. The physical state equations correspond to the theory of small elastoplastic deformations. The system of nonlinear differential equations of plate equilibrium is obtained with the variational method of Lagrange, taking into account the work of tangential stresses in the fillers. An iterative method based on the Ilyushin method of elastic solutions is proposed to solve this problem. The sought functions are the deflection of the plate and the relative shear in the fillers.

Keywords: circular five-layer plate, thickness symmetry, elastic-plastic deformation, equations of equilibrium.

For citation: Salicki, V.S. Equations of equilibrium of an elastic-plastic pentalayer symmetric in thickness plate / V.S. Salicki // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 42–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_42 (in Russian). – EDN: VWYSNY

Введение

Слоистые элементы конструкций широко применяются в различных областях современной техники и строительства. Это потребовало разработку методик их расчета при различных внешних воздействиях. В монографиях [1]–[8] предлагаются подходы к разработке расчетных моделей трехслойных конструкций, выполненных из композитных материалов, проявляющих в процессе деформирования физически нелинейные свойства. Несущие слои, как правило, приняты тонкими, достаточно жесткими, подчиняющимися гипотезам Бернулли (Кирхгофа). В легких заполнителях справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация относительного сдвига.

В статьях [9]–[11] рассмотрены особенности колебаний трехслойных стержней, связанных

с упругим основанием и находящихся под действием локальных, импульсных и нестационарных нагрузок. Свободные и собственные колебания трехслойных и пятислойных пластин и стержней исследованы в работах [12]–[14]. Для решения соответствующих начально-краевых задач использован метод разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций. В статьях [15]–[17] исследованы динамические характеристики цилиндрических и сферических оболочек с учетом влияния упругого основания и нестационарного контактного взаимодействия.

Деформирование трехслойных пластин, связанных с упругим основанием исследовано в публикациях [18]–[20].

Изгиб упругой круглой пятислойной симметричной по толщине пластины непрерывными

и локальными нагрузками рассмотрен в статьях [21]–[24]. Здесь приводится нелинейная система дифференциальных уравнений равновесия симметричной по толщине упругопластической пятислойной пластины.

1 Постановка задачи

В пятислойной, симметричной по толщине пластине введена цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1.1). В достаточно тонких жестких несущих слоях (1, 2, 4) справедливы гипотезы Кирхгофа. Для описания деформирования сравнительно толстых заполнителей (3, 5) используется гипотеза Тимошенко, учитывающая поворот нормали на дополнительный угол $\psi(r)$ – относительный сдвиг. Искомые функции являются прогиб пластины $w(r)$ и $\psi(r)$. Осесимметричная нагрузка $q(r)$ распределена по поверхности пластины. На контуре ($r = r_0$) принимается наличие жесткой диафрагмы, которая не допускает относительный сдвиг ($\psi = 0$). Через h_k – обозначена толщина k -го слоя, причем $h_2 = h_4$, $h_3 = h_5$.

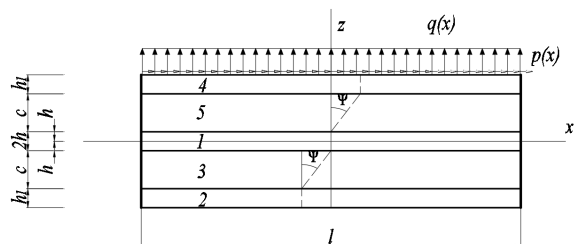


Рисунок 1.1 – Расчетная схема и нумерация слоев в пятислойной пластине

Из гипотезы Тимошенко о прямолинейности нормалей заполнителей следует

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(5)} &= u_{r,z}^{(5)} + w_{,r} = \psi, \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} &= u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\psi(r)$ – относительный сдвиг в заполнителях (3), (5), запятой в индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней координате, числовые индексы здесь и далее, если другое не указано, обозначают номера слоев.

После интегрирования соотношений (1.1) получим формулы для вычисления радиальных перемещений $u_r^{(k)}$ в слоях:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= -zw_{,r} + h_3\psi, \quad \frac{h_1}{2} + h_5 \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5 + h_4; \\ u_r^{(5)} &= -zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi, \quad \frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5; \\ u_r^{(1)} &= -zw_{,r}, \quad -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2}; \\ u_r^{(3)} &= -zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi, \quad -\frac{h_1}{2} - h_3 \leq z \leq -\frac{h_1}{2}; \end{aligned}$$

$$u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi, \quad -\frac{h_1}{2} - h_3 - h_2 \leq z \leq -\frac{h_1}{2} - h_3; \quad (1.2)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $h_3\psi$, $-h_3\psi$ – величины смещений верхнего и нижнего несущих слоев за счет относительного сдвига в предстоящих заполнителях.

Искомые функции являются прогиб пластины $w(r)$, радиальное перемещение $u(r)$, относительные сдвиги $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$. Деформации следуют из (1.2) и соотношений Коши [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(4)} &= -zw_{,rr} + h_3\psi_{1,r}, \quad \varepsilon_\phi^{(4)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} + h_3\psi_1), \\ \varepsilon_{rz}^{(4)} &= 0, \quad \varepsilon_r^{(5)} = -zw_{,rr} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_{1,r}, \\ \varepsilon_\phi^{(5)} &= \frac{1}{r}\left(-zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_1\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{\psi}{2}, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = -\frac{1}{r}zw_{,r}, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= -zw_{,rr} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_{2,r}, \\ \varepsilon_\phi^{(3)} &= \frac{1}{r}\left(-zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_2\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{\psi}{2}, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= -zw_{,rr} - h_3\psi_{2,r}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} - h_3\psi_2), \\ \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1], которые справедливы также и для нелинейно упругих материалов при прямом нагружении:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}\right)\right) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \phi; k = 1, \dots, 5), \\ s_{rz}^{(3)} &= G_3 \left(1 - \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3)}\right)\right) \psi_2, \\ s_{rz}^{(5)} &= 2G_3 \left(1 - \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(5)}\right)\right) \psi_1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $s_{rz}^{(5)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторы, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев, причем материалы внешних несущих слоев одинаковы, заполнители тоже ($G_3 = G_5$, $K_3 = K_5$); $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций, в нашем случае

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\varepsilon_\phi^{(k)}\right)^2 + \left(\varepsilon_r^{(k)}\right)^2 - \varepsilon_r^{(k)} \varepsilon_\phi^{(k)} + 3\left(\varepsilon_{rz}^{(k)}\right)^2},$$

причем $\varepsilon_{rz}^{(1)} = \varepsilon_{rz}^{(2)} = \varepsilon_{rz}^{(4)} = 0$; $\omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}\right)$ – функции пластичности и физической нелинейности материалов слоев, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ обращаются в ноль; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести

материалов несущих слоев; $\varepsilon_s^{(k)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителей.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ Q &= \int_{h_5} \sigma_{rz}^{(5)} dz + \int_{h_3} \sigma_{rz}^{(3)} dz, \\ H_\alpha &= h_3 (T_\alpha^{(4)} - T_\alpha^{(2)}) - \frac{h_1}{2} (T_\alpha^{(5)} - T_\alpha^{(3)}) + \\ &\quad + M_\alpha^{(5)} + M_\alpha^{(3)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия во внутренних обобщенных усилиях рассматриваемой упругой пластины была получена с использованием принципа возможных перемещений Лагранжа в [26]:

$$\begin{aligned} H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_\varphi) - Q &= 0; \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На границе $r = 1$ должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} H_r &= H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) &= Q^0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Система уравнений (1.6) и силовые граничные условия (1.7) будут справедливы и в рассматриваемом случае, т. к. при их выводе не были использованы физические уравнения связи напряжений с деформациями.

Используя соотношения (1.4), выразим компоненты тензора напряжений в слоях пластины через девиаторную, шаровую части тензора деформаций и нелинейную составляющую:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} - 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)} \\ (\alpha &= r, \varphi; k = 1, \dots, 5), \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \\ \sigma_{rz}^{(5)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(5)} - 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Выделим в компонентах тензора напряжений (1.8) упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{a\omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, \dots, 5), \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(5)} = \sigma_{rze}^{(5)} - \sigma_{rz\omega}^{(5)}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ae}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \\ \sigma_{a\omega}^{(k)} &= 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \\ \sigma_{rze}^{(5)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(5)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}. \end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты (1.5) в слоях пластины также разложим на линейную (индекс «е») и нелинейную (индекс «ω») составляющие:

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(k)} &= T_{ae}^{(k)} - T_{a\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{a\omega}^{(k)}, \\ Q_i &= Q_{ie} - Q_{i\omega}, \\ (\alpha &= r, \varphi; i = 1, 2; k = 1, \dots, 5), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где упругие $T_{ae}^{(k)}, M_{ae}^{(k)}, Q_{ie}$ и нелинейные составляющие $T_{a\omega}^{(k)}, M_{a\omega}^{(k)}, Q_{i\omega}$ вычисляются по интегральным формулам (1.5), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{ae}^{(k)}$ и $\sigma_{a\omega}^{(k)}$, или $\sigma_{rze}^{(i)}$ на $\sigma_{rze}^{(i)}$ и $\sigma_{rz\omega}^{(i)}$ из соотношений (1.9).

После этого соответствующие обобщенные внутренние усилия, будут

$$\begin{aligned} T_\alpha &= T_{ae} - T_{a\omega} \equiv \sum_{k=1}^5 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^5 T_{a\omega}^{(k)}, \\ M_\alpha &= M_{ae} - M_{a\omega} \equiv \sum_{k=1}^5 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^5 M_{a\omega}^{(k)}, \\ H_\alpha &= H_{ae} - H_{a\omega}, \\ H_{ae} &= h_3 (T_{ae}^{(4)} - T_{ae}^{(2)}) - 0,5 (T_{ae}^{(5)} - T_{ae}^{(3)}) + \\ &\quad + M_{ae}^{(5)} + M_{ae}^{(3)}, \\ H_{a\omega} &= h_3 (T_{a\omega}^{(4)} - T_{a\omega}^{(2)}) - 0,5 h_1 (T_{a\omega}^{(5)} - T_{a\omega}^{(3)}) + \\ &\quad + M_{a\omega}^{(5)} + M_{a\omega}^{(3)}, \\ Q_\alpha &= Q_{ae} - Q_{a\omega}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Так как уравнения равновесия в усилиях пятислойной пластины (1.6) и граничные условия (1.7) были получены без привлечения физических уравнений состояния, то ими можно воспользоваться и для упругопластической пластины. Подставив в них выражения для внутренних усилий (1.8), получим

$$\begin{aligned} H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_\varphi) - Q &= p + h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (1.12)$$

На границе $r = 1$ должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} H_r &= H_r^0 + H_{r\omega}, \quad M_r = M_r^0 + M_{r\omega}, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) &= \\ &= Q^0 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь левая часть уравнений содержит линейные составляющие внутренних усилий, в которых нижний индекс «е» опущен для простоты. Справа сосредоточены члены с нижним индексом «ω», в которые включены добавки, отражающие физическую нелинейность материалов несущих слоев и заполнителя:

$$h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega,$$

$$q_\omega = M_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega},_r - M_{\phi\omega},_r). \quad (1.14)$$

Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения формулами, введенными в [25]–[28], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (1.12), сохраняет левую часть и приводится к виду:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= p + h_\omega, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (1.15)$$

где коэффициенты и операторы

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \\ a_5 &= \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 &= \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r \right),_r \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g),_r),_r \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Для замыкания краевой задачи к системе (1.15) необходимо добавить силовые (1.14) либо кинематические граничные условия.

2 Методика решения задачи

Точное решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (1.15) с граничными условиями (1.14) получить не представляется возможным, поэтому необходимо для ее исследования применять численные или приближенные методы.

Предполагается для решения применить алгоритм приближенного решения задачи, основанный на методе упругих решений Ильюшина, который позволяет на каждом шаге итерации рассматриваемую задачу сводить к соответствующей задаче теории упругости с некоторыми дополнительными «внешними» нагрузками. В этом случае система дифференциальных уравнений (1.15) принимает следующий рекуррентный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi^{(n)} - a_5w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3\psi^{(n)} &= p + h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_5\psi^{(n)} - a_6w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_\omega^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где n – номер приближения.

Нелинейные добавки $q_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$ вычисляются на каждом шаге итерации по результатам предыдущего приближения по формулам типа (1.14) с учетом соотношений (1.11):

$$h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}) - Q_\omega^{(n-1)},$$

$$q_\omega^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)},_r - M_{\phi\omega}^{(n-1)},_r). \quad (2.2)$$

С силовыми граничными условиями (1.13) необходимо проделать подобную операцию.

Выводы

Предложенная система дифференциальных уравнений равновесия и методика ее решения позволяют при изгибе исследовать перемещения в пятислойной упругопластической пластине симметричной по толщине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.
2. Тарлаковский, Д.В. Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости: учебное пособие / Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; Федеральное агентство по образованию, Московский авиационный ин-т (гос. технический ун-т). – Москва: Изд-во МАИ-Принт, 2009. – 111 с.
3. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
4. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body / M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoirov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
5. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузках / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
6. Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields // E.I. Starovoirov, M.A. Zhuravkov, D.V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd, 2024. – 384 p.
7. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель: БелГУТ, 2024. – 395 с.
8. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А.В. Яровая. – Гомель: БелГУТ, 2013. – 447 с.
9. Старовойтов, Э.И. Особенности колебания трехслойного стержня при локальных и импульсных воздействиях / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 122–129.
10. Vibrations of sandwich beam on an elastic foundation / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, E.I. Starovoirov, D.V. Leonenko // International

Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.

11. Fedotenkov, G.V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovsky, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40. – № 4. – P. 439–447.

12. Старовойтов, Э.И. Свободные колебания в нейтронном потоке круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 2. – С. 92–97.

13. Будникова, Д.А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.

14. Лачугина, Е.А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных креплениях контура / Е.А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.

15. Leonenko, D. V. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367. – DOI: 10.1007/s10778-016-0760-8.

16. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.

17. Михайлова, Е.Ю. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 160, № 3. – С. 561–577.

18. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом

основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62.

19. Starovoitov, E.I. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.

20. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

21. Салицкий, В.С. Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2022. – Вып. 15 – С. 209–213.

22. Салицкий, В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 2023. – Вып. 38 – С. 234–239.

23. Салицкий, В.С. Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 114–119.

24. Салицкий, В.С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

Поступила в редакцию 10.09.2025.

Информация об авторах

Салицкий Владислав Сергеевич – аспирант