МАТЕМАТИКА

УДК 517.934
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_75
EDN: OBWYCA

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

К.Б. Мансимов[1,2], **А.Ф. Мансимзаде**[1]

[1]*Бакинский государственный университет*
[2]*Институт Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана*, *Баку*

AN ANALOGUE OF THE EULER EQUATION AND NECESSARY CONDITIONS FOR SECOND-ORDER OPTIMALITY IN ONE TWO-STAGE CONTROL PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE

K.B. Mansimov[1,2], **A.F. Mansimzade**[1]

[1]*Baku State University*
[2]*Institute of Management Systems of Ministry of Science and Education of Azerbaijan*, *Baku*

Аннотация. Рассматривается одна двухэтапная (ступенчатая) задача оптимального управления, описываемая на двух отрезках времени различными интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. При предположении открытости области управления вычислены первая и вторая вариации функционала качества типа Больца. Получен аналог уравнения Эйлера (необходимое условие оптимальности первого порядка). Используя условие не отрицательности второй вариации функционала качества вдоль оптимального управления, доказан ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка. Изучен случай классически особых управлений.

Ключевые слова: *ступенчатая задача оптимального управления*, *интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра*, *вариация функционала*, *аналог уравнения Эйлера*, *оптимальное управление*, *особое в классическом смысле управление*.

Для цитирования: *Мансимов, К.Б.* Аналог уравнения Эйлера и необходимые условия оптимальности второго порядка в одной двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра / К.Б. Мансимов, А.Ф. Мансимзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_75. – EDN: OBWYCA

Abstract. We consider one two-stage (step) optimal control problem, described in two-time intervals by various Volterra-type integro-differential equations. Under the assumption that the control domain is open, the first and second variations of the Boltz-type quality functional are calculated. An analogue of the Euler equation (first order necessary optimality condition) has been received. Using the condition of non-negativity of the second variation of the quality functional along the optimal control, a number of constructively verifiable necessary conditions for second-order optimality are proved. The case of classically singular controls is studied.

Keywords: *stepwise optimal control problem*, *integro-differential equation of Volterra type*, *variation of the functional*, *analogue of the Euler equation*, *optimal control*, *singular control in the classical sense*.

For citation: *Mansimov, K.B.* An analogue of the Euler equation and necessary conditions for second-order optimality in one two-stage control problem for integro-differential equations of Volterra type / K.B. Mansimov, A.F. Mansimzade // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_75 (in Russian). – EDN: OBWYCA

Введение

Многие процессы являются многоэтапными (их называют также ступенчатыми) [1]–[6]. Подобные процессы в различных отрезках времени описываются различными уравнениями. В работах [1]–[6] и др. исследованы ряд ступенчатых задач оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. В этих работах доказаны аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Как известно (см., напр., [7]–[9]), многие модели управляемых динамических систем описываются интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

Выводу ряда необходимых условий оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина в задачах оптимального управления, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями, посвящены работы [10]–[12].

В работе [13] была рассмотрена одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая на различных отрезках времени нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями.

Был доказан аналог принципа максимума, а в случае выпуклости областей управления установлен аналог линеаризованного условия максимума.

В предлагаемой работе аналогичная задача (т. е. задача оптимального управления из [13]) исследуется при предположении открытости областей управления.

Получен аналог уравнения Эйлера (необходимое условие оптимальности первого порядка) [14], [15] и установлено общее необходимое условие оптимальности второго порядка, носящее конструктивный характер.

Отдельно изучен случай особых, в классическом смысле (см., например, [16]–[18]), управлений.

1 Постановка задачи

Предположим, что $T_1=[t_0,t_1]$, $T_1=[t_1,t_2]$ $(t_0<t_1<t_2)$ – заданные отрезки, $U_1\subset R^r, U_2\subset R^q$ – заданные непустые, ограниченные и открытые множества.

Допустим, что ступенчатый процесс описывается двумя системами нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$\dot{x}_1(t)=f_1(t,x_1(t),u_1(t))+ \int_{t_0}^{t}K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))d\tau,\ t\in T_1, \tag{1.1}$$

$$x_1(t_0)=x_{10}, \tag{1.2}$$

$$\dot{x}_2(t)=f_2(t,x_2(t),u_2(t))+ \int_{t_1}^{t}K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))d\tau,\ t\in T_2. \tag{1.3}$$

$$x_2(t_1)=G(x_1(t_1)). \tag{1.4}$$

Здесь $f_i(t,x_i,u_i)$, $K_i(t,\tau,x_i,u_i)$, $i=1,2$ – заданные n-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $(x_i,u_i), i=1,2$ до второго порядка включительно, $G(x_1)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая n-мерная вектор-функция, x_{10} – постоянный вектор, $u_1(t)$ $(u_2(t))$ – $r(q)$-мерный кусочно-непрерывный вектор управляющих функций со значениями из множества $U_1(U_2)$, т. е.

$$u_1(t)\in U_1\subset R^n,\ t\in T_1,$$
$$u_2(t)\in U_2\subset R^q,\ t\in T_2. \tag{1.5}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями, пару $(u_1(t),u_2(t))$ – допустимым управлением.

Будем предполагать, что каждому допустимому управлению $(u_1(t),u_2(t))$ соответствует единственное кусочно-гладкое (в смысле, например, [14]) решение $(x_1(t),x_2(t))$ задачи (1.1)–(1.4).

На решениях задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал типа Больца

$$J(u_1,u_2)=\varphi_1(x_1(t_1))+\varphi_2(x_2(t_2))+ \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}F_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))d\tau\right)dt+ \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t}F_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))d\tau\right)dt. \tag{1.6}$$

Здесь $\varphi_i(x_i), i=1,2$ – заданные дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные функции, $F_i(t,\tau,x_i,u_i)$, $i=1,2$ – скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $(x_i,u_i), i=1,2$ соответственно.

Допустимое управление $(u_1(t),u_2(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (1.6) при ограничениях (1.1)–(1.5), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t),u_2(t),x_1(t),x_2(t))$ – оптимальным процессом.

Целью настоящей работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче оптимального управления.

2 Формула приращения второго порядка критерия качества

Пусть $(u_1(t),u_2(t),x_1(t),x_2(t))$ – некоторый допустимый процесс,

$$\big(\overline{u}_1(t)=u_1(t)+\Delta u_1(t),\ \overline{u}_2(t)=u_2(t)+\Delta u_2(t),$$
$$\overline{x}_1(t)=x_1(t)+\Delta x_1(t),\ \overline{x}_2(t)=x_2(t)+\Delta x_2(t)\big)$$

– произвольный допустимый процесс.

Запишем приращение функционала (1.6), отвечающее допустимым управлениям $(u_1(t),u_2(t))$ и $(\overline{u}_1(t),\overline{u}_2(t))$:

$$\Delta J(u_1,u_2)=J(\overline{u}_1,\overline{u}_2)-J(u_1,u_2)= \sum_{i=1}^{2}\left(\varphi_i(\overline{x}_i(t_i))-\varphi_i(x_i(t_i))\right)+ \sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\int_{t_{i-1}}^{t}\left(F_i(t,\tau,\overline{x}_i(\tau),\overline{u}_i(\tau))- F_i(t,\tau,x_i(\tau),u_i(\tau))\right)d\tau\right)dt. \tag{2.1}$$

В силу введенных обозначений ясно, что приращения $\Delta x_1(t),\Delta x_2(t)$ траекторий $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут соответственно решениями задач

$$\Delta\dot{x}_1(t)=f_1(t,\overline{x}_1(t),\overline{u}_1(t))-f_1(t,x_1(t),u_1(t))+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(K_1(t,\tau,\bar{x}_1(\tau),\bar{u}_1(\tau))-K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right)d\tau, \quad (2.2)$$

$$\Delta x_1(t_0)=0, \quad (2.3)$$

$$\Delta\dot{x}_2(t)=f_2(t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t))-f_2(t,x_2(t),u_2(t))+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left(K_2(t,\tau,\bar{x}_2(\tau),\bar{u}_2(\tau))-K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right)d\tau, \quad (2.4)$$

$$\Delta x_2(t_1)=G(\bar{x}_1(t_1))-G(x_1(t_1)). \quad (2.5)$$

Пусть $\psi_i(t), i=1,2$ – пока неизвестные n-мерные кусочно-гладкие вектор-функции.

Применяя формулу Дирихле (см., например, [15]) доказывается, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}\psi_1'(t)\left(K_1(t,\tau,\bar{x}_1(\tau),\bar{u}_1(\tau))-\right.\right.$$
$$\left.\left.-K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right)d\tau\right)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t}^{t_1}\psi_1'(\tau)\left(K_1(\tau,t,\bar{x}_1(t),\bar{u}_1(t))-\right.\right. \quad (2.6)$$
$$\left.\left.-K_1(\tau,t,x_1(t),u_1(t))\right)d\tau\right)dt,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t}\psi_2'(t)\left(K_2(t,\tau,\bar{x}_2(\tau),\bar{u}_2(\tau))-\right.\right.$$
$$\left.\left.-K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right)d\tau\right)dt=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t}^{t_2}\psi_2'(\tau)\left(K_2(\tau,t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t))-\right.\right. \quad (2.7)$$
$$\left.\left.-K_2(\tau,t,x_2(t),u_2(t))\right)d\tau\right)dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}\left(F_1(t,\tau,\bar{x}_1(\tau),\bar{u}_1(\tau))-F_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right)d\tau\right)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t}^{t_1}\left(F_1(\tau,t,\bar{x}_1(t),\bar{u}_1(t))-\right.\right. \quad (2.8)$$
$$\left.\left.-F_1(\tau,t,x_1(t),u_1(t))\right)d\tau\right)dt,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t}\left(F_2(t,\tau,\bar{x}_2(\tau),\bar{u}_2(\tau))-F_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right)d\tau\right)dt=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t}^{t_2}\left(F_2(\tau,t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t))-\right.\right. \quad (2.9)$$
$$\left.\left.-F_2(\tau,t,x_2(t),u_2(t))\right)d\tau\right)dt.$$

Далее, учитывая начальные условия (2.3) и (2.5), получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi_1'(t)\Delta\dot{x}_1(t)dt=$$
$$=\psi_1'(t_1)\Delta x_1(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}_1'(t)\Delta x_1(t)dt, \quad (2.10)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\psi_2'(t)\Delta\dot{x}_2(t)dt=\psi_2'(t_2)\Delta x_2(t_2)-$$
$$-\psi_2'(t_1)\left(G(\bar{x}_1(t_1))-G(x_1(t_1))\right)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{\psi}_2'(t)\Delta x_2(t)dt. \quad (2.11)$$

Введем аналоги функции Гамильтона – Понтрягина в виде

$$H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))=\psi_i'(t)f_i(t,x_i(t),u_i(t))+$$
$$+\int_{t}^{t_i}\psi_i'(\tau)K_i(\tau,t,x_i(t),u_i(t))d\tau-$$
$$-\int_{t}^{t_i}F_i(\tau,t,x_i(t),u_i(t))d\tau,\ i=1,2.$$

Учитывая тождества (2.7)–(2.11), а также введенные обозначения, приращение (2.1) функционала (1.6) записывается в виде

$$\Delta J(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{2}\left(\varphi_i(\bar{x}_i(t_i))-\varphi_i(x_i(t_i))\right)+$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(H_i(t,\bar{x}_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t))-\right.$$
$$\left.-H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))\right)dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\psi_i'(t_i)\Delta x_i(t_i)-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot{\psi}_i'(t)\Delta x_i(t)dt+$$
$$-\psi_2'(t_1)\left(G(\bar{x}_1(t_1))-G(x_1(t_1))\right). \quad (2.12)$$

Введем обозначение

$$M(\psi_2(t_1),x_1)=\psi_2'(t_1)G(x_1)$$

и преобразуем отдельные слагаемые в формуле приращения (2.12).

Используя формулу Тейлора, получим, что

$$\varphi_i(\bar{x}_i(t_i))-\varphi_i(x_i(t_i))=\frac{\partial\varphi_i'(x_i(t_i))}{\partial x_i}\Delta x_i(t_i)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x_i'(t_i)\frac{\partial^2\varphi_i'(x_i(t_i))}{\partial x_i^2}\Delta x_i(t_i)+o_i\left(\|\Delta x_i(t_i)\|^2\right), \quad (2.13)$$
$$i=1,2,$$

$$H_i(t,\bar{x}_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t))-H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))=$$
$$=\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1}\Delta x_i(t)+$$
$$+\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i}\Delta u_i(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_i}\Delta x_i(t)+$$
$$+2\Delta u_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i\partial x_i}\Delta x_i(t)+$$

$$+\Delta u_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i^2}\Delta u_i(t)+$$

$$+o_{i+2}\left(\left(\left\|\Delta x_i(t)\right\|+\left\|\Delta u_i(t)\right\|\right)^2\right),\ i=1,2,\quad (2.14)$$

$$M\left(\psi_2\left(t_1\right),\bar{x}_1\left(t_1\right)\right)-M\left(\psi_2\left(t_1\right),x_1\left(t_1\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial M'\left(\psi_2\left(t_1\right),x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1}\Delta x_1\left(t_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x_1'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 M\left(\psi_2\left(t_1\right),x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1^2}\Delta x_1\left(t_1\right)+$$

$$+o_5\left(\left\|\Delta x_1(t_1)\right\|^2\right).\quad (2.15)$$

Здесь $\|\alpha\|$ – норма вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o(\alpha^2)$ – величина более высокого порядка малости, чем α^2, т. е. $\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Учитывая разложения (2.13)–(2.15), формула приращения (2.12) функционала (1.6) будет иметь вид:

$$\Delta J\left(u_1,u_2\right)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\varphi_i'\left(x_i\left(t_i\right)\right)}{\partial x_i}\Delta x_i\left(t_i\right)-$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x_i'\left(t_i\right)\frac{\partial^2\varphi_i\left(x_i\left(t_i\right)\right)}{\partial x_i^2}\Delta x_i\left(t_i\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\psi_i'\left(t_i\right)\Delta x_i\left(t_i\right)-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot{\psi}_i'\left(t\right)\Delta x_i\left(t\right)dt-$$

$$-\frac{\partial M'\left(\psi_2\left(t_1\right),x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1}\Delta x_1\left(t_1\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_i}\Delta x_i(t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i}\Delta u_i(t)\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\Delta x_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_i}\Delta x_i(t)+\right.$$

$$+2\Delta u_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i\partial x_i}\Delta x_i(t)+$$

$$\left.+\Delta u_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i^2}\Delta u_i(t)\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta x_1'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 M\left(\psi_2\left(t_1\right),x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1^2}\Delta x_1\left(t_1\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}o_{i+2}\left(\left(\left\|\Delta x_i(t)\right\|+\left\|\Delta u_i(t)\right\|\right)^2\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}o_i\left(\left\|\Delta x_i(t_i)\right\|^2\right)-o_5\left(\left\|\Delta x_1(t_1)\right\|^2\right).\quad (2.16)$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_i\left(t\right)$, $i=1,2$ являются решениями линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_i\left(t\right)=-\frac{\partial H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_i},\quad (2.17)$$

$$i=1,2,\ t\in T_i,$$

$$\psi_1\left(t_1\right)=-\frac{\partial\varphi_1\left(x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial M\left(\psi_2\left(t_1\right),x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1},$$

$$\psi_2\left(t_2\right)=-\frac{\partial\varphi_2\left(x_2\left(t_2\right)\right)}{\partial x_2}.$$

Тогда формула приращения (2.16) принимает вид

$$\Delta J\left(u_1,u_2\right)=-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i}\Delta u_i(t)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Delta x_i'\left(t_i\right)\frac{\partial^2\varphi_i'\left(x_i\left(t_i\right)\right)}{\partial x_i^2}\Delta x_i\left(t_i\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\Delta x_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_i}\Delta x_i(t)+\right.$$

$$+2\Delta u_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i\partial x_i}\Delta x_i(t)+$$

$$\left.+\Delta u_i'(t)\frac{\partial^2 H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial u_i^2}\Delta u_i(t)\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta x_1'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 M\left(\psi_2\left(t_1\right),x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1^2}\Delta x_1\left(t_1\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}o_{i+2}\left(\left(\left\|\Delta x_i(t)\right\|+\left\|\Delta u_i(t)\right\|\right)^2\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}o_i\left(\left\|\Delta x_i(t_i)\right\|^2\right)-o_5\left(\left\|\Delta x_1(t_1)\right\|^2\right).\quad (2.18)$$

Из результатов работы [13] следует, что при сделанных предположениях в случае $\Delta u_2(t)\equiv 0$

$$\left\|\Delta x_1\left(t\right)\right\|\le L_1\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Delta u_1(\tau)\right\|d\tau,t\in T_1,\quad (2.19)$$

$$\left\|\Delta x_2\left(t\right)\right\|\le L_2\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Delta u_1(\tau)\right\|d\tau,t\in T_2,\quad (2.20)$$

$$L_i=const>0,\ i=1,2.$$

В случае, когда $\Delta u_1(t)\equiv 0$, $\Delta u_2(t)\ne 0$, имеют место оценки:

$$\Delta x_1\left(t\right)=0,t\in T_1,$$

$$\left\|\Delta x_2\left(t\right)\right\|\le L_3\int_{t_1}^{t_1}\left\|\Delta u_2(\tau)\right\|d\tau,\ t\in T_2,\quad (2.21)$$

$$L_3=const>0.$$

Используя эти оценки, с помощью формулы приращения (2.18), найдем выражения первой и второй вариаций функционала качества.

3 Вариации функционала

В силу независимости управляющих функций, полагая $\Delta u_2(t)=0$, определим $\Delta u_1(t)$ следующим специальным образом

$$\Delta u_1(t;\varepsilon)=\varepsilon\delta u_1(t), t\in T_1. \quad (3.1)$$

Здесь ε – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_1(t)\in R^r$, $t\in T_1$ – произвольная, кусочно-непрерывная вектор-функция.

Через $\Delta x_1(t;\varepsilon)$, $\Delta x_2(t;\varepsilon)$ обозначим специальные приращения траекторий $x_1(t)$ и $x_2(t)$, отвечающие специальному приращению (3.1) управляющей функции $u_1(t)$.

Из оценок (2.19) и (2.20) следует, что $\|\Delta x_1(t;\varepsilon)\|$ и $\|\Delta x_2(t;\varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε.

Из задач Коши (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) получаем, что $\Delta x_1(t)$ и $\Delta x_2(t)$ являются решениями следующих линеаризованных задач Коши:

$$\Delta\dot{x}_1(t)=\frac{\partial f_1(t,x_1(t),u_1(t))}{\partial x_1}\Delta x_1(t)+\frac{\partial f_1(t,x_1(t),u_1(t))}{\partial u_1}\Delta u_1(t)+o_6\left(\|\Delta x_i(t)\|+\|\Delta u_i(t)\|\right)+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial x_1}\Delta x_1(\tau)+\frac{\partial K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}\Delta u_1(\tau)\right)d\tau+\int_{t_0}^{t}o_7\left(\|\Delta x_1(\tau)\|+\|\Delta u_1(\tau)\|\right)d\tau, \quad (3.2)$$

$$\Delta x_1(t_0)=0, \quad (3.3)$$

$$\Delta\dot{x}_2(t)=\frac{\partial f_2(t,x_2(t),u_2(t))}{\partial x_2}\Delta x_2(t)+\frac{\partial f_2(t,x_2(t),u_2(t))}{\partial u_2}\Delta u_2(t)+o_8\left(\|\Delta x_2(t)\|\right)+\int_{t_1}^{t}\frac{\partial K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}\Delta u_2(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t}o_9\left(\|\Delta x_2(\tau)\|\right)d\tau, \quad (3.4)$$

$$\Delta x_2(t_1)=\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\Delta x_1(t_1)+o_{10}\left(\|x_1(t_1)\|\right). \quad (3.5)$$

Заметим, что при $\Delta u_1(t)=0$ линеаризованная задача для $\Delta x_2(t)$ имеет вид:

$$\Delta\dot{x}_2(t)=\frac{\partial f_2(t,x_2(t),u_2(t))}{\partial x_2}\Delta x_2(t)+\frac{\partial f_2(t,x_2(t),u_2(t))}{\partial u_2}\Delta u_2(t)+o_{11}\left(\|\Delta x_2(t)\|+\|\Delta u_2(t)\|\right)+\int_{t_1}^{t}\left(\frac{\partial K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}\Delta x_2(\tau)+\frac{\partial K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial u_2}\Delta u_2(\tau)+o_{12}\left(\|\Delta x_2(\tau)\|+\|\Delta u_2(\tau)\|\right)\right)d\tau, \quad (3.6)$$

$$\Delta x_2(t_1)=0. \quad (3.7)$$

Учитывая формулу (3.1) и того, что при этом $\|\Delta x_1(t;\varepsilon)\|$ и $\|\Delta x_2(t;\varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε, с помощью задач (3.2), (3.3) и (3.4), (3.5) доказывается следующее утверждение

***Лемма* 3.1.** *Для $\Delta x_1(t;\varepsilon)$, $\Delta x_2(t;\varepsilon)$ имеют место следующие разложения*:

$$\Delta x_1(t;\varepsilon)=\varepsilon\delta x_1(t)+o_{13}(\varepsilon;t), \quad (3.8)$$

$$\Delta x_2(t;\varepsilon)=\varepsilon\delta x_2(t)+o_{14}(\varepsilon;t). \quad (3.9)$$

Здесь $\delta x_1(t)$ и $\delta x_2(t)$ являются решениями уравнений в вариациях

$$\delta\dot{x}_1(t)=\frac{\partial f_1(t,x_1(t),u_1(t))}{\partial x_1}\delta x_1(t)+\frac{\partial f_1(t,x_1(t),u_1(t))}{\partial u_1}\delta u_1(t)+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial x_1}\delta x_1(\tau)+\frac{\partial K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}\delta u_1(\tau)\right)d\tau, \quad (3.10)$$

$$\delta x_1(t_0)=0, \quad (3.11)$$

$$\delta\dot{x}_2(t)=\frac{\partial f_2(t,x_2(t),u_2(t))}{\partial x_2}\delta x_2(t)+\int_{t_1}^{t}\frac{\partial K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}\delta x_2(\tau)d\tau, \quad (3.12)$$

$$\delta x_2(t_1)=\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\delta x_1(t_1). \quad (3.13)$$

Положим $\Delta u_1(t)=0$, тогда $\Delta u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t;\mu)=\mu\delta u_2(t),\ t\in T_2. \quad (3.14)$$

Здесь, μ – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_2(t)\in R^q$, $t\in T_2$ произвольная, кусочно-непрерывная и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления $u_2(t)$).

Через $\Delta x_2(t;\mu)$ обозначим специальное приращение траектории $x_2(t)$, отвечающие специальному приращению (3.14) управляющей функции $u_2(t)$.

При этом, с помощью линеаризованной системы (3.6), (3.7) доказывается

Лемма 3.2. *Для* $\Delta x_2(t;\mu)$ *имеет место следующее разложение*:

$$\Delta x_2(t;\mu)=\mu y(t)+o_{10}(\mu;t). \qquad (3.15)$$

Здесь $y(t)$ *является решением задачи*

$$\dot y(t)=\frac{\partial f_2(t,x_2(t),u_2(t))}{\partial x_2}y(t)+\frac{\partial f_2(t,x_2(t),u_2(t))}{\partial u_2}\delta u_2(t)+\int_{t_1}^{t}\left(\frac{\partial K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}y(\tau)+\frac{\partial K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial u_2}\delta u_2(\tau)\right)d\tau, \qquad (3.16)$$

$$y(t_1)=0. \qquad (3.17)$$

Используя формулы (3.1), (3.14), (3.8), (3.9) и (3.15), из формулы приращения (2.18) получаем справедливость разложений

$$J(u_1+\varepsilon\delta u_1,u_2)-J(u_1,u_2)=$$
$$=-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1}\delta u_1(t)dt-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta x_1'(t)\frac{\partial^2 H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t)+2\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1\partial x_1}\delta x_1(t)+\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1^2}\delta u_1(t)\right)dt-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\delta x_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t)dt+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1'(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t_2)-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1),x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1)+o(\varepsilon^2), \qquad (3.18)$$

$$J(u_1,u_2+\mu\delta u_2)-J(u_1,u_2)=$$
$$=-\mu\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2}\delta u_2(t)dt-$$
$$-\frac{\mu^2}{2}y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}y(t_2)-$$
$$-\frac{\mu^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(y'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2}y(t)+2\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2\partial x_2}y(t)+\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2^2}\delta u_2(t)\right)dt+$$
$$o(\mu^2). \qquad (3.19)$$

Из разложений (3.18) и (3.19) следует, что первая и вторая вариации функционала (1.6) имеют соответственно вид:

$$\delta^1 J(u_1,u_2;\delta u_1)=$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1}\delta u_1(t)dt, \qquad (3.20)$$

$$\delta^1 J(u_1,u_2;\delta u_2)=$$
$$=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2}\delta u_2(t)dt, \qquad (3.21)$$

$$\delta^2 J(u_1,u_2;\delta u_1)=\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1'(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1)+\delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t_2)-$$
$$-\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1),x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta x_1'(t)\frac{\partial^2 H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t)+2\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1\partial x_1}\delta x_1(t)+\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1^2}\delta u_1(t)\right)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\delta x_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t)dt, \qquad (3.22)$$

$$\delta^2 J(u_1,u_2;\delta u_1)=y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}y(t_2)-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(y'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2}y(t)+2\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2\partial x_2}y(t)+\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2^2}\delta u_2(t)\right)dt. \qquad (3.23)$$

4 Необходимые условия оптимальности

Доказанные выражения первой и второй вариации функционала качества (1.6) позволяют установить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

В силу открытости областей управления вдоль оптимального управления $(u_1(t),u_2(t))$ первые вариации функционала должны равняться нулю. Поэтому из формул (3.20) и (3.21) получаем, что вдоль оптимального управления

$(u_1(t),u_2(t))$, для всех $\delta u_1(t)\in R^r$, $t\in T_1$ и $\delta u_2(t)\in R^q$, $t\in T_2$

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1}\delta u_1(t)\,dt=0,$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2}\delta u_2(t)\,dt=0.$$

Из этих соотношений, в силу произвольности $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(t)$, следует

***Теорема* 4.1.** *Для оптимальности допустимого управления* $(u_1(t),u_2(t))$ *необходимо, чтобы соотношения*

$$\frac{\partial H_1(\theta,x_1(\theta),u_1(\theta),\psi_1(\theta))}{\partial u_1}=0, \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial H_2(\theta,x_2(\theta),u_2(\theta),\psi_2(\theta))}{\partial u_2}=0 \qquad (4.2)$$

выполнялись для всех $\theta\in[t_0,t_1)$ *и* $\theta\in[t_1,t_2)$ *соответственно*.

Соотношения (4.1) и (4.2) являются необходимыми условиями оптимальности первого порядка и представляют собой аналог уравнения Эйлера из классического вариационного исчисления (см., например, [2]–[4]).

Каждое допустимое управление $(u_1(t),u_2(t))$, являющееся решением уравнения Эйлера (4.1) и (4.2), следуя, например, [4], назовем классической экстремалью.

Для сужения множества классических экстремалей надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка, носящие конструктивный характер.

Из выражений (3.22), (3.23) вторых вариаций функционала качества (1.6) следует, что для оптимальности классической экстремали, $(u_1(t),u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1)+$$
$$+\delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t_2)-$$
$$-\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1),x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\Bigg(\delta x_1'(t)\frac{\partial^2 H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t)+$$
$$+2\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1\partial x_1}\delta x_1(t)+$$
$$+\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1^2}\delta u_1(t)\Bigg)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\delta x_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t)dt\ge 0, \qquad (4.3)$$

$$y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}y(t_2)-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\Bigg(y'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}y(t)+$$
$$+2\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2\partial x_2}y(t)+$$
$$+\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2^2}\delta u_2(t)\Bigg)dt\ge 0 \qquad (4.4)$$

выполнялись для всех допустимых вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(t)$ классической экстремали $(u_1(t),u_2(t))$.

Как видно, необходимые условия оптимальности (4.3) и (4.4.) носят неявный характер. Поэтому их практическая ценность невелика.

Учитывая это, получим необходимые условия оптимальности явно выраженные через параметры рассматриваемой задачи оптимального управления.

Пусть $F_1(t,\tau)$ и $F_2(t,\tau)$ $(n\times n)$ матричные функции, являющиеся решениями матричных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F_1(t,\tau)}{\partial\tau}=-F_1(t,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial x_1}-$$
$$-\int_\tau^t F_1(t,s)\frac{\partial K_1(s,\tau,x_1(s),u_1(s))}{\partial x_1}ds,$$
$$\frac{\partial F_2(t,\tau)}{\partial\tau}=-F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}-$$
$$-\int_\tau^t F_2(t,s)\frac{\partial K_2(s,\tau,x_2(s),u_2(s))}{\partial x_2}ds,$$
$$F_1(t,t)=E,\quad F_2(t,t)=E.$$

Здесь $E-$ единичная матрица.

Имеет место следующее утверждение

***Лемма* 4.1.** Решения задач (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) и (3.16), (3.17) имеют вид:

$$\delta x_1(t)=\int_{t_0}^t F_1(t,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}\delta u_1(\tau)d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^t\left(\int_\tau^t F_1(t,s)\frac{\partial K_1(s,\tau,x_1(s),u_1(s))}{\partial x_1}ds\right)\delta u_1(\tau)d\tau, \qquad (4.5)$$

$$\delta x_2(t)=F_2(t,t_1)\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\delta x_1(t_1), \qquad (4.6)$$

$$y(t)=\int_{t_1}^t F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial u_2}\delta u_2(\tau)d\tau+$$
$$+\int_{t_1}^t\left(\int_\tau^t F_2(t,s)\frac{\partial K_2(s,\tau,x_2(s),u_2(s))}{\partial x_2}ds\right)\delta u_2(\tau)d\tau. \qquad (4.7)$$

Учитывая формулы (4.5) и (4.6), получим

$$\delta x_2(t) = F_2(t,t_1)\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t_1}\left(F_1(t_1,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}+\right.$$

$$\left.+\int_{\tau}^{t_1}F_1(t_1,s)\frac{\partial K_1(s,\tau,x_1(s),u_1(s))}{\partial x_1}ds\right)\delta u_1(\tau)d\tau.$$

Введя обозначения

$$Q_1(t,\tau) = F_1(t,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}+$$

$$+\int_{\tau}^{t}F_1(t,s)\frac{\partial K_1(s,\tau,x_1(s),u_1(s))}{\partial x_1}ds,$$

$$Q_2(t,\tau) = F_2(t,t_1)\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\times$$

$$\times F_1(t_1,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1}F_1(t_1,s)\frac{\partial K_1(s,\tau,x_1(s),u_1(s))}{\partial x_1}ds,$$

$$Q_3(t,\tau) = F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial u_2}+$$

$$+\int_{\tau}^{t}F_2(t,s)\frac{\partial K_2(s,\tau,x_2(s),u_2(s))}{\partial x_2}ds,$$

формулы (4.5), (4.6) и (4.7) записываются в виде

$$\delta x_1(t) = \int_{t_0}^{t}Q_1(t,\tau)\delta u_1(\tau)d\tau,\ t\in T_1, \quad (4.8)$$

$$\delta x_2(t) = \int_{t_0}^{t_1}Q_2(t,\tau)\delta u_1(\tau)d\tau,\ t\in T_2, \quad (4.9)$$

$$y(t) = \int_{t_1}^{t}Q_3(t,\tau)\delta u_2(\tau)d\tau,\ t\in T_2. \quad (4.10)$$

Полученные формулы позволяют доказать конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности второго порядка.

Преобразуем отдельные слагаемые в неравенствах (4.3), (4.4).

Используя (4.8) и (4.9) доказывается, что

$$\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1) = \quad (4.11)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u_1'(\tau)Q_1'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}Q_1(t_1,s)\delta u_1(s)dsd\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta x_1'(t)\frac{\partial^2 H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t) =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u_1'(t)\left(\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q_1'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial x_1^2}\times\right.$$

$$\left.\times Q_1(t,s)\right)dt\delta u_1(s)dsd\tau, \quad (4.12)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1\partial x_1}\delta x_1(t)dt =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\tau}^{t_1}\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1\partial x_1}\times\right.$$

$$\left.\times Q_1(\tau,t)d\tau\right)\delta u_1(t)dt, \quad (4.13)$$

$$\delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t_2) = \quad (4.14)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u_1'(\tau)Q_2'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}Q_2(t_1,s)\delta u_1(s)dsd\tau,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta x_2'(t)\frac{\partial^2 H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t) =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u_1'(t)\left(\int_{t_1}^{t_2}Q_2'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}\times\right.$$

$$\left.\times Q_2(t,s)dt\right)\delta u_2(s)dsd\tau. \quad (4.15)$$

Далее используя (4.10) доказывается, что

$$y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}y(t_2) = \quad (4.16)$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta u_2'(\tau)Q_3'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}Q_3(t_2,s)\delta u_2(s)dsd\tau,$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta u_2'(t)\left(\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}Q_3'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}\times\right.$$

$$\left.\times Q_3(t,s)dt\right)\delta u_3(s)dsd\tau, \quad (4.17)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2\partial x_2}y(t)dt =$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t}^{t_2}\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau),\psi_2(\tau))}{\partial u_2\partial x_2}\times\right.$$

$$\left.\times Q_3(\tau,t)d\tau\right)\delta u_2(t)dt. \quad (4.18)$$

Введем обозначения

$$K_1(\tau,s) = -Q_1'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}Q_1(t_1,s)-$$

$$-Q_2'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}Q_2(t_1,s)+$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q_1'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial x_1^2}Q_1(t,s)dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}Q_2'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}Q_2(t,s)dt, \quad (4.19)$$

$$K_2(\tau,s) = -Q_3'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}Q_2(t_2,s) + \int\limits_{\max(\tau,s)}^{t_2} Q_3'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}Q_3(t,s)\,dt. \quad (4.20)$$

Учитывая доказанные тождества (4.11)–(4.18) и обозначения (4.19), (4.20) в неравенствах (4.3), (4.4), получим справедливость неравенств

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta u_1'(\tau)K_1'(\tau,s)\delta u_1(s)\,ds\,d\tau + 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\int\limits_{t}^{t_1}\delta u_1'(\tau)\frac{\partial^2 H_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau),\psi_1(\tau))}{\partial u_1\partial x_1}\times Q_1(\tau,t)\,d\tau\right)\delta u_1(t)\,dt + \int\limits_{t_0}^{t_1}\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1'(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1^2}\delta u_1(t) \le 0, \quad (4.21)$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\delta u_2'(\tau)K_2'(\tau,s)\delta u_2(s)\,ds\,d\tau + 2\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_{t}^{t_2}\delta u_2'(\tau)\frac{\partial^2 H_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau),\psi_2(\tau))}{\partial u_2\partial x_2}\times Q_2(\tau,t)\,d\tau\right)\delta u_2(t)\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2'(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2^2}\delta u_2(t) \le 0. \quad (4.22)$$

□

***Теорема* 4.2.** *Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t),u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства* (4.21) *и* (4.22) *выполнялись для всех $\delta u_1(t)\in R^r$, $t\in T_1$ и $\delta u_2(t)\in R^q$, $t\in T_2$ соответственно.*

Эти неравенства (необходимые условия оптимальности второго порядка) являются общими.

Из них, используя произвольность допустимых вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(t)$, можно получить ряд новых необходимых условий оптимальности.

Следствием теоремы 4.2 является

***Теорема* 4.3.** *Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t),u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства*

$$v_1'\frac{\partial^2 H_1(\theta,x_1(\theta),u_1(\theta),\psi_1(\theta))}{\partial u_1^2}v_1 \le 0, \quad (4.23)$$

$$v_2'\frac{\partial^2 H_2(\theta,x_2(\theta),u_2(\theta),\psi_2(\theta))}{\partial u_2^2}v_2 \le 0 \quad (4.24)$$

выполнялись для всех $v_1\in R^r$, $\theta\in[t_0,t_1)$ и $v_2\in R^q$, $\theta\in[t_1,t_2)$ соответственно.

Неравенства (4.23) и (4.24) являются аналогом условия Лежандра – Клебша (см., например, [4]) для рассматриваемой задачи оптимального управления из классического вариационного исчисления.

Как видно, аналог условия Лежандра – Клебша менее информативен, чем условия оптимальности (4.21) и (4.22).

Более того, во многих задачах оптимального управления аналог условия Лежандра – Клебша может вырождаться (см., например, [4]–[6]).

***Определение* 4.1.** Классическую экстремаль $(u_1(t),u_2(t))$ назовем особой, в классическом смысле в рассматриваемой задаче, если соотношения

$$v_1'\frac{\partial^2 H_1(\theta,x_1(\theta),u_1(\theta),\psi_1(\theta))}{\partial u_1^2}v_1 = 0,$$

$$v_2'\frac{\partial^2 H_2(\theta,x_2(\theta),u_2(\theta),\psi_2(\theta))}{\partial u_2^2}v_2 = 0$$

выполняются для всех $v_1\in R^r$, $\theta\in[t_0,t_1)$ и $v_2\in R^q$, $\theta\in[t_1,t_2)$ соответственно.

Получим необходимое условие оптимальности особых, в классическом смысле, управлений.

Пусть $(u_1(t),u_2(t))$ особое, в классическом смысле, оптимальное управление.

В силу произвольности допустимых вариаций $(\delta u_1(t),\ \delta u_2(t))$ управления $(u_1(t),u_2(t))$, полагая $\delta u_2(t)=0$, $\delta u_1(t)$ определим по формуле

$$\delta u_1(t;\varepsilon) = \begin{cases} v_1, & t\in[\theta,\theta+\varepsilon), \\ 0, & t\in T_1\setminus[\theta,\theta+\varepsilon). \end{cases} \quad (4.25)$$

Здесь $v_1\in R^r$ – произвольный вектор, $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u_1(t)$, а $\varepsilon>0$ произвольное малое число, такое, что $\theta+\varepsilon<t_1$.

Учитывая формулу (4.25), определение особого, в классическом смысле, управления $u_1(t)$, из неравенства (4.21) получим, что

$$\varepsilon^2\left(v_1'\left(K_1(\theta,\theta) + \frac{\partial^2 H_1(\theta,x_1(\theta),u_1(\theta),\psi_1(\theta))}{\partial u_1\partial x_1}Q_1(\theta,\theta)\right)v_1\right) + o(\varepsilon^2) \le 0.$$

Разделяя обе части этого неравенства на ε^2 и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим, что

$$v_1'\left(K_1(\theta,\theta) + \frac{\partial^2 H_1(\theta,x_1(\theta),u_1(\theta),\psi_1(\theta))}{\partial u_1\partial x_1}Q_1(\theta,\theta)\right)v_1 \le 0. \quad (4.26)$$

Полагая $\delta u_1(t)=0$, допустимую вариацию $\delta u_2(t)$ управления определим по формуле

$$\delta u_2(t;\mu) = \begin{cases} v_2, & t\in[\theta,\theta+\mu), \\ 0, & t\in T_2\setminus[\theta,\theta+\mu). \end{cases} \quad (4.27)$$

Здесь $v_2 \in R^q$ произвольный вектор, $\theta \in [t_1, t_2)$ произвольная точка непрерывности управления $u_2(t)$, а $\mu > 0$ произвольное малое число, такое, что $\theta + \mu < t_2$.

Учитывая формулу (4.27) в неравенстве (4.22), получим, что

$$\mu^2 \left(v_2' \left(K_2(\theta,\theta) + \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2 \partial x_2} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times Q_2(\theta,\theta) \right) v_2 \right) \le 0. \qquad (4.28)$$

Отсюда в силу произвольности $\mu > 0$ приходим к неравенству

$$v_2' \left(K_2(\theta,\theta) + \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2 \partial x_2} \times \right.$$

$$\left. \times Q_2(\theta,\theta) \right) v_2 \le 0. \qquad (4.29)$$

Следовательно, доказана

Теорема 4.4. *Для оптимальности особого, в классическом смысле, управления* $(u_1(t), u_2(t))$ *необходимо, чтобы неравенства* (4.28) *и* (4.29) *выполнялись для всех* $v_1 \in R^r$, $\theta \in [t_0, t_1)$ *и* $v_2 \in R^q$, $\theta \in [t_1, t_2)$ *соответственно.*

Заключение

Рассматривается двухэтапная задача оптимального управления, описываемая на различных отрезках времени различными интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. Начальное условие второго уравнения связано с конечным значением решения первого уравнения.

При предположении открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера (необходимое условие оптимальности первого порядка).

Установлено общее необходимое условие оптимальности второго порядка, позволяющее получить ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка, в частности, необходимое условие оптимальности особых, в классическом смысле управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев*, *В.А.* Оптимальное управление ступенчатыми системами / В.А. Медведев, В.Н. Розова // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 3. – С. 15–23.

2. *Розова*, *В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук / В.Н. Розова. – Москва, 1971. – 13 с.

3. *Розова*, *В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом / В.Н. Розова // Вестник РУДН. Серия Прикладная и компьютерная математика. – 2002. – № 1. – С. 131–136.

4. *Ащепков*, *Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами / Л.Т. Ащепков. – Москва: Наука, 1987. – 226 с.

5. *Захаров*, *Г.К.* Оптимизация ступенчатых систем управления / Г.К. Захаров // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 8. – С. 5–9.

6. *Захаров*, *Г.К.* Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода / Г.К. Захаров // Автоматика и телемеханика. – 1966. – № 6. – С. 32–36.

7. *Вольтерра*, *В.* Теория функционалов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтера. – Москва: Наука, 1982. – 304 с.

8. *Вольтерра*, *В.* Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтера. – Москва: Наука, 1976. – 281 с.

9. *Васильева*, *А.Б.* Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – Москва: МГУ. – 1989.

10. *Габасов*, *Р.* Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Москва: Либроком, 2011. – 272 с.

11. *Васильев*, *Ф.П.* Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных играх с запаздыванием / Ф.П. Васильев // Журнал Вычислительной математики и математической физики. – 1970. – № 1. – С. 15–25.

12. *Васильев*, *Ф.П.* Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро- дифференциальных системах с запаздыванием нейтрального типа / Ф.П. Васильев // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 2. – С. 40–50.

13. *Мансимов*, *К.Б.* К необходимым условиям оптимальности в одной двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра / К.Б. Мансимов, А.Ф. Мансимзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 84–89.

14. *Методы оптимизации* / Р. Габасов [и др.]. – Минск: Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

15. *Алексеев*, *В.М.* Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – Москва: Физматлит, 2018. – 384 с.

16. *Габасов*, *Р.* Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Москва: Либроком, 2011. – 256 с.

17. *Калинин*, *А.И.* К проблеме особых управлений / А.И. Калинин // Дифференциальные уравнения. – 1985. – № 3. – С. 380–385.

18. *Мансимов*, *К.Б.* Особые управления в системах с запаздыванием / К.Б. Мансимов. – Баку: ЭЛМ, 1999. – 176 с.

Поступила в редакцию 02.06.2025.

Информация об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы – д.ф.-м.н., профессор
Мансимзаде Айгюль Фазил кызы – диссертант