

УДК 535.42

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14

EDN: ZOXOSH

ДЕЦЕНТРИРОВАННЫЕ ЦИРКУЛЯРНЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА – ГАУССА РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

DECENTERED CIRCULAR KUMMER – GAUSS BEAMS OF VARIOUS TYPES

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для децентрированных циркулярных световых пучков Куммера – Гаусса различных типов. Анализируются различные варианты, включающие как новые типы пучков, так и частные случаи, включающие известные пучки Лагерра – Гаусса. Сформулированы ограничения на свободные параметры, чтобы такие децентрированные пучки Куммера – Гаусса переносили конечную мощность. Графически исследуется влияние различных свободных параметров на картины интенсивности таких пучков.

Ключевые слова: параксиальные пучки, циркулярные пучки, пучки Куммера – Гаусса, децентрированные пучки.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Децентрированные циркулярные пучки Куммера – Гаусса различных типов / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14. – EDN: ZOXOSH

Abstract. The analytical expressions in closed form are proposed and investigated for various types of decentered circular Kummer – Gauss light beams. Various options are analyzed, including both new types of beams and special cases involving well-known Laguerre – Gauss beams. The constraints on free parameters are formulated so that such decentered Kummer – Gauss beams carry finite power. The influence of various free parameters on the intensity patterns of such beams is investigated graphically.

Keywords: paraxial beams, circular beams, Kummer – Gauss beams, decentered beams.

For citation: Girgel, S.S. Decentered circular Kummer – Gauss beams of various types / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14 (in Russian). – EDN: ZOXOSH

Введение

Общий подход для изучения циркулярных световых пучков был предложен в [1], [2]. Такие пучки мы будем называть циркулярными пучками Куммера – Гаусса (КГ). Скалярные оптические циркулярные пучки КГ исследовались в [1]–[3]. Обобщение на векторный случай – в [4].

Более общие пучки КГ возникнут, если осуществить комплексное смещение поперечных координат. Авторы [5] называют такого типа пучки смещенными. Мы будем называть такие пучки децентрированными. Децентрированные пучки Бесселя – Гаусса обсуждались в [6], а децентрированные декартовы пучки КГ – в [7].

В настоящей работе будут исследоваться децентрированные циркулярные пучки КГ. Кроме того, будут учитываться возможные различные типы угловой симметрии: $e^{im\varphi}$ и $\cos(m\varphi)$.

1 Децентрированные циркулярные пучки Куммера – Гаусса

Ограничимся обсуждением параксиальных скалярных оптических пучков. Параболическое

нормированное уравнение имеет форму $(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 4i\partial_z)f = 0$. Здесь $X = x/x_0$, $Y = y/y_0$, $Z = z/z_0$, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Параметры x_0 и $y_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OY соответственно.

Согласно [3], [4], комплексную амплитуду параксиального скалярного циркулярного пучка Куммера – Гаусса с цилиндрической симметрией в безразмерной форме можно записать как

$$f = \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v M \times \\ \times \left(-v, m+1, i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)\right) R^m f_3(m, \varphi), \quad (1.1)$$

где Q и P – введенные безразмерные комплексные параметры пучка:

$$Q = Z - Q_0, \quad P = Z - P_0, \quad (1.2)$$

причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$ и аналогично для P_0 . Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин.

Обобщим формулу (1.1) в двух направлениях.

Во-первых, осуществим комплексную децентрировку поперечных координат соотношениями $X_d = X - iX_0$, $Y_d = Y - iY_0$, $\varphi_d = \arctan(X_0, Y_0)$.

Во-вторых, для децентрированных циркулярных пучков КГ азимутальную зависимость $f_2 \equiv R^m f_3(m, \varphi) = R^m \{e^{im\varphi}, \cos m\varphi\}$ представим двояким образом:

$$f_2 = \left\{ (X_d + iY_d)^m, \frac{1}{2} \left((X_d + iY_d)^m + (X_d - iY_d)^m \right) \right\}. \quad (1.3)$$

Комплексная амплитуда децентрированного циркулярного пучка КГ теперь имеет форму $f = f_1 f_2$, где для множителя f_1 достаточно использовать два варианта:

$$f_1 = \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v M \times \\ \times \left(-v, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right), \\ \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} M\left(-v, m+1; -\frac{iR_d^2}{Q}\right) \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

В итоге, всё множество циркулярных децентрированных пучков КГ с различными азимутальными зависимостями можно представить в компактном виде, как совокупность четырех типов $f = f_{1k} f_{2j}$, где $k, j = 1, 2$.

2 Исследование влияния свободных параметров на картины интенсивности децентрированных циркулярных пучков КГ

Будем анализировать сначала случай обобщенных циркулярных децентрированных пучков Куммера – Гаусса (*gcdKG*), комплексная амплитуда которых равна

$$f_{gcdKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v \times \\ \times M\left(-v, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right) f_2 \quad (2.1)$$

с азимутальной зависимостью $e^{im\varphi}$. Для физической реализуемости пучков, описываемых формулой (2.1), необходима квадратичная интегрируемость (КИ) функций f_{gcdKG} . Последняя осуществляется при следующих ограничениях $\{Q_0'' > 0, P_0'' > 0\}$, налагаемых на свободные параметры. Существенно, что при этом радиальный индекс v может быть произвольным комплексным.

С помощью системы компьютерной математики Mathematica далее будет изучаться влияние различных свободных параметров на ненормированные картины интенсивности *gcdKG* пучков. Для большей наглядности мы изображаем интенсивность в условных единицах в поперечном сечении пучка не плоской, а 3D картиной. В большинстве вариантов будем использовать угловую зависимость в виде $e^{im\varphi}$, если не оговорено обратное. Везде полагаем $Y_0 = 0$, поскольку влияние параметра Y_0 на физические свойства пучка совершенно такое же, как и влияние параметра X_0 . Компьютерное моделирование интенсивности в поперечном сечении *gcdKG* пучков показывает, что, как правило, наблюдается одно кольцо или одно пятно.

Простейший случай, когда $v = 0$. Тогда возникает гауссов пучок с внедренным оптическим вихрем, который уже исследовался.

Интересен вариант, когда $v = iv''$, т. е. радиальный индекс v – чисто мнимый. Такие пучки пока не исследовались. Возьмем, для определенности, следующие значения параметров $\{Q_0'' = 0,02; X_0 = 0; P_0' = Q_0' = 0; m = 0; v' = 0; Z = 0,5; v'' = -4,5\}$ и рассмотрим трансформацию картин интенсивности пучка при вариациях параметра P_0'' (рисунок 2.1).

Видим, что при возрастании параметра P_0'' вокруг центрального пика постепенно возникает кольцо, а центральное пятно пропадает. Так как $m = 0$ и $X_0 = Y_0 = 0$, то картины интенсивности обладают вращательной симметрией вокруг оси пучка *OZ*.

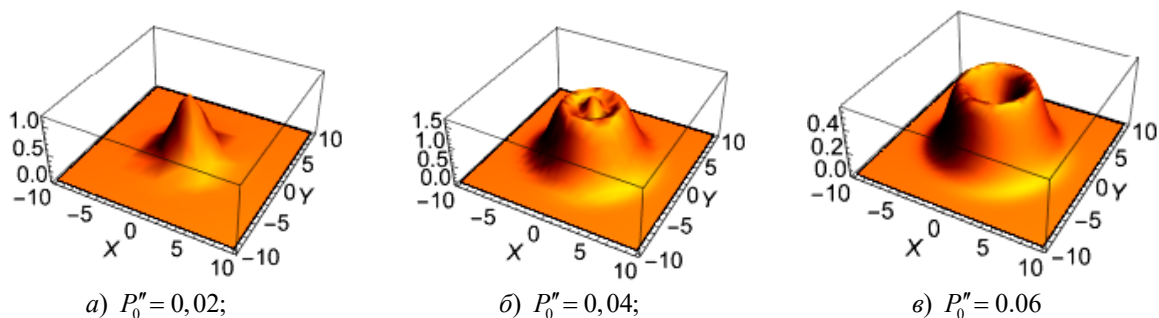


Рисунок 2.1 – Влияние параметра P_0'' на интенсивность *gcdKG* пучка

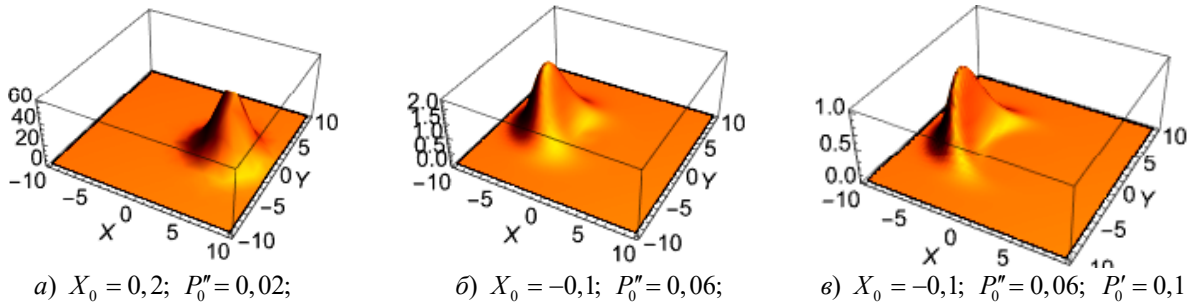


Рисунок 2.2 – Совместное влияние параметров X_0 и P_0'' на интенсивность $gcdKG$ пучка

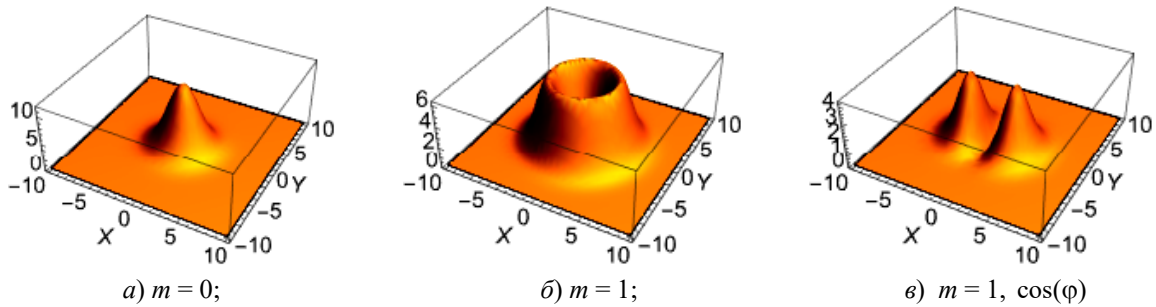


Рисунок 2.3 – Зависимость интенсивности $gcdKG$ пучка от индекса m . Общие параметры: $X_0 = 0; P_0'' = 0,02$

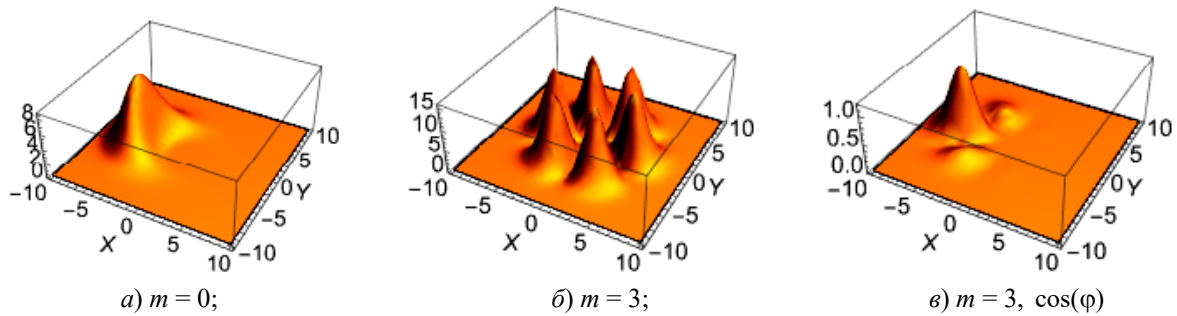


Рисунок 2.4 – Зависимость интенсивности $gcdKG$ пучка от параметров P_0'' и индекса m .
Общие параметры: $X_0 = -0,1; P_0'' = 0,02$

При возрастании параметров ν', Q_0', P_0'', Q_0'' картины интенсивности расширяются и качественно почти не изменяются (рисунки 2.2, 2.3).

Таким образом, децентрировка поперечных координат X и Y качественно видоизменяет картины интенсивности, возникает полумесяц. Иначе, изменение параметра X_0 приводит к сильной деформации и смещению картины вдоль оси OY .

Сейчас будем менять угловой индекс m . Если $m = 1, 2, \dots$, то вместо пика имеем кольцеобразную картину.

Картины рисунка 2.4, б) аналогичны картинам стандартных пучков Лагерра – Гаусса. Подчеркнем, однако, что здесь радиальный параметр ν не целочисленный, а чисто мнимый нецелый. Замена азимутального множителя $e^{im\varphi}$ на $\cos m\varphi$ качественно изменяет картины интенсивности (рисунки 2.4, в).

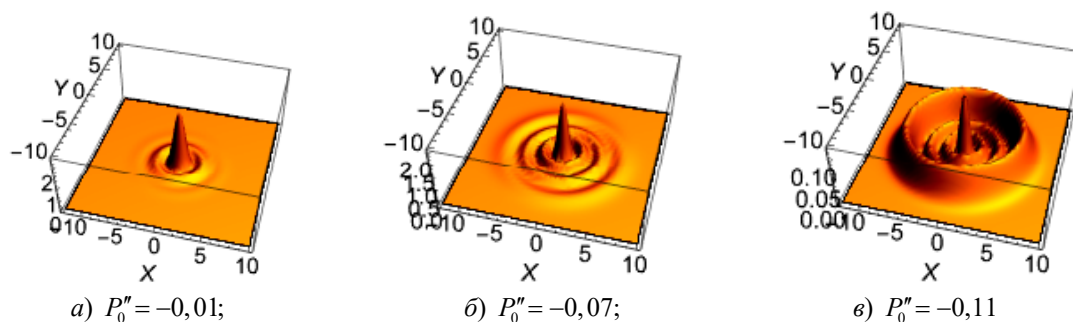
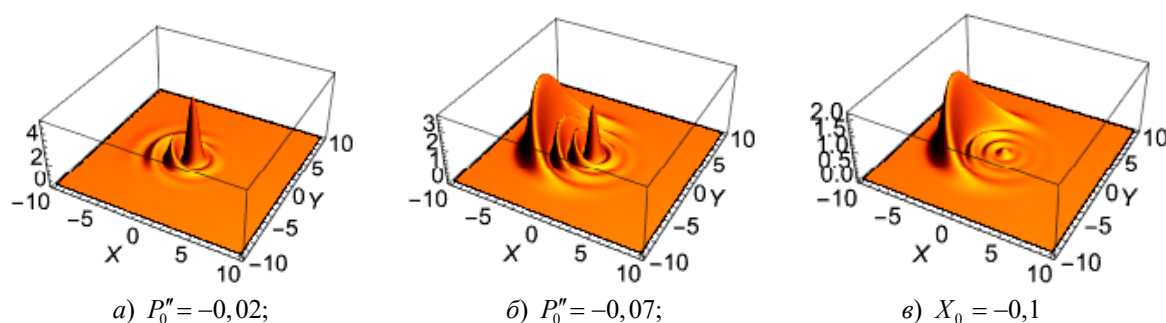
2. Будем анализировать теперь случай $gcdKG$ пучков, у которых комплексная амплитуда

$$f_{gcdKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-n-m-1} P^\nu \times \\ \times M\left(-n, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right) f_2. \quad (2.2)$$

Здесь, по-прежнему, $Q_0'' > 0_0$, однако $\nu \equiv n = 0, 1, 2, \dots$, а мнимая часть P_0'' второго комплексного параметра пучка P может принимать любые значения, исключая $P'' = 0$.

Если теперь исключить децентрировку поперечных координат, то приходим к обобщенным пучкам Лагерра – Гаусса, по терминологии [1], [2].

2.1. Пусть $P_0'' < 0$. Такие пучки для произвольных $P_0'' < 0$ пока еще не исследовались.


 Рисунок 2.5 – Влияние параметра P_0'' на интенсивность $gcdKG$ пучка

 Рисунок 2.6 – Влияние параметров P_0'' и X_0 на интенсивность $gcdKG$ пучка. Постоянный параметр $X_0 = -0,1$

В качестве примера рассмотрим пучки с параметрами $\{Z = 0,7; m = 0; n = 3; Q_0'' = 0,8; Q_0' = P_0' = 0\}$. При $P_0'' = -0,01$ наблюдается яркий центральный пик и практически одно кольцо. При последующем убывании параметра P_0'' постепенно появляются еще три кольца. В дальнейшем самое широкое кольцо относительно растет, а остальные уменьшаются. Децентрировка и приводит к деформации и смещению картины интенсивности вдоль оси OY (рисунок 2.6).

2.2. При $P_0'' = -Q_0''$ приходим фактически к стандартным пучкам Лагерра – Гаусса. Для конкретности возьмём первоначальные параметры $\{Z = 0,7; X_0 = 0; m = 1; n = 3; Q_0'' = 0,8; P_0'' = -0,8; Q_0' = P_0' = 0\}$. При этом кольца интенсивности наиболее четкие. При дальнейшем убывании параметра P_0'' центральное кольцо продолжает возрастать, а остальные постепенно уменьшаются.

При увеличении параметров $|Z|$, $|Q_0'|$, $|P_0'|$, наоборот, центральное кольцо уменьшается, а остальные относительно растут.

Теперь проанализируем влияние мнимых децентрировок X_0 и Y_0 поперечных координат на картины интенсивности рассматриваемых $gcdKG$ пучков. При росте $|X_0|$ (либо $|Y_0|$) картины интенсивности сплющиваются вдоль оси OY (либо OX). Если же $(X_0 \neq 0, Y_0 \neq 0)$, то наблюдается пятно эллипсовидной формы.

Если азимутальный параметр $m = 0$, то наблюдаются аналогичные закономерности. Только вместо центрального кольца выступает центральный пик (яркое пятно).

3. Теперь обсудим случай, когда $Q_0'' > 0$, $|P_0''| \rightarrow \infty$, а параметр $v = v' + iv''$ – комплексный. Здесь параметр пучка P отсутствует. Получаем циркулярные децентрированные элегантные Куммера – Гаусса ($cdeKG$) пучки

$$f_{cdeKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} \times \\ \times M\left(-v, m+1; \frac{-iR_d^2}{Q}\right) f_2. \quad (2.3)$$

Если свободный комплексный параметр v удовлетворяет условию [1] $v' > -(1+m)/2$, тогда функция f_{cdeKG} обладает КИ. Отметим, что это – новый тип пучков, который не фигурирует в работах [1], [2]. Здесь, если параметр v становится вещественным, тогда пучки (2.3) редуцируются к децентрированным элегантным фракционным пучкам Лагерра – Гаусса ($defLG$) [8]. Если дополнительно $v \equiv n = 0, 1, 2, \dots$, то мы приходим к обычным децентрированным элегантным пучкам Лагерра – Гаусса, введенным Сигмэном ($deLG$) [9].

Обсудим теперь влияние различных свободных параметров на картины интенсивности $cdeKG$ пучков. Пусть $v' > -(1+m)/2$.

Если $m=1$, тогда $\nu' = -0.9$ удовлетворяет условию КИ (1.11). Этот вариант характеризует не *eKG* пучки и даже не *defLG*, а новый тип пучков ЛГ. Существенно, что здесь фигурируют не полиномы Лагерра, а функции Лагерра с непрерывным комплексным индексом ν .

В простейшем случае $Z=0$, $X_0=0$, $Q'_0=0$. Возьмем параметр $Q''_0=0,8$, чтобы выполнялось условие физической реализуемости пучка. Тогда картина интенсивности представляет собой простое кольцо. При возрастании параметра $|\nu''|$ кольцо расширяется.

Если $Z \neq 0$, то образуется множество колец (рисунок 2.7). При возникновении децентровки $X_0 \neq 0$; с ее увеличением край кольца в области $Y > 0$ начинает постепенно убывать и картина кольца последовательно трансформируется в картину пика (максимума). При убывании параметра $|X_0|$ эти процессы происходят в обратном направлении.

Еще интереснее ситуация, когда Q''_0 мало (рисунок 2.8). Например, возьмем параметры $\{\nu' = -0,9; \nu'' = 0; Q''_0 = 0,02; X_0 = 0; Q'_0 = 0; m = 0\}$. Тогда картины интенсивности представляют собой бесконечное множество колец.

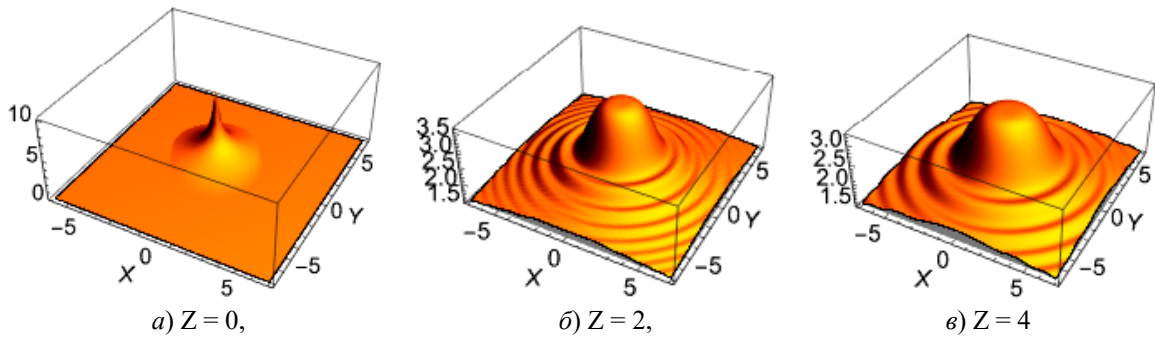


Рисунок 2.7 – Зависимость интенсивности *cdeKG* пучка от параметров P''_0 и индекса m .

Общие параметры: $X_0 = -0,1; P''_0 = 0,02; Q''_0 = 0,02$

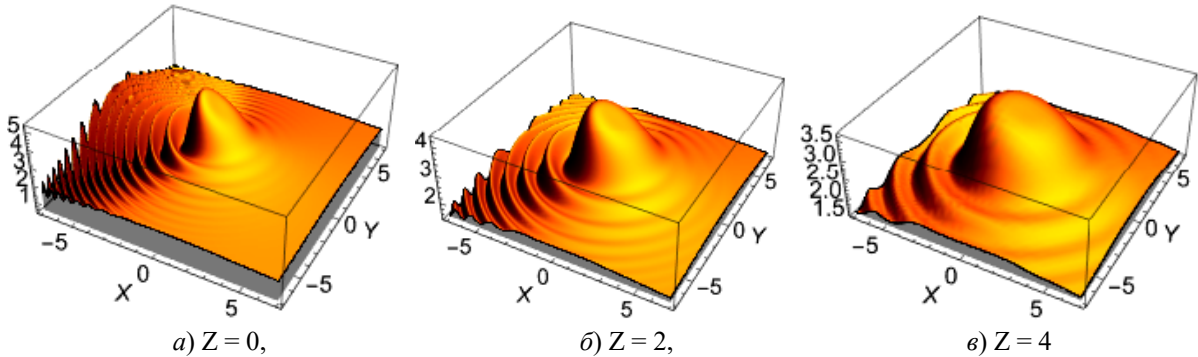


Рисунок 2.8 – Зависимость интенсивности *cdeKG* пучка от параметров P''_0 и индекса m .

Общие параметры: $\nu' = -0,9; \nu'' = 0; Q''_0 = 0,02; Y_0 = 0; Q'_0 = 0; m = 0; X_0 = -0,4$

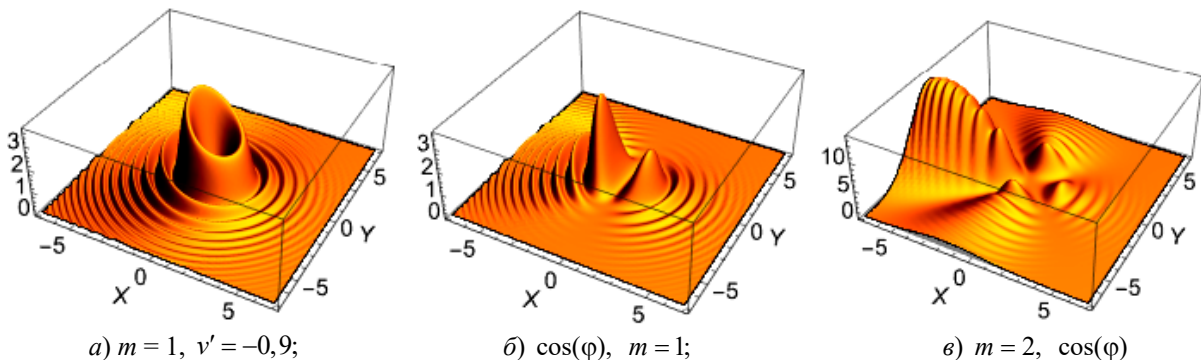


Рисунок 2.9 – Зависимость интенсивности *cdeKG* пучка от параметров P''_0 и индекса m .

Общие параметры: $\nu' = -0,9; \nu'' = 0; Q''_0 = 0,02; Q'_0 = 0; Z=1; X_0 = -0,1$

Совершенно необычная картина интенсивности, изображенная на рисунке 2.9, в). Она обусловлена совместным влиянием двух факторов: $m \neq 0$, $X_0 \neq 0$.

Итак, на рисунках 2.7–2.9 представлены некоторые характерные результаты графического моделирования интенсивности для пучков КГ. Картины интенсивности в поперечном сечении исследуемых световых пучков представляют собой кольца. Хотя число колец бесконечно, мощность пучка конечна. Однако чаще всего видно одно или несколько колец. Остальные кольца не видны из-за их слабой интенсивности. Кольца хорошо наблюдаются, если параметр v' близок к $(v')_{\min}$, а Q_0'' мало. При $m \neq 0$ изменение параметра v'' слабо влияет на картину. Последняя качественно не изменяется.

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие практически не изучавшиеся типы пучков – параксиальные децентрированные циркулярные световые пучки КГ различных типов, переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются шестью свободными параметрами: тремя вещественными – (m, X_0, Y_0) и тремя комплексными параметрами (Q_0, P_0, v) .

Сформулированы условия физической реализуемости циркулярных параксиальных пучков КГ с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Выполнено графическое моделирование их интенсивности для целочисленных значений m , непрерывных вещественных параметров X_0, Y_0 и для непрерывных комплексных значений параметров Q_0, P_0, v . Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинам. Картины интенсивности – самые разнообразные. Множество свободных параметров позволяет варьировать в широких пределах физические свойства исследуемых пучков и, тем самым, расширяет возможности выбора пучков с наперед заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bandres, M.A. Circular beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.
2. Bandres, M.A. Higher-order moments and overlaps of rotationally symmetric beams / M.A. Bandres, D. Lopez-Mago, J.C. Gutierrez-Vega // Journal of Optics. – 2010. – Vol. 12. – P. 015706.
3. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.
4. Гиргель, С.С. Векторные циркулярные параксиальные пучки Куммера – Гаусса. Поляризация и энергетические свойства / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 7–11.
5. Ковалёв, А.А. Пучки Лагерра – Гаусса с комплексным смещением / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, С.Г. Засканов, Д.С. Калинкина // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 1. – С. 5–11.
6. Гиргель, С.С. Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.
7. Гиргель, С.С. Децентрированные пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – 112–116
8. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, iss. 10. – P. 6300–6313.
9. Siegman, A.E. Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.

Поступила в редакцию 29.08.2025.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор