

УДК 539.3:620.22:419.8

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_16
EDN: XQJHGI

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ИЗДЕЛИЙ И ПОКРЫТИЙ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН И ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Можаровский*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

MATHEMATICAL MODELS FOR CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE OF COMPOSITE PRODUCTS AND COATINGS FOR MACHINE ELEMENTS AND TRIBOLOGICAL SYSTEMS

V.V. Mozharovsky*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. На основании многолетних исследований, проведенных в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, и совместных разработок с научными учреждениями Беларуси и зарубежными научными центрами сделан обзор литературы по вопросам создания математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния трибологических элементов деталей из композиционных материалов.

Ключевые слова: трибология, зубчатые колеса, контактное напряжение, покрытия, зона контакта, функционально-градиентный материал, композит.

Для цитирования: Можаровский, В.В. Математические модели расчета напряженно-деформированного состояния композиционных изделий и покрытий для элементов машин и трибологических систем / В.В. Можаровский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 16–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_16. – EDN: XQJHGI

Abstract. Based on many years of research conducted at Francisk Skorina Gomel State University and joint developments with scientific institutions in Belarus and foreign scientific centers, a review of literature on the creation of mathematical models and methods for calculating the stress-strain state of tribological elements of parts made of composite materials has been made.

Keywords: tribology, gears, contact stress, coatings, contact area, functionally graded material, composite.

For citation: Mozharovsky, V.V. Mathematical models for calculating the stress-strain state of composite products and coatings for machine elements and tribological systems / V.V. Mozharovsky // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 16–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_16 (in Russian). – EDN: XQJHGI

Введение

На основании многолетних исследований, проведенных в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, и совместных разработок с ведущими научными учреждениями Беларуси, России, Украины, Армении, Польши и другими научными центрами по вопросам создания математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния трибологических элементов деталей из композиционных материалов для статических и динамических задач, механики неоднородных структур строятся теории и алгоритмы инженерного расчета, новые методики решения задач взаимодействия слоистых систем из композитов, созданы современные инженерные методики расчета слоистых систем с учетом анизотропных физико-механических характеристик материалов, что позволяет эффективно применять новые

инженерные подходы в машиностроении для расчета конструкций, подвергающихся силовым нагрузкам [1]–[20]. Предыстория исследований по данному направлению начинается с 70-х годов 20 столетия в Институте механики металло-полимерных систем АН БССР, когда под руководством академика В.А. Белого интенсивно получило развитие новой научно-технической тематики об использовании полимеров в инженерной практике и в народном хозяйстве.

Первые научные работы были посвящены разработке новых методик расчета деформации и прочности зубьев зубчатых колес из полимерных материалов на базе решения контактных задач теории упругости, экспериментальным исследованиям, созданию алгоритмов и программ расчета. Интенсивное внедрение в инженерную практику новых композиционных материалов требовало создания новых методов расчета

деталей машин, базирующихся на теории упругости и вязко-упругости. Этим вопросам посвящены многочисленные статьи и монографии в ИММС АН БССР, например [20], а также с точки зрения механики деформируемого тела, был представлен расчет напряженного состояния покрытий из композитов на Всесоюзной научной конференции по контактным задачам (Тбилиси, 1974 г. [21]). Развитие фундаментальных исследований в области контактного взаимодействия трибологических элементов деталей машин продолжилось с защитой кандидатской и докторской диссертаций В.В. Можаровским и кандидатских диссертаций его учениками С.В. Шилько [22], Н.А. Рогачевой [23], Е.М. Березовской [24], С.А. Марьиным [25]. Так, В.В. Можаровский и его ученики, работая над созданием методов расчета на прочность зубчатых колес, опор трения и других деталей из композиционных материалов (КМ), столкнулись с тем, что отсутствуют глубокие аналитические разработки исследований напряженно-деформируемого состояния покрытий из КМ. Поэтому руководитель и сотрудники стали заниматься проблемой о создании научных основ напряженно-деформированного состояния анизотропных покрытий упругих тел трибосопряжений. Решению данной проблемы были посвящены многочисленные статьи, выступления на зарубежных симпозиумах и конференциях, монография «Прикладная механика слоистых тел из композитов» [1], а также кандидатские диссертации. Для успешного решения данной проблемы и выполнения заданий по госпрограммам фундаментальных исследований в области естественных наук по программам «Поверхность», «Материалы», «Механика», «Триботехника», «Машиностроение» и др., и хоздоговоров в ГГУ имени Франциска Скорины была создана научно-исследовательская лаборатория «Математическое моделирование сложных систем».

В итоге многолетней деятельности были получены новые научные результаты, основная сущность которых заключается в разработке точных и асимптотических методов решения контактных задач для тел с покрытиями с учетом анизотропии и трения [1]; на основании аналитических и численных решений выявлены новые механические эффекты при контактном взаимодействии тел трибосопряжений с анизотропными покрытиями, обусловленные явлением анизотропии материалов, упругими свойствами оснований, усложненными условиями на взаимодействующих поверхностях (трение, скольжение, сцепление и т. д.); построены алгоритмы и программы, по которым исследовано влияние на параметры контакта анизотропии механических свойств волокнистых композитов, жесткости основания, толщины покрытия, вязкоупругости и трения [2], [5], [8], [11], [17]. Разработаны теоретические зависимости для определения

компонент тензоров напряжений и деформаций с целью исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) анизотропных покрытий и оснований [1], [4].

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта с массивными шинами (автомобильные, электропоезда, подвесные канатные дороги, эскалаторы метро и др.), а также новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии на напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия при силовом квазистатическом воздействии, что не позволяет обосновать практику их проектирования; не существует сравнимых по эффективности методов расчета поведения конструкций из композитов при контакте. Возникает необходимость создавать новые методики расчета элементов деталей машин из композитов. В связи с этим разрабатываются математические модели и компьютерные программы расчета напряжений при статическом контакте индентора в тело (или покрытие) из композита при различных физических параметрах взаимодействия. Особенно важно исследовать механические свойства армированных материалов, работающих в процессе:

- статического контактного взаимодействия цилиндрического тела (моделирующие шину) и слоистого основания;

- зависимость напряженного состояния упругих тел из композитов (при статическом контакте) от типа ориентации волокон материала, например, армированного кордом.

Анализ применения анизотропных композиционных материалов нельзя производить без учета их взаимодействия с другими телами сопряжения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры и расположению компонентов. По сути, важно учитывать также и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей. Следовательно, возникает цель новых перспективных исследований – создание математических моделей и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем при силовом статическом воздействии, например, для зубчатых передач для элементов машиностроительных конструкций. Ниже представлен обзор теоретических исследований и подходов, которые создавались в ГГУ им. Ф. Скорины и зарубежными научными центрами для создания алгоритмов расчета трибологических параметров, включая покрытия из композитов, с учетом анизотропии материалов.

1 Существующие подходы расчета напряженно-деформированного состояния композиционных изделий и покрытий для элементов машин и трибологических систем

В настоящее время имеется достаточно большой опыт эксплуатации деталей сопряжения (подшипников скольжения, опор трения, зубчатых колес и т. д.) из композиционных материалов на основе вязкоупругих тканей, стеклянных волокон и других армирующих наполнителей. Однако возрастающие потребности современной инженерной практики требуют создания аналитических и численных методов расчета этих узлов.

Из анализа научно-технической литературы можно сделать вывод о возрастающем интересе к проблеме использования волокнистых композиционных материалов в узлах трения.

На этапе исследований (80–90 гг.) появилась серия работ [26]–[29], в которых не только исследовалось влияние взаимной ориентации армирующих волокон и направления скольжения, но и степени адгезии волокон к матрице, объема и типа наполнителя, показаны механизмы изнашивания. Так, в работе [30] представлены результаты экспериментального исследования триботехнических характеристик полиэфирнитрита, армированного волокнами углерода (стекла). Проводились испытания на изнашивание о стальной цилиндр при различном направлении скольжения.

Влияние содержания углеродного волокна на триботехнические свойства углепластиков на основе полиамидов изучалось в работе [31]. Влияние на трение и изнашивание волокнистого композита типа контртела и направления его скольжения относительно волокон рассматривалось в работе [32]. В качестве контртела использовались металлические образцы и абразивная бумага. Установлено, что при трении композита о гладкую поверхность металла наименьшее трение и износ наблюдаются при скольжении поперек волокон в их плоскости, тогда как для абразивной бумаги при таком направлении скольжения износ наибольший.

Особую важность приобрели композиционные материалы (КМ) с металлической матрицей [33], т. к. значительно превосходят по своим свойствам конструкционные материалы и сплавы. Несмотря на то, что проведены обширные исследования механических свойств композитов с металлической матрицей (модули упругости, предел текучести, усталости, ползучесть), в то же время их триботехнические свойства изучены недостаточно. Результаты исследований усиленного волокнами композита с металлической матрицей [34], показали, что содержание волокон и их ориентация являются важным фактором, поскольку анизотропия усиливающих волокон влияет на анизотропию изнашивания [35]. Теоретические аспекты контактного взаимодействия

материалов затронуты в работе [36]. Рассмотрены три фазы взаимодействия: упругая, упруго-пластическая и пластическая.

1.1 Модели контактного взаимодействия волокнистых материалов в трибосистемах

Прежде чем сделать расчет узлов трения из гетерогенных волокнистых материалов, необходимо выбрать оптимальные модели расчета, разработать схему решений. Изучение упругого поведения композита сводится к определению модулей упругости упрочняющих элементов (волокон) и матрицы с учетом ориентации волокон матрицы. Строгое определение упругих характеристик композита является довольно сложной задачей.

Приведенный обзор исследований в области контактного взаимодействия в узлах трения из волокнистых композиционных материалов показывает необходимость создания новых математических моделей, учитывающих расположение волокон в матрице в контактирующих композитных телах и их влияние на коэффициент трения.

Для определения трибохарактеристик волокнистых КМ применяется теория как изотропного и трансверсально-изотропного, так и ортотропного тела. Первыми известными работами в области трансверсально-изотропного расчета упругого тела можно считать [37], [38].

1.2 Математическая модель контактного взаимодействия шарового индентора с трансверсально-изотропным слоем

Решение плоских контактных задач для анизотропных покрытий представлено, например, в [1], [15], [16], [37]–[39]. Существенно продвинуты исследования в области асимптотических методов расчета слоистых систем применительно к контактному взаимодействию в статьях и трудах И.И. Аргатова, например [36], но, в то же время, процесс реализации задачи на ЭВМ в инженерных расчетах с заданной точностью является актуальной задачей. В ГГУ им. Ф. Скорины рассмотрены задачи исследований об определении параметров контакта для покрытий из композита при вдавливании упругого шарового и цилиндрического инденторов. На основании аналитических зависимостей в ранее представленных статьях [40], [41], разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение параметров контакта для покрытия из композита. Программа позволяет рассчитать ширину зоны контакта, глубину вдавливания, приближение для P , давление $P(r)$ и выводит результаты в табличном и графическом виде.

1.3 Анализ научно-технической литературы по исследованию покрытий в материаловедении и в технике

На современном этапе развития машиностроения актуальными задачами являются создание

новых термостабильных износостойких слоев с градиентной структурой на основе нитридов железа и хрома, а также современная разработка и создание новых математических моделей расчета напряженного состояния и температуры в покрытиях и основаниях. Следует отметить, что актуальной научной и практической задачей современного материаловедения является применение новых методик для повышения твердости поверхностного слоя при нанесении простых нитридов, изучение упругих, прочностных свойств и твердости тонких ионно-плазменных покрытий. В современных исследованиях [42], [43] представлен анализ методик конечных элементов (МКЭ), проведены опыты определения напряжений и деформаций в модельных образцах в условиях контактного давления и теплового состояния. На рисунке 1.1 представлена картина распределения напряжений по критерию Губера – Мизеса в покрытии без учета касательных усилий, возникающих при учете трения в контакте. Ключевой задачей для разработки и создания математической модели расчета напряжений и температур в упругих покрытиях является определение их модулей упругости и решения проблемы упругости тонких покрытий.

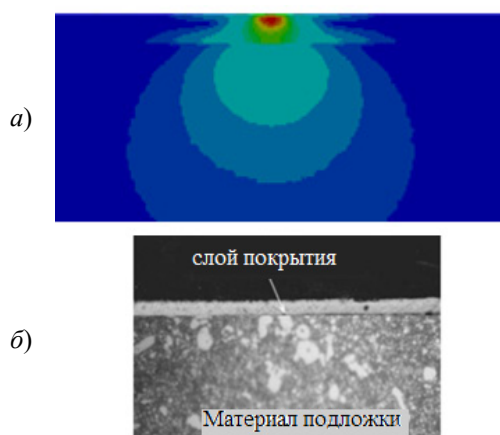


Рисунок 1.1 – Распределение напряжений в покрытии и основании по расчету МКЭ модель Губер – Мизеса [43], а);
б) – физическая модель для расчета параметров контакта в слоистом теле [45]

В работе [44] приводятся формулы для определения модуля Юнга E для пленок CrN. При этом важной задачей является корреляция между значениями модулей упругости и значениями твердости покрытий. Исследования о моделировании основных механических свойств в покрытиях из TiCN, TiAlN, CrN модулей упругости, твердости, износа и усталости при контакте представлены в работе [45]. Следует отметить, что в БНТУ проводятся исследования об упрочняющих покрытиях из предварительно модефицированной поверхности применительно

к эксплуатации элементов деталей машин. В [46] показано, как влияет модификация поверхности на механические свойства системы «подложка – покрытие» и почему изменяется износостойкость и микроведость. А также проведены исследования о трибологических характеристиках изделий, которые взаимосвязаны со структурой покрытий и их механическими свойствами. Анализ литературных источников показывает, что теоретически проблема математического моделирования расчета напряженного состояния и температуры в покрытиях и основаниях недостаточно изучена, создается необходимость теоретического описания и создания алгоритма расчета таких систем с позиций механики деформируемого твердого тела.

Анализ литературы по расчету температуры для покрытия. В результате контакта индентора и покрытия в процессе движения происходит нагрев покрытия и основания, а количество создаваемого тепла определяется деформационными свойствами материала покрытия, температурой окружающей среды, скоростью деформации и т. д. Вопрос состоит в создании математической модели, описывающей температуру и напряженное состояние системы «покрытие – основание». Так, в работе [47] разработан математический аппарат решения задач теории термоупругости на основе комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили. Возможно также применение интегральных преобразований для решения краевых задач теории термоупругости [48]. Суть метода заключается в том, что находим решение граничной задачи для ортотропной полуплоскости, т. е. распределение температур $T(x,y)$ в полупространстве удовлетворяет стационарному уравнению теплопроводности (здесь применяется решение для покрытия с неоднородной структурой). Выведено решение для $T(x,y)$. Аналогично решаем граничную задачу для покрытия, моделируя его как полосу [47], так для изотропной полосы имеем

$$T(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\alpha y) T(\alpha)}{k \operatorname{ch}(\alpha h)} \cos(\alpha x) d\alpha.$$

Для определения компонент тензора напряжений строим функцию Грина, а затем решаем задачу термоупругости по определенному алгоритму, добавляя составляющие компоненты от температуры, а силовые нагружения на границе заменяем на дискретные постоянные температурные. Для более широкого применения данной теории считается, что рассматриваемое тело ортотропное (изотропность получаем как частный случай при равенстве упругих направлений, модулей упругости). Пусть ортотропное тело занимает область ($y < 0$), ограниченную прямой L ($y = 0$). Найдем напряженное состояние в случае, когда температура T на контуре L задана кусочно-постоянной функцией. Напряжения

$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ всюду на контуре L ; $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ – на бесконечности. Решение этой задачи через комплексные постоянные представлено в работе [47]; комплексный потенциал температурного поля определяется функцией

$$\Psi_0(\xi) = \frac{T_0}{2\pi i} \ln \frac{\xi + a}{\xi - a},$$

и также находим компоненты напряжений. Некоторые теоретические результаты для расчета распределения температуры как в покрытии, так и в основании представлены в работе [49]. На основании этой работы возникает возможность создания нового алгоритма и программы расчета распределения температуры в покрытиях при контактном взаимодействии. Например, если использовать обзоры и подходы, представленные в работах [47]–[51], то можно изучить вопрос о влиянии коэффициента трения на распределение температуры для функционально-градиентного материала.

Анализ литературы по расчету напряженного состояния в покрытии. Изменения напряженного состояния в покрытии и влияния упругих свойств основания на параметры контакта был разработан, например, в [52]. На рисунке 1.2. показана реализация расчета при статическом контакте цилиндрического индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании. На основании разработанной теории расчета покрытий из композитов построена методика определения параметров контакта.

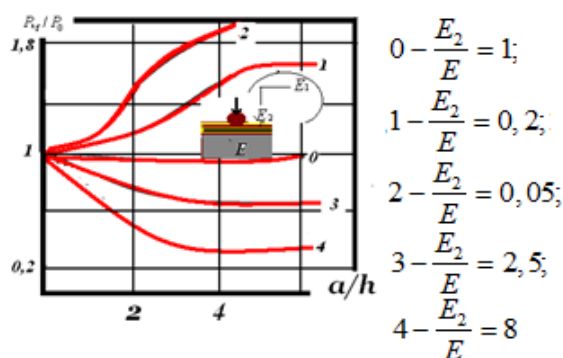


Рисунок 1. 2 – Зависимость относительного давления P_M / P_0 от a / h цилиндрического штампа в ортотропное покрытие для различных отношений упругих постоянных покрытия и основания E_i / E [52]

В последнее время предложен ряд математических и физических моделей для расчета покрытий [50]. Так, в [50], [53] предложена физикоматематическая модель, описывающая деформирование и разрушение функционально-градиентных материалов. Математическая модель контакта между цилиндром и функционально-градиентным полупространством представлена Giannakopoulos и Pallot в [54], подложки в

покрытиях были изучены Гюлер и Эрдоган [55], [56]. Фундаментальные исследования в качестве основы механики для контакта градиентных материалов для осесимметричных моделей функционально-градиентных полупространств под действием сосредоточенной силы или осесимметричных инденторов были рассмотрены Giannakopoulos и Суреш [57]. Обширный перечень публикаций последних десятилетий, связанный с решением граничных и контактных задач для слоистых неоднородных тел анизотропной структуры от теоретических исследований до практических реализаций и экспериментов в различных областях теории упругости, приведен в диссертации Е.М. Березовской. Решению контактной задачи с учетом трения в области контакта посвящены работы И.А. Солдатенкова [58], [59]. В.В. Васильев и С.А. Лурье [60] рассмотрели контактную задачу теории упругости для прямоугольной ортотропной полосы. Методом разделения переменных решение задачи сводится к проблеме разложения заданных граничных функций на противоположных краях полосы в ряды по обобщенным собственным функциям. Используя алгебру псевдодифференциальных операторов, находят явные выражения для коэффициентов искомых разложений. Контактная задача для неоднородного (слоистого или функционально градиентного) упругого полупространства рассмотрена С.М. Айзикович [61] и С.А. Чижиком [62]. В работах [63], [64] исследованы задачи по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистой системы изотропная полоса – ортотропное основание. Решена контактная задача о взаимодействии волокнистого композиционного материала с однородным покрытием и цилиндрическим индентором. В работе [65] исследуется температурное поле покрытия из градиентных материалов в случае движения индентора по поверхности. Используя известные теоретические подходы, составлен алгоритм расчета изменения температуры в покрытии для различных температурных параметров, построены графические зависимости, например, изменения теплопроводности в зависимости от глубины. В конечном итоге задача определения температуры сводится к численному решению интегралов, полученных из преобразования Фурье. Классические методики расчета напряженного состояния слоистых тел представлены в работах [66], [67]. В основу этих работ положен сложный математический подход, который усложняет процедуру алгоритмизации с целью получения достаточно приемлемых инженерных расчетов.

Обзор литературных источников показал, что, исходя из поставленных целей исследования, имеется возможность успешно решить поставленные задачи: разработать основные теоретические положения об определении температу-

ры и напряжений в слоистых телах при трении; создать алгоритм расчета примеров определения напряжений и температуры в покрытиях; исследовать влияние толщин покрытий и его физических параметров на напряженное и деформированное состояние в покрытиях.

Рассмотрим краткую характеристику исследований и полученных результатов, касающихся решения проблемы определения напряженного состояния взаимодействующих упругих слоистых тел и возникающих в этой связи инженерных задач применительно к расчету деталей машин из композитов.

2 Создания методик расчета контактного взаимодействия и износа зубьев зубчатых колес из изотропного и композиционного материала

В применяемой практике машиностроения одной из актуальных задач является создание и использование материалов, которые отличались бы своей износостойкостью и долговечностью, что значительно влияет на экономическую составляющую изготовления и эксплуатацию деталей элементов конструкций. Это, в свою очередь, требует разработки более детального подхода к новым алгоритмам расчета, базирующегося на современном программном обеспечении, которое позволит выбрать оптимальные свойства композиционных материалов.

В работах [3], [6], [7] рассмотрена реализация алгоритма и методики расчета износа зубьев зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала. Теоретической основой реализации поставленной задачи является решение задач о контактом взаимодействии ортотропных цилиндров, которые моделируют контакт зубьев зубчатых колес [1]–[5]. Следует отметить, что расчет параметров контакта (зон контакта, напряжений, износа и т. д.) применительно к работе таких передач, как зубчатые колеса из композитов, является многопрофильным, включает расчеты, связанные с напряжениями зубьев и трибологическими отказами, такими, как износ. Для автоматизации процесса расчета на износ зубьев, т. е. элементов деталей машин, необходимо создавать современные компьютерные программы, по которым легко прогнозировать и определять ресурс работы такой передачи, делать визуализацию результатов в виде графических зависимостей, таблиц и т. д. В работах [3], [7], [9] была написана программа в среде Delphi, позволяющая строить профиль зубьев зубчатых колес, определять зону контакта взаимодействующих зубьев зубчатых колес, вычислять толщину изношенного слоя, учитывать расположение волокон в матрице на параметры износа.

Рассматривается контактная задача о взаимодействии зубьев зубчатых колес, считая, что их контакт можно моделировать соприжением

двух цилиндров с радиусами R_1 и R_2 , прижатыми друг к другу силой P . Материалы зубчатых колес, работающих в зубчатой передаче, различны: анизотропный (композиционный) и изотропный материал. Схема контакта двух цилиндров из волокнистого композиционного и изотропного материала представлена на рисунке 2.1.

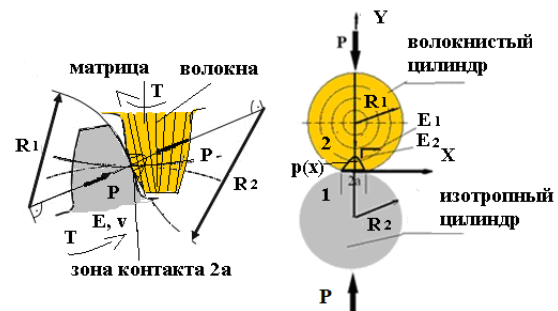


Рисунок 2.1 – Схема контакта зубьев зубчатых колес из композита [5]

Для определения контактного напряжения при взаимодействии ортотропных цилиндров величина зоны контакта (полуширина) a определяется по формуле [1]:

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi m L(R_1 + R_2)}},$$

где P – сила давления двух цилиндров; L – осевая длина цилиндров (толщина цилиндров); R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих цилиндров (мм); параметр

$$m = [((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(1)} + ((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(2)}]^{-1},$$

индексы (1) и (2) – характеризуют материалы двух цилиндров, величины $\beta_{1,2}$ для каждого цилиндра вычисляются по формулам [1]

$$\beta_{1,2} = \left(\frac{\sqrt{S_{66} + 2S_{12}} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}} \right)^{-1},$$

где постоянные S_{ij} при плоской деформации определяются из [1] следующим образом:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}, S_{12} = -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}}{E_1},$$

$$S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}, S_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

индексы 1, 3 модуля упругости E (МПа), коэффициента Пуассона ν и модуля сдвига G (МПа) характеризуют различные направления. Модули вычисляются по зависимостям по правилу смесей.

Уравнение, описывающее давления $p(x)$ и максимальные контактные напряжения в зоне контакта a , имеет вид [1]:

$$p(x) = m \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}, \sigma_c = \frac{2P}{\pi a L}, -a \leq x \leq a.$$

Расчет зубьев на контактную прочность. В работе [17] рассматривается компьютерная реализация методики расчета контактных напряжений и перемещений зубьев зубчатых колес из изотропного и анизотропного (композиционного) материалов, построенная на основе теории Герца [1] и анизотропной теории упругости [2]. Получены инженерные формулы расчета на прочность:

$$\sigma_{np} = Z_H Z_M Z_\xi \sqrt{\frac{u \pm 1}{u} \cdot \frac{W_H}{d_{p1}}} \leq [\sigma_{доп}],$$

где для прямозубых передач $Z_\xi = \sqrt{(4 - \xi)/3}$; коэффициент торцового перекрытия

$$\xi = 1.88 - 3.2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right),$$

z_1 и z_2 – количество зубьев шестерни и колеса соответственно; $[\sigma_{доп}]$ – допускаемое контактное напряжение для зубьев (МПа). Обозначения даны в работе [17].

Одним из главных параметров, характеризующих контактное взаимодействие зубьев зубчатых колес, является контактное сближение или перемещение. Если материал зубьев колес обладает свойствами ортотропии, то контактное перемещение v (мм) определяется по зависимости [2]:

$$v = -\frac{P}{\pi} \left\{ S_{22} (\beta_1 + \beta_2) \left[\ln \frac{a}{2q} - \frac{1}{2} \right] + \frac{S_{22}}{\beta_1 - \beta_2} (\beta_1^2 \ln \beta_1 - \beta_2^2 \ln \beta_2) + \frac{S_{12}}{\beta_1 - \beta_2} \ln \frac{\beta_2}{\beta_1} \right\},$$

где q – мера контактного сближения расстояния (мм), равная, например, $20a$.

Данная зависимость легко преобразуется в формулу для определения контактного сближения изотропного цилиндра при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ [2], [10].

Сближение двух контактирующих зубьев δ (мм) представляет собой сумму контактных перемещений каждого зуба.

Анализ напряженно-деформированного состояния зубьев с покрытиями в зубчатых колесах из композитов. Целью расчета зубьев зубчатых колес с покрытиями из композитов (с твердой смазкой) является установление допустимых значений контактных напряжений и деформаций для действующей нагрузки и других параметров и их соответствия физико-механическим свойствам выбранных материалов пары контакта «зуб металлического колеса – покрытие из композита» при принятых геометрических соотношениях, обеспечивающих наибольший срок службы и достаточно высокие эксплуатационные свойства, получение наибольшей работоспособности зубчатой передачи.

В последнее время для проектирования зубчатой передачи стали применяться композиционные

материалы на основе различных смол, а также волокнистые армированные материалы. Расчет таких передач при контактном взаимодействии, в основном, построен на изотропных свойствах материала. Но современные волокнистые композиты имеют выраженную анизотропию механических свойств. Эти особенности необходимо учитывать при расчете и конструировании зубчатых колес из композитов.

В работах [12]–[14] строится математическая модель расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) зубьев с покрытиями для зубчатых колес из композитов при их взаимодействии для системы контакта «зуб металлического колеса – покрытие из волокнистого материала на жестком основании» (рисунок 2.2), используя в основе математическую теорию упругости анизотропного тела.

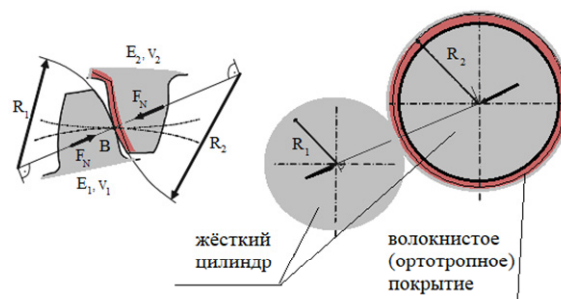


Рисунок 2.2 – Схема, моделирующая контакт зубьев с покрытием

Расчет НДС металлических деталей с покрытиями из композита по схеме «бесконечная упругая полоса, адгезионно связанная с жестким основанием». Контакт зубьев с покрытием моделируется в виде контакта двух цилиндров, один из которых имеет покрытие из композита (рисунок 2.2).

Разработана программа для расчета НДС ортотропной полосы на упругом основании [1], [2]. Из работы следует, что напряжения σ_y практически линейно убывают по глубине, а напряжения σ_x имеют максимальные значения на поверхности при $y = 0$ и на границе раздела с жестким основанием.

Разработан алгоритм и создана программа, реализующая решение задачи об определении напряжений в покрытии из композита зуба зубчатого колеса при контакте с металлическим. Представлена методика расчета напряженно-деформированного состояния упругих тел из композитов, в частности, зубьев зубчатых колес из современных композиционных материалов на основе теории о математических моделях ортотропных и функционально-градиентных материалов (ФГМ) [13]. Построены графики зависимости напряжений по глубине от поверхности

контакта для различных материалов, показано хорошее соответствие для предельного случая – изотропии материала. На рисунке 2.3 показаны линии уровня максимальных касательных напряжений τ_{\max} / p_0 для функционально-градиентного материала с заданным действующим давлением на границе

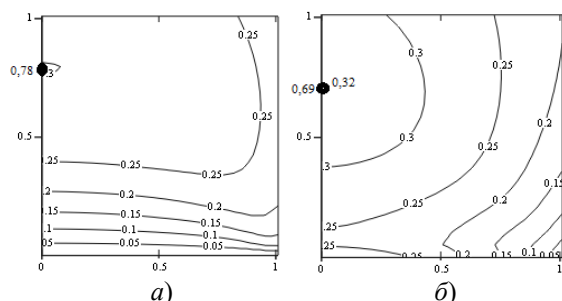


Рисунок 2.3 – Линии уровня максимальных касательных напряжений τ_{\max} / p_0 для ФГМ при $k = 0$ (а); $k = 0,5$ (б) [13]

По приведенным зависимостям и графическим иллюстрациям можно легко определить возникающие максимальные напряжения при контакте жесткого цилиндрического тела с упругой полуплоскостью из вышеуказанных материалов, то есть для ортотропии и ФГМ. Анализ вычисленных напряжений τ_{\max} / p_0 показал, что изменение закона распределения давления, действующего на поверхности полуплоскости из ФГМ, незначительно влияет на окончательный результат, поэтому для оценки возникающих напряжений можно применять более простую зависимость.

Расчет параметры контакта «вал – втулка» для подшипников скольжения из композитов. В процессе исследований [9] создана математическая модель, которая применяется при разработке алгоритма инженерного расчета давления при контактом взаимодействии для системы «вал – втулка» из волокнистого материала расположенного перпендикулярно, параллельно и радиально оси втулки» (рисунок 2.4).

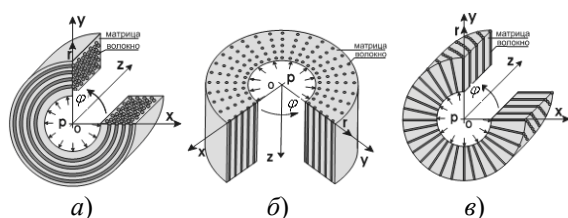


Рисунок 2.4 – Расположение волокон во втулке по отношению к её оси ($\varphi r z$ и $x y z$ – цилиндрическая и декартова системы координат) [9]:

а) перпендикулярно; б) параллельно;
в) радиально

Математические модели расчета контактных параметров для подшипников скольжения из волокнистых композитов. Представлен расчет напряженного состояния ортотропного тела при взаимодействии вала с втулкой композита [9], подверженного воздействию поверхностного давления p , распределенного в соответствии с законом

$$p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}, p_0 = 2P / (L\pi a^2),$$

где R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих тел – втулки и цилиндра (мм); P и L – действующее усилие и длина цилиндра, параметр t вычисляется по выше приведенной формуле.

Величина зоны контакта при сопряжении рассматриваемых упругих ортотропных тел определяется по формуле:

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi mL(R_1 - R_2)}}.$$

Для оценки применимости формул, определяющих параметры контакта для внутреннего взаимодействия изотропного цилиндра с ортотропной втулкой, сделана оценка применимости формул аналогично, как сделано в работе [19].

3 Методы математического программирования и конечных элементов при исследовании качения и зоны контакта автошины с основанием

Для описания и анализа контактных процессов, происходящих при качении автомобильных колес по основанию и механизма изнашивания автошин колес, были рассмотрены задачи о математическом моделировании процесса качения двух ортотропных (из композитов) цилиндров с параллельными осями, прижатых друг к другу с силой P , и их реализация в виде компьютерных программ. Решение данной проблемы позволяет оценить влияния механических и упругих свойств армированной шины колеса. В связи с построением решения данной задачи возникает и другая проблема расчета напряженно-деформированного состояния армированной шины и определения дискретных зон контакта в системе взаимодействия «шина – основание». Разработана теоретико-экспериментальная методика на базе МКЭ и проведения опытов на основе современных технических достижений сканирования зон контакта (например, фотопринт) или сбор сигналов от пьезодатчиков давления и обработка их на компьютере.

Программа, реализующая определение зоны контакта напряжений и перемещений построена на основе МКЭ, в которой используются экспериментальные исследования, например, применяя фотопринт [9], рисунок 3.1. Разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений в контактирующих телах.

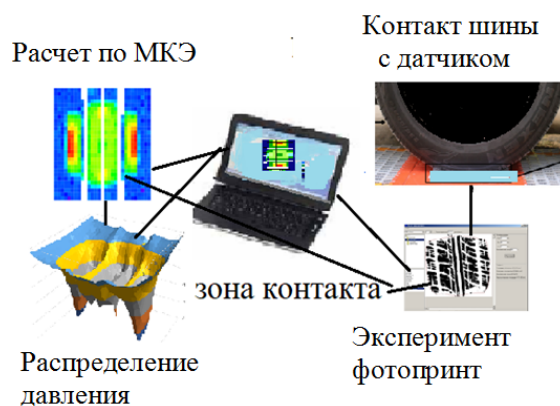


Рисунок 3.1 – Схема расчета параметров контакта [7]

Результаты экспериментального исследования о взаимодействии шины колеса с основанием, а также определения размеров зоны контакта и деформативности шины, получены вследствие опытов в ИММС НАН РБ [20], [21]. Так как давление в зоне контакта распределено неравномерно, то зона контакта является дискретной и различная в цветовом диапазоне, рисунок 3.2.

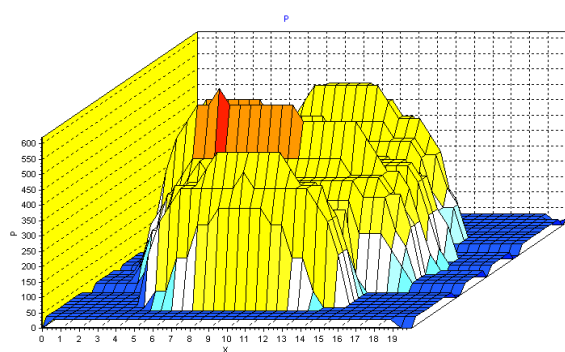


Рисунок 3.2 – Эпюра изменения давления при контакте шины колеса [10]

4 Создание математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем из композитов для статических и динамических задач

На основании проведенных совместных исследований в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины и Институте механики НАН Республики Армения по вопросам создания математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем из композитов для статических [68] и динамических задач [69], [70] механики неоднородных структур построена теория и алгоритм инженерного расчета, новые методики решения задач взаимодействия для слоистых систем из композитов, созданы современные инженерные методики расчета слоистых систем с учетом вязкоупругих физико-механических характеристик материалов, что позволяет эффективно применять новые инженерные подходы

в машиностроении для расчета конструкций, подвергающихся силовым нагрузкам.

На основании совместных исследований, отраженных в работе [68], предложены методы нахождения напряженно-деформированного состояния различных покрытий из композитов, методы повышения триботехнических свойств сопряжений, используя материалы, упрочненные путем армирования дисперсным или волокнистым наполнителем. Для расчета различных моделей расположения волокон в покрытии предлагается использовать метод граничных элементов. Построенный алгоритм расчета слоистых систем для тел неоднородной структуры [68] был апробирован для создания математической модели расчета изменяющегося давления при контакте жесткого цилиндрического индентора с вязкоупругой изотропной полосой жестко скрепленной с ортотропным основанием [6].

Что касается исследований волновых процессов, происходящих в слоистых телах, то основательная теория была построена и отражена в совместных исследованиях, представленных в работах [71], [72]. Так, в работе [72] предлагается математическая модель для исследования влияния свойства тонких покрытий на характеристики упругого волновода. Получены зависимости, определяющие фазовые скорости в изотропном слое с покрытием с различными геометрическими и физическими характеристиками. Построены асимптотические формулы, определяющие зависимость фазовой скорости от частоты, т. е. дисперсию. Установлено, что выбором упругих свойств покрытий можно увеличить или уменьшить фазовые скорости сдвиговых волн. Значительное продвижение по вопросу изучения динамики пьезоэлектрических поверхностных волн сдвига вблизи границы с несовершенной связью между слоем и полупространством доложено и обсуждено на Международной конференции «Проблемы взаимодействия деформируемых сред» (1–6 октября 2018 г., г. Горис, Республика Армения), посвященной 75-летию Академии наук Республики Армения [71]. При исследовании основное внимание уделяется распространению поверхностных волн сдвига в слоистых пьезокерамических средах (слой и полупространство) с несовершенной связью.

Проведенные совместные исследования дают основу для построения дальнейшего углубленного и перспективного направления исследований. Проблема аналитического и численного исследования задач механики деформируемого твердого тела в случае тел сложной геометрии и неоднородного строения (слоистых систем, изделий и покрытий из композиционных материалов) представляет практический интерес и предполагает не только исследование деформационных процессов, инициированных интенсивными импульсными нагрузками при контактном

взаимодействии, но и моделирование волновых процессов, приводящих в конечном итоге к частичному или полному разрушению тела. Решение этой важной научно-технической проблемы является перспективным направлением для дальнейшего развития современных методов расчета элементов конструкций из композиционных материалов. Основная научная сущность развития – это создание аналитическо-численного решения задач динамики элементов механических и слоистых систем, изделий и покрытий из композиционных материалов с учетом особенностей контактного взаимодействия и физико-механических характеристик материалов с учетом вязкоупругости [73], [74].

Практические результаты по исследованиям трибологических параметров для элементов деталей машин на примере нахождения закономерности изнашивания упрочненной ионами азота аустенитной стали 12X18H10T, полученные совместно с институтом ОИМ НАН РБ, представлены в работах [8], [15]. Для слоистого материала «высокопрочное покрытие – основа» с различающимися значениями толщины упрочнённого слоя проведено конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния, формирующего при трении. Показано, что с уменьшением толщины покрытия регистрируется существенное возрастание уровня сдвиговых напряжений, действующих в основе при трении [15].

Получены результаты исследований о численном моделировании с помощью метода конечных элементов, расчета и анализа напряженного состояния в слоистом теле (изотропное упругое покрытие на упругом основании [8]) при взаимодействии цилиндрического индентора с упругим покрытием с учетом трения. Исследование направлено на изучение механизма износоустойчивости высокохромистых сталей, модифицированных ионами азота при различных температурах.

Заключение

Представленный обзор исследований, отраженный в научно-технической литературе о трибологических взаимодействиях элементов машин из композитов, показал, что определения параметров контактирующих тел зависит от множества факторов. Поэтому для описания методики и автоматизации расчетов и иллюстрации схем работы элементов машин необходимо создавать новые компьютерные программы, разрабатывать инженерный расчёт НДС взаимодействующих тел при контакте с дорожным основанием (покрытием). На основании методов математического программирования и численных расчетов по МКЭ напряженного состояния упругих волокнистых тел углублено разрабатывать алгоритмы решения задачи качения цилиндров из композитов и расчеты элементов деталей машин.

Для успешного использования на практике алгоритмов и программ для вышеуказанных исследований нужно решить следующие задачи:

- разработать новые математические модели и методы исследования динамических процессов в упругих элементах машин и конструкций, возникающих при контактировании тел из композитов;
- создать алгоритмы и методики расчета НДС слоистых систем из композитов с учетом трибологических эффектов;
- создать аналитическо-численные алгоритмы расчета НДС анизотропных слоистых систем, изделий и покрытий из композиционных материалов с учетом физико-механических характеристик материалов в новых магнито-электрических средах;
- создать современные инженерные методики расчета контактного взаимодействия слоистых систем с учетом динамики элементов, механических анизотропных и вязкоупругих характеристик конструкционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. *Реализация алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем* / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – Минск. – 2020. – Вып. 35. – С. 36–43.
3. *Влияние расположения волокон на параметры контакта и износа для зубьев зубчатых передач из композитов* / В.В. Можаровский [и др.] // Математические методы в технологиях и технике. – 2023. – № 10. – С. 71–75.
4. *Применение математических методов к расчету контактного взаимодействия упругих тел из композитов* / В.В. Можаровский [и др.] // Математические методы в технологиях и технике. – 2021. – № 11. – С. 7–11.
5. *Реализация алгоритмов расчётов напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем* / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 36–43.
6. *Реализация методики расчета износа зубьев зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала* / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – 2024. – Вып. 39. – С. 109–115.
7. *Можаровский, В.В.* Применение методов математического программирования и конечных элементов при исследовании качения и зоны контакта автошины с основанием / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Ю.В. Василевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – № 38. – С. 50–54.

8. Численный расчет и анализ напряженно-го состояния в слоистом теле при трении с учетом изменения модулей упругости покрытия и основания / В.В. Можаровский [и др.] // Проблемы физики, математики и техники, 2024. – № 1 (58). – С. 22–28.
9. Можаровский, В.В. Влияние расположения волокон на параметры контакта «вал – втулка» для подшипников скольжения из композитов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – № 38. – С. 55–60.
10. Методика и алгоритм расчета параметров контакта при взаимодействии шины колеса с основанием / В.В. Можаровский [и др.] // Математические методы в технологиях и технике. – 2022. – № 11. – С. 43–47.
11. Некоторые вопросы исследования покрытий из функционально-градиентных материалов при контактном взаимодействии / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – 2021. – Вып. 36. – С. 83–92.
12. Можаровский, В.В. Расчет напряженно-деформированного состояния зубьев зубчатых колес из композиционных и функционально-градиентных материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 31–37.
13. Можаровский, В.В. Компьютерная реализация методики расчета контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес из изотропного и композиционного материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2021. – № 6 (129). – С. 171–177.
14. Реалізація методики розрахунку контактної взаємодії зубів зубчастих коліс з композиційних матеріалів / В.В. Можаровський [и др.] // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2021. – № 4. – С. 50–55.
15. *Wear Resistance of Nitrogen-Modified High-Alloy Steels Under Friction Conditions without Lubricant* / V.A. Kukareko [et al.] // *Friction and Wear*. – 2024. – Vol. 45, iss. 6. – P. 322–331.
16. Можаровский, В.В. Асимптотические зависимости расчета параметров контакта и износа зубьев зубчатых колес с покрытием из композита при контактном взаимодействии / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (63). – С. 37–42.
17. Mozharovsky, V.V. Calculation of the contact interaction of gear teeth from composite materials / V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, S.V. Kirhintsava // *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, February 2022. – Vol. 9, iss. 2. – P. 18921–18928.
18. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский [и др.] // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – Минск, 2007. – С. 135–142.
19. Киргинцева, С.В. Математические модели расчета контактных параметров для подшипников скольжения из волокнистых композитов / С.В. Киргинцева, В.В. Можаровский // Материалы I Международной научно-практической конференции «Композиты в машиностроении и транспорте» (Гомель, 20 апреля 2023 г.). – Гомель: БелГУТ, 2023. – С. 31–34.
20. Белый, В.А. Металло-полимерные зубчатые передачи / В.А. Белый, В.Е. Старжинский, С.В. Щербаков. – Минск: Наука и техника, 1981. – 352 с.
21. Можаровский, В.В. Соотношения между напряжениями и перемещениями на границе упругой полосы, спаянной с жестким основанием / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский // Всесоюзный научный семинар «Контактная жесткость в машиностроении». – Тбилиси, 1974. – С. 107–109.
22. Шилько, С.В. Расчет фрикционных характеристик металлополимерных трибосопряжений методом вариационных неравенств: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04 / С.В. Шилько; Ин-т механики металлополимерных систем. – Гомель, 1991. – 20 с.
23. Рогачева, Н.А. Создание математических моделей взаимодействия покрытий и оснований из волокнистых композиционных материалов в телах сопряжений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Н.А. Рогачева; БелГУТ. – Гомель, 2000. – 17 с.
24. Березовская, Е.М. Решение граничных задач для ортотропных неоднородных тел и покрытий: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Е.А. Березовская; БелГУТ. – Гомель, 2002. – 21 с.
25. Марьин, С.А. Расчетные модели и методы определения напряженно-деформированного состояния цилиндрических тел (труб) из волокнистых композиционных материалов: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / С.А. Марьин; БелГУТ. – Гомель, 2006. – 20 с.
26. Berg, C.A. Wear and friction of two different types of graphite fibre-reinforced composite materials / C.A. Berg, S. Batra, J. Tirosh // *Fiber Sci. and Technol.* – 1973. – № 3. – P. 159–185.
27. Eliezer, Z. Friction and wear properties of an epoxy-steel system / Z. Eliezer, C. Schulz, J.W. Borlow // *Wear*. – 1978. – Vol. 46, № 2. – P. 397–403.
28. Sung, N. Effect of fiber orientation on friction and wear of fiber-reinforced polymeric composites / N. Sung, W. Suh // *Wear*. – 1979. – Vol. 53. – P. 129–141.
29. Chang, H.W. Wear characteristics of composites: effect of fiber orientation / H.W. Chang // *Wear*. – 1983. – Vol. 85. – P. 81–85.

30. *Srivastava, V.K.* Wear and friction characteristics of mica-filled fibre-reinforced epoxy resin composites / V.K. Srivastava, J.P. Pathak, K. Tahzibi // *Wear*. – 1992. – Vol. 152, № 2. – P. 343–350.
31. *Буря, А.И.* Трение и изнашивание полиамида-6 и углепластиков на его основе / А.И. Буря, Б.И. Молчанов // *Трение и износ*. – 1992. – № 5. – С. 900–904.
32. *Композиционные материалы: справочник* / под общ. ред. В.В. Васильева. – Москва: Машиностроение, 1990.
33. *Saks, N.* Friction and wear of fiber-reinforced metal-matrix 339 composites / N. Saks, N.K. Szeto, T. Erturk // *Wear*. – 1992. – Vol. 157, № 2. – P. 339–357.
34. *On the sliding wear performance of polyethernitrite composites* / K. Friedrich [et al.] // *Wear*. – 1992. – Vol. 158, № 1–2. – P. 157–170.
35. *Pearsall, K.I.* The effect of sliding time and speed on the wear of composite materials / K.I. Pearsall, Z. Eliezer, M.F. Amateau // *Wear*. – 1980. – Vol. 63. – P. 121–130.
36. *Argatov, I.I.* Small-scale indentation of an elastic coated half-space: influence of poisson's ratios on the substrate effect / I.I. Argatov, F.J. Sabina // *Int. J. Eng. Sci.* – 2014. – Vol. 81. – P. 33–40.
37. *Willis, J.R.* Hertzian contact of anisotropic bodies / J.R. Willis // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. – 1966. – Vol. 14. – P. 163–176.
38. *Свекло, В.А.* Действие штампа на упругое полупространство / В.А. Свекло // *Прикладная математика и механика*. – 1970. – Т. 34, вып. 1. – С. 72–178.
39. *Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах* / В.В. Можаровский [и др.] // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.
40. *Можаровский, В.В.* Моделирование напряженно-деформированного состояния массивных шин из армированных материалов / В.В. Можаровский // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2008. – № 3. – С. 14–21.
41. *Pleskachevsky, Yu. M.* Mathematical models of quasi-static interaction between fibrous composite bodies / Yu.M. Pleskachevsky, V.V. Mozharovsky, Yu.F. Rouba // *Computational methods in contact mechanics III: Proc. Int. Conf., Madrid, July 3–5, 1997*. – Madrid, 1997. – P. 363–372.
42. *Cholakova, T.M.* Effect of the heat treatment on mechanical and structural properties of CrTiAlN coatings deposited at low temperature / T.M. Cholakova, L.P. Kolaklieva, R.D. Kakanakov // *Bulgarian Chemical Communications*. – 2018. – Vol. 50. – P. 197–204.
43. *Jabłoński, P.* Structural FEM analysis of thermal sprayed coatings under conditions of contact pressure and high temperature / P. Jabłoński, P. Czajka // *Poznan University of Technology, Institute of Mechanical Technology Conference Paper, April 2017*. – Vol. 1. – P. 24–25.
44. *Асанов, Б.У.* Нитридные покрытия, полученные вакуумно-дуговым осаждением / Б.У. Асанов, В.П. Макаров // *Вестник КPCY*. – 2002. – № 2. – С. 48–52.
45. *Maysara, K.* Mathematical Modeling of Mechanical Properties of PVD Coated Steel Blanking Punch / K. Maysara [et. al] // *International Journal in IT and Engineering*. – September, 2016. – Vol. 4, № 9. – P. 1776–2321.
46. *Константинов, В.М.* Механические свойства нанопокрывтий, полученных на предварительно модифицированной поверхности / В.М. Константинов, А.В. Ковальчук, Г.А. Ткаченко // *Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка: материалы 10-й Международной научно-технич. конф. (Минск, 12–14 сентября 2012 г.)* / гл. ред. П.А. Витязь. – Минск: Беларуская навука, 2012. – С. 175–178.
47. *Прусов, И.А.* Термоупругие анизотропные пластинки / И.А. Прусов. – Минск: БГУ, 1978. – 200 с.
48. *Акоц, А.* Температурные напряжения в ортотропном упругом полупространстве / А. Акоц, Т. Тошер // *Прикладная механика*. – 1972. – № 1. – С. 86.
49. *Ming-Hsien, Hsieh.* Analitical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources / Ming-Hsien Hsieh, Chien-Ching Ma // *I. J. of Heat and Mass Transfer*. – 2002. – № 45. – P. 4117–4132.
50. *Можаровский, В.В.* Анализ механико-математических моделей расчета функционально-градиентных материалов, работающих в условиях контактного взаимодействия / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2013. – № 3. – С. 14–21.
51. *Можаровский, В.В.* О расчете напряженного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. – 2014. – № 3 (84). – С. 86–92.
52. *Можаровский, В.В.* Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 4 (29). – С. 74–81.
53. *Герасимов, А.В.* Численное моделирование деформирования и разрушения функционально-градиентных пористых материалов при взрывном и ударном нагружении / А.В. Герасимов, Р.А. Кректулева // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 1999. – Т. 5, № 3. – С. 94–106.
54. *Giannakopoulos, A.E.* Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials / A.E. Giannakopoulos, P. Pallot // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2000. – № 48. – P. 1597–1631.

55. Guler, M.A. Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings / M.A. Guler, F. Erdogan // *Mech. Mater.* – 2006. – № 38. – P. 633–647.
56. Guler, M.A. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings / M.A. Guler, F. Erdogan // *Int. J. Mech. Sci.* – 2007. – № 49. – P. 161–182.
57. Giannakopoulos, A.E. Indentation of solids with gradients in elastic properties / A.E. Giannakopoulos, S. Suresh // *Point force. Int. J. Solids Struct.* – 1977. – № 34. – P. 2357–2392.
58. Солдатенков, И.А. Приближенное решение задачи об изнашивании тонкой полосы, связанной с упругой полуплоскостью / И.А. Солдатенков // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 1997. – № 1. – С. 48–55.
59. Солдатенков, И.А. Контактная задача для полуплоскости при учете касательного перемещения на контакте / И.А. Солдатенков // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 1994. – № 4. – С. 51–61.
60. Васильев, В.В. О точных решениях плоской задачи теории упругости для ортотропной полосы / В.В. Васильев, С.А. Лурье // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 1994. – № 1. – С. 120–130.
61. Айзикович, С.М. Внедрение сферического индентора в полупространство с функционально-градиентным упругим покрытием / С.М. Айзикович, Л.И. Кренев, Т.А. Кузнецова // *Доклады Академии наук.* – 2008. – Т. 418, № 2. – С. 186.
62. Задача о внедрении в функционально-градиентное упругое полупространство осесимметричного штампа / С.М. Айзикович [и др.] // *VIII Международный семинар.* – Минск, 2010. – С. 154–156.
63. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский, Ю.М. Плещачевский, С.Ю. Бабич, Е.М. Березовская // *Трение и износ.* – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.
64. Можаровский, В.В. Напряженное состояние упругого ортотропного основания с однородным покрытием с учетом трения / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // *Трение и износ.* – 1999. – Т. 20, № 5. – С. 471–479.
65. Choi, H.J. On the plane contact problem of a functionally graded elastic layer loaded by a frictional sliding flat punch / H.J. Choi // *J. Mech. Sci. Technol.* – 2009. – № 23. – P. 2703–2713.
66. Bikartas, I. The contact problem of an orthotropic non-homogeneous elastic half space / I. Bikartas // *Int. J. Eng. Sci.* – 1984. – № 22. – P. 347–359.
67. Peijian, C. Thermo-contact mechanics of rigid cylindrical stamps sliding on a finite graded-Layer / Chen Peijian, Chen Shaohua // *Acta Mech.* – 2012. – Vol. 223. – P. 2647–2665.
68. Boundary element method in determining the stress-strain state of composite coating in tribological systems // V. V. Mozharovsky [et al.] // *Ukrainian Conference in Applied Mathematics, L'viv, September 28–30, 2017 / Ivan Franko National University of L'viv.* – L'viv, 2017. – P. 76–77.
69. Ghazaryan, K.B. Shear waves in a two-phase oppositely polarized viscoelastic piezoelectric waveguide / K.B. Ghazaryan, V.V. Mozharovsky, S.K. Ohanyan // *Topical problems of continuum mechanics: material's V International Conference with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirrov's 60th Birthday, Tsaghkadzor, October 2–7, 2017 / Institute of mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia.* – Tsaghkadzor, 2017. – P. 174–176.
70. Generalized Love waves in bi-material waveguide with viscous slip interface / K. Ghazaryan [et al.] // *Modern problems of Mechanics and Mathematics: material's International Conference, L'viv, May 22–25, 2018.: in 3 vol. / Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine; edited by Academician of NAS of Ukraine A. M. Samoilenko and Academician of NAS of Ukraine R. M. Kushnir.* – L'viv, 2018. – Vol. 1. – P. 144–145.
71. Piezoelectric shear surface waves near an imperfectly bonded interface between layer and half-space / K. B. Ghazaryan [et al.] // *The problems of interaction of deformable media: material's IX International Conference dedicated to the 75th anniversary of NAS RA, Goris, October 1–6, 2018 / Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia.* – Goris, 2018. – P. 331–335.
72. Распространение сдвиговых волн в плоском изотропном слое с тонкими покрытиями / В.М. Белубекян [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 4 (33). – С. 40–43.
73. Можаровский, В.В. Реализация решения контактной задачи о вдавливании жесткого цилиндрического индентора в изотропную вязкоупругую полосу на ортотропном основании / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Н.А. Марьина // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2018. – № 2 (35). – С. 51–56.
74. Можаровський, В.В. Методика розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих труб з урахуванням явищ повзучості і релаксації / В.В. Можаровський, Е.А. Голубова, Д.С. Кузьменков // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. фізико-математичні науки.* – 2017. – № 3. – С. 151–156.

Поступила в редакцию 27.07.2025.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор