МАТЕМАТИКА

УДК 517.9 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_96
EDN: ARETIN

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.В. Майоровская[1], **В.В. Мироненко**[2]

[1]*Белорусский государственный экономический университет*, *Минск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

SUFFICIENT CENTER CONDITIONS FOR SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.V. Mayorovskaia[1], **V.V. Mironenko**[2]

[1]*Belarusian State Economic University*, *Minsk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Установлены достаточные условия наличия центра для дифференциального уравнения, правая часть которого представляет собой отношение двух степенных рядов по полярной координате ρ с 2π-периодическими коэффициентами по полярному углу φ.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение*, *центр*, *фокус*, *проблема центра-фокуса*, *отражающая функция*.

Для цитирования: *Майоровская*, *С.В.* Достаточные условия центра для некоторых дифференциальных уравнений / С.В. Майоровская, В.В. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 96–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_96. – EDN: ARETIN

Abstract. Sufficient conditions are established for the presence of a center for the differential equation, the right-hand side of which is the ratio of two power series in the polar coordinate ρ with 2π-periodic coefficients by polar angle φ.

Keywords: *differential equation*, *center*, *focus*, *center-focus problem*, *reflecting function*.

For citation: *Mayorovskaia*, *S.V.* Sufficient center conditions for some differential equations / S.V. Mayorovskaia, V.V. Mironenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 96–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_96 (in Russian). – EDN: ARETIN

1 Проблема центра-фокуса

Проблема центра-фокуса, поставленная А. Пуанкаре [1], является одной из основных проблем качественной теории дифференциальных уравнений. А.М. Ляпунов в своих классических работах связал её с общей задачей об устойчивости движения [2, с. 120–189] и свёл решение проблемы различения центра и фокуса к вычислению так называемых фокусных величин. Открытый им метод побудил многих исследователей, в том числе и в нашей стране, заняться решением этой проблемы в конкретных случаях [3]–[4].

После введения понятия отражающей функции [5] появились новые возможности решения проблемы центра-фокуса с использованием того факта, что особая точка является центром тогда и только тогда, когда отражающая функция периодична в окрестности этой точки [6, с. 12–13].

Не приводя многочисленный список соответствующих трудов по теории отражающей функции, ограничимся упоминанием работ монографического характера [6]–[10].

В данной работе мы используем понятие обобщённого первого интеграла [11], тесно связанное с понятием отражающей функции и решением проблемы центра-фокуса.

2 Теоремы о нахождении центра-фокуса

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\varphi, \rho), \tag{2.1}$$

где

$$R(\varphi, \rho) = \frac{b_1(\varphi)\rho + b_2(\varphi)\rho^2 + \ldots + b_m(\varphi)\rho^m}{a_1(\varphi) + 2a_2(\varphi)\rho + \ldots + na_n(\varphi)\rho^n},$$

φ и ρ – полярные координаты, функции $a_i(\varphi)$ и $b_i(\varphi)$ – 2π-периодичны. Начало координат $\rho = 0$ для этого уравнения является особой точкой, для которой возникает проблема центра-фокуса.

***Теорема* 2.1.** *Пусть функции*

$$a_1(\varphi), a_2(\varphi), \ldots, a_n(\varphi)$$

дифференцируемы и чётны, *а функции*

$$s_1(\varphi), s_2(\varphi), \ldots, s_r(\varphi)$$

непрерывны, нечётны и 2π*-периодичны. Пусть также имеет место тождество*

$$a_1'(\varphi)+a_2'(\varphi)\rho^2+\ldots+a_n'(\varphi)\rho^n+$$
$$+b_1(\varphi)\rho+b_2(\varphi)\rho^2+\ldots+b_{2n}(\varphi)\rho^{2n}\equiv$$
$$\equiv\sum_{i=1}^{r}\left(a_1(\varphi)\rho+a_2(\varphi)\rho^2+\ldots+a_n(\varphi)\rho^n\right)^i s_i(\varphi).$$

Пусть далее существует постоянная $a_0>0$, *для которой* $|a_1(\varphi)|\geq a_0$.

Тогда особая точка $\rho=0$ *является центром для дифференциального уравнения* (2.1).

Доказательство. В рассматриваемом случае для функции

$$U(\rho,\varphi)=a_1(\varphi)\rho+a_2(\varphi)\rho^2+\ldots+a_n(\varphi)\rho^n$$

в силу условий теоремы имеет место тождество

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\rho}R(\rho,\varphi)\equiv\sum_{i=1}^{r}s_i(\varphi)U^i,$$

где $\sum_{i=1}^{r}s_i(\varphi)U^i$ – нечётная по переменной φ функция. Поэтому согласно теореме 1 из [5] функция $U(\rho,\varphi)$ является обобщённым первым интегралом дифференциального уравнения (2.1) и для неё выполнено тождество $U(\overline{\rho},-\varphi)\equiv U(\rho,\varphi)$, где функция $\rho=\rho(\varphi)$ является решением дифференциального уравнения (2.1), таким, что $\rho(0)=\rho_0$, а $\overline{\rho}=\rho(-\varphi)$.

В силу теоремы об интегральной непрерывности [3, с. 22] для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всякого решения $\rho(\varphi,\rho_0)$ дифференциального уравнения (2.1) выполнено неравенство $|\rho(\varphi,\rho_0)|<\varepsilon$ при всех $|\rho_0|<\delta$, поскольку уравнение (2.1) имеет очевидное решение $\rho\equiv 0$. По доказанному выше для всех таких решений имеет место тождество

$$U\left(\rho(-\varphi,\rho_0),-\varphi\right)\equiv U\left(\rho(\varphi,\rho_0),\varphi\right).$$

Отсюда по теореме о неявно заданной функции [12, с. 445] мы делаем заключение о том, что $\rho(-\varphi,\rho_0)\equiv\rho(\varphi,\rho_0)$ и, в частности, $\rho(-\pi,\rho_0)\equiv\rho(\pi,\rho_0)$. Из этого заключения, в свою очередь, следует 2π-периодичность решения $\rho(\varphi,\rho_0)$ при всех достаточно малых ρ_0. Это означает, что особая точка $\rho_0=0$ является центром для дифференциального уравнения (2.1). □

Пусть $U(\rho,\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $\frac{\partial U}{\partial\varphi}(\rho,\varphi)\neq 0$ при всех $\varphi\in\mathbb{R}$ и достаточно малых $\rho\leq\rho_0$. Если ряды $\sum_{i=1}^{\infty}s_i(\varphi)U^i(\rho,\varphi)$ и $\sum_{i=1}^{\infty}m_i(\varphi)U^i(\rho,\varphi)$ сходятся равномерно при $\rho\leq\rho_0$, то согласно теореме 1 из [11] функция $U(\rho,\varphi)$ является обобщённым первым интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{-\frac{\partial U}{\partial\varphi}(\rho,\varphi)+\frac{\partial U}{\partial\rho}(\rho,\varphi)\sum_{i=1}^{\infty}s_i(\varphi)U^i(\rho,\varphi)}{\frac{\partial U}{\partial\rho}(\rho,\varphi)\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}m_i(\varphi)U^i(\rho,\varphi)\right]},\qquad(2.2)$$

где $s_i(\varphi)$ – нечётные, а $m_i(\varphi)$ – чётные непрерывные 2π-периодические функции. При этом для отражающей функции $F(\rho,\varphi)$ уравнения (2.2) выполнено тождество

$$U\left(F(\rho,\varphi),-\varphi\right)=U(\rho,\varphi).\qquad(2.3)$$

Используя его, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.2. *Пусть для дифференциального уравнения* (2.2) *выполнены следующие условия*:

1) *правая часть уравнения* (2.2) 2π-*периодична по* φ;

2) 2π-*периодическая дифференцируемая функция* $U(\rho,\varphi)$ *такова, что ряды в правой части уравнения* (2.2) *сходятся равномерно при* $|\rho|\leq\rho_0$;

3) *при всех* $|\rho|\leq\rho_0$ *и всех* $\varphi\in[-\pi;\pi]$ *имеет место неравенство* $\left|\frac{\partial U}{\partial\rho}(\rho,\varphi)\right|>0$.

Тогда особая точка $\rho=0$ *дифференциального уравнения* (2.2) *представляет собой центр.*

Доказательство. По свойству отражающей функции [7, с. 63] для каждого решения $\rho(\varphi)$ дифференциального уравнения (2.2) имеет место тождество $F(\rho(\varphi),\varphi)\equiv\rho(-\varphi)$.

Тогда в силу 2π-периодичности функции $U(\rho,\varphi)$ по переменной φ из тождества (2.3) получим соотношение

$$U\left(\rho(-\pi),\pi\right)=\rho(\pi).$$

Из последнего соотношения для любого продолжимого на отрезок $[-\pi;\pi]$ решения $\rho(\varphi)$, близкого к тривиальному решению $\rho\equiv 0$, следует равенство $\rho(-\pi)=\rho(\pi)$, откуда делаем вывод о замкнутости всех траекторий дифференциального уравнения (2.2), близких к особой точке $\rho=0$. □

Пусть теперь рассматривается дифференциальное уравнение, правая часть которого может быть представлена в виде отношения двух степенных рядов. Для того, чтобы мы имели возможность применить теорему 1.2 к этому уравнению, понадобится представить его в виде (2.2), если такое представление в принципе возможно.

Для этого должна быть найдена соответствующая функция $U(\rho,\varphi)$. Ограничимся тем случаем, когда она представляет собой многочлен по ρ заданной степени 2 с нулевым свободным членом, т. е. будем считать, что

$$U(\rho,\varphi) = a_1(\varphi)\rho + a_2(\varphi)\rho^2, \qquad (2.4)$$

где $a_1(\varphi)$ и $a_2(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемые 2π-периодические функции. Свободный член $a_0(\varphi)$ полагаем равным нулю с той целью, чтобы точка $\rho = 0$ плоскости (ρ,φ) являлась особой точкой (точкой покоя) дифференциального уравнения (2.2). Будем считать также, что имеет место тождество $m_1(\varphi) \equiv 1$, т. к. это не меняет характер чётности коэффициентов соответствующих рядов в правой части уравнения (2.2).

При описанных условиях знаменатель

$$Q(\rho,\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho,\varphi)\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i(\varphi) U^i(\rho,\varphi)\right]$$

правой части дифференциального уравнения (2.2) имеет вид

$$Q(\rho,\varphi) = b_0(\varphi) + b_1(\varphi)\rho + b_2(\varphi)\rho^2 + \ldots =$$

$$= (a_1 + 2a_2\rho)\left(1 + (a_1\rho + a_2\rho^2) + m_2(a_1\rho + a_2\rho^2)^2 + \ldots\right) =$$

$$= a_1 + (a_1^2 + 2a_2)\rho + \rho^2 Q_1(\rho,\varphi),$$

где слагаемое $\rho^2 Q_1(\rho,\varphi)$ не содержит ρ в первой и в нулевой степени. Из получающихся таким образом соотношений

$$b_0(\varphi) = a_1(\varphi),\ b_1(\varphi) = a_1^2(\varphi) + 2a_2(\varphi) \qquad (2.5)$$

однозначно определим функцию (2.4) и затем установим, удовлетворяет ли заданное уравнение теореме 2.2 или нет.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \qquad (2.6)$$

$$= \frac{3\sin\varphi + \rho^2(\cos\varphi - \sin^2\varphi) + (3 - \rho\sin\varphi)^9 \rho^9 \sin 3\varphi}{3 + \rho(9 - 2\sin\varphi) + 3\rho^2\sin\varphi + 2\rho^3\sin^2\varphi}.$$

Формулы (2.5) позволяют найти $a_1 = 3$, $a_2 = \sin\varphi$ и функцию $U(\rho,\varphi) = 3\rho - \rho^2\sin\varphi$.

Далее легко проверяется, что числитель дифференциального уравнения (2.6) можно записать в виде, указанном в дифференциальном уравнении (2.2). Поэтому, согласно теореме 1.2, особая точка $\rho = 0$ дифференциального уравнения (2.6) является центром.

Аналогичные рассмотрения можно проводить и в том случае, когда функция $U(\rho,\varphi)$ представляет собой многочлен произвольного заданного порядка.

Заключение

В работе установлены достаточные условия наличия центра для дифференциального уравнения, правая часть которого представляет собой отношение двух рядов по полярной координате ρ с 2π-периодическими коэффициентами по полярному углу φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре*, *А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.

2. *Ляпунов*, *А.М.* Собрание сочинений. Т. 2 / А. М. Ляпунов. – Москва: Издательство АН СССР, 1956.

3. *Немыцкий*, *В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В.В. Степанов; изд. 4-е. – Москва: ЛЕНАНД, 2017. – 552 с.

4. *Амелькин*, *В.В.* Нелинейные колебания в динамических системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Высшая школа, 1982.

5. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. XVII, № 9. – С. 1603–1610.

6. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986.

7. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

8. *Мусафиров*, *Э.И.* Временные симметрии дифференциальных систем / Э. И. Мусафиров. – Пинск: ПолесГУ, 2009.

9. *Мироненко*, *В.В.* Преобразования дифференциальных систем, не меняющие симметрий времени / В.В. Мироненко. – Saarbrucken, Germany: LAP Lambert Academic Publishing GmbH & Co, 2012.

10. *Zhengxin*, *Zhou* . The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications / Zhou Zhengxin. – Beijing: China Machine Press, 2014.

11. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и обобщение понятия первого интеграла / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 1. – С. 12–22.

12. *Зорич*, *В.А.* Математический анализ. Часть I / В.А. Зорич. – Москва: МЦНМО, 2019.

Поступила в редакцию 24.03.2025.

Информация об авторах

Майоровская Светлана Владимировна – к.ф.-м.н., доцент
Мироненко Владимир Владимирович – к.ф.-м.н., доцент