

КЛАССЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ФОРМАЦИОННО ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫМ ВЛОЖЕНИЕМ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В СВОИ НОРМАЛИЗАТОРЫ

А.Г. Коранчук

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

CLASSES OF FINITE GROUPS WITH FORMATIONALLY HYPERCENTRAL EMBEDDING OF SYLOW SUBGROUPS INTO THEIR NORMALIZERS

A.G. Koranchuk

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Установлено, что значения операции, ставящей каждому классу конечных групп $\mathfrak{X}$ класс конечных групп $NZ\mathfrak{X}$, силовские подгруппы которых лежат в $\mathfrak{X}$ -гиперцентрах их нормализаторов, являются формациями. Изучены неподвижные точки данной операции. Улучшен признак сверхразрешимости Р. Бэра.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, формация, $\mathfrak{F}$ -гиперцентр, $\mathfrak{F}$ -корадикал.

Для цитирования: Коранчук, А.Г. Классы конечных групп с формационно гиперцентральным вложением силовских подгрупп в свои нормализаторы / А.Г. Коранчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 90–95. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_90. – EDN: HEUGQT

Abstract. The values of the operation that assigns to each class of finite groups $\mathfrak{X}$ the class of finite groups $NZ\mathfrak{X}$ whose Sylow subgroups lie in the $\mathfrak{X}$ -hypercenters of their normalizers are formations. Fixed points of this operation are studied. R. Baer's supersolvability criterion is improved.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, formation, $\mathfrak{F}$ -hypercenter, $\mathfrak{F}$ -residual.

For citation: Koranchuk, A.G. Classes of finite groups with formationally hypercentral embedding of Sylow subgroups into their normalizers / A.G. Koranchuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 90–95. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_90 (in Russian). – EDN: HEUGQT

Введение

Рассматриваются только конечные группы. При изучении строения группы ее примарные подгруппы и их нормализаторы, в частности, силовские p -подгруппы и их нормализаторы играют ключевую роль. Такие подгруппы Альперин [1] назвал локальными подгруппами. Их свойства составили основу локального анализа, который широко использовался при получении классификации конечных непростых групп. Начало исследования проблемы распознавания принадлежности непростой группы заданному классу групп на основе свойств её локальных подгрупп положила теорема Фробениуса [2, 10.3.2], согласно которой конечная группа является p -нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая p -подгруппа централизуется p' -элементами в своем нормализаторе. В 1986 году Бьянки, Джиллио, Майри, Хаук [3] установили, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда нормализаторы ее силовских подгрупп (кратко, силовские нормализаторы) нильпотентны. Известно, что существуют несверхразрешимые группы, у которых силовские нормализаторы

являются сверхразрешимыми. Например, таковыми являются проективная специальная линейная группа $PSL(2, 7)$ и симметрическая группа S_4 . В работах [4] и [5] исследовались свойства разрешимых групп, все силовские нормализаторы которых сверхразрешимы.

В связи с вышеизложенным Л.А. Шеметков на Гомельском алгебраическом семинаре в 1992 году предложил следующую проблему: в классе всех групп найти все локальные наследственные формации $\mathfrak{F}$ такие, что класс $N\mathfrak{F}$ всех групп, у которых силовские нормализаторы принадлежат $\mathfrak{F}$, совпадает с $\mathfrak{F}$. Д'Аниелло, Де Виво, Джордано и Перес-Рамос [7] решили проблему Шеметкова для наследственных насыщенных формаций в классе всех разрешимых групп [7]. Л.С. Казарин, Мартинес-Пастор и Перес-Рамос [8] исследовали проблему Шеметкова для произвольных групп в контексте наследственных насыщенных формаций. Отметим также недавние работы [9] и [10] по данной тематике.

Отметим [7], что в общем случае для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, класс

групп, силовские нормализаторы которых принадлежат $\mathfrak{F}$, не является формацией.

В данной работе предложена модификация конструкции класса $\text{NZ}\mathfrak{F}$, устраняющая указанный недостаток. Для ее описания нам понадобятся следующие определения. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Напомним [11, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$ -центральным в G , если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Наибольшая нормальная подгруппа $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G , все G -главные факторы ниже которой $\mathfrak{F}$ -центральны в G , называется $\mathfrak{F}$ -гиперцентром.

Определение 0.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Обозначим через $\text{NZ}\mathfrak{X}$ следующий класс групп:

$$(G \mid P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P)) \text{ для любой } P \in \text{Syl}(G)).$$

Отметим, что по теореме Барнса-Кегеля [12, следствие 2.2.5] $\mathfrak{F}$ -группа совпадает со своим $\mathfrak{F}$ -гиперцентром для любой формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 0.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Тогда $\text{NZ}\mathfrak{X}$ является формацией. Операция $\text{NZ}:\mathfrak{X} \rightarrow \text{NZ}\mathfrak{X}$ является идемпотентной и монотонной, а на множестве наследственных формаций и операцией замыкания. Причем, $\text{NZ}\mathfrak{F} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{F}$.

В 1997 году Л.А. Шеметковым [13] была поставлена задача описания формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу, совпадающую со своим $\mathfrak{F}$ -гиперцентром. Такие формации называются Z -насыщенными [14]. Связь операции NZ с такими формациями устанавливает:

Теорема 0.2. Пусть $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ – Z -насыщенная формация.

Естественным является аналог проблемы Шеметкова для оператора NZ : если группа G принадлежит $\text{NZ}\mathfrak{F}$, верно ли что G принадлежит $\mathfrak{F}$? В начале опишем наследственные формации, в которых данная проблема имеет положительное решение для любой наследственной Z -насыщенной подформации. Напомним, что p -длина группы G не превосходит 1, если она имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, где B/A – p -группа, а $A/1, G/B$ – p' -группы. Указанные группы могут быть изоморфны 1.

Теорема 0.3. Тогда и только тогда $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ для любой наследственной Z -насыщенной подформации $\mathfrak{F}$ наследственной Z -насыщенной формации $\mathfrak{X}$, когда p -длина всякой $\mathfrak{X}$ -группы не превосходит 1 для любого простого p .

Класс групп, p -длина которых не превосходит 1 для любого простого p , изучался и применялся в работах [9] и [15]. Он обозначается через

$\mathfrak{L}_a(1)$ и является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп. Напомним [16], что группа называется строго p -замкнутой, если она имеет нормальную p -подгруппу, фактор группа по которой абелева, экспоненты делящей $p-1$.

Следствие 0.1. Пусть $G \in \mathfrak{L}_a(1)$. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $N_G(P)/C_G(P)$ – строго p -замкнутая группа для любых $P \in \text{Syl}_p G$ и $p \in \pi(G)$.

Напомним, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, где $p_i < p_j$ при $i < j$, и в G имеется нормальная холлова $\{p_i, \dots, p_n\}$ подгруппа для любого i .

Следствие 0.2 (Р. Бэр [16, теорема 2.1]). Пусть группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $N_G(P)/C_G(P)$ – строго p -замкнутая группа для любых $P \in \text{Syl}_p G$ и $p \in \pi(G)$.

В работе [7] конструктивно описаны все разрешимые наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Они в точности совпадают с покрывающими формациями. Напомним [7], что покрывающей формацией называется локальная формация $\mathfrak{F}$, определяемая локальной функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, где $p \in \pi(f(p))$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и из $q \in \pi(f(p))$ всегда следует, что $p \in \pi(f(q))$, и $f(p) = \emptyset$ в противном случае. В работе доказаны следующие две теоремы:

Теорема 0.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$, когда $\mathfrak{F}$ – покрывающая формация.

Напомним [17], что для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i ($i \in I$) группа называется σ -нильпотентной, если она имеет нормальную холлову σ_i -подгруппу для любого $\sigma_i \in \sigma$. В работе [8] было установлено, что класс всех σ -нильпотентных групп N -замкнут. Аналогичное утверждение верно и для оператора NZ .

Теорема 0.5. Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел. Тогда формация всех σ -нильпотентных групп NZ -замкнута.

1 Предварительные сведения

Используются стандартные обозначения и терминология, описанные в работах [11], [18]. Напомним некоторые из них, которые существенны в данной работе. Через $\pi(G)$ обозначается

множество различных простых делителей $|G|$; $\text{Syl}G$ и $\text{Syl}_p G$ – множество всех силовских подгрупп и p -подгрупп группы G соответственно.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G ; формацией называется $\mathcal{Q}$ -замкнутый (т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$) и R_0 -замкнутый (т. е. из $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$) класс групп $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется: наследственной, если всякая подгруппа $\mathfrak{F}$ -группы принадлежит $\mathfrak{F}$; насыщенной, если $G \in \mathfrak{F}$, всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Напомним, что $\mathfrak{F}$ -корадикалом для формации $\mathfrak{F}$ называется наименьшая нормальная подгруппа группы, фактор группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$.

Напомним [18, II, определение 1.4], что отображение f , определенное на классах групп, значениями которого также являются классы групп, называется операцией замыкания, если для любых классов групп $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$ выполняются условия: расширяемости $\mathfrak{X} \subseteq f(\mathfrak{X})$, идемпотентности $f(f(\mathfrak{X})) = f(\mathfrak{X})$ и монотонности $f(\mathfrak{H}) \subseteq f(\mathfrak{X})$.

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [18, А, теорема 6.4 (а)]).

Лемма 1.1. Пусть G – группа, $N \trianglelefteq G$ и $P \in \text{Syl}G$. Тогда $PN/N \in \text{Syl}(G/N)$ и

$$N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N.$$

Теорема 1.1 (Барнс и Кегель [12, следствие 2.2.5]). Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, M и N – нормальные подгруппы $G \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $M \leq C_G(N)$ и пусть $H = N \rtimes G/M$, где G/M действует на N сопряжением. Тогда $H \in \mathfrak{F}$.

2 Доказательство основных результатов

2.1 Доказательство теоремы 0.1. Доказательство теоремы будем осуществлять по шагам с помощью ряда лемм, которые представляют определенный самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и p – простое число. Через $N_p^* \mathfrak{F}$ обозначим класс групп, нормализаторы силовских p -подгрупп которых принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда $N_p^* \mathfrak{F}$ – формация.

Доказательство. Если $G \in N_p^* \mathfrak{F}$ и R/N – силовская p -подгруппа в G/N , то найдется силовская p -подгруппа $P \in G$ такая, что $PN/N = R/N$. Из леммы 1.1 следует, что

$$\begin{aligned} N_{G/N}(R/N) &= N_{G/N}(PN/N) = \\ &= N_G(P)N/N \simeq N_G(P)/(N_G(P) \cap N) \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Итак, $N_p^* \mathfrak{F}$ – $\mathcal{Q}$ -замкнутый класс групп.

Пусть $G/N_i \in N_p^* \mathfrak{F}$, где $i = 1, 2$. Если p – силовская p -подгруппа в G , то PN_i/N_i – силовские подгруппы в G/N_i по лемме 1.1, где $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} N_{G/N_i}(PN_i/N_i) &= N_G(P)N_i/N_i \simeq \\ &\simeq N_G(P)/N_G(P) \cap N_i \in \mathfrak{F} \end{aligned}$$

по лемме 1.1, где $i = 1, 2$. Значит,

$$\begin{aligned} N_G(P)/((N_G(P) \cap N_1) \cap (N_G(P) \cap N_2)) &= \\ = N_G(P)/1 \simeq N_G(P). \end{aligned}$$

Следовательно, $N_p^* \mathfrak{F}$ – R_0 -замкнутый класс групп. Итак, $N_p^* \mathfrak{F}$ – формация.

Замечание 2.1. Мы считаем 1 силовской p -подгруппой в p' -группе.

Замечание 2.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная наследственная формация. Определим класс групп, нормализаторы всех силовских подгрупп которых (включая 1) принадлежат $\mathfrak{F}$:

$$N^* \mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* \mathfrak{F}.$$

Отличие операции N^* от N заключается в том, что $N^* \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ для любой наследственной формации $\mathfrak{F}$. Действительно, пусть $G \in N^* \mathfrak{F}$. Выберем $p \in \pi(G)'$, тогда $1 \in \text{Syl}_p G$ и $N_G(1) = G \in \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то и $N_G(P) \in \mathfrak{F}$ для любой $P \in \text{Syl}G$ в силу наследственности $\mathfrak{F}$. Итак, $N^* \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Напомним [14], что для класса групп $\mathfrak{X}$ через $Z\mathfrak{X}$ обозначается класс групп, все главные факторы которых $\mathfrak{X}$ -центральны.

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп и $Z_p \mathfrak{X}$ – класс всех групп, у которых абелевы главные p -факторы $\mathfrak{X}$ -центральны. Тогда $Z_p \mathfrak{X}$ – формация.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = (G|G$ – примитивная $\mathfrak{X}$ -группа, цоколь которой – абелева p -группа) $\cup (G|G$ – примитивная группа, цоколь которой не является абелевой p -группой). Тогда $Z\mathfrak{H} = Z_p \mathfrak{X}$ формация по [14, теорема 1].

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Тогда $N_p^* Z_p \mathfrak{X} = (G|P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P)), \forall P \in \text{Syl}_p G)$ – формация.

Доказательство. Пусть $G \in N_p^* Z_p \mathfrak{X}$. Тогда $N_G(P) \in Z_p \mathfrak{X}$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$. Значит, всякий главный p -фактор $N_G(P)$ является $\mathfrak{X}$ -центральным. Из $P \trianglelefteq N_G(P)$ следует, что $P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P))$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$.

Предположим теперь, что $P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P))$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$. Тогда всякий главный фактор $N_G(P)$ ниже P является $\mathfrak{X}$ -центральным,

а всякий главный фактор $N_G(P)$ выше P – p' -группой. Итак, все абелевы главные p -факторы $N_G(P)$ являются $\mathfrak{X}$ -центральными. Тогда $N_G(P) \in Z_p \mathfrak{X}$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$. Следовательно, $G \in N_p^* Z_p \mathfrak{X}$.

Значит,

$$N_p^* Z_p \mathfrak{X} = (G \mid P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P)), \forall P \in \text{Syl}_p G).$$

Согласно лемме 2.2 класс групп $Z_p \mathfrak{X}$ является формацией. Тогда $N_p^* Z_p \mathfrak{X}$ является формацией по лемме 2.1.

Доказательство теоремы 0.1. Заметим, что если G – p' -группа, то она принадлежит $N_p^* Z_p \mathfrak{X}$ для любого класса групп $\mathfrak{X}$. Тогда ввиду леммы 2.3

$$\begin{aligned} \text{NZ}\mathfrak{X} &= (G \mid P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P)) \text{ для любой} \\ &P \in \text{Syl}G) = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* Z_p \mathfrak{X} \end{aligned}$$

является формацией, как пересечение формаций.

Предположим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Из доказательства леммы 2.2 следует, что $Z_p \mathfrak{H} \subseteq Z_p \mathfrak{X}$ для любого простого p . Тогда очевидно, что $N_p^* Z_p \mathfrak{H} \subseteq N_p^* Z_p \mathfrak{X}$ для любого простого p . Согласно предыдущему абзацу:

$$\text{NZ}\mathfrak{H} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* Z_p \mathfrak{H} \subseteq \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* Z_p \mathfrak{X} = \text{NZ}\mathfrak{X}.$$

Итак, операция NZ монотонна.

Докажем, что операция NZ идемпотентна. В силу монотонности $\text{NZ}\mathfrak{X} \subseteq \text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X})$. Пусть $G \in \text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X})$ и $P \in \text{Syl}G$. Тогда $P \leq Z_{\text{NZ}\mathfrak{X}}(N_G(P))$. Пусть H/K – главный фактор $N_G(P)$, лежащий ниже P . Тогда

$$\bar{T} = (H/K) \rtimes (N_G(P)/C_{N_G(P)}(H/K)) \in \text{NZ}\mathfrak{X}.$$

Заметим, что H/K – p -группа для некоторого простого p , а $N_G(P)/C_{N_G(P)}(H/K)$ – p' -группа в силу $P \in \text{Syl}_p G$ и [18, А, лемма 13.6]. Значит, главный фактор H/K группы $\bar{T} \in \text{NZ}\mathfrak{X}$ является ее силовой подгруппой. Поэтому

$$\begin{aligned} (H/K) \rtimes (N_{\bar{T}}(H/K)/C_{N_{\bar{T}}(H/K)}(H/K)) &= \\ &= (H/K) \rtimes (\bar{T}/C_{\bar{T}}(H/K)) \simeq \bar{T} \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Следовательно, H/K – $\mathfrak{X}$ -центральный главный фактор $N_G(P)$. Значит, $P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P))$. Тогда $\text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X}) \subseteq \text{NZ}\mathfrak{X}$. Итак, $\text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X}) = \text{NZ}\mathfrak{X}$, т. е. операция NZ идемпотентна.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и $G \in \text{N}\mathfrak{F}$. Тогда $N_G(P) \in \mathfrak{F}$ для любой $P \in \text{Syl}G$. В силу теоремы Барнса-Кегеля $N_G(P) = Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$. В частности, $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$ для любой $P \in \text{Syl}G$. Тогда $G \in \text{NZ}\mathfrak{F}$. Итак, $\text{N}\mathfrak{F} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $\mathfrak{F} \subseteq \text{N}\mathfrak{F} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F}$. Из вышеизложенного следует, что операция NZ является операцией замыкания на множестве наследственных формаций. $\square$

2.2 Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что наследственная формация $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ не является Z -насыщенной. Тогда в силу [19, лемма 2.4] $Z\mathfrak{F}$ – наследственная Z -насыщенная формация и $\mathfrak{F} \subset Z\mathfrak{F}$. Выберем группу G минимального порядка из $Z\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. В силу наследственности $Z\mathfrak{F}$, G является минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой. Тогда, если $N_G(P) < G$ для любой $P \in \text{Syl}G$, то $G \in \mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ в силу определения $\text{NZ}\mathfrak{F}$, противоречие. Итак, $G = N_G(P)$ для некоторой $P \in \text{Syl}G$.

Заметим, что $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G ввиду нашего предположения и того, что $Z\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – формации. Поэтому в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Значит, $N \leq P$. Тогда N – $\mathfrak{F}$ -центральный фактор $G = N_G(P)$. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $P/N \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_{G/N}(P/N)) = Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P)/N)$. Итак, $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$. Следовательно, $G \in \text{NZ}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, противоречие. Итак, наследственная формация $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ является Z -насыщенной. $\square$

2.3 Доказательство теоремы 0.3. Заметим, что $\mathfrak{L}_a(1)$ является формацией разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_a(1) \cap \text{NZ}\mathfrak{F}$ также является формацией разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ по условию и теореме 0.2.

Предположим $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G . В силу нашего предположения в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $G/N \in \mathfrak{F}$. Заметим, что N не является $\mathfrak{F}$ -центральным главным фактором G в силу Z -насыщенности $\mathfrak{F}$. Поэтому $\bar{T} = N \rtimes (G/C_G(N)) \notin \mathfrak{F}$. Заметим, что по теореме Барнса-Кегеля $\bar{T} \in \mathfrak{H}$. Т. к. G – разрешимая группа, N – p -группа для некоторого простого p . Заметим, что $\bar{T}$ является примитивной группой 1 типа. Следовательно, $O_p(\bar{T}) = 1$ и $N = F(\bar{T}) = O_p(\bar{T})$. Итак, N – нормальная силовая подгруппа $\bar{T} \in \mathfrak{H}$. Значит, $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_{\bar{T}}(N)) = Z_{\mathfrak{F}}(\bar{T})$. Т. е. $\bar{T} \simeq N \rtimes (\bar{T}/C_{\bar{T}}(N)) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, N – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор G , противоречие. Значит, $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F} = \emptyset$. Итак, $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_a(1) \cap \text{NZ}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Докажем теперь, что если $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ для любой наследственной Z -насыщенной подформации $\mathfrak{F}$ наследственной Z -насыщенной формации $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{L}_a(1)$. Предположим теперь, что $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{L}_a(1) \neq \emptyset$. Тогда в $\mathfrak{X}$ найдется минимальная не $\mathcal{L}_a(1)$ -группа G . Согласно [15, лемма 3.2] $|\pi(G)| = 2$. Следовательно, G не имеет нормальных силовских подгрупп. Заметим, что $\mathfrak{H} = \mathcal{L}_a(1) \cap \mathfrak{X}$ – наследственная Z -насыщенная подформация формации $\mathfrak{X}$. Тогда все собственные подгруппы G принадлежат $\mathfrak{H}$, в частности, совпадают со своим $\mathfrak{H}$ -гиперцентром по теореме Барнса-Кегеля. Итак, $G \in (\text{NZ}\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}$, противоречие. Значит, $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{L}_a(1) = \emptyset$. $\square$

2.4 Доказательство следствий 0.1 и 0.2. Известно, что если F – максимальный внутренний локальный экран формации всех сверхразрешимых групп $\mathcal{U}$, то $F(p)$ – класс всех строго p -замкнутых групп. Пусть $P \in \text{Syl}_p G$. Тогда из $P \leq Z_{\mathcal{U}}(N_G(P))$ и [20, лемма 2.5] следует, что $N_G(P)/C_{N_G(P)}(P) = N_G(P)/C_G(P) \in F(p)$ для любого простого p . Значит, следствие 0.1 напрямую вытекает из теоремы 0.3.

Заметим, что всякая группа с силовой башней сверхразрешимого типа принадлежит $\mathcal{L}_a(1)$. Итак, следствие 0.2 напрямую вытекает из следствия 0.1. $\square$

2.5 Доказательство теоремы 0.4. Предположим, что $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Заметим, что $\mathfrak{F} \subseteq \text{N}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{F}$ по теореме 0.1. Итак, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F} = \text{N}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – покрывающая формация по [7, теорема].

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}$ – покрывающая формация и $G \in \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Пусть $\pi = \{p, q\} \subseteq \pi(G)$ и $p \notin F(q)$. Тогда по определению $q \notin F(p)$. Пусть H – холлова π -подгруппа G . Тогда найдутся силовые p -подгруппа P и q -подгруппа Q группы G , содержащиеся в H . Заметим, что $P \leq N_H(P) \leq N_G(P)$ и $Q \leq N_H(Q) \leq N_G(Q)$. Из $G \in \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ и [19, лемма 2.4] следует, что $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_H(P))$ и $Q \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_H(Q))$. Тогда

$$N_H(P)/C_H(P) \in F(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{N}_p$$

по [20, лемма 2.5]. Аналогично

$$N_H(Q)/C_H(Q) \in F(q) \cap \mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{N}_q.$$

Итак, H нильпотентна по [21, теорема 1]. Значит, $G \in \mathfrak{F}$ по [7, предложение 2]. $\square$

2.6 Доказательство теоремы 0.5. Напомним, что через $\mathfrak{N}_{\sigma}$ обозначается класс всех σ -нильпотентных групп. Согласно [17] главный фактор H/K группы G является $\mathfrak{N}_{\sigma}$ -центральным, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$.

Пусть P – силовая p -подгруппа группы $G \in \text{NZ}\mathfrak{N}_{\sigma}$ и $p \in \sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$(H/K) \rtimes (N_G(P)/C_{N_G(P)}(H/K))$$

является σ_i -группой для любого главного фактора H/K группы $N_G(P)$, лежащего ниже P . Тогда $N_G(P)/C_G(P)$ является σ_i -группой. Значит, холлова σ_i -подгруппа нормальна в G для любого $\sigma_i \in \sigma$ по [21, теорема 1], т. е. $G \in \mathfrak{N}_{\sigma}$. $\square$

Заключение

В работе введена и изучена операция NZ на классах конечных групп, сопоставляющая каждому классу групп $\mathfrak{X}$ класс $\text{NZ}\mathfrak{X}$ групп, силовые подгруппы которых лежат в $\mathfrak{X}$ -гиперцентрах их нормализаторов. Описаны неподвижные точки данной операции. Усилен известный признак сверхразрешимости Р. Бэра. Установлена NZ -замкнутость формации всех σ -нильпотентных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alperin, J.L. Groups and Representations / J.L. Alperin, Rowen B. Bell // Springer Science and Business Media. – 2012. – Vol. 162. – 196 p.
2. Robinson, D.J.S. A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag, 1980. – 286 p.
3. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M.G. Bianci, A. Gillio, B. Mayri, P. Hauck // Archiv der Mathematik. – 1986. – Vol. 47. – P. 193–197.
4. Fedri, V. Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / V. Fedri, L. Serena // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50. – P. 11–18.
5. Bryce, R. Bounds on the Fitting length of finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / R. Bryce, V. Fedri, L. Serena // Bull. Austral. Math. Soc. – 1991. – Vol. 44. – P. 19–31.
6. D’Aniello, A. Finite groups with primitive Sylow normalizers / A. D’Aniello, C. De Vivo, G. Giordano // Bollettino U.M.I. – 2002. – Vol. 8. – P. 235–245.
7. Saturated formations closed under Sylow normalizers / A. D’Aniello, C. De Vivo, G. Giordano, M.D. Pérez-Ramos // Comm. Algebra. – 2005. – Vol. 33. – P. 2801–2808.
8. Kazarin, L. On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers / L. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos // Israel J. Math. – 2011. – Vol. 186. – P. 251–271.

9. Васильев, А.Ф. О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Математические заметки. – 2020. – Т. 5, № 108. – С. 679–691.
 10. Васильева, Т.И. Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов / Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 4, № 63. – С. 805–813.
 11. Шеметков, Л.А. Формации алгебраического систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
 12. Ballester-Bolínches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolínches, L.M. Ezquerro. – Mathematics and Its Applications. – Dordrecht: Springer, 2006. – 584 p.
 13. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 23, № 3. – P. 955–964.
 14. Murashka, V.I. On Questions Posed by Shemetkov, Ballester-Bolínches, and Perez-Ramos in Finite Group Theory / V.I. Murashka // Math. Notes. – 2022. – Vol. 122, № 6. – P. 932–939.
 15. Семенчук, В.Н. Минимальные не-F-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Vol. 18, № 3. – С. 348–382.
 16. Baer, R. Supersoluble immersion / R. Baer // Can. J. Math. – 1959. – Vol. 11. – P. 353–369.
 17. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
 18. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
 19. Aivazidis, S. Subnormality and residuals for saturated formations: A generalization of Schenkman's theorem / S. Aivazidis, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2021. – Vol. 24, № 4. – P. 807–818.
 20. Skiba, A.N. On the F-hypercenter and the intersection of all F-maximal subgroups of a finite group / A.N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2012. – Vol. 216. – P. 789–799.
 21. Murashka, V.I. On the connected components of the prime and Sylow graphs of a finite group / V.I. Murashka // Arch. Math. – 2022. – Vol. 118. – P. 225–229.
- Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РНФ (проект Ф23РНФМ-63).*
- Поступила в редакцию 09.08.2025.*

Информация об авторах

Коранчук Анастасия Геннадьевна – соискатель