

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ГАУССА, ЗАДАННОГО В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В.Н. Капшай, А.В. Павленко, Ю.А. Гришечкин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

NUMERICAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION FOR GAUSSIAN POTENTIAL IN THE RELATIVISTIC CONFIGURATION REPRESENTATION

V.N. Kapshai, A.V. Paulenka, Yu.A. Grishechkin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Численно решены в релятивистском конфигурационном представлении двумерные парциальные интегральные квазипотенциальные уравнения, описывающие связанные состояния системы двух скалярных частиц равной массы при моделировании взаимодействия потенциалом Гаусса. Установлено, что – в зависимости от значений параметров потенциала – парциальные волновые функции основного состояния могут обладать одним нулём, двумя нулями или большим количеством нулей. Показано, что в предельном переходе гауссова потенциала в сингулярный потенциал «дельта-окружность» численные решения асимптотически сходятся к точным аналитическим решениям, соответствующим этому предельному случаю.

Ключевые слова: двумерное уравнение Логунова – Тавхелидзе, релятивистское конфигурационное представление, импульсное представление, двумерная функция Грина, волновая функция, двухчастичная система, связанные состояния, потенциал Гаусса, дельта-окружность.

Для цитирования: Капшай, В.Н. Численное решение двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе для потенциала Гаусса, заданного в релятивистском конфигурационном представлении / В.Н. Капшай, А.В. Павленко, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_56. – EDN: NGSETJ

Abstract. Numerical solutions are obtained for the two-dimensional partial-wave integral quasipotential equations in the relativistic configuration space representation, describing the bound states of a system of two scalar particles of equal mass interacting via a Gaussian potential. A non-trivial spectral property is established: within certain ranges of the potential parameters, the ground state possesses a wave function with one, two or more nodes. The limiting transition is demonstrated as the Gaussian potential degenerates into the singular “delta-circle” potential: the numerical solutions asymptotically approach those for this limiting case.

Keywords: two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation, relativistic configurational representation, momentum representation, two-dimensional Green’s function, wave function, two-particle system, bound states, Gaussian potential, delta-circle potential.

For citation: Kapshai, V.N. Numerical solution of the two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation for Gaussian potential in the relativistic configuration representation / V.N. Kapshai, A.V. Paulenka, Yu.A. Grishechkin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_56 (in Russian). – EDN: NGSETJ

Введение

В работе [1] для описания низкоэнергетического рассеяния нуклонов было предложено использовать потенциал Гаусса. Потенциалы этого типа активно использовались также для описания нерелятивистских связанных состояний [2]–[11]. Авторами этих работ решались трёхмерное [2]–[9], двумерное [10] и одномерное [1] уравнения Шрёдингера. Однако решение релятивистской задачи об определении связанных состояний системы двух скалярных частиц с учетом потенциала Гаусса, заданного в двумерном релятивистском конфигурационном представлении

(РКП), ранее не рассматривалось. В настоящей работе мы рассмотрим эту задачу.

1 Двумерные парциальные квазипотенциальные уравнения

Двумерные интегральные уравнения квазипотенциального типа, сформулированные в импульсном представлении (ИП) для описания связанных состояний системы двух скалярных частиц одинаковой массы m в системе их центра масс, аналогичны трехмерным и имеют вид ($\hbar = c = 1$):

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} G_0(E_q; E_p) \times \\ \times \int V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{k}) \psi(E_q, \mathbf{k}) \frac{m}{E_k} d^2k, \\ E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}; \quad (1.1)$$

где $\psi(E_q, \mathbf{p})$ – волновая функция; $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ – двумерные импульсы; $V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{k})$ – квазипотенциал; $2E_q = 2\sqrt{q^2 + m^2}$ – энергия двухчастичной системы ($0 \leq E_q < 2m$); $G_0(E_q; E_p)$ – свободная функция Грина. Для связанных состояний используются обозначения

$$q = m \operatorname{sh}(i w_q) = i m \sin w_q; \\ E_q = m \operatorname{ch}(i w_q) = m \cos w_q,$$

а w_q – параметр, принадлежащий интервалу $(0; \pi/2]$. В настоящей работе рассмотрим уравнение Логанова – Тавхелидзе, функция Грина которого имеет вид

$$G_0(E_q; E_p) = \frac{1}{E_q^2 - E_p^2}. \quad (1.2)$$

В рамках квантовой теории поля переход от двумерного ИП к двумерному РКП осуществляется посредством разложения всех величин, содержащихся в интегральном уравнении (1.1), по функциям вида [11], [12]

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \left(\frac{E_p - \mathbf{p} \mathbf{n}_p}{m} \right)^{-\frac{1}{2} - i m p},$$

где $\mathbf{p} = \rho \mathbf{n}_p$ радиус-вектор в РКП, ρ – его модуль. Преобразование волновой функции из ИП в РКП и обратное ему соответственно имеют вид

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \psi(E_q, \mathbf{p}) \frac{m}{E_p} d\mathbf{p}, \quad (1.3)$$

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \psi(E_q, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (1.4)$$

где $\psi(E_q, \mathbf{p})$ – двумерная волновая функция в РКП.

Используя интегральные преобразования (1.3), (1.4) и уравнение (1.1) для волновой функции в ИП, нетрудно получить двумерное интегральное уравнение в РКП:

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \\ = \int G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') V(E_q; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') \psi(E_q, \mathbf{p}'') d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'', \quad (1.5)$$

где введены обозначения

$$V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{k}) = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}) V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \xi(\mathbf{k}, \mathbf{p}') d\mathbf{p} d\mathbf{p}', \\ G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) G_0(E_q; E_p) \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{m}{E_p} d\mathbf{p}. \quad (1.6)$$

Интегральное уравнение (1.5) в случае локальных в РКП квазипотенциалов

$$V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = V(E_q; \rho) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

упрощается до

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \int G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') V(E_q; \rho') \psi(E_q, \mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (1.7)$$

Разложение релятивистской плоской волны $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ на парциальные составляющие имеет следующий вид:

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} i^{\mu} s_{\mu}(\chi_p, \rho) \exp(i\mu\alpha), \quad (1.8)$$

где χ_p – быстрота, связанная с модулем импульса p выражением $p = m \operatorname{sh} \chi_p$; μ – азимутальное квантовое число; α – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}$; $s_{\mu}(\chi_p, \rho)$ – парциальные волны, задаваемые выражениями [12]:

$$s_{\mu}(\chi_p, \rho) = i^{\mu} \frac{\Gamma(1/2 - i m \rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - i m \rho)} P_{-i m \rho - 1/2}^{\mu}(\operatorname{ch} \chi_p),$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера; $P_a^b(z)$ – функция Лежандра первого рода.

Парциальные волны $s_{\mu}(\chi_p, \rho)$ можно записать в виде

$$s_{\mu}(\chi_p, \rho) = \frac{e_{\mu}^{+}(\chi_p, \rho) - e_{\mu}^{-}(\chi_p, \rho)}{2i},$$

$$e_{\mu}^{\pm}(\chi_p, \rho) = \\ = i^{\mu} \frac{2}{\pi} \operatorname{cth}(\pi m \rho) \frac{\Gamma(1/2 - i m \rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - i m \rho)} Q_{-1/2 \mp i m \rho}^{\mu}(\operatorname{ch} \chi_p),$$

где $Q_a^b(z)$ – функция Лежандра второго рода.

Парциальное разложение волновых функций и функции Грина представим выражениями:

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{i^{\mu}}{\sqrt{\rho}} \psi_{\mu}(i w_q, \rho) e^{i\mu\alpha'};$$

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m \operatorname{sh} \chi_p}} \psi_{\mu}(i w_q, \chi_p) e^{i\mu\beta}, \quad (1.9)$$

$$G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} G_{\mu}(i w_q; \rho, \rho') e^{i\mu\gamma}, \quad (1.10)$$

где $\psi_{\mu}(i w_q, \rho)$ и $\psi_{\mu}(i w_q, \chi_p)$ – парциальные волновые функции в РКП и ИП соответственно; $\alpha'(\beta)$ – угол между $\mathbf{p}(\mathbf{p})$ и осью абсцисс; $G_{\mu}(i w_q; \rho, \rho')$ – парциальная функция Грина в РКП; γ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. С учетом выражений (1.8)–(1.10) получим парциальные аналоги (1.4), (1.6) и (1.7):

$$\psi_{\mu}(i w_q, \chi_p) = \\ = 2\pi \sqrt{m \operatorname{sh} \chi_p} \int_0^{\infty} \sqrt{\rho} s_{\mu}^*(\chi_p, \rho) \psi_{\mu}(i w_q, \rho) d\rho, \\ G_{\mu}(i w_q; \rho, \rho') = \frac{m^2 \sqrt{\rho \rho'}}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{\infty} \operatorname{sh} \chi_p s_{\mu}(\chi_p, \rho) G_0(m \operatorname{ch} i w_q; m \operatorname{ch} \chi_p) \times \\ \times s_{\mu}^*(\chi_p, \rho') d\chi_p, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mu}(iw_q, \rho) = \\ = 2\pi \int_0^{\infty} G_{\mu}(iw_q; \rho, \rho') V(iw_q; \rho') \psi_{\mu}(iw_q, \rho') d\rho'. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Интегралы (1.11) для функции Грина (1.2) можно вычислить с использованием теоремы Коши о вычетах. Приведем конечный результат:

$$\begin{aligned} G_{\mu}(iw_q; \rho, \rho') = \frac{-i\sqrt{\rho\rho'} \operatorname{sh}(iw_q)}{4\operatorname{sh}(2iw_q)} \times \\ \times \left[\frac{e_{\mu}^{+}(iw_q, \rho) e_{\mu}^{-*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[-\pi m(\rho - \rho')]} + \frac{e_{\mu}^{-}(iw_q, \rho) e_{\mu}^{+*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[\pi m(\rho - \rho')]} - \right. \\ \left. - \frac{e_{\mu}^{+}(iw_q, \rho) e_{\mu}^{-*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[-\pi m(\rho + \rho')]} - \frac{e_{\mu}^{-}(iw_q, \rho) e_{\mu}^{+*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[\pi m(\rho + \rho')]} \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отметим, что сумме первых двух слагаемых, заключённых в квадратные скобки в выражениях (1.13), при $\rho = \rho'$ свойственна неопределенность вида $0/0$, раскрывая которую, получим:

$$\begin{aligned} G_{\mu}(iw_q; \rho', \rho') = \\ = \frac{-i\rho' \operatorname{sh}(iw_q)}{4\operatorname{sh}(2iw_q)} \left[e_{\mu}^{-}(iw_q, \rho') e_{\mu}^{-*}(iw_q, \rho') + \right. \\ \left. + \frac{e_{\mu}^{+}(iw_q, \rho')}{\pi m} \frac{\partial e_{\mu}^{+}(iw_q, \rho')}{\partial \rho'} - \frac{e_{\mu}^{-*}(iw_q, \rho')}{\pi m} \frac{\partial e_{\mu}^{-}(iw_q, \rho')}{\partial \rho'} - \right. \\ \left. - \frac{e_{\mu}^{+}(iw_q, \rho') e_{\mu}^{-*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[-2\pi m\rho']} - \frac{e_{\mu}^{-}(iw_q, \rho') e_{\mu}^{+*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[2\pi m\rho']} \right]. \end{aligned}$$

Условия нормировки волновых функций уравнения Логунова – Тавхелидзе в РКП и ИП имеют вид

$$\int |\psi(E_q, \mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = 1, \quad \int |\psi(E_q, \mathbf{p})|^2 \frac{m}{E_p} d\mathbf{p} = 1.$$

Из них следуют условия нормировки для парциальных волновых функций:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\infty} |\psi_{\mu}(iw_q, \rho)|^2 d\rho = 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |\psi_{\mu}(iw_q, \chi_p)|^2 d\chi_p = 1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

2 Потенциал Гаусса

В настоящей работе исследуются связанные состояния системы двух скалярных частиц, взаимодействие между которыми описывается гауссовым потенциалом:

$$V_{\alpha}(\rho) = -\lambda \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{2\alpha^2}\right), \quad (2.1)$$

где λ , α и ρ_0 – положительные константы.

В пределе $\alpha \rightarrow 0$ потенциал (2.1) становится бесконечно узким и бесконечно глубоким в окрестности точки $\rho = \rho_0$ без изменения площади

под кривой, т. е. в данном пределе (2.1) соответствует дельта-функциональному взаимодействию и имеет вид

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} V_{\alpha}(\rho) = -\lambda \delta(\rho - \rho_0), \quad (2.2)$$

где $\delta(\rho - \rho_0)$ – дельта-функция. Известно, что система с «дельта-окружностью» (2.2) при каждом значении азимутального числа μ имеет одно связанное состояние или не имеет их вовсе – в зависимости от значений параметров λ и ρ_0 .

3 Численное решение задачи

Для численного решения интегрального уравнения (1.12) с функцией Грина (1.13) и квазипотенциалом (2.1) выберем такое достаточно большое $\rho = \rho_N$, чтобы в интервале $[\rho_N; \infty)$ квазипотенциал имел пренебрежимо малое значение. Разобьём интервал интегрирования $[0; \rho_N]$ на N равных отрезков длиной $h = \rho_N/N$ и применим квадратурную формулу прямоугольников:

$$\int_0^{\rho_N} f(\rho) d\rho \cong \sum_{j=1}^N h f(\rho_j). \quad (3.1)$$

Подставляя квазипотенциал (2.1) и дискретное представление (3.1) в исходные интегральные уравнения (1.12), а также фиксируя $\rho = \rho_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), сформулируем задачу на собственные значения в матричном виде:

$$\frac{1}{\lambda} \psi_{\mu}(iw_q, \rho_i) = \sum_{j=1}^N M_{i,j} \psi_{\mu}(iw_q, \rho_j), \quad (3.2)$$

где

$$M_{i,j} = -2\pi h \frac{G_{\mu}(iw_q; \rho_i, \rho_j)}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\rho_j - \rho_0)^2}{2\alpha^2}\right).$$

Решение этой задачи при каждом λ существует не при всех значениях w_q , а только при некоторых. Технически для нахождения взаимозависимости величин w_q и λ удобно фиксировать w_q и находить соответствующие значения λ . Полученные таким образом графики зависимости λ от w_q при $\mu = 0$ и $\mu = 1$ иллюстрированы на рисунке 3.1. Анализируя их, видим, что график функции $w_q(\lambda)$ состоит из нескольких дискретных элементов, пронумерованных числом n в порядке возрастания λ . Таким образом, в результате решения уравнения (3.2) получены условия квантования величины w_q .

Как видно на рисунке 3.1, при определенном минимальном значении параметра λ в системе двух частиц возникает связанное состояние с энергией $2E_q = 2m \cos w_q$, меньшей $2m$. С ростом λ энергия состояния, которому соответствует фрагмент, обозначенный $n=1$, уменьшается до нуля, после чего само состояние исчезает. При дальнейшем увеличении λ возникает новое

связанное состояние (ему соответствует фрагмент, обозначенный как $n = 2$) и становится новым основным состоянием системы (с наименьшим возможным значением энергии). При последующем росте λ энергия уровня $n = 2$ также убывает до нуля, после чего и это состояние исчезает. Таким образом, при заданных параметрах системы, существует один энергетический уро-

вень или его нет вовсе. Сравнивая графики 3.1 а) и 3.1 б), видим, что с ростом азимутального квантового числа связанное состояние существует при больших значениях λ/m .

На рисунке 3.2 изображены зависимости квадрата модуля парциальных волновых функций основного состояния системы от параметра pt .

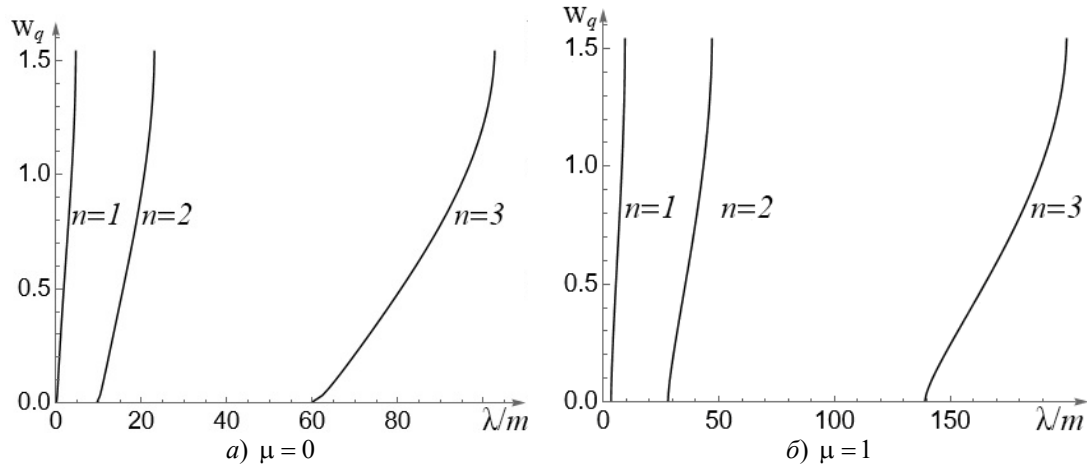


Рисунок 3.1 – Условие квантования энергии двухчастичной системы при $\alpha/m = 1$, $\rho_0 m = 1$

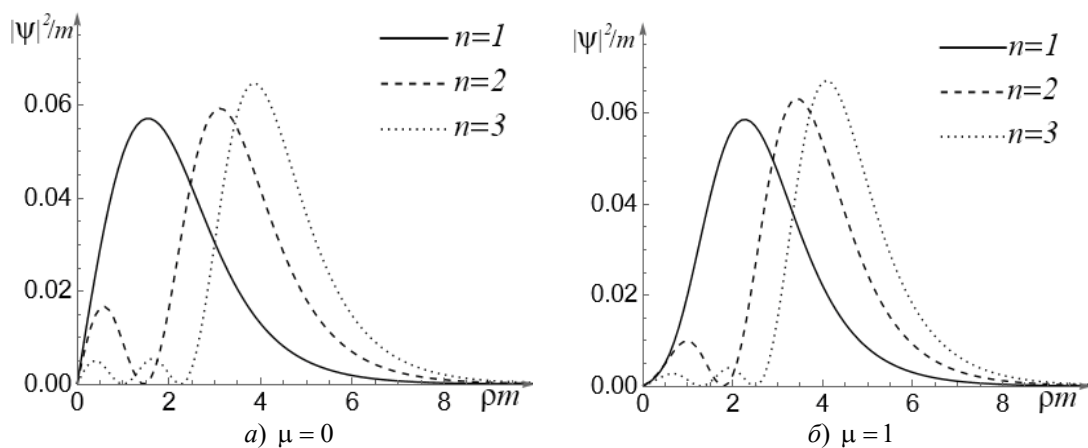


Рисунок 3.2 – Зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций в РКП от параметра pt при $\alpha/m = 1$, $\rho_0 m = 1$, $w_q = 0,5$

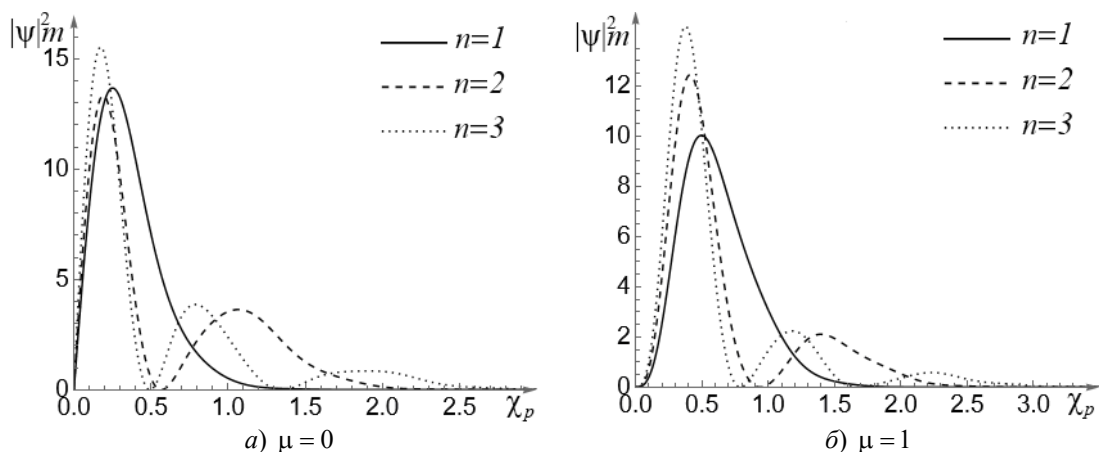


Рисунок 3.3 – Зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций в ИП от быстроты χ_p при $\rho_0 m = 1$, $w_q = 0,5$

На рисунке 3.2 видно, что с ростом азимутального квантового числа экстремумы изображенных функций смещаются в направлении увеличения координаты ρm , а число их нулей равно n .

На рисунке 3.3 иллюстрирована зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций в ИП, полученных с учетом (1.14) из парциальных волновых функций в РКП, изображенных на рисунке 3.2.

Анализируя рисунок 3.3, заметим, что при увеличении азимутального квантового числа μ положения экстремумов иллюстрированных функций смещаются в область больших значений частоты χ_p . Количество нулей у изображенных функций равно n .

4 Предельный случай

Подставляя потенциал (2.2) в уравнение (1.12) и вычисляя интеграл в его правой части с учетом свойств дельта-функции, получим

$$\psi_\mu(iw_q, \rho) = -\lambda 2\pi G_\mu(iw_q; \rho, \rho_0) \psi_\mu(iw_q, \rho_0). \quad (4.1)$$

Для нахождения условия квантования энергии положим в (4.1) $\rho = \rho_0$, тогда

$$1 = -\lambda 2\pi G_\mu(iw_q; \rho_0, \rho_0). \quad (4.2)$$

В целях сравнения условий квантования, полученных для первого состояния (соответствующего $n=1$) посредством решения системы уравнений (3.2) и на основании уравнения (4.2), изобразим зависимости w_q от λ на рисунке 4.1 соответственно штриховой линией и сплошной.

На рисунке 4.2 сплошной линией изображены зависимости квадрата модуля парциальных волновых функций (4.1), штриховой линией – парциальных волновых функций, полученных на основе (3.2) при $\alpha/m = 0,5$, а точками – этих же функций, но при $\alpha/m = 0,2$ от параметра ρm .

На рисунках 4.1 и 4.2 видно, что с уменьшением параметра α результаты численного решения квазипотенциального уравнения для основного состояния (соответствующего $n=1$), полученные для потенциала Гаусса, сближаются с результатами точного решения, соответствующими потенциалу «дельта-окружность».

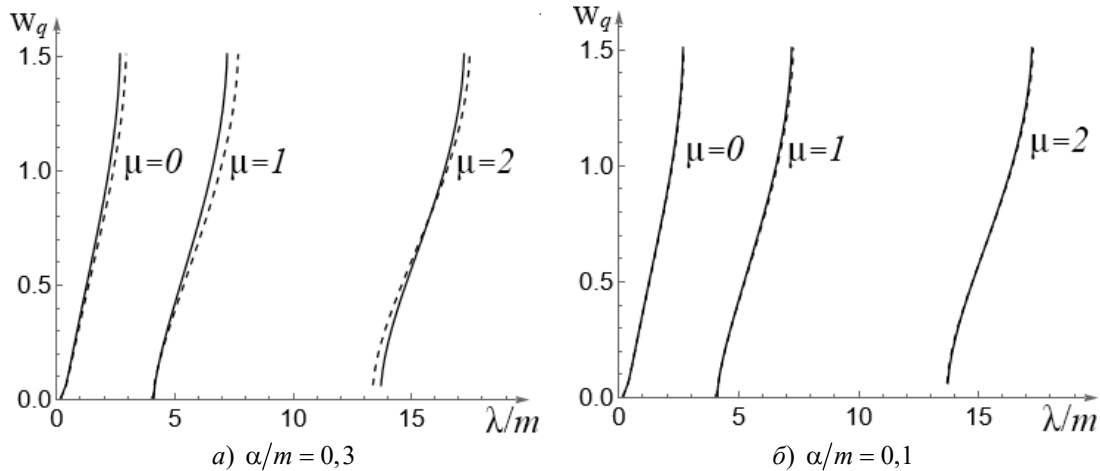


Рисунок 4.1 – Сравнение условий квантования энергии при моделировании взаимодействия потенциалом Гаусса и «дельта-окружностью» (при $\rho_0 m = 1$)

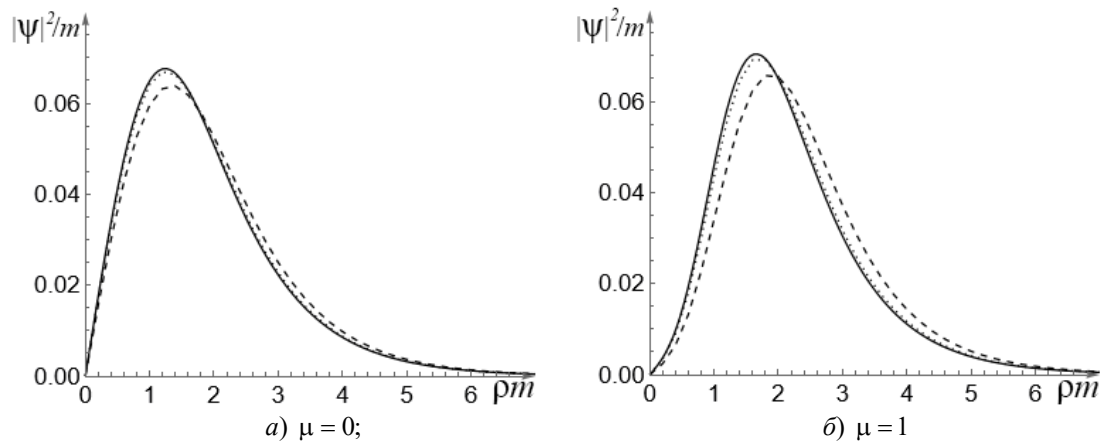


Рисунок 4.2 – Зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций состояния с $n=1$ от параметра ρm при $\alpha/m = 1$, $\rho_0 m = 1$, $w_q = 0,5$

Заключение

В настоящей работе при выборе взаимодействий в виде потенциала Гаусса получены численные решения двумерных парциальных интегральных квазипотенциальных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении, которые описывают связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы. Получены условия квантования энергии, а также парциальные волновые функции в релятивистском конфигурационном представлении и импульсном представлении. При анализе результатов выявлено, что в определенных диапазонах параметров потенциала основному состоянию может соответствовать волновая функция с одним нулем, двумя нулями, тремя и более нулями.

Показано, что при стремлении параметра ширины гауссова потенциала к нулю (а глубины потенциала к бесконечности) он вырождается в бесконечно глубокую и бесконечно узкую потенциальную яму, и при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в потенциал «дельта-окружность». Продемонстрировано, что с уменьшением параметра ширины гауссова потенциала численно полученные результаты асимптотически стремятся к точным аналитическим решениям, соответствующим предельному варианту потенциала «дельта-окружность».

ЛИТЕРАТУРА

1. Buck, B. Local potential models for the scattering of complex nuclei / B. Buck, H. Friedrich, C. Wheatley // Nuclear Physics A. – 1977. – Т. 275, № 1. – С. 246–268.
2. Gomez, S.S. Few-electron semiconductor quantum dots with Gaussian confinement / S.S. Gomez, R.H. Romero // Central Eur. J. Phys. – 2009. – Vol. 7. – P. 12–21.
3. Koksai, K. A simple analytical expression for bound state energies for an attractive Gaussian confining potential / K. Koksai // Phys. Scr. – 2012. – Vol. 86. – P. 035006.
4. Fernández, F. M. Quantum Gaussian wells and barriers / F.M. Fernández // American Journal of Physics. – 2011. – Т. 79, № 7. – С. 752–754.
5. Bound Magneto-Acoustic Polaron in an Asymmetric Gaussian Confinement Potential Quantum Well / F. Manfouo [et al.] // International Journal of Theoretical Physics. – 2024. – Т. 63, № 3. – С. 70.
6. Кудряшов, В.В. Решение радиального уравнения Шрёдингера для потенциала Гаусса в модифицированном ВКБ-приближении / В.В. Кудряшов, А.В. Баран // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 43–48.
7. Mutuk, H. Asymptotic iteration and variational methods for Gaussian potential / H. Mutuk // Pramana – J. Phys. – 2019. – P. 66.
8. Гришечкин, Ю.А. Об одном приближенном аналитическом методе решения уравнения Шрёдингера с гауссовым потенциалом / Ю.А. Гришечкин, А.В. Павленко, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 7–10.
9. Гришечкин, Ю.А. Приближенный аналитический метод решения уравнения Шрёдингера с гауссовым потенциалом в импульсном представлении / Ю.А. Гришечкин, А.В. Павленко // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 18–21.
10. The Energy of the Ground State of the Two-Dimensional Hamiltonian of a Parabolic Quantum Well in the Presence of an Attractive Gaussian Impurity / S.Fassari, M. Gadella, L.M. Nieto, F. Rinaldi // Symmetry. – 2021. – Т. 13, № 9. – С. 1561.
11. On the spectrum of the one-dimensional Schrödinger Hamiltonian perturbed by an attractive Gaussian potential / S. Fassari, M. Gadella, L.M. Nieto, F. Rinaldi // Acta Polytechnica. – 2017. – Vol. 57, № 6. – С. 358–390.
12. Nagiyev, S.M. The relativistic two-dimensional harmonic oscillator / S.M. Nagiyev, E.A. Jafarov, M.Y. Efendiyev // IL Nuovo Cimento. – 2009. – Vol. 124B. – P. 182–185.
13. Мир-Касимов, Р.М. Релятивистские операторы кинематического импульса / Р.М. Мир-Касимов // Физика элементарных частиц и атомного ядра теория Письма в ЭЧАЯ. – 2010. – Т. 7, № 5 (161). – С. 505–515.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф25М-004).

Поступила в редакцию 11.06.2025.

Информация об авторах

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Павленко Андрей Васильевич – аспирант
Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент