УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_84
EDN: IJQIOV

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ФАКТОРГРУППЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC QUOTIENT GROUPS OF POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются l-арные факторгруппы полиадических групп специального вида, то есть полиадических групп с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, порядка, делящего $l - 1$, и n-арной операции η.

Ключевые слова: *полиадическая операция, полуинвариантная l-арная подгруппа, n-полуинвариантная l-арная подгруппа, факторгруппа, конгруэнция, смежный класс.*

Для цитирования: *Гальмак, А.М.* Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 84–89. – DOI: https://doi.org/ 10.54341/ 20778708_2025_3_64_84. – EDN: IJQIOV

Abstract. The article studies of l-ary quotient groups of polyadic groups of special form, that is polyadic groups with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power A^k of n-ary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ which order divides $l - 1$ and n-ary operation η.

Keywords: *polyadic operation, semiinvariant l-ary subgroup, n-semiinvariant l-ary subgroup, quotient group, congruence, coset.*

For citation: *Gal'mak, A.M.* Polyadic quotient groups of polyadic groups of special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_ 2025_3_64_84 (in Russian). – EDN: IJQIOV

Введение

Данная статья посвящена изучению l-арных факторгрупп l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ специального вида по её полуинвариантным l-арным подгруппам. Определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$, можно найти в [1]. Для бинарной операции η l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$, обозначаемой также символом $[\ ]_{l,\sigma,k}$. Изучению этой операции посвящена книга [2]. Частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, соответствующими циклу $\sigma = (12 \ldots k)$, являются две полиадические операции Э. Поста [3]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Если $k = 1$, то подстановка σ является тождественной, а l-арная операция $\eta_{s,\sigma,1}$ в этом случае является производной от n-арной операции η. В частности, если $n = 2$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,1}$ является производной от бинарной операции η.

В [4, теорема 3.1] доказано, что *если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $< B, \eta >$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, то универсальная алгебра $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.* В связи с этим результатом возникает вопрос: *А может ли k-ая декартова степень H^k некоторого смежного класса H n-арной факторгруппы $< A/B, \eta >$, отличного от B, быть замкнутой относительно l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и, более того, быть l-арной подгруппой в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$?*

Для $k = 1$ положительный ответ на поставленный вопрос получен в [5]. Положительный ответ на этот же вопрос для $k \geq 1$ даёт теорема 2.1, которая является основным результатом данной статьи.

1 Используемые результаты

Следующая теорема используется при получении основного результата данной статьи.

***Теорема* 1.1** [1]. *Если* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – *l-арная группа*.

Напомним, что для всякой полуинвариантной n-арной подгруппы $< B, \eta >$ n-арной группы $< A, \eta >$ множество

$$A/B = \{\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \mid a \in A\} =$$

$$= \{\eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a) \mid a \in A\}$$

всех смежных классов $< A, \eta >$ по $< B, \eta >$ является n-арной группой относительно n-арной операции η. Эту n-арную группу называют [6, с. 59] *n-арной факторгруппой* и обозначают символом $< A / B, \eta >$.

Определение n-полуинвариантных l-арных подгрупп l-арной группы, которые используются в данной статье, имеются в [5]. Там же в [5] можно найти и определение Поста [3] эквивалентных последовательностей, составленных из элементов n-арной группы.

При получении основного результата данной статьи существенно используется следующая лемма.

***Лемма* 1.1**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа*, $< B, \eta >$ – *её полуинвариантная n-арная подгруппа*,

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k,\ d \in A,\ H = \eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Тогда:

1) $$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{t-1}\,\mathbf{x}\,\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-t}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{t-1}\,x_{\sigma^{t-1}(1)}\,\underbrace{d\ldots d}_{l-t})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{t-1}\,x_{\sigma^{t-1}(k)}\,\underbrace{d\ldots d}_{l-t})\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$$

для любого $t = 1, \ldots, l$;

2) $$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{(i-1)(n-1)}\,\mathbf{x}\,\underbrace{H^k\ldots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}\,x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)}\,\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}\,x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)}\,\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)})\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$$

для любого $i = 1, \ldots, s + 1$;

3) $$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}) =$$

$$= \eta(\eta(x_1\underbrace{d\ldots d}_{l-1})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\eta(x_k\underbrace{d\ldots d}_{l-1})\underbrace{B\ldots B}_{n-1});$$

4) $$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}\mathbf{x}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{l-1}\,x_{\sigma^{l-1}(1)})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{l-1}\,x_{\sigma^{l-1}(k)})\underbrace{B\ldots B}_{n-1});$$

5) *если подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}\mathbf{x}) = \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{l-1}x_1)\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{l-1}x_k)\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Доказательство. 1) Так как $< B, \eta >$ полуинвариантная nарная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{t-1}\,\mathbf{x}\,\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-t}) =$$

$$= \{\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{h}_1\ldots\mathbf{h}_{t-1}\mathbf{x}\mathbf{h}_{t+1}\ldots\mathbf{h}_{s(n-1)+1}) \mid \mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{t-1},$$
$$\mathbf{h}_{t+1},\ldots,\mathbf{h}_{s(n-1)+1} = \mathbf{h}_l \in (\eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}))^k\} =$$

$$= \{\eta_{s,\sigma,k}((\eta(db_{111}\ldots b_{11(n-1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(db_{1k1}\ldots b_{1k(n-1)}))\ldots$$
$$\ldots(\eta(db_{(t-1)11}\ldots b_{(t-1)1(n-1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(db_{(t-1)k1}\ldots b_{(t-1)k(n-1)}))(x_1, \ldots, x_k)$$
$$(\eta(db_{(t+1)11}\ldots b_{(t+1)1(n-1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(db_{(t+1)k1}\ldots b_{(t+1)k(n-1)}))\ldots$$
$$\ldots(\eta(db_{(l-1)11}\ldots b_{(l-1)1(n-1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(db_{(l-1)k1}\ldots b_{(l-1)k(n-1)}))$$
$$(\eta(db_{l11}\ldots b_{l1(n-1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(db_{lk1}\ldots b_{lk(n-1)}))) \mid b_{\alpha\beta\gamma} \in B\} =$$
$$= \{\eta(\eta(db_{111}\ldots b_{11(n-1)})\eta(db_{2\sigma(1)1}\ldots b_{2\sigma(1)(n-1)})\ldots$$
$$\ldots\eta(db_{(t-1)\sigma^{t-2}(1)1}\ldots b_{(t-1)\sigma^{t-2}(1)(n-1)})\,x_{\sigma^{t-1}(1)}$$
$$\ldots\eta(db_{(t+1)\sigma^{t}(1)1}\ldots b_{(t+1)\sigma^{t}(1)(n-1)})$$
$$\ldots\eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)1}\ \ldots\ b_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)(n-1)})$$
$$\eta(db_{l\sigma^{l-1}(1)1}\ \ldots\ b_{l\sigma^{l-1}(1)(n-1)})), \ldots$$
$$\ldots, \eta(\eta(db_{1k1}\ldots b_{1k(n-1)})\eta(db_{2\sigma(k)1}\ldots b_{2\sigma(k)(n-1)})\ldots$$
$$\ldots\eta(db_{(t-1)\sigma^{t-2}(k)1}\ldots b_{(t-1)\sigma^{t-2}(k)(n-1)})\,x_{\sigma^{t-1}(k)}$$
$$\eta(db_{(t+1)\sigma^{t}(k)1}\ldots b_{(t+1)\sigma^{t}(k)(n-1)})\ldots$$
$$\ldots\eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)1}\ \ldots\ b_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)(n-1)})$$
$$\eta(db_{l\sigma^{l-1}(k)1}\ \ldots\ b_{l\sigma^{l-1}(k)(n-1)})) \mid b_{\alpha\beta\gamma} \in B\} =$$

{далее применяется полуинвариантнность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$}

$$= \{(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{t-1}\,x_{\sigma^{t-1}(1)}\,\underbrace{d\ldots d}_{l-t}\,b_{11}\ldots b_{1(n-1)}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\underbrace{d\ldots d}_{t-1}\,x_{\sigma^{t-1}(k)}\,\underbrace{d\ldots d}_{l-t}\,b_{k1}\ldots b_{k(n-1)}) \mid b_{\alpha\beta} \in B\} =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{t-1}\,x_{\sigma^{t-1}(1)}\,\underbrace{d\ldots d}_{l-t})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{t-1}\,x_{\sigma^{t-1}(k)}\,\underbrace{d\ldots d}_{l-t})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Следовательно, верно доказываемое равенство.

2) Полагаем в 1) $t = (i - 1)(n - 1) + 1$.

3) Полагаем в 1) $t = 1$.

4) Полагаем в 1) $t = l$.

5) Следует из 4), так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. □

***Замечание* 1.1**. Утверждения 2) и 3) леммы 1.1 можно доказать непосредственно, проведя вычисления, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве утверждения 1).

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста; подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для смежного класса* $H = \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1})$ *n-арной факторгруппы* $< A/B, \eta >$ *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $\eta_{s,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *для полуинвариантных в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *l-арных подгрупп* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *и* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *соответствующие l-арные факторгруппы совпадают*:

$$< A^k/H^k, \eta_{s,\sigma,k} > = < A^k/B^k, \eta_{s,\sigma,k} >;$$

3) *конгруэнции* ρ_{H^k} *и* ρ_{B^k} *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *и* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *совпадают*: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) *если* $B \neq A$, *для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *не является тождественной, то l-арная подгруппа* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Доказательство. 1) Если

$$\mathbf{h}_i = (h_{i1}, \ldots, h_{ik}) = (\eta(db_{i11} \ldots b_{i1(n-1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(db_{ik1} \ldots b_{ik(n-1)})), \ i = 1, \ldots, l$$

произвольные элементы из H^k, то, положив

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

и, используя определение операции $\eta_{s,\sigma,k}$, тождественность подстановки σ^{l-1}, и полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, будем иметь

$$y_j = \eta(\eta(db_{1j1} \ldots b_{1j(n-1)})\eta(db_{2\sigma(j)1} \ldots b_{2\sigma(j)(n-1)}) \ldots$$
$$\ldots \eta(d b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)1} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)(n-1)})$$
$$\eta(db_{lj1} \ldots b_{lj(n-1)})) \in$$
$$\in \eta(\underbrace{d \ldots d}_{l} \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(d \underbrace{d \ldots d}_{l-1} \underbrace{B \ldots B}_{n-1}).$$

Таким образом, $y_j \in \eta(d \underbrace{d \ldots d}_{l-1} \underbrace{B \ldots B}_{n-1})$.

А так как последовательность $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ эквивалентна последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$, где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, то

$$y_j \in \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = H$$

для любого $j = 1, \ldots, k$, откуда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_l) \in H^k,$$

что означает замкнутость множества H^k относительно l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$.

Рассмотрим теперь в $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ уравнение

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_l) = \mathbf{g}, \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k) =$$
$$(\eta(dc_{11} \ldots c_{1(n-1)}), \ldots, \eta(dc_{k1} \ldots c_{k(n-1)})) \in H^k,$$
$$c_{11}, \ldots, c_{1(n-1)} \ldots, c_{k1}, \ldots, c_{k(n-1)} \in B.$$

Элементы $\mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_l$ были определены выше и также принадлежат множеству H^k.

Так как подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа. Поэтому уравнение (2.1) имеет в ней решение

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k.$$

Подставив это решение в (2.1), получим равенство

$$\eta_{s,\sigma,k}((a_1, \ldots, a_k)\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_l) = \mathbf{g}. \tag{2.2}$$

Обозначим j-ю компоненту в левой части полученного равенства через f_j. Рассуждая также как при при вычислении y_j, получим

$$f_j = \eta(a_j\eta(db_{2\sigma(j)1} \ldots b_{2\sigma(j)(n-1)}) \ldots$$
$$\ldots \eta(d b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)1} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)(n-1)})$$
$$\eta(db_{lj1} \ldots b_{lj(n-1)})) \in$$
$$\in \eta(a_j \underbrace{d \ldots d}_{l-1} \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(a_j \underbrace{B \ldots B}_{n-1}),$$

то есть

$$f_j = \eta(a_j v_1 \ldots v_{n-1})$$

для некоторых $v_1, \ldots, v_{n-1} \in B$. А так как согласно (2.2), $f_j = g_j$, то

$$\eta(a_j v_1 \ldots v_{n-1}) = \eta(dc_{j1} \ldots c_{j(n-1)}).$$

Следовательно,

$$\eta(a_j v_1 \ldots v_{n-1}) \in \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1}),$$

откуда учитывая, что, $v_1, \ldots, v_{n-1} \in B$, а также то, что $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа в $< A, \eta >$, получаем

$$a_j \in \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = H, j = 1, \ldots, k.$$

Поэтому

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_k) \in H^k,$$

и значит уравнение (2.1) разрешимо в $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Аналогично доказывается разрешимость в $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ уравнения

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_{l-1}\mathbf{y}) = \mathbf{g}$$

для любых $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{l-1}$, $\mathbf{g} \in H^k$. Таким образом, согласно аксиоматике Поста для n-арных групп, $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная подгруппа в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k, то по лемме 1.1 (утверждения 3) и 5))

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{H^k \ldots H^k}_{l-1}) =$$
$$= \eta(\eta(x_1 \underbrace{d \ldots d}_{l-1}) \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$
$$\ldots \times \eta(\eta(x_k \underbrace{d \ldots d}_{l-1}) \underbrace{B \ldots B}_{n-1}),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}\mathbf{x}) =$$

$$=\eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{l-1}x_1)\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots\times\eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{l-1}x_k)\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Если в правой части первого из полученных равенств учесть эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d\ldots d}_{l-1} \text{ и } b_1\ldots b_{n-1},$$

где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, то получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}) =$$

$$=\eta(x_1\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots\times\eta(x_k\underbrace{B\ldots B}_{n-1}), \qquad (2.3)$$

Если в правой части второго из полученных равенств воспользоваться полуинвариантностью $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, а также учесть эквивалентность указанных выше последовательностей, то получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}\mathbf{x}) =$$

$$=\eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x_1)\times\ldots\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x_k). \qquad (2.4)$$

Из (2.4) и полуинвариантности $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ следует

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}\mathbf{x}) =$$

$$=\eta(x_1\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots\times\eta(x_k\underbrace{B\ldots B}_{n-1}). \qquad (2.5)$$

Тогда из (2.3) и (2.5) следует равенство

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}\mathbf{x}).$$

Следовательно, l-арная подгруппа $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ полуинвариантна в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

2) Если в лемме 1.1 $d \in B$, то $H = B$, при этом утверждение 3) принимает вид

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-1}) =$$

$$=\eta(x_1\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots\times\eta(x_k\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

откуда и из (2.3) следует

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-1}).$$

Следовательно, l-арные факторгруппы

$$< A^k/H^k, \eta_{s,\sigma,k} > \text{ и } < A^k/B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$$

совпадают.

3) Так как конгруэнция ρ_{B^k} и полуинвариантная l-арная подгруппа $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ определяют одну и ту же факторгруппу; аналогично конгруэнция ρ_{H^k} и полуинвариантная l-арная подгруппа $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ определяют одну и ту же факторгруппу:

$$< A^k/\rho_{B^k}, \eta_{s,\sigma,k} > = < A^k/B^k, \eta_{s,\sigma,k} >,$$

$$< A^k/\rho_{H^k}, \eta_{s,\sigma,k} > = < A^k/H^k, \eta_{s,\sigma,k} >,$$

то, согласно 2),

$$< A^k/\rho_{H^k}, \eta_{s,\sigma,k} > = < A^k/\rho_{B^k}, \eta_{s,\sigma,k} >,$$

что означает совпадение конгруэнций ρ_{H^k} и ρ_{B^k}.

4) Если $d \in B$, то $H = B$ и применяется утверждение 2) теоремы 4.1 из [7]. Поэтому считаем $d \notin B$, откуда

$$H = \eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \neq B. \qquad (2.6)$$

Так как подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то $\sigma^{(i-1)(n-1)}(j) \neq j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Зафиксируем элемент $b \in B$ и выберем в A^k элемент $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ так, что $x_j = d$, а элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ является решением уравнения

$$\eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}z\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)}) = b, \text{ то есть}$$

$$\eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)}) = b. \qquad (2.7)$$

Все остальные компоненты в $(x_1, \ldots, x_k)$ могут быть любыми из множества A.

Если предположить n-полуинвариантность $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{H^k\ldots H^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k\ldots H^k}_{(i-1)(n-1)}\mathbf{x}\underbrace{H^k\ldots H^k}_{(s+1-i)(n-1)})$$

для выбранного $\mathbf{x}$. Перепишем последнее равенство, применив к его левой части утверждение 3) леммы 1.1, а к правой – утверждение 2) этой же леммы:

$$\eta(\eta(x_1\underbrace{d\ldots d}_{l-1})\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots$$

$$\ldots\times\eta(\eta(x_k\underbrace{d\ldots d}_{l-1})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$=\eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{(i-1)(n-1)}x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)}\underbrace{d\ldots d}_{(s+1-i)(n-1)})\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots$$

$$\ldots\times\eta(\eta(\underbrace{d\ldots d}_{(i-1)(n-1)}x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)}\underbrace{d\ldots d}_{(s+1-i)(n-1)})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

откуда

$$\eta(\eta(x_j\underbrace{d\ldots d}_{l-1})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$=\eta(\eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Используя в левой части полученного равенства эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d\ldots d}_{l-1} \text{ и } b_1\ldots b_{n-1},$$

а также равенство $x_j = d$, а в правой части равенство (2.7), получим $\eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = B$, что противоречит (2.6). Таким образом, $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуинвариантной в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. □

Так как при $k = 1$ l-арная группа $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является производной от n-арной группы $< A, \eta >$, то, полагая в теореме 2.1 $k = 1$, получим теорему 2.1 из [5].

***Замечание* 2.1**. В доказательстве утверждение 2) теоремы 2.1 вместо леммы 1.1 можно было воспользоваться утверждением 3) леммы 2.1 из [4].

***Замечание* 2.2.** Предположим, что элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ в равенстве (2.7) совпадает с d. Тогда эквивалентность последовательностей $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ и $b_1 \ldots b_{n-1}$, где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, влечёт

$$b = \eta(\underbrace{d \ldots d}_{(i-1)(n-1)}\ x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}\ \underbrace{d \ldots d}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$
$$= (\, d \underbrace{d \ldots d}_{l-1}\,) \in \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1}),$$

то есть $b \in \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1})$. Это невозможно, так как для $d \notin B$ верно равенство

$$B \bigcap \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \varnothing.$$

Таким образом, элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ в (2.7) отличен от $d = x_j$. Если $\sigma^{(i-1)(n-1)}(j) = j$, то такое невозможно.

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $<B, \eta>$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $<A, \eta>$, *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста*; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для смежного класса* $H = \eta(d \underbrace{B \ldots B}_{n-1})$ *n-арной факторгруппы* $<A/B, \eta>$ *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $\eta_{s,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$;

2) *для полуинвариантных в* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *l-арных подгрупп* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *и* $<B^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *соответствующие l-арные факторгруппы совпадают*:

$$<A^k/H^k, \eta_{s,\sigma,k}> = <A^k/B^k, \eta_{s,\sigma,k}>;$$

3) *конгруэнции* ρ_{H^k} *и* ρ_{B^k} *l-арной группы* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *и* $<B^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *совпадают*: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) *если* $B \neq A$, *для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *не является тождественной, то l-арная подгруппта* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *не является n-полуинвариантной в* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$.

5) *если подстановка* σ^{n-1} *является тождественной, то* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ – *n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$;

Доказательство. 1)–4). Так как последовательности $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ и $b_1 \ldots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста в $<A, \eta>$, где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, то существуют $c_1, \ldots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \ldots d}_{l-1} = \underbrace{d \ldots d}_{s(n-1)}$ и $c_1 \ldots c_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста. Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.1, что означает справедливость утверждений 1)–4) этой теоремы.

5) Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k, то, применяя утверждение 2) леммы 1.1, тождественность подстановки σ^{n-1}, полуинвариантность $<B, \eta>$ в $<A, \eta>$ и эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d \ldots d}_{n-1} \text{ и } b_1 \ldots b_{n-1},$$

получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k \ldots H^k}_{(i-1)(n-1)}\ \mathbf{x}\ \underbrace{H^k \ldots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$
$$= \eta(\eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}\ x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)}\ \underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)})\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$
$$\ldots \times \eta(\eta(\,x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)}\ \underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)})\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)} x_1 \underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)}\ \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$
$$\ldots \times \eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)} x_k \underbrace{d\ \ldots\ d}_{(s+1-i)(n-1)}\ \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)} x_1 \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots \times \eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)} x_k \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}\ \underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_1) \times \ldots \times \eta(\underbrace{d\ \ldots\ d}_{(i-1)(n-1)}\ \underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_k) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_1) \times\ \ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_k),$$

то есть

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k \ldots H^k}_{(i-1)(n-1)}\ \mathbf{x}\ \underbrace{H^k \ldots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_1) \times\ \ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_k)$$

для любого $i = 1, \ldots, s + 1$. Таким образом,

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{H^k \ldots H^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k \ldots H^k}_{n-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{H^k \ldots H^k}_{(s-1)(n-1)}) =$$
$$\ldots$$
$$= \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k \ldots H^k}_{(s-1)(n-1)}\ \mathbf{x}\ \underbrace{H^k \ldots H^k}_{n-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{H^k \ldots H^k}_{l-1}\ \mathbf{x}).$$

Следовательно, $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ является n-полуинвариантной в $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$. □

Согласно Посту [3], *ν-ой n-адической степенью* элемента a n-арной группы $<A, \eta>$ называется элемент этой же n-арной группы, обозначаемый символом $a^{[\nu]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[\nu]} = a, \text{ если } \nu = 0;$$
$$a^{[\nu]} = \eta(\underbrace{a\ \ldots\ a}_{\nu(n-1)+1}), \text{ если } \nu > 0;$$
$$a^{[\nu]} \text{ – решение уравнения } \eta(\,x\underbrace{a\ \ldots\ a}_{-\nu(n-1)}) = a,$$
$$\text{если } \nu < 0.$$

***Замечание* 2.3.** В группе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством

$$a^{[\nu]} = a^{\nu+1}$$

для любого целого ν. В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Напомним, что *конечным n-адическим порядком элемента a n*-арной группы $< A, \eta >$ называется [3], [6] наименьшее целое положительное число m, для которого выполняется равенство $a^{[m]} = a$.

Пост доказал [3], что *если элемент a n-арной группы* $< A, \eta >$ *имеет конечный n-адический порядок m, то* $a^{[s]} = a$ *тогда и только тогда, когда s кратно m*.

***Теорема* 2.3**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *элемент* $d \in A$ *имеет n-адический порядок, делящий s*; *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *имеет порядок, делящий* $l - 1$. *Тогда справедливы утверждения* 1)–4) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Так как элемент $d \in A$ имеет n-адический порядок, делящий s, то $d^{[s]} = d$, откуда согласно определению n-адической степени, следует

$$\eta(\underbrace{d \ \ldots \ d}_{s(n-1)+1}) = d,$$

что означает нейтральность в $< A, \eta >$ последовательности $\underbrace{d \ \ldots \ d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \ldots d}_{l-1}$. В n-арной подгруппе $< B, \eta >$ существуют нейтральные последовательности, составленные из элементов множества B, при этом эти последовательности являются нейтральными и в $< A, \eta >$. А так как все нейтральные последовательности любой n-арной группы эквивалентны в смысле Поста, то последовательность $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ эквивалентна некоторой последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$, где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$. Так как выполняются все условия теоремы 2.1, то справедливы утверждения 1)–4) теоремы 2.1.□

Для идемпотента d n-арной группы $< A, \eta >$ последовательность $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ является нейтральной и поэтому она эквивалентна любой нейтральной последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$, составленной из элементов n-арной подгруппы $< B, \eta >$. Таким образом, считая в теореме 2.2 d идемпотентом, получим следующий результат.

***Теорема* 2.4**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *d – идемпотент в* $< A, \eta >$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда справедливы утверждения* 1)–5) *теоремы* 2.2.

Если в теореме 2.1. положить $n = 2$, то получим следующий результат.

***Теорема* 2.5**. *Пусть B – нормальная подгруппа группы A, в A существует такой элемент d, что* $d^{l-1} \in B$; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для смежного класса* $H = dB$ *факторгруппы A/B декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $[\ ]_{l, \sigma, k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$;

2) *для полуинвариантных в* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *l-арных подгрупп* $< H^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *и* $< B^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *соответствующие l-арные факторгруппы совпадают*:

$$< A^k/H^k, [\ ]_{l, \sigma, k} > = < A^k/B^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >;$$

3) *конгруэнции* ρ_{H^k} *и* ρ_{B^k} *l-арной группы* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $< H^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *и* $< B^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *совпадают*: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) *если* $B \neq A$, *для некоторого* $i = 2, \ldots, l - 1$ *подстановка* σ^{i-1} *не является тождественной, то l-арная подгруппта* $< H^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *не является инвариантной в* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$;

5) *если подстановка* σ *является тождественной, то l-арная подгруппта* $< H^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *является инвариантной в* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$.

Из теоремы 2.5. вытекает

***Следствие* 2.1**. *Пусть B – нормальная подгруппа группы A, в A существует такой элемент d, что* d^{l-1}*– единица группы A*; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда справедливы утверждения* 1)–5) *теоремы* 2.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

2. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. *Гальмак*, *А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58.

5. *Гальмак*, *А.М.* Смежные классы, являющиеся полиадическими подгруппами / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 44–50.

6. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. *Гальмак*, *А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 45–47.

Поступила в редакцию 04.08.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор