УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44
EDN: PHKJNB

СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

COSETS THAT ARE POLYADIC SUBGROUPS

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются полиадические группы, в которых смежные классы по полуинвариантной n-арной подгруппе могут быть n-арными подгруппами.

Ключевые слова: *l-арная группа*, *полуинвариантная l-арная подгруппа*, *смежный класс*, *конгруэнция.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Смежные классы, являющиеся полиадическими подгруппами / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 44–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44. – EDN: PHKJNB

Abstract. The article studies polyadic groups in which cosets of a semi-invariant n-ary subgroup can be n-ary subgroups.

Keywords: *l-ary group*, *semi-invariant l-ary subgroup*, *coset*, *congruence.*

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Cosets that are poplyadic subgroups / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 44–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44 (in Russian). – EDN: PHKJNB

Введение

Известно, что в n-арных группах при $n \geq 3$, в отличие от групп, смежный класс n-арной факторгруппы, отличный от определяющей её полуинвариантной n-арной подгруппы, может быть n-арной подгруппой. В качестве тривиального примера можно указать n-арную факторгруппу идемпотентой n-арной группы по полуинвариантной n-арной подгруппе с единственным элементом. В этом случае множество всех смежных классов указанной n-арной факторгруппы совпадает с множеством всех одноэлементных подмножеств n-арной группы, то есть совпадает с множеством всех классов тривиальной конгруэнции. Ещё одним примером может служить n-арная группа нечётной арности, производная от симметрической группы, в которой множество всех нечётных подстановок, рассматриваемое как смежный класс n-арной факторгруппы n-арной симметрической группы по полуинвариантной n-арной знакопеременной группе, является n-арной подгруппой. Именно изучению смежных классов, являющихся n-арными подгруппами, посвящена настоящая статья.

1 Предварительные сведения

Напомним, что l-арную подгруппу $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$ называют [1, с. 52] *инвариантной* в ней, если

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(Bx\underbrace{B\ldots B}_{l-2}) = \ldots$$

$$\ldots = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{l-1}xB) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{l-1}x)$$

для любого $x \in A$. Если же

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{l-1}x)$$

для любого $x \in A$, то $< B, \eta >$ называют [1, с. 55] *полуинвариантной* в $< A, \eta >$.

Полуинвариантные и инвариантные полиадические подгруппы впервые появились у В. Дёрнте в [2].

При $l = 2$ понятия полуинвариантности и инвариантности совпадают, так как определяющие их равенства принимают вид $xB = Bx$.

Понятия полуинвариантной l-арной подгруппы и инвариантной l-арной подгруппы являются частными случаями более общего понятия из следующего определения.

***Определение* 1.1** [3, 4] l-Арная подгруппа $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$, где $l = s(n-1)+1$, $s \geq 1$, называется *n-полуинвариантной* в ней, если

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{i(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-i)(n-1)})$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, s$.

В развёрнутом виде последнее равенство переписывается следующим образом

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}) = \ldots$$
$$\ldots = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{l-1}x).$$

Ясно, что l-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы – это в точности её полуинвариантные l-арные подгруппы, а 2-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы – это в точности её инвариантные l-арные подгруппы.

Из определения 1.1 также следует, что всякая n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы является и полуинвариантной в ней. В частности, полуинвариантными являются инвариантные l-арные подгруппы.

Ясно, что если $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – l-арная группа, производная от n-арной группы $< A, \eta >$, то $< B, \mu >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< A, \mu >$.

Примеры n-полуинвариантных l-арных подгрупп можно строить с помощью следующей леммы, справедливость которой устанавливается простой проверкой.

***Лемма* 1.1**. *Если* $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – *l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$, *то* $< B, \mu >$ – *n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы* $< A, \mu >$.

Для всякой полуинвариантной n-арной подгруппы $< B, \eta >$ n-арной группы $< A, \eta >$ множество

$$A/B = \{\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) \mid a \in A\} = \{\eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a) \mid a \in A\}$$

всех смежных классов $< A, \eta >$ по $< B, \eta >$ является n-арной группой относительно n-арной операции η. Эту n-арную группу называют [1, с. 59] *n-арной факторгруппой* и обозначают символом $< A/B, \eta >$.

Согласно предложению 7.4 [4], всякая полуинвариантная n-арная подгруппа $< B, \eta >$ n-арной группы $< A, \eta >$ определяет на ней конгруэнцию ρ_B, классы которой совпадают со смежными классами $< A, \eta >$ по $< B, \eta >$, что означает совпадение n-арных факторгрупп $< A/\rho_B, \eta >$ и $< A/B, \eta >$.

***Замечание* 1.1**. В теории n-арных групп, также как и в теории групп, n-арную операцию в n-арной группе $< A, \eta >$ и n-арную операцию в её n-арной факторгруппе по полуинвариантной n-арной подгруппе $< B, \eta >$ обозначают одним и тем же символом η, то есть для обозначения указанной n-арной факторгруппы используют запись $< A/B, \eta >$. На самом деле речь идёт о разных n-арных операциях.

Если n-арную операцию в n-арной факторгруппе n-арной группы $< A, \eta >$ по её полуинвариантной n-арной подгруппе $< B, \eta >$ обозначить символом $\eta_{A/B}$, то согласно определению этой операции,

$$\eta_{A/B}(\eta(a_1\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(a_n\underbrace{B\ldots B}_{n-1})) =$$
$$= \eta(\eta(a_1a_2\ldots a_n)\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

С другой стороны, для любых подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$ множества A полагают

$$\eta(B_1 \ldots B_n) = \{\eta(b_1 \ldots b_n) \mid b_1 \in B_1, \ldots, b_n \in B_n\}.$$

Используя это равенство, ассоциативность n-арной операции η, полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ и равенство

$$B = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n}),$$

можно убедиться в справедливости следующего равенства

$$\eta(\eta(a_1\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(a_n\underbrace{B\ldots B}_{n-1})) =$$
$$= \eta(\eta(a_1a_2\ldots a_n)\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Таким образом, верно равенство

$$\eta_{A/B}(\eta(a_1\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(a_n\underbrace{B\ldots B}_{n-1})) =$$
$$= \eta(\eta(a_1\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(a_n\underbrace{B\ldots B}_{n-1})).$$

Именно это равенство позволяет не различать n-арные операции η и $\eta_{A/B}$ и использовать для их обозначения один и тот же символ η. Указанное равенство используется при работе со смежными классами n-арной факторгруппы $< A / B, \eta_{A/B} >$. При этом, не смотря на отождествление символов η и $\eta_{A/B}$, из контекста всегда понятно о какой из операций, η или $\eta_{A/B}$, в каждом конкретном случае идёт речь.

Согласно Посту [5], последовательности α и β элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называются *эквивалентными* в ней, если существуют последовательности γ и δ элементов этой же n-арной группы такие, что сумма длин последовательностей γ, α и δ сравнима с 1 по модулю $n - 1$, и

$$\eta(\gamma\alpha\delta) = \eta(\gamma\beta\delta).$$

Пост доказал [5], что если последовательности α и β элементов n-арной группы $< A, \eta >$ эквивалентны в ней, то

$$\eta(\rho\alpha\tau) = \eta(\rho\beta\tau)$$

для любых последовательностей ρ и τ элементов из A таких, что сумма длин последовательностей ρ, α и τ сравнима с 1 по модулю $n - 1$.

2 Основной результат

В дальнейшем, если $< B, \eta >$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, то для сокращения записей будем использовать символ B_d для обозначения смежного класса

$$\eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}d),$$

то есть

$$B_d = \eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}d).$$

***Замечание* 2.1**. *Если* $d \notin B$, *то* $B_d \neq B$, *точнее*, $B \cap B_d = \varnothing$.

***Теорема* 2.1**. *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $< B, \eta >$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d\ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$ *в смысле Поста. Тогда*:

1) *смежный класс* B_d *n-арной факторгруппы* $< A/B, \eta >$ *замкнут относительно l-арной операции* μ, *а универсальная алгебра* $< B_d, \mu >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A, \mu >$;

2) *для полуинвариантных в* $< A, \mu >$ *l-арных подгрупп* $< B_d, \mu >$ *и* $< B, \mu >$ *l-арные факторгруппы* $< A/B_d, \mu >$ *и* $< A/B, \mu >$ *совпвдают*: $< A/B_d, \mu > = < A/B, \mu >$;

3) *конгруэнции* ρ_{B_d} *и* ρ_B *l-арной группы* $< A, \mu >$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $< B_d, \mu >$ *и* $< B, \mu >$ *совпадают*: $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Доказательство. 1) Пусть

$$h_1 = \eta(db_{11}\ldots b_{1(n-1)}), \ldots, h_l = \eta(db_{l1}\ldots b_{l(n-1)}),$$

где $b_{11}, \ldots, b_{1(n-1)}, \ldots, b_{l1}, \ldots, b_{l(n-1)} \in B$, произвольные элементы из B_d. Используя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, будем иметь

$$\mu(h_1 \ldots h_l) = \eta(\eta(db_{11}\ldots b_{1(n-1)})$$
$$\eta(db_{21}\ldots b_{2(n-1)})\ldots \eta(db_{l1}\ldots b_{l(n-1)})) \in$$
$$\in \eta(\underbrace{\eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1})}_{l}) =$$
$$= \eta(\underbrace{d\ldots d}_{l}\underbrace{B\ldots B}_{l(n-1)}) =$$
$$= \eta(\underbrace{d\ldots d}_{l}\eta(\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(l-1)(n-1)+1})\underbrace{B\ldots B}_{n-2}) =$$
$$= \eta(d\underbrace{d\ldots d}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

то есть

$$\mu(h_1\ldots h_l) \in \eta(d\underbrace{d\ldots d}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

А так как последовательность $\underbrace{d\ldots d}_{l-1}$ эквивалентна в $< A, \eta >$ последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$, где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, то

$$\eta(d\underbrace{d\ldots d}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Из двух последних соотношений следует

$$\mu(h_1\ldots h_l) \in \eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = B_d,$$

что означает замкнутость множества B_d относительно l-арной операции μ.

Рассмотрим теперь в $< B_d, \mu >$ уравнение

$$\mu(xh_2\ldots h_l) = g, \quad (2.1)$$

где

$$g = \eta(dc_1\ldots c_{n-1}) \in B_d,\ c_1, \ldots, c_{n-1} \in B. \quad (2.2)$$

Элементы $h_2, \ldots, h_l$ были определены выше и также принадлежат множеству B_d.

Так как $< A, \mu >$ – l-арная группа, то уравнение (2.1) имеет в ней решение $x = a \in A$.

Подставив это решение в (2.1), получим равенство

$$\mu(ah_2\ldots h_l) = g.$$

откуда и из (2.2) следует

$$\mu(ah_2\ldots h_l) = \eta(dc_1\ldots c_{n-1}). \quad (2.3)$$

Проведя в левой части равенства (2.3) вычисления, аналогичные тем, что проводились при установлении замкнутости множества B_d относительно l-арной операции μ, получим

$$\mu(ah_2\ldots h_l) \in \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Следовательно,

$$\mu(ah_2\ldots h_l) = \eta(ad_2\ldots d_n)$$

для некоторых $d_2, \ldots, d_n \in B$, откуда и из (2.3) следует

$$\eta(ad_2\ldots d_n) = \eta(dc_1\ldots c_{n-1}). \quad (2.4)$$

Пусть β – обратная последовательность в $< B, \eta >$ для последовательности $d_2 \ldots d_n$. Так как $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа, $d_2, \ldots, d_n \in B$, то последовательность β эквивалентна в смысле Поста в $< B, \eta >$, а значит и в $< A, \eta >$ некоторой последовательности $u_2 \ldots u_n$, где $u_2, \ldots, u_n \in B$. Так как следствием равенства (2.4) является равенство

$$\eta(\eta(ad_2\ldots d_n)u_2\ldots u_n)) =$$
$$\eta(\eta(dc_1\ldots c_{n-1})u_2\ldots u_n)),$$

то, учитывая нейтральность последовательности $d_2\ldots d_n u_2\ldots u_n$, а также то, что $c_1, \ldots, c_{n-1}$, $u_2, \ldots, u_n \in B$, получим

$$a \in \eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = B_d.$$

Следовательно, уравнение (2.1) разрешимо в $< B_d, \mu >$.

Аналогично доказывается разрешимость в $< B_d, \mu >$ уравнения

$$\mu(h_1\ldots h_{l-1}y) = g$$

для любых $h_1, \ldots, h_{n-1}$, $g \in B_d$. Таким образом, согласно аксиоматике Поста для n-арных групп, $< B_d, \eta >$ – n-арная подгруппа в $< A, \eta >$.

Применяя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ и снова используя эквивалентность в $< A, \eta >$ последовательностей $\underbrace{d\ldots d}_{l-1}$ и $b_1 \ldots b_{n-1}$, где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, получим

$$\mu(x\underbrace{B_d\ldots B_d}_{l-1}) = \eta(x\underbrace{\eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1})}_{l-1}) =$$
$$= \eta(x\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(l-1)(n-1)}\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(l-1)(n-1)}) = \eta(x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

$$\mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1} x) = \eta(\underbrace{\eta(d\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \ldots \eta(d\underbrace{B \ldots B}_{n-1})}_{l-1} x) =$$

$$= \eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} \underbrace{B \ \ldots \ B}_{(l-1)(n-1)} x) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x)$$

для любого $x \in A$, то есть

$$\mu(x\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1}) = \eta(x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}), \qquad (2.5)$$

$$\mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1} x) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x). \qquad (2.6)$$

В силу полуинвариантности $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, правые части последних двух равенств равны. Поэтому равны и их левые части:

$$\mu(x\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1}) = \mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1} x).$$

Следовательно, $< B_d, \mu >$ полуинвариантна в $< A, \mu >$.

2) Так как

$$\eta(x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(x\underbrace{B \ldots B}_{s(n-1)}) = \mu(x\underbrace{B \ldots B}_{l-1}),$$

$$\eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{s(n-1)} x) = \mu(\underbrace{B \ldots B}_{l-1} x),$$

то из (2.5) и (2.6) вытекает

$$\mu(x\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1}) = \mu(x\underbrace{B \ldots B}_{l-1}),$$

$$\mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1} x) = \mu(\underbrace{B \ldots B}_{l-1} x),$$

откуда следует совпадение l-арных факторгрупп $< A/B_d, \mu >$ и $< A/B, \mu >$.

3) Так как конгруэнция ρ_B и полуинвариантная l-арная подгруппа $< B, \mu >$ определяют одну и ту же факторгруппу; аналогично конгруэнция ρ_{B_d} и полуинвариантная l-арная подгруппа $< B_d, \mu >$ определяют одну и ту же l-арную факторгруппу:

$$< A/\rho_B, \mu > = < A/B, \mu >,$$

$$< A/\rho_{B_d}, \mu > = < A/B_d, \mu >,$$

то, согласно 2),

$$< A/\rho_{B_d}, \mu > = < A/\rho_B, \mu >,$$

что означает совпадение конгруэнций ρ_{B_d} и ρ_B. □

Лемма 2.1. *Пусть* $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *существуют элементы* $d \in A$, $c_1, \ldots, c_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ *и* $c_1 \ldots c_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$. *Тогда для любого* $t \geq 1$ *существуют элементы* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что эквивалентны последовательности* $\underbrace{d \ \ldots \ d}_{t(n-1)}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$.

Доказательство. Из эквивалентности в $< A, \eta >$ последовательностей $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ и $c_1 \ldots c_{n-1}$ следует эквивалентность в $< A, \eta >$ последовательностей

$$\underbrace{d \ \ldots \ d}_{t(n-1)} \text{ и } \underbrace{c_1 \ldots c_{n-1} \ldots c_1 \ldots c_{n-1}}_{t},$$

а значит и последовательностей

$$\underbrace{d \ \ldots \ d}_{t(n-1)} \text{ и } c_1 \ldots c_{n-2}\eta(c_{n-1}\underbrace{c_1 \ldots c_{n-1} \ldots c_1 \ldots c_{n-1}}_{t-1}),$$

то есть последовательностей

$$\underbrace{d \ \ldots \ d}_{t(n-1)} \text{ и } b_1 \ldots b_{n-1},$$

где

$$b_1 = c_1, \ldots, b_{n-2} = c_{n-2} \in B,$$

$$b_{n-1} = \eta(c_{n-1}\underbrace{c_1 \ldots c_{n-1} \ldots c_1 \ldots c_{n-1}}_{t-1}) \in B. \qquad □$$

Покажем, что замена в теореме 2.1 последовательности $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ последовательностью $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ делает полуинвариантную в $< A, \mu >$ l-арную подгруппу $< B_d, \mu >$ n-полуинвариантной в $< A, \mu >$.

Теорема 2.2. *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – *l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; *существуют элементы* $d \in A$, $c_1, \ldots, c_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ *и* $c_1 \ldots c_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$ *в смысле Поста. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1 *и, кроме того, полуинвариантная в* $< A, \mu >$ *l-арная подгруппа* $< B, \mu >$ – *n-полуинвариантна в ней.*

Доказательство. По лемме 2.1 существуют элементы $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ такие, что эквивалентны последовательности

$$\underbrace{d \ \ldots \ d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \ldots d}_{l-1} \text{ и } b_1 \ldots b_{n-1}.$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.1 и справедливы утверждения 1) – 3) этой теоремы.

Если x – произвольный элемент из A, то, применяя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, получим

$$\mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{(i-1)(n-1)} x \underbrace{B_d \ldots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\eta(d\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \ldots \eta(d\underbrace{B \ldots B}_{n-1})}_{(i-1)(n-1)} x$$

$$\underbrace{\eta(d\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \ldots \eta(d\underbrace{B \ldots B}_{n-1})}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{d \ \ldots \ d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \ \ldots \ B}_{(i-1)(n-1)^2} x \underbrace{d \ \ldots \ d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \ \ldots \ B}_{(s+1-i)(n-1)^2}) =$$

$$= \eta(\underbrace{d \ \ldots \ d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \ldots B}_{n-1} x \underbrace{d \ \ldots \ d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d \ \ldots \ d}_{(i-1)(n-1)} B) \underbrace{B \ldots B}_{n-2} x \eta(\underbrace{d \ \ldots \ d}_{(s+1-i)(n-1)} B) \underbrace{B \ldots B}_{n-2}),$$

то есть

$$\mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{(i-1)(n-1)}\, x\, \underbrace{B_d \ldots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d \;\ldots\; d}_{(i-1)(n-1)} B)\, \underbrace{B \ldots B}_{n-2} x \eta(\underbrace{d \;\ldots\; d}_{(s+1-i)(n-1)} B)\, \underbrace{B \ldots B}_{n-2}).$$

Так как по лемме 2.1 каждая из последовательностей

$$\underbrace{d \;\ldots\; d}_{(i-1)(n-1)} \text{ и } \underbrace{d \;\ldots\; d}_{(s+1-i)(n-1)}$$

эквивалентны в $< A, \eta >$ некоторым последовательностям, составленным из элементов множества B, то последнее равенство принимает вид

$$\mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{(i-1)(n-1)}\, x\, \underbrace{B_d \ldots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}),$$

откуда и из полуинвариантности $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ следует

$$\mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{(i-1)(n-1)}\, x\, \underbrace{B_d \ldots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x) \quad (2.7)$$

для любого $i = 1, \ldots, s + 1$. Таким образом,

$$\mu(x \underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1}) = \mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{n-1}\, x\, \underbrace{B_d \ldots B_d}_{(s-1)(n-1)}) = \ldots$$

$$\ldots = \mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{(s-1)(n-1)}\, x\, \underbrace{B_d \ldots B_d}_{n-1}) = \mu(\underbrace{B_d \ldots B_d}_{l-1} x).$$

Следовательно, $< B_d, \mu >$ является n-полуинвариантной в $< A, \mu >$. □

***Лемма* 2.2**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$,

$$s \geq 1,\ l = s(n-1) + 1.$$

Тогда:

1) *если существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$, *то*

$$\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} B) = B; \quad (2.8)$$

2) *если существует элемент* $d \in A$ *такой, что верно* (2.8), *то существует последовательность* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *такая, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Так как последовательности $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ и $b_1 \ldots b_{n-1}$ эквивалентны в $< A, \eta >$, то

$$\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} b) = \eta(b_1 \ldots b_{n-1} b)$$

для любого $b \in B$, откуда и из условия $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ следует

$$\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} B) = \{\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} b) \mid b \in B\} =$$

$$= \{\eta(b_1 \ldots b_{n-1} b) \mid b \in B\} = B.$$

Следовательно, верно (2.8).

2) $\Rightarrow$ 1) Так как верно (2.8), то для любого $b \in B$ существует $c \in B$ такой, что

$$\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} b) = c.$$

А так как $b \in B$, $c \in B$, то существуют элементы $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ такие, что

$$\eta(b_1 \ldots b_{n-1} b) = c.$$

Из последних двух равенств следует

$$\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} b) = \eta(b_1 \ldots b_{n-1} b).$$

Следовательно, последовательности $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ и $b_1 \ldots b_{n-1}$ эквивалентны в $< A, \eta >$. □

Лемма 3.1 позволяет в формулировке теоремы 2.1 заменить условие *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$ равносильным ему условием *существует элемент* $d \in A$ *такой, что верно* (2.8). В этом случае формулировка теоремы 2.1 примет следующий вид.

***Теорема* 2.3.** *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – *l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; *существует элемент* $d \in A$ *такой, что* $\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} B) = B$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1.

***Замечание* 2.2**. Из леммы 2.2 при $s = 1$ следует, что условие *существуют элементы* $d \in A$, $c_1, \ldots, c_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{n-1}$ *и* $c_1 \ldots c_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$ равносильно условию *существует элемент* $d \in A$ *такой, что* $\eta(\underbrace{d \ldots d}_{n-1} B) = B$. Поэтому теорему 2.2 можно сформулировать в следующем виде.

***Теорема* 2.4**. *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – *l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; *существует элемент* $d \in A$ *такой, что* $\eta(\underbrace{d \ldots d}_{n-1} B) = B$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1 *и, кроме того, полуинвариантная в* $< A, \mu >$ *l-арная подгруппа* $< B, \mu >$ – *n-полуинвариантна в ней.*

3 Следствия

Согласно Посту [5], *v-ой n-адической степенью* элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ называется элемент этой же n-арной группы, обозначаемый символом $a^{[v]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[v]} = a, \text{ если } v = 0;$$

$$a^{[v]} = \eta(\underbrace{a \;\ldots\; a}_{v(n-1)+1}), \text{ если } v > 0;$$

$a^{[v]}$ – решение уравнения $\eta(x \underbrace{a \;\ldots\; a}_{-v(n-1)}) = a$, если $v < 0$.

***Замечание* 3.1.** В группе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством $a^{[v]} = a^{v+1}$ для любого целого ν. В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Напомним, что *конечным n-адическим порядком элемента a n*-арной группы < A, η > называется [1], [5] наименьшее целое положительное число m, для которого выполняется равенство $a^{[m]} = a$.

Пост доказал [5], что *если элемент a n-арной группы < A, η > имеет конечный n-адический порядок m, то $a^{[s]} = a$ тогда и только тогда, когда s кратно m*.

***Теорема* 3.1**. *Пусть* $s \ge 1$, $l = s(n-1)+1$, *< B, η > – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы < A, η >, < A, μ > – l-арная группа, производная от n-арной группы < A, η >; элемент $d \in A$ имеет n-адический порядок, делящий s. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Так как элемент $d \in A$ имеет n-адический порядок, делящий s, то $d^{[s]} = d$, откуда согласно определению n-адической степени, следует

$$\eta(\underbrace{d\ \dots\ d}_{s(n-1)+1}) = d,$$

что означает нейтральность в < A, η > последовательности

$$\underbrace{d\ \dots\ d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \dots d}_{l-1}.$$

Понятно, что эта последовательность будет нейтральной и в < B, η >. А так как в < B, η > существуют нейтральные последовательности, составленные из элементов множества B, и при этом все нейтральные последовательности любой n-арной группы эквивалентны в смысле Поста, то последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна некоторой последовательност $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$. Так как выполняются все условия теоремы 2.1, то справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1. □

Так как для идемпотента d n-арной группы выполняются условия теорем 2.2 и 2.4, то имеет место следующий результат.

***Теорема* 3.2**. *Пусть* $s \ge 1$, $l = s(n-1)+1$, *< B, η > – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы < A, η >, < A, μ > – l-арная группа, производная от n-арной группы < A, η >; d – идемпотент в < A, η >. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1, *и, кроме того, полуинвариантная в < A, μ > l-арная подгруппа < B, μ > – n-полуинвариантна в ней.*

Полагая в теоремах 2.1 и 2.2 $s = 1$, получим одно и то же

***Следствие* 3.1**. *Пусть < B, η > – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы < A, η >, существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста. Тогда*:

1) *смежный класс B_d n-арной факторгруппы < A/B, η > замкнут относительно n-арной операции η, а универсальная алгебра < B_d, η > является полуинвариантной n-арной подгруппой n-арной группы < A, η >;*

2) < A/B_d, η > = < A/B, η >;

3) $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Полагая в теоремах 3.1 и 3.2 $s = 1$, получим одно и то же

***Следствие* 3.2**. *Пусть < B, η > – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы < A, η >, d – идемпотент в < A, η >. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *следствия* 3.1.

***Замечание* 3.2.** Утверждения 1) и 2) следствия 3.2 доказаны в [4, предложение 7.6].

Полагая в теореме 2.1 $n = 2$, получим

***Следствие* 3.3**. *Пусть < B, η > – нормальная подгруппа группы A, < A, μ > – l-арная группа, производная от группы A; существует элемент $d \in A$ такой, что $d^{l-1} \in B$. Тогда*:

1) *смежный класс $B_d = dB = Bd$ факторгруппы A/B замкнут относительно l-арной операции μ, а универсальная алгебра < B_d, μ > является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы < A, μ >;*

2) *для полуинвариантных в < A, μ > l-арных подгрупп < B_d, μ > и < B, μ > l-арные факторгруппы < A / B_d, μ > и < A / B, μ > совпадают: < A / B_d, μ > = < A / B, μ >;*

3) *конгруэнции ρ_{B_d} и ρ_B l-арной группы < A, η >, определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами < B_d, μ > и < B, μ > совпадают*: $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Если элемент $d \in A$ имеет в группе A порядок, делящий $l-1$, то $d^{l-1} = e$, где e – единица группы A. Поэтому из следствия 3.3 вытекает

***Следствие* 3.4**. *Пусть < B, η > – нормальная подгруппа группы A, < A, μ > – l-арная группа, производная от группы A; элемент $d \in A$ имеет в группе A порядок, делящий $l-1$. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *следствия* 3.3.

Полагая в теореме 3.2 $n = 3$, получим

***Следствие* 3.5**. *Пусть $s \ge 1$, < B, η > – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы < A, η >, < A, μ > – (2s + 1)-арная группа, производная от тернарной группы < A, η >; d – идемпотент из A, $B_d = \eta(dBB)$. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1 *для $l = s+1$, и, кроме того, полуинвариантная в < A, μ > (2s + 1)-арная подгруппа < B, μ > – 3-полуинвариантна в ней.*

***Пример* 3.1**. В [4, теорема 1.20, предложение 5.9] установлено, что в тернарной группе отражений правильного n-угольника < $\mathbf{B}_n$, η >

все элементы являются идемпотентами и для всякого делителя k её порядка n существует точно $m = n/k$ полуинвариантных тернарных подгрупп

$$< H_1, \eta >, \ldots, < H_m, \eta >$$

порядка k. Тогда по следствию 3.5 для $(2s+1)$-арной группы $< \mathbf{B}_n, \mu >$, производной от тернарной группы $< \mathbf{B}_n, \eta >$, справедливы следующие утверждения:

1) *для любого* $i = \{1, \ldots, m\}$ *смежный класс* $(H_i)_d = \eta(dH_iH_i)$ *тернарной факторгруппы* $< \mathbf{B}_n / H_i, \eta >$ *замкнут относительно* $(2s+1)$-*арной операции* μ, *а универсальная алгебра* $< (H_i)_d, \mu >$ *является* 3-*полуинвариантной* $(2s+1)$-*арной подгруппой* $(2s+1)$-*арной группы* $< A, \mu >$;

2) $< \mathbf{B}_n/(H_i)_d, \mu > = < \mathbf{B}_n/H_i, \mu >$;

3) $\rho_{(H_i)_d} = \rho_{H_i}$.

В теоремах 2.1 и 2.2 доказано, что l-арная подгруппа $< B_d, \mu >$ полуинвариантна в $< A, \mu >$, а в теоремах 2.3 и 2.4 установлено, что она может быть даже n-полуинвариантной. Покажем, что l-арная подгруппа $< B_d, \mu >$ из теорем 2.1 – 2.2 не обязана быть инвариантной в $< A, \mu >$.

***Пример* 3.2**. Пусть $\mathbf{T}_k$ – множество всех нечётных подстановок степени k. $< \mathbf{T}_k, \mu >$ – полиадическая группа нечётной арности $2s+1$, производная от тернарной группы $< \mathbf{T}_k, \eta >$ с тернарной операцией $\eta(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$.

Рассмотрим одноэлементное множество $B = \{b\}$, где b – любая транспозиция из $\mathbf{T}_k$. Ясно, что $< B, \eta >$ – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $< \mathbf{T}_k, \eta >$.

Если d – ещё одна транспозиция из $\mathbf{T}_k$, то

$$B_d = \eta(dBB) = \{dbb\} = \{d\}.$$

Так как d – идемпотент в $< \mathbf{T}_k, \mu >$, то по теореме 3.2 $(2s+1)$-арная подгруппа $< B_d = \{d\}, \mu >$ является 3-полуинвариантной в $(2s+1)$-арной группе $< \mathbf{T}_k, \mu >$. Это можно доказать и без использования теоремы 3.2, проведя соответствующие вычисления.

Если теперь $d = (i\,j)$ и $b = (i\,k)$ – различные транспозиции из $\mathbf{T}_k$, то, полагая $B = \{(i\,k)\}$, получим $B_d = \{(i\,j)\}$. Так как

$$\mu((i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s}) = \{(i\,k)\underbrace{(i\,j)\ldots(i\,j)}_{2s}\} = \{(i\,k)\},$$

$$\mu(B_d(i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s-1}) = \eta(B_d(i\,k)B_d) =$$

$$= \{(i\,j)(i\,k)(i\,j)\} = \{(j\,k)\},$$

то

$$\mu((i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s}) \neq \mu(B_d(i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s-1}).$$

Следовательно, $(2s+1)$-арная подгруппа $< B_d = \{d\}, \mu >$, где $B = \{(i\,k)\}$, $d = (i\,j)$, $j \neq k$, не является инвариантной в $(2s+1)$-арной группе $< \mathbf{T}_k, \mu >$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

2. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

3. *Гальмак*, *А.М.* Инвариантные подгруппы n-арных групп / А.М. Гальмак // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское. – 1990. – Вып. 5. – С. 91–94.

4. *Гальмак*, *А.М.* Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

5. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 05.03.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор