МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_51
EDN: PXPTVX

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЧАСТИЧНО *p*-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

FINITE GROUPS WITH PARTIALLY *p*-SUBNORMAL SCHMIDT SUBGROUPS

I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; G называется группой Шмидта, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна. Подгруппа A группы G называется $\mathfrak{U}p$ -нормальной в G, если каждый главный *pd*-фактор G между A_G и A^G является циклическим. Мы говорим, что подгруппа A группы G частично *p*-субнормальна в G, если $A = \langle L, T\rangle$ для некоторых субнормальной подгруппы L и $\mathfrak{U}p$ -нормальной подгруппы T группы G. В данной статье мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G частично p-субнормальна в G, то ее производная подгруппа G' p-нильпотентна.*

Ключевые слова: *конечная группа*, *группа Шмидта*, *p-нильпотентная группа*, $\mathfrak{U}p$ *-нормальная подгруппа*, *частично p-субнормальная подгруппа*.

Для цитирования: *Дергачева*, *И.М.* Конечные группы с частично *p*-субнормальными подгруппами Шмидта / И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_51. – EDN: PXPTVX

Abstract. Throughout the paper, all groups are finite and G always denotes a finite group; G is called a Schmidt group if G is not nilpotent, but every proper subgroup of G is nilpotent. A subgroup A of G is called $\mathfrak{U}p$ -normal in G if every principal *pd*-factor of G between A_G and A^G is cyclic. We say that a subgroup A of G is partially *p*-subnormal in G if $A = \langle L, T\rangle$ for some subnormal subgroup L and $\mathfrak{U}p$ -normal subgroup T of G. In this paper, we prove the following theorem.

Theorem. *If every Schmidt subgroup of a group G is partially p-subnormal in G, then the derived subgroup G' of G is p-nilpotent.*

Keywords: *finite group*, *Schmidt group*, *p-nilpotent group*, $\mathfrak{U}p$ *-normal subgroup*, *partially p-subnormal subgroup*.

For citation: *Dergacheva*, *I.M.* Finite groups with partially *p*-subnormal Schmidt subgroups / I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_51 (in Russian). – EDN: PXPTVX

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих число n, и $\pi(G) = \pi(|G|)$. В дальнейшем, p, q – простые числа. Группа G называется: *πd-группой*, если $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$; *pd-группой*, если $p \in \pi(G)$.

Подгруппа A группы G называется *модулярной* в G, если A – модулярный элемент (в смысле Куроша [1]) решетки всех подгрупп группы G, то есть, выполняются следующие условия:

(i) $\langle X, A \cap Z\rangle = \langle X, A\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$ и

(ii) $\langle A, Y \cap Z\rangle = \langle A, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $A \leq Z$.

Напомним, что подгруппа A группы G называется [2]:

(i) $\mathfrak{U}p$ *-нормальной в* G, если каждый главный *pd*-фактор G между A_G и A^G является циклическим;

(ii) $\mathfrak{U}$ *-нормальной в* G, если каждый главный фактор G между A_G и A^G является циклическим.

Мы говорим, что подгруппа A группы G *частично p-субнормальна* в G, если $A = \langle L, T\rangle$ для некоторых субнормальной подгруппы L и $\mathfrak{U}p$ -нормальной подгруппы T группы G.

Группа G называется группой Шмидта, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна.

В работе [3] В.Н. Семенчук доказал, что если каждая подгруппа Шмидта группы G

субнормальна в G, то фактор группа $G/F(G)$ является нильпотентной. Это интересное наблюдение послужило мотивировкой для многих других исследований, связанных с изучением влияния подгрупп Шмидта на строение основной группы и, в частности, с изучением условий, при которых производная подгруппа группы нильпотентна или p-нильпотентна.

В этой связи В.С. Монахов и В.Н. Княгина доказали [4], что если каждая подгруппа Шмидта группы G субномальна в G, то ее производная подгруппа нильпотентна, а в работе [5] И.В. Близнец и В.М. Селькин установили, что производная подгруппа G' группы G нильпотентна и в случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G. Развивая эти результаты, В.М. Селькин, Н.С. Косенок и В.С. Закревская доказали в работе [6], что если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа группы G является p-нильпотентной.

В данной работе, обобщая все упомянутые выше результаты, мы докажем следующий результат в данном направлении.

***Теорема* 0.1.** *Если каждая подгруппа Шмидта группы G частично p-субнормальна в G, то производная подгруппа G′ группы G является p-нильпотентной.*

***Следствие* 0.2** (В.Н. Семенчук [3]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то $G/F(G)$ нильпотентна.*

***Следствие* 0.3** (В.С. Монахов, В.Н. Княгина [4]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то производная подгруппа G′ группы G является нильпотентной.*

***Следствие* 0.4** (Дж. Хуанг, Б. Ху, А.Н. Скиба [7]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо $\mathfrak{U}$-нормальна, либо субнормальна в G, то производная подгруппа G′ группы G является нильпотентной.*

***Следствие* 0.5** (В.М. Селькин, Н.С. Косенок, В.С. Закревская [6]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа G′ группы G является p-нильпотентной.*

Ввиду [1, теорема 5.2.5], каждая модулярная подгруппа является $\mathfrak{U}$-нормальной в группе. Таким образом, из теоремы 0.1 вытекает также следующий известный результат.

***Следствие* 0.6** (И.В. Близнец, В.М. Селькин [5]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то производная подгруппа G′ группы G нильпотентна.*

1 Доказательство основного результата

В доказательстве теоремы 0.1 мы используем следующие леммы.

***Лемма* 1.1** (см. предложение 1.8 и лемму 3.3 в [2]). *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы в G, где N является нормальной и A является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G. Тогда*:

(1) *AN/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N.*

(2) *Если E/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N, то E является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G.*

(3) *$A \cap E$ является $\mathfrak{U}p$-нормальной в E.*

(4) *Если E является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G, то $\langle A, E\rangle$ является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G.*

***Лемма* 1.2** [10, глава A, леммы 14.1, 14.2, 14.3 и теорема 14.4]. *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы в G, где N нормальна и A субнормальна в G. Тогда*:

(1) *AN/N является субнормальной в G/N.*

(2) *Если $A \le E$, то A субнормальна в E.*

(3) *Если E/N субнормальна в G/N, то E субнормальна в G.*

(4) *Если E субнормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ является субнормальной в G.*

***Лемма* 1.3** (см. [8, III, теорема 5.2] или [9, VI, теорема 24.2]). *Если G является группой Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ – силовская p-подгруппа группы G и $Q = \langle x\rangle$ является циклической силовской q-подгруппой в G, $p \ne q$. Кроме того, $\langle x^q\rangle \le \Phi(G)$ и $Q^G = G$.*

***Лемма* 1.4.** *Если A – субнормальная подгруппа в G, то $O_\pi(A) \le O_\pi(G)$.*

Доказательство. По условию существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_{t-1} \le A_t = G$$

такая, что A_i является нормальной в A_{i+1} для всех $i = 1, \ldots, t-1$. Тогда по индукции имеет место

$$O_\pi(A) \le O_\pi(A_{t-1}).$$

С другой стороны, $O_\pi(A_{t-1})$ характеристична в A_{t-1} и поэтому нормальна в $A_t = G$. Следовательно, $O_\pi(A_{t-}) \le O_\pi(G)$. Таким образом,

$$O_\pi(A) \le O_\pi(G). \qquad \square$$

***Лемма* 1.5.** *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы в G, где N нормальна и A частично p-субнормальна в G. Тогда*:

(1) *AN/N является частично p-субнормальной в G/N.*

(2) *Если $A \le E$, то A частично p-субнормальна в E.*

(3) *Если E/N частично p-субнормальна в G/N, то E частично p-субнормальна в G.*

(4) *Если E частично p-субнормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ является частично p-субнормальной в G.*

Доказательство. Пусть $A = \langle L, T\rangle$, где L – субнормальная подгруппа и T является $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппой в G.

(1) Имеет место $AN/N = \langle LN/N, TN/N\rangle$, где LN/N субнормальна в G/N согласно лемме 1.2 (1) и TN/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N по лемме 1.1 (1). Следовательно, AN/N частично p-субнормальна в G/N.

(2) Утверждение следует из леммы 1.2 (2) и леммы 1.1 (3).

(3) Пусть $E/N = \langle V/N, W/N\rangle$, где V/N субнормальна в G/N и W/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N. Тогда $E = \langle V, W\rangle$, где V субнормальна в G и W является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G по лемме 1.1(2), поэтому E частично p-субнормальна в G.

(4) Пусть $E = \langle V, W\rangle$, где V является субнормальной и W является $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппой в G. Тогда

$$\langle A, E\rangle = \langle\langle L, T\rangle, \langle V, W\rangle\rangle = \langle\langle L, V\rangle, \langle T, W\rangle\rangle,$$

где $\langle L, V\rangle$ является субнормальной в G согласно 1.2(4) и $\langle T, W\rangle$ является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G по лемме 1.1 (4). Следовательно, $\langle A, E\rangle$ частично p-субнормальна в G. □

Доказательство теоремы 0.1. Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка. Тогда $G' \nleq O_{p',p}(G)$.

(1) *Если E – собственная подгруппа в G, то производная подгруппа E' группы E p-нильпотентна.*

Предположим, что подгруппа E' не является p-нильпотентной. Тогда E не является нильпотентной группой и поэтому в E имеется подгруппа Шмидта. Более того, ввиду условия теоремы, каждая подгруппа Шмидта H группы E частично p-субнормальна в G и поэтому H частично p-субнормальна в E ввиду леммы 1.5 (2). Таким образом, условие теоремы выполнено для E и поэтому производная подгруппа E' группы G p-нильпотентна ввиду выбора группы G.

(2) *Если N – минимальная нормальная подгруппа в G, то производная подгруппа $(G/N)'$ группы G/N p-нильпотентна.*

Если G/N нильпотентна, то это очевидно. Теперь предположим, что группа G/N не является нильпотентной, и пусть E/N – произвольная подгруппа Шмидта в G/N. Пусть H – минимальное добавление к N в E. Тогда

$$H/(H\cap N) \simeq HN/N = E/N$$

– группа Шмидта и $H\cap N \le \Phi(H)$. Пусть $\Phi = \Phi(H)$ и A – подгруппа Шмидта в H.

Из леммы 1.3 вытекает, что

$$(H/(H\cap N))/\Phi(H/(H\cap N)) =$$
$$= (H/(H\cap N))/(\Phi/(H\cap N)) \simeq H/\Phi = R \rtimes Q,$$

где R – силовская r-подгруппа, Q – силовская q-подгруппа в H/Φ и $|Q| = q$ для некоторых простых чисел $r \ne q$. Отсюда, снова по лемме 1.3, следует, что $A = A_r \rtimes A_q$, где $A = (A_q)^A$. Тогда $A_q \nleq \Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q-подгруппой в H/Φ, и поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi/\Phi = H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H = H$, поэтому

$$E = HN = (A_q)^H N.$$

Согласно лемме 1.5(4), $(A_q)^H = A^H$ является частично p-субнормальной подгруппой в G и, следовательно,

$$E/N = (A_q)^H N/N$$

частично p-субнормальна в G/N по лемме 1.5(1). Следовательно, гипотеза верна для G/N, поэтому выбор группы G подразумевает, что мы имеем (2).

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $O_{p'}(G) \ne 1$ и пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $O_{p'}(G)$. Тогда

$$O_{p'}(G)/R = O_{p'}(G/R)$$

и поэтому

$$(G/R)/O_{p'}(G/R) =$$
$$= (G/N)/(O_{p'}(G)/R) \simeq G/O_{p'}(G).$$

Пусть $R \le O_{p'}(G) \le O$, где

$$O/O_{p'}(G) = O_p(O_{p'}(G)).$$

Тогда $O = O_{p',p}(G)$ и $O_{p',p}(G)/R \le O_{p',p}(G/R)$.

Пусть теперь $R \le L \le T$, где

$$L/R = O_{p'}(G/R) = O_{p'}(G)/R$$

и

$$T/L \simeq (T/N)/(L/R) = O_p((G/R)/O_{p'}(G/R)) =$$
$$= O_p((G/R)/(O/O_{p'}(G))).$$

Таким образом, $T/R = O_{p',p}(G/R)$. Тогда T/L – p-группа и L – p'-группа, поэтому T p-нильпотентна и это влечет вложения $T \le O \le T$. Следовательно, $O = T$.

Из утверждения (2) вытекает, что

$$(G/R)' = G'R/R \le O_{p',p}(G/R) = O_{p',p}(G)/R$$

и поэтому $G' \le O_{p',p}(G)$, т. е. G' p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3).

(4) *G p-разрешима.*

Из утверждений (1) и (2) вытекает, что каждая собственная подгруппа и каждая фактор группа $G/R \ne G/1$ являются p-разрешимыми группами. Таким образом, для доказательства утверждения (4) достаточно лишь показать, что G не является неабелевой простой группой.

Предположим, что G – неабелева простая группа. Тогда G не является нильпотентной группой. Пусть H – подгруппа Шмидта в G. Тогда $H < G$ и H является частично p-субнормальной в G подгруппой по условию. Более того, $G \simeq G/1 = H^G/1$ – единственный главный фактор группы G и такой фактор не является p'-группой ввиду утверждения (3). Следовательно, G является группой простого порядка, что противоречит выбору группы G. Это противоречие завершает доказательство утверждения (4).

(5) $G = R \rtimes M$, *где*

$$R = C_G(R) = O_p(G) = O_{p',p}(G)$$

– единственная минимальная нормальная подгруппа в G и M – максимальная подгруппа в G с $M_G = 1$.

Пусть R – произвольная минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда, ввиду утверждений (2) и (4), производная подгруппа

$$(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$$

группы G/R p-нильпотентна и R является либо p'-группой, либо p-группой. Но первый случай невозможен ввиду утверждения (3). Таким образом, R является p-группой. Выбор группы G подразумевает, что $R \le G'$, так как в противном случае $G' \simeq G'/1 = G'/(G' \cap R)$ p-нильпотентна.

Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \ne R$. Тогда $G'/(G' \cap N)$ p-нильпотентна, поэтому группа

$$G' \simeq G'/1 = G'/(R \cap N) =$$
$$= G'/((G' \cap R) \cap (G' \cap N))$$

p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G. Поэтому R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G, $R \le G'$ и G'/R p-нильпотентна. Если $R \le \Phi(G)$, то G' p-нильпотентна по [9, I, теорема 4.2]{26}.Таким образом, $R \nleq \Phi(G)$.

Пусть теперь M – такая максимальная в G подгруппа, что $G = RM$. Поскольку $R \le O_p(G)$, R – абелева группа и поэтому $R \cap M = 1$ нормальна в G. Тогда $M_G = 1$, поскольку R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Более того, $G = O_p(G)M$, где $O_p(G) \le C_G(R)$ ввиду [10, глава A, теорема 10.6 (b)], что влечет

$$C_G(R) = C_G(R) \cap O_p(G)M = O_p(G)(C_G(R) \cap M),$$

где $C_G(R) \cap M$ – нормальная в G подгруппа. Но $M_G = 1$ и поэтому $C_G(R) \cap M = 1$. Следовательно, $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G) = O_{p',p}(G)$ поскольку $O_{p'}(G) = 1$ согласно утверждению (3).

(6) $|R| > p$.

Действительно, если $|R| = p$, то поскольку

$$G/C_G(R) = G/R = G/O_{p',p}(G),$$

где $G/C_G(R) \le Aut(R)$, то G/R – циклическая группа и поэтому $G' = R$ p-нильпотентна. Полученное противоречие показывает, что $|R| > p$.

(7) $M \simeq G/R$ *нильпотентна.*

Предположим, что M не является нильпотентной группой и пусть H – подгруппа Шмидта в M. Тогда $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппы B группы G.

Предположим, что $A \ne 1$. Поскольку A p-разрешима по утверждению (4), то либо $O_{p'}(A) \ne 1$, либо $O_p(A) \ne 1$. Но $O_{p'}(A) \le O_{p'}(G)$ по лемме 1.4 и поэтому в первом случае мы имеем $O_{p'}(G) \ne 1$, что невозможно ввиду утверждения (3). Значит, $O_p(A) \ne 1$ и $O_p(A) \le O_p(G) = R$ по лемме 1.4 и утверждению (5), что влечет $R \cap M \ne 1$. Но это противоречит утвеждению (5), поэтому утверждение (7) выполнено для G.

(8) *R является силовской p-подгруппой G.*

Предположим, что R не является силовской p-подгруппой G. Тогда p делит

$$|M| = |G/R| = G/C_G(R)$$

ввиду утверждения (5), что противоречит [9, II, лемма 3.9]. Следовательно, мы имеем (8).

(9) *Для любой собственной субнормальной подгруппы E группы G имеет место* $E' \le R$.

Действительно, ввиду утверждения (1) мы имеем $E' \le O_{p',p}(E)$. С другой стороны,

$$O_{p'}(E) \le O_{p'}(G)$$

по лемме 1.4, где $O_{p'}(G) = 1$ ввиду утверждения (3). Значит, $O_{p'}(E) = 1$ и поэтому

$$O_{p',p}(E) = O_p(E) \le O_p(G) = R$$

ввиду утверждения (5) и леммы 1.4. Следовательно, $E' \le R$.

(10) *M – группа Миллера – Морено (т. е. группа M не является абелевой, но каждая собственная подгруппа в M является абелевой). Более того, M является q-группой для некоторого простого числа* $q \ne p$.

Теперь V – произвольная максимальная подгруппа в M. Тогда V нормальна в M ввиду утверждения (7) и поэтому $E = R \rtimes V$ – собственная субнормальная подгруппа группы G. Следовательно, $E' \le R$ ввиду утверждения (9). Но тогда, ввиду утверждения (5),

$$V \simeq V/1 = V/(V \cap R) \simeq RV/R$$

– абелева группа. Таким образом, каждая максимальная подгруппа группы M является абелевой. Кроме того, $R \ne G'$ ввиду выбора группы G и поэтому $M \simeq G/R$ – неабелева нильпотентная группа. Таким образом, M – группа Миллера –

Морено и M является q-группой для некоторого простого числа $q \neq p$.

Заключительное противоречие. Поскольку, ввиду утверждения (10), M является q-группой Миллера – Морено для некоторого простого числа $q \neq p$, $\Phi(M) \neq 1$ и поэтому для некоторой подгруппы C_q порядка q имеет место

$$C_q \leq Z(M) \cap \Phi(M).$$

Пусть теперь $V = RC_q$. Тогда

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n,$$

где R_i – минимальная нормальная подгруппа в V для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ по теореме Машке. С другой стороны, группа V не является нильпотентной, так как в противном случае $V = R \times C_q$ и поэтому $C_q \leq C_G(R)$, что противоречит утверждению (5).

Следовательно, для некоторого i подгруппа $F = R_i \rtimes C_q$ не является q-замкнутой и поэтому группа F содержит подгруппу Шмидта H вида $H = H_p \rtimes C_q$. Согласно условию, $H = \langle L, T \rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы L и некоторой $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппы T группы G.

Сначала предположим, что H субнормальна в G. Тогда в V имеется такая собственная подгруппа W, что $H \leq W$ и W нормальна в V. Поскольку $C_q \leq W < V$, то для некоторого k имеем $R_k \nleq W$. Тогда $R_k \cap W = 1$, следовательно, $R_k \leq C_V(W)$, поэтому $R_k \leq N_G(C_q) = M$, где M максимальна в G, противоречие.

Следовательно, H не является субнормальной в G. Значит, $L \neq H$ и поэтому $T \neq 1$. Но тогда $R \leq T^G$ ввиду утвеждения (5). Кроме того, $T_G = 1$, поскольку $H_G = 1$. Таким образом, R является циклической группой, что противоречит утверждению (6).

Следовательно, $n = 1$, поэтому $R = R_1$ и C_q действует неприводимо на R. Но $C_q \leq \Phi(M)$, поэтому каждая собственная подгруппа группы M действует неприводимо на R, из чего следует, что каждая максимальная подгруппа из M является циклической ввиду [9, I, лемма 4.1]. Следовательно, $q = 2$ ввиду [11, гл. 5, теорема 4.4] и поэтому $|R| = p$, что противоречит утверждению (6). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt*, *R.* Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de ruyter, 1994.

2. *Hu*, *B.* Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

3. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп, в книге: Подгрупповое строение конечных групп / В.Н. Семенчук. – Минск: Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.

4. *Монахов*, *В.С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

5. *Близнец*, *И.В.* Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.

6. *Селькин*, *В.М.* Конечные группы с ограничениями на подгруппы Шмидта / В.М. Селькин, Н.С. Косенок, В.С. Закревская // Проблемы физики, математики и техники. – 2002. – № 1 (50). – С. 84–88.

7. *Хуанг*, *Дж.* Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Дж. Хуанг, Б. Ху, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 1, № 62. – С. 201–220.

8. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1967.

9. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

10. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

11. *Gorenstein*, *D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York – Evanston – London: Harper & Row Publishers, 1968.

Поступила в редакцию 04.03.2025.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент