

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ЯВНЫЙ ВИД ЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЧЕБЫШЁВА

А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

UNIQUENESS AND EXPLICIT FORM OF HERMITE – CHEBYSHEV LINEAR APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Опираясь на известные результаты о совместных аппроксимациях Эрмита – Паде системы тригонометрических рядов, найдены достаточные условия, при которых линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва существуют и определяются единственным образом. При выполнении найденных условий получены формулы, описывающие явный вид числителей и знаменателя линейных аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций, которые являются суммами рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого и второго рода.

Ключевые слова: ряды Фурье, ряды по многочленам Чебышёва, аппроксимации Эрмита – Паде, аппроксимации Паде – Чебышёва, линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва.

Для цитирования: Старовойтов, А.П. Единственность и явный вид линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 102–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_102. – EDN: HUFLRZ

Abstract. Relying on the known results on joint Hermite – Padé approximations of a system of trigonometric series, sufficient conditions are found under which linear Hermite – Chebyshev approximations exist and are determined uniquely. When the found conditions are met, the formulas are obtained that describe the explicit form of the numerators and denominator of linear Hermite – Padé approximations for a system of functions that are sums of Fourier series in Chebyshev polynomials of the first and second kind.

Keywords: Fourier series, series in Chebyshev polynomials, Hermite – Padé approximations, Padé – Chebyshev approximations, linear Hermite – Chebyshev approximations.

For citation: Starovoitov, A.P. Uniqueness and explicit form of Hermite – Chebyshev linear approximations / A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 102–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_102 (in Russian). – EDN: HUFLRZ

Введение

Пусть система $\mathbf{f}^{\text{ch1}} = (f_1^{\text{ch1}}, \dots, f_k^{\text{ch1}})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ первого рода

$$f_j^{\text{ch1}}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_l(x), j = 1, \dots, k, \quad (0.1)$$

с действительными коэффициентами, которые сходятся при всех $x \in [-1, 1]$. Обозначим чере $\mathbb{Z}_+^k$ множество всех k -мерных мультииндексов $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел. Порядком мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ назовём сумму $m := m_1 + \dots + m_k$.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующий аналог задачи Эрмита – Паде для $\mathbf{f}^{\text{ch1}}$ [1, гл. 4, §1]:

© Старовойтов А.П., Кругликов И.В., 2025

Задача A^{ch1} . Для системы функций $\mathbf{f}^{\text{ch1}}$ найти тождественно не равный нулю многочлен

$$Q_m^{\text{ch1}}(x) = Q_{n, \vec{m}}^{\text{ch1}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch1}}) = \sum_{p=0}^m u_p T_p(x)$$

и многочлены

$$P_j^{\text{ch1}}(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^{\text{ch1}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch1}}) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x),$$

$$n_j = n + m - m_j,$$

чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^{\text{ch1}}(x) f_j^{\text{ch1}}(x) - P_j^{\text{ch1}}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x). \quad (0.2)$$

Определение 0.1. Если пара $(Q_m^{\text{ch1}}, P^{\text{ch1}})$, где $P^{\text{ch1}} = (P_1^{\text{ch1}}, \dots, P_k^{\text{ch1}})$ является решением задачи A^{ch1} , то рациональные дроби

$$\pi_j^{\text{ch1}}(x) = \pi_j^{\text{ch1}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch1}}) = \frac{P_j^{\text{ch1}}(x)}{Q_m^{\text{ch1}}(x)},$$

$$j = 1, \dots, k,$$

будем называть линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 1-го рода для мультииндекса $(n, \bar{m})$ и системы $\mathbf{f}^{ch1}$.

Определение 0.2. Нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 1-го рода для мультииндекса $(n, \bar{m})$ и системы $\mathbf{f}^{ch1}$ назовём рациональные дроби

$$\hat{\pi}_j^{ch1}(x) = \hat{\pi}_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}) = \hat{\pi}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}) = \frac{\hat{P}_j^{ch1}(x)}{\hat{Q}_m^{ch1}(x)},$$

где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch1}(x) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}), \quad \hat{P}_j^{ch1}(x) = \hat{P}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1})$$

$(n_j = n + m - m_j)$, степени которых не превышают соответственно m и n_j , подобраны так, что

$$f_j^{ch1}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch1}(x)}{\hat{Q}_m^{ch1}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l^j T_l(x), j = 1, \dots, k.$$

В том случае, когда $k = 1$, т. е. система $\mathbf{f}^{ch1}$ состоит из одной функции f_1^{ch1} , основные свойства линейных и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва (в этом случае их называют линейными и нелинейными аппроксимациями Паде – Чебышёва; подробнее о терминологии см. [2]) описаны достаточно подробно (прежде всего см. [2]–[4] и приведённую там литературу, а также [5]–[13]). Например, хорошо известно, что линейная аппроксимация Паде – Чебышёва всегда существует, но в отличие от классической аппроксимации Паде степенного ряда, вообще говоря, не единственна. Нелинейная аппроксимация Паде – Чебышёва не всегда существует, но в случае существования всегда единственна. Имеются примеры сходящихся рядов f_1^{ch1} (см. [14], [15]), для которых нелинейные аппроксимации Паде – Чебышёва существуют и единственны, но при каждом n не являются линейными аппроксимациями Паде – Чебышёва. Аналогично, при любом $k \geq 1$ имеются примеры систем функций $\mathbf{f}^{ch1}$ (см. [9]), для которых существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва, не являющиеся линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва.

Рассмотрим теперь другой тип аппроксимаций Эрмита – Чебышёва. Предположим, что система $\mathbf{f}^{ch2} = (f_1^{ch2}, \dots, f_k^{ch2})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)$ второго

$$рода$$

$$f_j^{ch2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j U_l(x), j = 1, \dots, k, \quad (0.3)$$

с действительными коэффициентами, которые сходятся при всех $x \in [-1, 1]$. Если вместо рядов (0.1) взять ряды (0.3), то конструкции, аналогичные предыдущим, приводят к линейным и

нелинейным аппроксимациям Эрмита – Чебышёва 2-го рода. Задача Эрмита – Паде для рядов (0.3) имеет вид:

Задача $\mathbf{A}^{ch2}$. Найти алгебраический многочлен $Q_m^{ch2}(x) = Q_{n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2})$, $\deg Q_m^{ch2} \leq m$, тождественно не равный нулю, и алгебраические многочлены $P_j^{ch2}(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2})$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^{ch2}(x) f_j^{ch2}(x) - P_j^{ch2}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{b}_l^j U_l(x). \quad (0.4)$$

Определение 0.3. Если пара (Q_m^{ch2}, P_j^{ch2}) , где $P_j^{ch2} = (P_1^{ch2}, \dots, P_k^{ch2})$ является решением задачи $\mathbf{A}^{ch2}$, то рациональные дроби

$$\pi_j^{ch2}(x) = \pi_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) = \pi_{n_j, n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) = \frac{P_j^{ch2}(x)}{Q_m^{ch2}(x)},$$

$$j = 1, \dots, k,$$

будем называть линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 2-го рода для мультииндекса $(n, \bar{m})$ и системы $\mathbf{f}^{ch2}$.

Определение 0.4. Нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 2-го рода для мультииндекса $(n, \bar{m})$ и системы $\mathbf{f}^{ch2}$ назовём алгебраические рациональные дроби

$$\hat{\pi}_j^{ch2}(x) = \hat{\pi}_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) = \hat{\pi}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) = \frac{\hat{P}_j^{ch2}(x)}{\hat{Q}_m^{ch2}(x)},$$

где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch2}(x) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}), \quad \hat{P}_j^{ch2}(x) = \hat{P}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2})$$

$(n_j = n + m - m_j)$, степени которых не превышают соответственно m и n_j , подобраны так, что

$$f_j^{ch2}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch2}(x)}{\hat{Q}_m^{ch2}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{b}_l^j U_l(x), j = 1, \dots, k.$$

В дальнейшем будем рассматривать только линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва, а основной темой исследований данной работы является нахождение условий на коэффициенты рядов (0.1) и (0.3), при которых линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва 1-го и 2-го определяются единственным образом. В случае единственности будем искать явный вид этих аппроксимаций. Доказательство основных теорем работы существенно опирается на установленную в [10], [11] связь между линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва и тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде системы функций, являющихся суммами соответствующих сходящихся тригонометрических рядов. Отметим, что существование линейных аппроксимаций

$$\pi_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}), \quad \pi_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) \quad (j = 1, \dots, k)$$

при $k > 1$ доказывается также, как и в случае $k = 1$ (см. [5], [8]).

1 Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде

В этом разделе опишем ряд новых свойств тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Паде. Эти свойства будут получены нами в виде следствий результатов работ [10], [11].

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), j = 1, \dots, k, (1.1)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (1.1) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый ряд определяет функцию f_j^t , заданную на всей действительной прямой. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и для системы $\mathbf{f}^t$ рассмотрим тригонометрический аналог задачи Эрмита – Паде:

Задача $\mathbf{A}^t$. Для тригонометрических рядов (1.1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x) = Q_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg Q_m^t \leq m$ и такие тригонометрические многочлены

$$P_j^t(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t), \deg P_j^t \leq n_j, n_j = n + m - m_j, \text{ чтобы}$$

$$Q_m^t(x)f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), j = 1, \dots, k. (1.2)$$

Условиями (1.2) многочлены $Q_m^t, P_1^t, \dots, P_k^t$ находятся с точностью до числового множителя. Однако, их неединственность может быть и более существенной (см. [10], [11]).

Определение 1.1. Будем говорить, что задача $\mathbf{A}^t$ имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т. е. для любых двух решений $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t)$ и $(\bar{\bar{Q}}_m^t, \bar{\bar{P}}^t)$ задачи $\mathbf{A}^t$ существует число λ , что

$$(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) = (\lambda \bar{\bar{Q}}_m^t, \lambda \bar{\bar{P}}^t).$$

Здесь $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t)$, $\lambda P^t := (\lambda P_1^t, \dots, \lambda P_k^t)$.

Определение 1.2. Если пара (Q_m^t, P^t) является решением задачи $\mathbf{A}^t$, то тригонометрические рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_j^t(x; \mathbf{f}^t) = \pi_{j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, j = 1, \dots, k$$

будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы $\mathbf{f}^t$.

В отличие от аппроксимаций Паде степенного ряда тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде определяются, вообще говоря, не

однозначно, в то время как задача $\mathbf{A}^t$ всегда имеет решение [10], [11]. В том случае, когда задача $\mathbf{A}^t$ имеет единственное решение, тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде $\{\pi_j^t(x; \mathbf{f}^t)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. При $k = 1$ достаточное условие единственности решения задачи $\mathbf{A}^t$ получено в [5]. Для произвольного $k \geq 1$ необходимое и достаточное условие единственности решения задачи $\mathbf{A}^t$ установлено в [10], [11]. Для его формулировки введём обозначения.

Запишем ряды (1.1) и многочлены $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, (1.3)$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx}, P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}, (1.4)$$

где

$$u_p, v_p^j \in \mathbb{C}, c_0^j = \frac{a_0^j}{2}, c_l^j = \frac{a_l^j - ib_l^j}{2}, c_{-l}^j = \bar{c}_l^j, j = 1, \dots, k; l = 1, \dots$$

Тогда равенства (1.2) примут вид

$$Q_m^t(x)f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} (\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx}), j = 1, \dots, k.$$

Рассмотрим матрицы и определители, элементами которых являются коэффициенты тригонометрических рядов $f_j^t(x)$ системы $\mathbf{f}^t$. Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j := (c_{l+m}^j, c_{l+m-1}^j, \dots, c_{l+1}^j, c_l^j, c_{l-1}^j, \dots, c_{l-m+1}^j, c_{l-m}^j),$$

$j = 1, \dots, k$, а действительному числу x – матрицу-строку

$$E_m^t(x) := (e^{-imx} e^{-i(m-1)x} \dots e^{-ix} 1 e^{ix} \dots e^{i(m-1)x} e^{imx}).$$

Для заданного $j \in \{1, \dots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n_j+m_j}^j & c_{n_j+m_j-1}^j & \dots & c_{n_j-m_j}^j \\ c_{n_j+m_j-1}^j & c_{n_j+m_j-2}^j & \dots & c_{n_j-m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_j+1}^j & c_{n_j}^j & \dots & c_{n_j-m_j+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{-n_j-1}^j \\ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \cdots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \cdots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \cdots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \bar{m}; x) :=$$

$$:= \det \begin{bmatrix} F_+^k & \cdots & F_+^2 & F_+^1 & E_m^t(x) & F_-^1 & F_-^2 & \cdots & F_-^k \end{bmatrix}^T :=$$

$$:= \det \begin{bmatrix} F_+^k \\ \vdots \\ F_+^1 \\ E_m^t(x) \\ F_-^1 \\ \vdots \\ F_-^k \end{bmatrix}.$$

В случае, если $m_j = 0$, считаем, что определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блок-матриц $F_{\pm}^j$. Обозначим через $H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t)$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \bar{m}; x)$ после удаления в нём $(m+1)$ -ой строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n, \bar{m}; x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку $\mathbb{C}_l^j$, получим новый определитель $d_l^j(n, \bar{m})$.

Теорема 1.1 [10], [11]. Задача $\mathbf{A}^t$ всегда имеет решение. Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса $(n, \bar{m})$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ и системы $\mathbf{f}^t$ задача $\mathbf{A}^t$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t)$ была матрицей полного ранга, т. е. $\text{rank} H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t) = 2m$.

Если $\text{rank} H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t) = 2m$, то при определённом выборе нормирующего множителя для решений задачи $\mathbf{A}^t$ справедливы представления: при $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^t(x) = D(n, \bar{m}; x), \quad (1.5)$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) &= \\ &= \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следствие 1.1. Если $H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t)$ является матрицей полного ранга, то коэффициенты многочленов (1.5) и (1.6) являются действительными числами.

Рассмотрим две системы $\mathbf{f}^{t1} = (f_1^{t1}, \dots, f_k^{t1})$, $\mathbf{f}^{t2} = (f_1^{t2}, \dots, f_k^{t2})$ тригонометрических рядов, которые ассоциированы с системами (0.1) и (0.3):

$$f_j^{t1}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j \cos lx,$$

$$f_j^{t2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j \sin lx.$$

Следствие 1.2. Для системы $\mathbf{f}^{t1}$ формулы (1.5)–(1.7) принимают вид:

$$Q_m^t(x; \mathbf{f}^{t1}) = \sum_{p=0}^m \bar{u}_p \cos px, \quad P_j^t(x; \mathbf{f}^{t1}) = \sum_{p=0}^{n_j} \bar{v}_p^j \cos px,$$

$$(Q_m^t f_j^t - P_j^t)(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \bar{h}_p^j \cos px,$$

где $\bar{u}_p$, $\bar{v}_p^j$, $\bar{h}_p^j = 2d_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа.

Следствие 1.3. Для системы $\mathbf{f}^{t2}$ формулы (1.5)–(1.7) принимают вид:

$$Q_m^t(x; \mathbf{f}^{t2}) = \sum_{p=0}^m \tilde{u}_p \cos px, \quad (1.8)$$

$$P_j^t(x; \mathbf{f}^{t2}) = \sum_{p=0}^{n_j} \tilde{v}_p^j \sin px, \quad (1.9)$$

$$(Q_m^t f_j^{t2} - P_j^t)(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \tilde{h}_p^j \sin px, \quad (1.10)$$

где $\tilde{u}_p$, $\tilde{v}_p^j$, $\tilde{h}_p^j = 2id_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа.

Доказательство следствия 1.3. Следствие 1.1 доказано в [11], а следствие 1.2 доказывается аналогично следствию 1.3.

Для системы $\mathbf{f}^{t2}$ получаем, что $c_0 = 0$,

$$c_l = -i \frac{b_l}{2}, \quad c_{-l} = -c_l, \quad l = 1, 2, \dots$$

В этом случае блок-матрицы $F_{\pm}^j$ этой системы имеют вид:

$$F_+^j = \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \cdots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j = \begin{pmatrix} -c_{n_j-m+1}^j & -c_{n_j-m+2}^j & \cdots & -c_{n_j+m+1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{n_j-m+m_j}^j & -c_{n_j-m+m_j-1}^j & \cdots & -c_{n_j-m+m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Поэтому нетрудно убедиться, что множители при степенях e^{ipx} и e^{-ipx} в правой части равенства (1.5) совпадают, а в равенствах (1.6) и (1.7)

$$d_{-p}^j(n, \bar{m}) = -d_p^j(n, \bar{m}), \quad p = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, k.$$

Отсюда следует справедливость равенств (1.8)–(1.10). Заметим также, что $\text{Re}\{d_p^j(n, \bar{m})\} = 0$. $\square$

2 Единственность линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть для мультииндекса $(n, \bar{m})$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ матрица $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t1})$ имеет полный ранг, т. е. $\text{rank} H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t1}) = 2m$. Тогда

1) для системы $\mathbf{f}^{t1}$ решение задачи $\mathbf{A}^{ch1}$ существует и единственно;

2) линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва $\{\pi_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{t1})\}_{j=1}^k$ условиями (0.2) определяются однозначно;

3) при соответствующей нормировке справедливы представления:

$$Q_m^{ch1}(x; \mathbf{f}^{t1}) = Q_m^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t1}),$$

$$P_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{t1}) = P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t1}),$$

$$(Q_m^{ch1} f_j^{ch1} - P_j^{ch1})(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2d_p^j(n, \bar{m}) T_p(x),$$

где многочлены $Q_m^t(\cdot; \mathbf{f}^{t1})$, $P_j^t(\cdot; \mathbf{f}^{t1})$ определяются равенствами (1.5), (1.6).

Теорема 2.2. Пусть для мультииндекса $(n, \bar{m})$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ матрица $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t2})$ имеет полный ранг, т. е. $\text{rank} H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t2}) = 2m$. Тогда

1) для системы $\mathbf{f}^{t2}$ решение задачи $\mathbf{A}^{ch2}$ существует и единственно;

2) линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва $\{\pi_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{t2})\}_{j=1}^k$ условиями (0.4) определяются однозначно;

3) при соответствующей нормировке справедливы представления:

$$Q_m^{ch2}(x; \mathbf{f}^{t2}) = Q_m^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}), \quad (2.1)$$

$$P_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{t2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}), \quad (2.2)$$

$$(Q_m^{ch2} f_j^{ch2} - P_j^{ch2})(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2id_p^j(n, \bar{m}) U_p(x), \quad (2.3)$$

где многочлены $Q_m^t(\cdot; \mathbf{f}^{t2})$, $P_j^{t2}(\cdot; \mathbf{f}^{t2})$ определяются равенствами (1.5), (1.6), а $id_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа.

Доказательство теоремы 2.2. Теорема 2.1 доказывается аналогично.

Рассмотрим ассоциированную с системой $\mathbf{f}^{ch2} = (f_1^{ch2}, \dots, f_k^{ch2})$ систему тригонометрических функций $\mathbf{f}^{t2} = (f_1^{t2}, \dots, f_k^{t2})$. На отрезке $[-1, 1]$ справедливы тождества

$$f_j^{t2}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} f_j^{ch2}(x), j = 1, \dots, k.$$

Поскольку матрица $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t2})$ имеет полный ранг, то по теореме 1.1 для системы $\mathbf{f}^{t2}$ задача $\mathbf{A}^t$ имеет единственное решение. Согласно следствию 1.3 в этом случае для тригонометрических

многочленов Эрмита – Паде справедливы формулы (1.8)–(1.10). Заменим в равенствах (1.8)–(1.10) x на $\arccos x$, а затем разделим равенства (1.9) и (1.10) на $\sqrt{1-x^2}$. В результате получим

$$Q_m^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}) = \sum_{p=0}^n \tilde{u}_p T_p(x),$$

$$\frac{P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2})}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^n \tilde{v}_p^j U_p(x),$$

$$Q_m^{ch2}(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}) f_j^{ch2}(x) - \frac{P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2})}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \sum_{p=n+m+1}^{\infty} n \tilde{h}_p^j U_p(x),$$

где $\tilde{h}_p^j = 2id_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа. Отсюда следует справедливость равенств (2.1)–(2.3). $\square$

Замечание. Теоремы 2.1 и 2.2 являются новыми и представляют самостоятельный интерес и в случае, когда $k=1$. Так в работе [8] при $k=1$ достаточные условия единственности линейных аппроксимаций Паде – Чебышёва 1-го рода получены только для верхней части таблицы Паде – Чебышёва (в условии предполагается, что $n \geq m-1$). Доказательство основного результата в этой работе основано на описании структуры ядра некоторых *теплиц-плюс-ганкелевых* матриц, элементами которых являются коэффициенты ряда $f_1^{ch}(x)$. В частности, в [8] установлено, что для единственности линейной аппроксимации Паде – Чебышёва достаточно, чтобы соответствующая *теплиц-плюс-ганкелева* матрица имела полный ранг. Отметим, что в отличие от матрицы $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t1})$ при $k=1$, *теплиц-плюс-ганкелева* матрица в [8], описывающая достаточные условия единственности, имеет существенно более сложную структуру. По этой причине сравнить (проверить эквивалентность!) достаточные условия в [8] и в теореме 2.1 при $k=1$ и $n \geq m-1$, похожие своими формулировками, не представляется возможным.

Отметим также, что для линейных аппроксимаций Паде – Чебышёва 2-го рода задача нахождения достаточных условий единственности до настоящего времени не исследовалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.
2. Суетин, С.П. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва для аналитических функций / С.П. Суетин // Математические заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 290–303.
3. Гончар, А.А. Аппроксимации Паде – Чебышёва для многозначных аналитических

функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, № 6. – С. 3–36.

4. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986.

5. Лабыч, Ю.А. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

6. Geddes, K.O. Block structure in the Chebyshev – Padé table / K.O. Geddes // SIAM J. Numer. Anal. – 1981. – Vol. 18, № 5. – P. 844 – 861.

7. Адуков, В.М. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / В.М. Адуков, О.Л. Ибряева // Вестник ЮУрГУ. Серия математика, физика, химия. – 2005. – Т. 6, № 6. – С. 11–18.

8. Ибряева, О.Л. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / О.Л. Ибряева // Известия Челябинского научного центра. – 2002. – № 4. – С. 1–5.

9. Старовойтов, А.П. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 2. – С. 6–17.

10. Старовойтов, А.П. Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73.

11. Старовойтов, А.П. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2024. – № 3. – С. 6–12.

12. Mason, J.C. Laurent – Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. I. Maehly type approximants / J.C. Mason, A. Crampton // Numerical Algorithms. – 2005. – Vol. 38: 1–3. – С. 3–18.

13. Mason, J.C. Laurent – Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. II. Clenshaw – Lord type approximants / J.C. Mason, A. Crampton // Numerical Algorithms. – 2005. – Vol. 38: 1–3. – С. 19–29.

14. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

15. Суетин, С.П. Вопросы сходимости аппроксимаций Паде – Фабера. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук / С.П. Суетин. – Москва: МГУ, 1981.

Поступила в редакцию 27.11.2024.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Кругликов Игорь Викторович – студент