

УДК 512.542

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_87](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87)

EDN: OQGGJH

## О $\sigma$ -ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕННЫМ $\mathfrak{H}_\sigma$ -ДЕФЕКТОМ

И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь

Белорусский государственный университет, Минск

## ON $\sigma$ -LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS WITH BOUNDED $\mathfrak{H}_\sigma$ -DEFECT

I.N. Safonova, V.V. Skrundz

Belarusian State University, Minsk

**Аннотация.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – некоторые  $\sigma$ -локальные формации конечных групп. Тогда через  $\mathfrak{F} /_{\sigma} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  обозначают решетку всех  $\sigma$ -локальных формаций  $\mathfrak{X}$  таких, что  $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ . Длину решетки  $\mathfrak{F} /_{\sigma} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  называют  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{F}$ . В частности, если  $\mathfrak{H}$  – формация всех единичных групп, то  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{F}$  называют  $l_\sigma$ -длиной формации  $\mathfrak{F}$ . Изучены общие свойства  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта  $\sigma$ -локальных формаций, получено описание минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций для произвольной  $\sigma$ -нильпотентной  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{H}$ , дано описание решеточного строения  $\sigma$ -локальных формаций  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта 1. Получены описания решеточного строения приводимых  $\sigma$ -локальных формаций конечного  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта, а также решеточного строения приводимых  $\sigma$ -локальных формаций конечной  $l_\sigma$ -длины.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\sigma$ -локальная формация, критическая  $\sigma$ -локальная формация,  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект  $\sigma$ -локальной формации,  $l_\sigma$ -длина  $\sigma$ -локальной формации.

**Для цитирования:** Сафонова, И.Н. О  $\sigma$ -локальных формациях конечных групп с ограниченным  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом / И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 87–101. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_87](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87). – EDN: OQGGJH

**Abstract.** Let  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{H}$  be some  $\sigma$ -local formations of finite groups. Then  $\mathfrak{F} /_{\sigma} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  denote the lattice of all  $\sigma$ -local formations  $\mathfrak{X}$  such that  $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ . The length of the lattice  $\mathfrak{F} /_{\sigma} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  is called a  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect of the  $\sigma$ -local formation  $\mathfrak{F}$ . In particular, if  $\mathfrak{H}$  is the formation of all identity groups, then the  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect of a  $\sigma$ -local formation  $\mathfrak{F}$  is called a  $l_\sigma$ -length of the formation  $\mathfrak{F}$ . The general properties of  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect of  $\sigma$ -local formations are studied, the description of minimal  $\sigma$ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations for an arbitrary  $\sigma$ -nilpotent  $\sigma$ -local formation  $\mathfrak{H}$  is obtained, the description of the lattice structure of  $\sigma$ -local formations of  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect 1 is given. The descriptions of the lattice structure of reducible  $\sigma$ -local formations of finite  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect, as well as the lattice structure of reducible  $\sigma$ -local formations of finite  $l_\sigma$ -length are obtained.

**Keywords:** finite group,  $\sigma$ -local formation, critical  $\sigma$ -local formation,  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect of a  $\sigma$ -local formation,  $l_\sigma$ -length of a  $\sigma$ -local formation.

**For citation:** Safonova, I.N. On  $\sigma$ -local formations of finite groups with bounded  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect / I.N. Safonova, V.V. Skrundz // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 87–101. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_87](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87) (in Russian). – EDN: OQGGJH

### Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1]–[4].

Изучение и классификация формаций с заданными ограничениями на решетки их подформаций является одной из наиболее интересных и содержательных задач теории формаций конечных групп. Установленная А.Н. Скибой [5]

модулярность решетки всех формаций, а также решетки всех локальных формаций, позволила привлечь методы и конструкции общей теории решеток при изучении внутреннего строения формаций конечных групп. Изучение структурного строения локальной формации  $\mathfrak{F}$  на основе свойств достаточно хорошо изученной ее подформации впервые было проведено А.Н. Скибой и Е.А. Таргонским [6]. Данный подход основывался

на введенном ими понятии  $\mathfrak{H}$ -дефекта локальной формации. В работе [6] были изучены основные свойства  $\mathfrak{H}$ -дефекта локальной формации, а также получена классификация локальных формаций нильпотентного дефекта  $\leq 2$ . Впоследствии данный метод широко использовался при изучении структурного строения не только локальных формаций [7]–[17], но и ряда формаций других типов, таких как функторно замкнутые кратно локальные формации [2], [18], [19], тотально насыщенные формации [20]–[22], частично насыщенные [23]–[28] и др. При этом, в качестве  $\mathfrak{H}$  рассматривалась не только формация всех нильпотентных групп, но и другие достаточно хорошо известные классы (класс всех  $p$ -разложимых,  $p$ -нильпотентных,  $\pi$ -разложимых,  $\pi$ -нильпотентных,  $p$ -замкнутых, метанильпотентных, разрешимых, сверхразрешимых групп и др.).

Отметим, что указанные результаты базировались на разработанной теории минимальных локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций. Напомним, что формацию  $\mathfrak{F}$  называют минимальной локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией [29] или  $\mathfrak{H}_l$ -критической формацией [30], если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , но все собственные локальные подформации из  $\mathfrak{F}$  содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ . Общая задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [29]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ [30]–[34], завершающим результатом которого стало описание  $\mathfrak{H}_l$ -критических формаций для случая, когда  $\mathfrak{H}$  – произвольная формация классического типа [34], т. е. формация имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны.

Развитие теории  $\sigma$ -локальных формаций привело к необходимости изучения и классификации критических  $\sigma$ -локальных формаций. В этой связи задача Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в теории  $\sigma$ -локальных формаций была решена в работах [35], [36] для произвольной  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{H}$  классического типа.

В данной работе, используя разработанные методы теории критических  $\sigma$ -локальных формаций, мы изучаем структурное строение  $\sigma$ -локальных формаций на основе идей работы [6]. Следуя [2], [6], мы вводим понятие  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта  $\sigma$ -локальной формации, а также  $l_\sigma$ -длины  $\sigma$ -локальной формации и изучаем структурное строение  $\sigma$ -локальных формаций конечного  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта и конечной  $l_\sigma$ -длины.

Основными результатами являются: описание минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций (теорема 3.4) для произвольной  $\sigma$ -нильпотентной

$\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{H}$ , т. е. неприводимых  $\sigma$ -локальных формаций  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта 1; доказано существование формаций такого вида во всякой  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$  (теорема 3.8); описание структурного строения  $\sigma$ -локальных формаций  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта 1 (теорема 3.14) и их характеристизация (теорема 3.18); описание структурного строения приводимых  $\sigma$ -локальных формаций конечного  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта (теорема 4.1), а также описание внутреннего строения приводимых  $\sigma$ -локальных формаций конечной  $l_\sigma$ -длины (теорема 4.5).

Основные результаты работы мы доказываем в разделах 3 и 4, а также рассматриваем некоторые, наиболее интересные, следствия полученных результатов.

### 1 Основные определения и обозначения

Основные понятия теории  $\sigma$ -свойств групп, а также общие свойства  $\sigma$ -локальных формаций и их решеток представлены в работах [3], [4] и [37]–[48].

Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  – некоторое разбиение множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ . Если  $n$  целое число, то  $\sigma(n)$  обозначает множество

$$\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}; \quad \sigma(G) = \sigma(|G|).$$

Группа  $G$  называется [3]:  $\sigma$ -примарной, если  $G$  является  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i$ ;  $\sigma$ -нильпотентной, если  $G$  – прямое произведение  $\sigma$ -примарных групп.

Класс всех  $\sigma$ -нильпотентных групп обозначают символом  $\mathfrak{N}_\sigma$ , а класс всех единичных групп символом (1).

Функция  $f$  вида  $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  называется *формационной  $\sigma$ -функцией* [4]. Для всякой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  класс  $LF_\sigma(f)$  определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i))$$

для всех  $\sigma_i \in \sigma(G)$ .

Если для некоторой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  имеет место  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , то говорят, что формация  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -локальной, а  $f$  является  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$ .

Совокупность всех  $\sigma$ -локальных формаций обозначают через  $l_\sigma$ . Формации из  $l_\sigma$  называют  $l_\sigma$ -формациями.

Пусть  $f$  – формационная  $\sigma$ -функция. Тогда символом  $\text{Supp}(f)$  обозначают *носитель  $f$* , то есть, множество всех  $\sigma_i$  таких, что  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ . Формационную  $\sigma$ -функцию  $f$  называют: *внутренней*, если  $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$  для всех  $i$ ; *полной*, если  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$  для всех  $i$ .

Если  $F$  – полная внутренняя формационная  $\sigma$ -функция и  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ , то  $F$  называют *каноническим  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$* .

Мы также используем  $\bigcap_{j \in J} f_j$  для обозначения *формационной  $\sigma$ -функции  $H$*  такой, что  $h(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$ , в частности,

$$h(\sigma_i) = (f_1 \cap f_2)(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i),$$

для всех  $i$ .

Пусть  $\{f_j \mid j \in J\}$  множество всех  $\sigma$ -локальных определений формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда  $f = \bigcap_{j \in J} f_j$  называют *наименьшим  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$* .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторая совокупность групп. Через  $l_\sigma \text{form}(\mathfrak{X})$  обозначают пересечение всех  $\sigma$ -локальных формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ , и называют  $\sigma$ -локальной формацией, порожденной совокупностью групп  $\mathfrak{X}$ . Если  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$  для некоторой группы  $G$ , то  $\mathfrak{F}$  называют *однопорожденной  $\sigma$ -локальной формацией*.

Для произвольного набора групп  $\mathfrak{X}$  и любого  $\sigma_i \in \sigma$  символом  $\mathfrak{X}(\sigma_i)$  [39, с. 962] обозначают класс групп, определенный следующим образом:  $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ , если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ ,  $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \emptyset$ , если  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый набор групп. Для любого  $\sigma_i \in \sigma$  и всякого неотрицательного целого числа  $n$ , следуя [2, с. 31], мы определяем класс групп  $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i)$  следующим образом:  $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i) = l_n^\sigma \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ , если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$  и  $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i) = \emptyset$ , если  $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$ . В частности, если  $n = 0$ , то  $\mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ , если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$  и  $\mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \emptyset$ , если  $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$ .

Пусть теперь  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$  – некоторый набор  $\sigma$ -локальных формаций. Тогда мы полагаем  $\bigvee_\sigma (\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l_\sigma \text{form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$ . В частности, если  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальные формации, то

$$\mathfrak{H} \vee_\sigma \mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F}).$$

Следуя [29], [30], *минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией* или  *$\mathfrak{H}_\sigma$ -критической формацией* мы называем  $\sigma$ -локальную формацию  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , все собственные  $\sigma$ -локальные подформации которой содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ .

$\sigma$ -Локальную формацию  $\mathfrak{H}$  мы называем  *$\sigma$ -локальной формацией классического типа*, если  $\mathfrak{H}$  имеет такое  $\sigma$ -локальное определение, все неабелевы значения которого  $\sigma$ -локальны.

Напомним [2, с. 12], что непустой набор формаций  $\theta$  называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любого множества формаций из  $\theta$  снова принадлежит  $\theta$ , а множество  $\theta$

содержит формацию  $\mathfrak{M}$ , такую, что  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$  для всех  $\mathfrak{H} \in \theta$ . Всякую формацию из  $\theta$  называют  *$\theta$ -формацией*.

Для любых двух  $\theta$ -формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$ , где  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ , через  $\mathfrak{H} /_\theta \mathfrak{M}$  обозначают [2, с. 168] решетку  $\theta$ -формаций  $\mathfrak{X}$  таких, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$ . В частности, через  $\mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{M}$  обозначают решетку  $\sigma$ -локальных формаций  $\mathfrak{X}$  таких, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Пусть  $\theta$  – некоторая полная модулярная решетка формаций.

Напомним [2, с. 192], что для любых двух  $\theta$ -формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$  через  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{M}|_\theta$  обозначают длину решетки  $\mathfrak{F} /_\theta \mathfrak{M}$   $\theta$ -формаций, заключенных между  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{F}$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – произвольные  $\theta$ -формации. Тогда  $\mathfrak{H}_\theta$ -дефектом формации  $\mathfrak{F}$  называют длину решетки  $\mathfrak{F} /_\theta \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  (конечную или бесконечную) и обозначают  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\theta$ .

В частности, следуя [2, с. 192]  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{F}$  мы будем называть длину решетки  $\mathfrak{F} /_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  и обозначать  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$ .

Пусть  $0_\theta$  – нуль решетки  $\theta$ ,  $\mathfrak{F} \in \theta$ . Тогда  $\theta$ -длиной [2, с. 212] формации  $\mathfrak{F}$  называют кардинальное число  $|\mathfrak{F} : 0_\theta|_\theta$ . В частности, *длиной* формации  $\mathfrak{F}$  называют число  $l(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : \emptyset|$ ; *длиной* локальной формации  $\mathfrak{F}$  называют число  $l_1(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_1$ .

Следуя [2, с. 212],  $l_\sigma$ -длиной  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{F}$  назовем число  $l_\sigma(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_\sigma$ .

Напомним также понятие прямого разложения формации [2, с. 171]. Пусть  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$  – некоторый непустой набор подклассов  $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$  такой, что  $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$  для любого  $j_1 \neq j_2$  из  $J$ . Если, кроме того, каждая группа  $G \in \mathfrak{F}$  имеет вид  $G = A_{j_1} \times \dots \times A_{j_t}$ , где  $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$  для некоторого  $j_1, \dots, j_t \in J$ , то пишут, что  $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  (в частности,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$ , если  $J = \{1, \dots, t\}$ ).

Подформацию  $\mathfrak{M}$  формации  $\mathfrak{F}$  называют *дополняемой* [2, с. 170] в  $\mathfrak{F}$ , если  $\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$  и  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$  для некоторой подформации  $\mathfrak{H}$  из  $\mathfrak{F}$ . В этом случае подформацию  $\mathfrak{H}$  называют *дополнением* к  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$ .

## 2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Следующие две леммы являются частными случаями (при  $\theta = I_\sigma$ ) лемм 5.2.8, 5.2.7 [2] соответственно.

**Лемма 2.1** [2, лемма 5.2.8]. Пусть  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -локальные формации, причем  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X}$ . Тогда если  $m$ ,  $r$  и  $t$  – соответственно  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекты формаций  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{F}$ , причем  $m$ ,  $r < \infty$ , то  $t \leq m + r$ .

**Лемма 2.2** [2, лемма 5.2.7]. Пусть  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -локальные формации, причем  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ . Тогда  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma \leq |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$ .

Частным случаем теоремы 1.15 [39, с. 960] является

**Лемма 2.3.** Множество  $I_\sigma$  всех  $\sigma$ -локальных формаций образует полную алгебраическую и модулярную решетку формаций.

**Лемма 2.4** [36, лемма 2.1]. Пусть  $\Pi$  – непустое подмножество из  $\sigma$ . Тогда  $\mathfrak{G}_\Pi$  всех  $\Pi$ -групп и класс  $\mathfrak{N}_\Pi$  всех  $\sigma$ -нильпотентных  $\Pi$ -групп являются  $\sigma$ -локальными формациями и справедливы следующие утверждения.

(1)  $\mathfrak{G}_\Pi = LF_\sigma(g)$ , где  $g$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{G}_\Pi$ . При этом,  $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $g(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ ;

(2)  $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$ , где  $n$  и  $N$ , соответственно, наименьшее и каноническое  $\sigma$ -локальные определения формации  $\mathfrak{N}_\Pi$ . При этом,  $n(\sigma_i) = (1)$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $n(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ ,  $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $N(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ .

**Лемма 2.5** [44, теорема 3.1]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i)  $\mathfrak{F}$  является  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальной ( $n \geq 1$ );
- (ii)  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{n-1}^\sigma(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ ;
- (iii)  $\mathfrak{F} = \text{form}(\cup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{n-1}^\sigma(\sigma_i))$ .

**Лемма 2.6** [44, с. 2372]. Пусть  $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ , где  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$  – набор таких формаций, что  $\sigma(\mathfrak{F}_a) \cap \sigma(\mathfrak{F}_b) = \emptyset$  для любых  $a, b \in J$ ,  $a \neq b$ . Тогда и только тогда формация  $\mathfrak{F}$   $n$ -кратно  $\sigma$ -локальна ( $n \geq 1$ ), когда  $\mathfrak{F}_j$  является  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальной формацией для всех  $j$ .

**Лемма 2.7** [36, теорема A]. Пусть  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -локальная формация классического типа и  $H$  – ее каноническое  $\sigma$ -локальное определение. Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = I_\sigma \text{form}(G)$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом

$P = G^\mathfrak{H}$ , что выполняется одно из следующих условий:

- (1)  $G = P$  – простая  $\sigma_i$ -группа,  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ ;
- (2)  $P$  – не  $\sigma$ -примарная группа и  $P = G^{H(\sigma_i)}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$ ;
- (3)  $G = P \rtimes K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $K$  – такая монолитическая группа с монолитом  $Q = K^{H(\sigma_i)}$ , что  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$  и либо  $\Phi(K) = 1$  и  $K^{H(\sigma_i)} \subseteq Q$  для всех  $\sigma_j \in \sigma(Q)$ , либо  $K$  – минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов:
  - (а) группа кватернионов порядка 8, если  $2 \notin \sigma_i$ ;
  - (б) неабелева группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q \notin \sigma_i$ ;
  - (в) циклическая  $q$ -группа,  $q \notin \sigma_i$ .

**Лемма 2.8** [39, лемма 2.1]. Пусть  $f$  и  $H$  – формационные  $\sigma$ -функции и пусть  $\Pi = \text{Supp}(f)$ . Допустим, что  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$ . Тогда:

- (1)  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ ;
- (2)  $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$ . Следовательно,  $\mathfrak{F}$  является насыщенной формацией;
- (3) если каждая группа из  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -разрешимой, то  $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$ ;
- (4) если  $\sigma_i \in \Pi$ , то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$ ;
- (5)  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ , где  $F$  – единственная формационная  $\sigma$ -функция, такая что  $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $F(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ . Более того,  $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$  для всех  $i$ .

Частным случаем теоремы 1.1. работы [43] является следующая

**Лемма 2.9** [43, теорема 1.1]. Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой набор групп,  $\mathfrak{F} = I_\sigma \text{form} \mathfrak{X} = LF_\sigma(f)$ , где  $f$  – наименьшее  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$ . Тогда верны следующие утверждения:

- (1)  $\sigma(\mathfrak{X}) = \sigma(\mathfrak{F})$ ;
- (2)  $f(\sigma_i) = \mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \mathfrak{F}_0^\sigma(\sigma_i)$  для всех  $i$ ;
- (3) если  $H$  – произвольное  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$ , то для всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$  имеем  $f(\sigma_i) = \text{form}(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(\sigma_i), O_{\sigma_i}(A) = 1)$ .

**Лемма 2.10** [43, лемма 3.2]. Пусть  $\sigma_i \in \sigma$ ,  $1 \neq P$  –  $\sigma_i$ -группа,  $A$  – группа с  $O_{\sigma_i}(A) = 1$  и  $G = P \wr A = K \rtimes A$  – регулярное сплетение групп  $P$  и  $A$ , где  $K$  – база сплетения  $G$ . Тогда  $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K$ .

Лемма 2.11 является частным случаем леммы 2.6 [39].

**Лемма 2.11** [39, лемма 2.6]. Пусть  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$  –  $\sigma$ -локальная формация порожденная  $\mathfrak{X}$  и  $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$ . Пусть  $t$  – формационная  $\sigma$ -функция, такая, что  $t(\sigma_i) = \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $t(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ . Тогда:

- (1)  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ ;
- (2)  $t$  является  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$ ; и
- (3)  $t(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$  для всех  $i$ .

**Лемма 2.12** [39, лемма 2.2]. Если класс групп  $\mathfrak{F}_j$  является  $\sigma$ -локальной формацией для всех  $j \in J$ , то класс  $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  также является  $\sigma$ -локальной формацией.

**Лемма 2.13** [45, следствие 3.7]. Для любых  $\sigma$ -локальных формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  имеет место решеточный изоморфизм  $\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{M} = \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ .

**Лемма 2.14** [2, теорема 4.3.2]. Пусть  $\mathfrak{M}$  – непустая подформация формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда если  $\mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$ , то

$$\mathfrak{F} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{H}\}.$$

### 3 $\sigma$ -Локальные формации $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта 1

Элемент  $a$  решетки  $L$  называется *нейтральным* (иначе *дистрибутивным*) [49, с. 96], если для любых  $b, c \in L$  тройка  $a, b, c$  порождает дистрибутивную подрешетку в решетке  $L$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальные формации конечного  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта, где  $\mathfrak{H}$  – нейтральный элемент решетки  $\sigma$ -локальных формаций. Тогда для  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта формации  $\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}$  имеет место следующее равенство

$$|\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})|_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma.$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -локальные формации, удовлетворяющие условию леммы. Положим  $\mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ ,  $t = |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma$ ,  $m = |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma$ ,  $k = |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$  и  $l = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma$ . Согласно лемме 2.1 имеем  $t \leq m + k$ .

Пусть теперь  $\mathfrak{X}_1 := \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{M}_1 := \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{F}_1 := \mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{L}_1 := \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{H}$ . В силу лемм 2.1 и 2.2 справедливы равенства  $|\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}_1|_\sigma = t$ ,

$$|\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1|_\sigma = m, \quad |\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1|_\sigma = k$$

и  $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = l$ . Поэтому длина решетки  $\mathfrak{X}_1 /_\sigma (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{H}$  равна  $t$ . Заметим также, что формации  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{F}_1$  являются элементами

решетки  $\mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{H} \cong \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект является функцией высоты решетки  $\mathfrak{X} /_\sigma \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ . Значит, в силу теоремы 16 [49, с. 61] имеет место следующее равенство

$$|\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1)|_\sigma = |\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1|_\sigma + |\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1|_\sigma - |\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1)|_\sigma. \quad (3.1)$$

Поскольку при этом

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 &= (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H}) \vee_\sigma (\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) = \\ &= (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}) \vee_\sigma \mathfrak{H} = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H}, \end{aligned}$$

то  $|\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1)|_\sigma = t$ . Кроме того, так как по условию леммы формация  $\mathfrak{H}$  является нейтральным элементом решетки  $\sigma$ -локальных формаций, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 &= (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H}) \cap (\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) = \\ &= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \vee_\sigma \mathfrak{H} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{H} = \mathfrak{L}_1. \end{aligned}$$

Наконец, поскольку

$$|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = l = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma,$$

то из (3.1) получаем

$$|\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})|_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma. \quad \square$$

**Лемма 3.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие  $\sigma$ -локальные формации, что  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$ . Тогда в том и только в том случае  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  конечен, когда конечны  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{M}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$ , при этом

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_\sigma.$$

**Доказательство. Необходимость.** Допустим, что  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  конечен и пусть  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = n$ . В силу леммы 2.2 имеет место неравенство

$$|\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma \leq |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma.$$

Поэтому  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$  также конечен. Пусть  $k = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma$ . Согласно определению  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта и в силу леммы 2.3 из модулярности решетки  $l_\sigma$  всех  $\sigma$ -локальных формаций следует, что найдутся такие цепи  $\sigma$ -локальных формаций

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_{n-1} \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) =$$

$$= \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{L}_{k-1} \subset \mathfrak{L}_k = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F},$$

что  $\mathfrak{F}_i$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{F}_{i+1}$  и  $\mathfrak{L}_j$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{L}_{j+1}$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$  и  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Так как  $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ , то ввиду леммы 2.3 из модулярности решетки  $l_\sigma$  вытекает, что существует цепь

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{X}_{t-1} \subset \mathfrak{X}_t = \mathfrak{F}$$

$\sigma$ -локальных формаций длины  $t = n - k$  такая, что  $\mathfrak{X}_i$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{X}_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, t-1$ . Поэтому решетка  $\mathfrak{F} /_{\sigma} \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$  имеет конечную длину, равную  $t$ . Тогда  $t = |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma}$  по определению  $\mathfrak{M}_{\sigma}$ -дефекта.

**Достаточность.** Пусть

$$k = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_{\sigma}$$

и  $t = |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma}$ . Тогда имеем

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{X}_{t-1} \subset \mathfrak{X}_t = \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) =$$

$$= \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{L}_{k-1} \subset \mathfrak{L}_k = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F},$$

где  $\mathfrak{X}_i$  и  $\mathfrak{L}_j$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{X}_{i+1}$  и  $\mathfrak{L}_{j+1}$  соответственно,  $i = 0, 1, \dots, t-1$  и  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Поэтому существует максимальная цепь  $\sigma$ -локальных формаций длины  $k+t$  от  $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  до  $\mathfrak{F}$ . Ввиду леммы 2.3 из модулярности решетки  $l_{\sigma}$  последнее влечет, что  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma} = k+t$ , т. е. имеет место равенство

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma} =$$

$$= |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_{\sigma} + |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma}. \quad \square$$

**Лемма 3.3.** Пусть  $\mathfrak{H}$  – такая  $\sigma$ -локальная формация, что  $(1) \neq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$ . Тогда имеет место равенство  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\Pi}$ , где  $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$  и  $\mathfrak{G}_{\Pi}$  – класс всех  $\Pi$ -групп. В силу леммы 2.4(1) формация  $\mathfrak{G}_{\Pi}$   $\sigma$ -локальна. Поэтому имеет место включение  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\Pi}$ .

С другой стороны, ввиду леммы 2.5 (ii) имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{H}_{\sigma_i}^{\sigma}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$ . Значит, с учетом леммы 2.6 имеем

$$\mathfrak{N}_{\Pi} = l_{\sigma} \text{form}(\cup_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i}) = \oplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Таким образом,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\Pi}$ , где  $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ .  $\square$

Если  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация, то формация  $\mathfrak{F}$  имеет единственную максимальную  $\sigma$ -локальную подформацию  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ . Поэтому  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен 1. Таким образом, всякая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация является  $l_{\sigma}$ -неприводимой  $\sigma$ -локальной формацией  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефекта 1.

**Теорема 3.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие  $\sigma$ -локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(G)$ , где  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$  и выполняется одно из условий:

(1)  $G = P$  – простая  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ ;

(2)  $G = P$  – такая не  $\sigma$ -примарная простая группа, что  $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ ;

(3)  $G = P \rtimes H$ , где  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа для некоторого  $p \in \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ , а  $H$  – простая  $\sigma_j$ -группа,  $j \neq i$ . Кроме того, для всякой группы  $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$ , где  $A$  – некоторая простая  $\sigma_i$ -группа,  $K$  – база регулярного сплетения групп  $A$  и  $H$ , имеет место равенство  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(G_1)$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация. В силу леммы 3.3 имеет место равенство  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\Pi}$ , где  $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ . По лемме 2.4(2) имеем  $\mathfrak{N}_{\Pi} = LF_{\sigma}(n)$ , где  $n$  – наименьшее  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{N}_{\Pi}$ , что  $n(\sigma_i) = (1)$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $n(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ . Следовательно, формация  $\mathfrak{N}_{\Pi}$  является  $\sigma$ -локальной формацией классического типа. Пусть  $H$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{H}$ . Тогда согласно лемме 2.7 имеем  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(D)$ , где  $D$  – такая монолитическая группа с монолитом  $R = D^{\mathfrak{H}}$ , что выполняется одно из следующих условий:

- (i)  $D = R$  – простая  $\sigma_i$ -группа,  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ ;
- (ii)  $R$  – не  $\sigma$ -примарная группа и  $R = D^{H(\sigma_i)}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(R)$ ;
- (iii)  $D = R \rtimes L$ , где  $R = C_D(R)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $L$  – такая монолитическая группа с монолитом  $S = L^{H(\sigma_i)}$ , что  $\sigma_i \notin \sigma(S)$  и либо  $\Phi(L) = 1$  и  $L^{H(\sigma_j)} \subseteq S$  для всех  $\sigma_j \in \sigma(S)$ , либо  $L$  – минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: (a) группа кватернионов порядка 8, если  $2 \notin \sigma_i$ ; (b) неабелева группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q \notin \sigma_i$ ; (c) циклическая  $q$ -группа,  $q \notin \sigma_i$ .

Если для группы  $D$  справедливо условие (i), то, очевидно, группа  $D$  удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть для группы выполняется условие (ii). Из леммы 2.4(2) следует, что  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $H(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ . Покажем, что в этом случае  $D = R$  и  $\sigma(D) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ .

Действительно, поскольку  $R = D^{H(\sigma_i)}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(R)$ , то  $H(\sigma_i) \neq \emptyset$ . Поэтому  $\sigma(R) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$  по лемме 2.8 (5).

С другой стороны, так как  $|\sigma(R)| > 1$ , то для  $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(R)$ , где  $i \neq j$ , имеем

$$D/R \in H(\sigma_i) \cap H(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} = (1).$$

Поэтому и в силу монолитичности группы  $D$  заключаем, что  $D$  – не  $\sigma$ -примарная простая группа такая, что  $\sigma(D) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ . Следовательно, группа  $D$  удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть, наконец, для группы выполняется условие (iii). Поскольку  $S = L^{H(\sigma_i)}$ , то  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$  и  $\Phi(L) = 1$ , так как  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  – насыщенная формация.

Покажем, что  $L$  является простой  $\sigma_j$ -группой,  $j \neq i$ . Действительно, поскольку  $L \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ , то  $L = S$  является простой  $\sigma$ -примарной группой ввиду монолитичности и  $\sigma$ -нильпотентности группы  $L$ . Следовательно,  $L$  –  $\sigma_j$ -группа, где  $j \neq i$ . Значит, группа  $D$  удовлетворяет условию (3) теоремы.

Докажем теперь вторую часть утверждения (3) теоремы. Пусть  $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$ , где  $A$  – некоторая простая  $\sigma_i$ -группа,  $K$  – база регулярного сплетения групп  $A$  и  $H$ .

Покажем, что  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G_1)$ . Пусть  $\mathfrak{F}_1 = l_\sigma \text{form}(G_1)$ ,  $f$  и  $f_1$  – наименьшие  $\sigma$ -локальные определения формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$  соответственно. По построению группы  $G_1$  имеем  $\sigma(G_1) = \sigma(G)$ . Ввиду леммы 2.9 имеем  $f(\sigma_s) = \text{form}(G/O_{\sigma_s, \sigma_s}(G))$  для всех  $\sigma_s \in \sigma(G)$  и  $f(\sigma_s) = \emptyset$  для всех  $\sigma_s \notin \sigma(G)$ , а также  $f_1(\sigma_s) = \text{form}(G_1/O_{\sigma_s, \sigma_s}(G_1))$  для всех  $\sigma_s \in \sigma(G_1)$  и  $f_1(\sigma_s) = \emptyset$  для всех  $\sigma_s \notin \sigma(G_1)$ . В силу леммы 2.10 имеем  $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = P$  и  $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G_1) = O_{\sigma_i}(G_1) = K$ .

Следовательно, для всех  $\sigma_s \notin \sigma(G)$  имеем  $f(\sigma_s) = f_1(\sigma_s) = \emptyset$  и

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = \text{form}(H),$$

$$f(\sigma_j) = \text{form}(G/O_{\sigma_j, \sigma_j}(G)) = (1),$$

$$f_1(\sigma_i) = \text{form}(G_1/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G_1)) = \text{form}(H),$$

$$f_1(\sigma_j) = \text{form}(G_1/O_{\sigma_j, \sigma_j}(G_1)) = (1).$$

Таким образом,  $f(\sigma_k) = f_1(\sigma_k)$  для всех  $\sigma_k \in \sigma$ . Последнее означает, что  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$ .

**Достаточность.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда если для  $\mathfrak{F}$  выполнены условия (1) или (2), то в силу леммы 2.7 (1) (2), соответственно, формация  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией.

Пусть теперь для формации  $\mathfrak{F}$  выполнено условие (3). Покажем, что в этом случае для формации  $\mathfrak{F}$  выполнены условия леммы 2.7 (3).

Действительно, пусть  $H$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{H}$ .

Поскольку по лемме 3.3 имеет место равенство  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$ , где  $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ , то в силу леммы 2.4 (2) имеем  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  и  $H(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Тогда, очевидно, что  $H = H^{H(\sigma_i)}$  – монолитическая группа,  $\sigma_i \notin \sigma(H)$  и, кроме того,  $\Phi(H) = 1$  и  $1 = H^{H(\sigma_j)} \subseteq H$ . Следовательно, для группы  $G$  выполнены условия (3) леммы 2.7 (3). Поэтому  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией.  $\square$

В случае, когда  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$  – формация всех  $\sigma$ -нильпотентных групп, из теоремы 3.4 получаем

**Следствие 3.5.** Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\sigma$ -нильпотентная формация, когда  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$  и выполняется одно из следующих условий: 1)  $G$  – простая не  $\sigma$ -примарная группа; 2)  $G = P \rtimes K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $K$  – простая  $\sigma_j$ -группа,  $j \neq i$ .

В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ , из теоремы 3.4 имеем

**Следствие 3.6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l \text{form}(G)$ , где  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $P = G^\Phi$  и выполняется одно из условий:

- (1)  $G = P$  – группа простого порядка  $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ ;
- (2)  $G = P$  – такая неабелева простая группа, что  $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ ;
- (3)  $G = P \rtimes H$ , где  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа для некоторого  $p \in \pi(\mathfrak{H})$ , а  $H$  – простая  $q$ -группа,  $q \neq p$ . Кроме того, для всякой группы  $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$ , где  $A$  – группа простого порядка  $p$ ,  $K$  – база регулярного сплетения групп  $A$  и  $H$ , имеет место равенство  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G_1)$ .

Кроме того, если  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$  – формация всех nilпотентных групп, из теоремы 3.4 получаем следующий известный результат.

**Следствие 3.7.** Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  – минимальная локальная не nilпотентная формация, когда  $\mathfrak{F} = l \text{form}(G)$  и выполняется одно из следующих условий:

- (1)  $G$  – группа Шмидта;
- (2)  $G$  – простая неабелева группа.

**Теорема 3.8.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие  $\sigma$ -локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ . Тогда в  $\mathfrak{F}$  имеется по крайней мере одна минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация.

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -локальные формации из условия теоремы. Выберем

в  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$  группу  $G$  минимального порядка. Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ . Если при этом  $G = P$  – простая  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$  или такая не  $\sigma$ -примарная простая группа, что  $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ , то в силу леммы 3.4 имеем  $\mathcal{L} = l_{\sigma} \text{form}(G)$  – искомая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация. Если, кроме того,  $G = P$  – такая не  $\sigma$ -примарная простая группа, что  $\sigma(G) \not\subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ , то, поскольку  $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{F})$  и найдется  $\sigma_k \in \sigma(G) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$ , имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_k} \subseteq \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}_{\sigma_k} \not\subseteq \mathfrak{H}$ . Поэтому  $\mathfrak{G}_{\sigma_k}$  – искомая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация из  $\mathfrak{F}$ .

Пусть теперь группа  $G$  не является простой. Понятно, что  $|\sigma(G)| > 1$  и  $G/P \neq 1$ . Пусть  $\sigma_j \in \sigma(G/P)$ .

Рассмотрим прежде случай когда  $P$  не является  $\sigma$ -примарной группой. Пусть  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , где  $\sigma_i \neq \sigma_j$ . Тогда найдутся такие простые  $\sigma_i$ -группа  $A$  и  $\sigma_j$ -группа  $H$ , что  $A \in \mathfrak{F}$  и  $H \in \mathfrak{H}$ . Пусть  $D = A \wr H = K \rtimes H$ , где  $K$  – база регулярного сплетения групп  $A$  и  $H$ . Тогда по лемме 3.4 имеем  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(D)$  – искомая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация из  $\mathfrak{F}$ .

Пусть теперь группа  $P$  является  $\sigma$ -примарной, т. е.  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i$ . Тогда, поскольку группа  $G$  не является  $\sigma$ -примарной, то найдется  $\sigma_k \in \sigma(G/P)$  такое, что  $k \neq i$ . Поскольку при этом  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  и  $\sigma_k \in \sigma(\mathfrak{H})$ , то найдутся простые  $\sigma_i$ -группа  $A \in \mathfrak{F}$  и  $\sigma_k$ -группа  $H \in \mathfrak{H}$ . Пусть  $D = A \wr H = K \rtimes H$ , где  $K$  – база регулярного сплетения групп  $A$  и  $H$ . Снова, применяя лемму 3.4, получим, что  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(D)$  – искомая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация из  $\mathfrak{F}$ .  $\square$

**Следствие 3.9.** Пусть  $\mathfrak{F}$  не  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная формация. Тогда в  $\mathfrak{F}$  имеется по крайней мере одна минимальная не  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная подформация.

В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ , из теоремы 3.8 получаем следующие известные результаты (см. теорему 2.3.2 [2, с. 72]).

**Следствие 3.10** [2, с. 72]. Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ . Тогда в  $\mathfrak{F}$  имеется по крайней мере одна минимальная локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация.

Если  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$  – формация всех nilпотентных групп, имеем

**Следствие 3.11** [2, с. 72]. Пусть  $\mathfrak{F}$  ненильпотентная локальная формация. Тогда в  $\mathfrak{F}$  имеется по крайней мере одна минимальная ненильпотентная локальная подформация.

**Лемма 3.12.** Всякая  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная формация является нейтральным элементом решетки  $l_{\sigma}$ . В частности, формация  $\mathfrak{N}_{\sigma}$  всех  $\sigma$ -нильпотентных групп является нейтральным элементом решетки  $l_{\sigma}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{M}$  – некоторые  $\sigma$ -локальные формации, причем формация  $\mathfrak{H}$  является  $\sigma$ -нильпотентной. В силу леммы 2.3 и теоремы 12 [49, с. 56] для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что

$$\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}) = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}).$$

Если  $\mathfrak{H} = (1)$ , то утверждение очевидно. Пусть  $\mathfrak{H} \neq (1)$  и  $\Pi_1 = \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})$  и  $\Pi_2 = \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})$ . Так как  $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = l_{\sigma} \text{form}((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}))$ , то по лемме 2.11 имеем

$$\begin{aligned} \sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) &= \sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) = \\ &= \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = \Pi_1 \cup \Pi_2. \end{aligned}$$

Поскольку  $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$ , то  $\sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) \subseteq \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}))$ , т. е.  $\Pi_1 \cup \Pi_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}))$ .

С другой стороны,  $\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M} = l_{\sigma} \text{form}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{M})$  и опять же по лемме 2.11 имеем

$$\sigma(\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{M}).$$

Ввиду леммы 2.12 формация  $\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$   $\sigma$ -локальна. Теперь, если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}))$ , то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$  по лемме 2.5 (ii). Поэтому  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}) \cap \sigma(\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{H}) \cap (\sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{M}))$ . Значит,  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})$ . Следовательно,

$$\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = \Pi_1 \cup \Pi_2.$$

Таким образом,

$$\sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) = \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})).$$

Так как при этом обе формации

$$(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) \text{ и } \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$$

$\sigma$ -нильпотентны и  $\sigma$ -локальны, то по лемме 3.3 имеем  $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{N}_{\Pi} = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$ , где  $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ . Следовательно,  $\sigma$ -локальные формации  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{M}$  образуют дистрибутивную тройку в решетке  $l_{\sigma}$  и поэтому  $\mathfrak{H}$  – нейтральный элемент в  $l_{\sigma}$ .  $\square$

Следующая лемма является прямым следствием лемм 3.1 и 3.12.

**Лемма 3.13.** Пусть  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальные формации конечного  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефекта, где  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная формация. Тогда для  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефекта формации  $\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F}$  имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F})|_{\sigma} &= |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_{\sigma} + \\ &+ |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma} - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_{\sigma}. \end{aligned}$$

В частности, если  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}$ , то для  $\sigma$ -нильпотентного  $l_{\sigma}$ -дефекта формации  $\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F}$  имеем



$$|\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})|_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{M}|_\sigma + \\ + |\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{F}|_\sigma - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma.$$

Напомним, что если  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{h}$  – такие формации, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{h}$ . Тогда формацию  $\mathfrak{M}$  называют подформацией формации  $\mathfrak{h}$  или иначе  $\mathfrak{h}$ -подформацией.

**Теорема 3.14.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{h}$  – такие  $\sigma$ -локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{h}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен 1, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$ , где  $\mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{L}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{h}$ -формация, при этом:

(1) всякая  $\mathfrak{h}$ -подформация из  $\mathfrak{F}$  входит в  $\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$ ;

(2) всякая  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{X}$  из  $\mathfrak{F}$  такая, что  $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{h}$ , имеет вид  $\mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальная формация с  $\mathfrak{h}_\sigma$ -дефектом 1. Так как  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h}$ , то по теореме 3.8 в  $\mathfrak{F}$  содержится некоторая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{h}$ -формация  $\mathfrak{L}$ . По условию теоремы  $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{h}$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация формации  $\mathfrak{F}$ . Поэтому  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$ .

**Достаточность.** Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$ , где  $\mathfrak{L}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{h}$ -формация, а  $\mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -локальная формация из  $\mathfrak{h}$ . Тогда  $\mathfrak{h}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен 1 в силу леммы 3.13.

Покажем теперь, что имеют место утверждения (1) и (2). Поскольку  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{L}$ , то в силу лемм 2.3 и 2.13 из решеточного изоморфизма

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} /_\sigma (\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})) &= \\ &= (\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \vee_\sigma \mathfrak{L}) /_\sigma (\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})) = \\ &= \mathfrak{L} /_\sigma (\mathfrak{L} \cap ((\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \vee_\sigma \mathfrak{M})) = \\ &= \mathfrak{L} /_\sigma ((\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})) = \mathfrak{L} /_\sigma \mathfrak{L} \cap \mathfrak{h} \end{aligned}$$

получаем, что  $\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{F}$ . Так как  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h}$ , то любая  $\mathfrak{h}$ -подформация из  $\mathfrak{F}$  входит в  $(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \vee_\sigma \mathfrak{M}$ . Поэтому имеет место утверждение (1).

Покажем теперь, что в  $\mathfrak{F}$  нет отличных от  $\mathfrak{L}$  минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{h}$ -формаций. Допустим, что это неверно и пусть  $\mathfrak{L}_1$  – такая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{h}$ -формация из  $\mathfrak{F}$ , что  $\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}$ .

Тогда поскольку  $\mathfrak{h}_\sigma$ -дефекты формаций  $\mathfrak{L}$  и  $\mathfrak{L}_1$  равны 1 и, очевидно,  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{h}$ , то в силу леммы 2.7 имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{L}_1)|_\sigma &= |\mathfrak{L} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + \\ &+ |\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1)|_\sigma = 2. \end{aligned}$$

Последнее противоречит лемме 2.2, так как  $\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ . Таким образом, в формации  $\mathfrak{F}$  нет минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{h}$ -формаций, отличных от  $\mathfrak{L}$ .

Пусть теперь  $\mathfrak{X}$  – произвольная  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$  такая, что  $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{h}$ . Тогда в силу доказанного выше и теоремы 3.8 заключаем, что  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ . Так как при этом формация  $\mathfrak{X}$  имеет  $\mathfrak{h}_\sigma$ -дефект равный 1, то  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h}$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{X}$ . Поэтому имеет  $\mathfrak{X} = \mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$ , т. е. справедливо утверждение (2).  $\square$

В случае, когда  $\mathfrak{h} = \mathfrak{N}_\sigma$ , из теоремы 3.14 получаем

**Следствие 3.15.** Пусть  $\mathfrak{F}$  не  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная формация. Тогда и только тогда  $\sigma$ -нильпотентный  $\mathfrak{L}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен 1, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$ , где  $\mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{L}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\sigma$ -нильпотентная формация, при этом:

(1) всякая  $\sigma$ -нильпотентная подформация из  $\mathfrak{F}$  входит в  $\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$ ;

(2) всякая  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{X}$  из  $\mathfrak{F}$  имеет вид  $\mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$ .

В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ , из теоремы 3.14 получаем

**Следствие 3.16.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{h}$  – такие локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{N}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{h}_1$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен 1, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_1 \mathfrak{L}$ , где  $\mathfrak{M}$  – локальная подформация из  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{L}$  – минимальная локальная не  $\mathfrak{h}$ -формация, при этом:

(1) всякая  $\mathfrak{h}$ -подформация из  $\mathfrak{F}$  входит в  $\mathfrak{M} \vee_1 (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$ ;

(2) всякая локальная подформация  $\mathfrak{X}$  из  $\mathfrak{F}$  такая, что  $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{h}$ , имеет вид  $\mathfrak{L} \vee_1 (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$ .

Кроме того, если  $\mathfrak{h} = \mathfrak{N}$  – формация всех nilпотентных групп, из теоремы 3.14 получаем следующий известный результат.

**Следствие 3.17** [1, лемма 20.5]. В точности тогда nilпотентный дефект локальной формации  $\mathfrak{F}$  равен 1, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_1 \mathfrak{L}$ , где  $\mathfrak{M}$  – nilпотентная локальная формация,  $\mathfrak{L}$  – минимальная локальная ненильпотентная формация, при этом:

(1) всякая nilпотентная подформация из  $\mathfrak{F}$  входит в  $\mathfrak{M} \vee_1 (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N})$ ;

(2) всякая ненильпотентная локальная подформация  $\mathfrak{X}$  из  $\mathfrak{F}$  имеет вид  $\mathfrak{L} \vee_1 (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N})$ .

**Теорема 3.18.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие  $\sigma$ -локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ . Тогда если  $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ , то следующие условия равносильны:

- (1)  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$ ;
- (2) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация;
- (3) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{M}$  с  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$ .

**Доказательство.** Пусть имеет место (1) и  $\mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$ . Тогда если  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , то по теореме 2.8 имеем  $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ , где  $\mathfrak{L}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация. Пусть  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ ,  $\Pi_1 = \sigma(\mathfrak{M})$  и  $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$ . Покажем, что  $\mathfrak{N}_{\Pi_2}$  является дополнением к  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$ . Понятно, что  $\mathfrak{N}_{\Pi_2} \cap \mathfrak{M} = (1)$ . Покажем, что  $\text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) = \mathfrak{F}$ .

В силу теоремы 2.8 имеем  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$ , где  $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ . С другой стороны,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_1},$$

поскольку  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\Pi_1}$ . Теперь в силу лемм 2.14 и 2.6 имеем

$$\begin{aligned} \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) &= \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \\ &= (\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_1}) \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_\Pi = \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Таким образом, формация  $\mathfrak{N}_{\Pi_2}$  является дополнением к  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$ .

Понятно, что если имеет место утверждение (2), то утверждение (3) верно, так как любая  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{M}$  с  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$  является не  $\mathfrak{H}$ -подформацией из  $\mathfrak{F}$ .

Пусть теперь имеет место (3). Покажем, что выполняется условие (1). По условию теоремы  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ . Поэтому в силу леммы 2.5 в  $\mathfrak{F}$  имеется минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -формация  $\mathfrak{L}$ . Пусть  $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$ . Ввиду теоремы 2.8 имеет место  $|\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$ .

Значит, по условию теоремы в  $\mathfrak{F}$  найдется такая подформация  $\mathfrak{M}_1$ , что  $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1)$  и  $\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}_1)$ . Применяя теперь леммы 2.14 и 2.6, получаем, что  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1$  и формация  $\mathfrak{M}_1$   $\sigma$ -локальна.

Допустим, что  $\mathfrak{M}_1 \neq (1)$ . Тогда если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}_1)$ , то  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$  по условию теоремы. Поэтому и в силу леммы 2.5 (ii) имеют место включения

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1).$$

Полученное противоречие показывает, что  $\mathfrak{M}_1 = (1)$ . Значит,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}_1$ . Поэтому  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$ .  $\square$

**Замечание 3.19.** Отметим, что условие  $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$  в теореме 3.18 опустить нельзя, поскольку наличие дополнения в  $\mathfrak{F}$  у каждой ее  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -подформации, а также наличие дополнения в  $\mathfrak{F}$  у каждой  $\sigma$ -локальной подформации  $\mathfrak{M}$  из  $\mathfrak{F}$  с  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$  не влечет равенства  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$ .

Действительно, пусть  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  и

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_j} \vee_\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_k},$$

где  $\sigma_j, \sigma_k \in \sigma \setminus \{\sigma_i\}$ ,  $j \neq k$ . Тогда в силу лемм 2.6 и 2.14 имеем  $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_k}$ . Ввиду теоремы 3.4 и леммы 3.1 имеем  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 2$ . Однако, как нетрудно заметить, всякая  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация из  $\mathfrak{F}$ , а также всякая  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$  с  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом 1, имеют дополнение в  $\mathfrak{F}$ .

Вместе с тем, имеет место следующее

**Следствие 3.20.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – не  $\sigma$ -нильпотентная  $\sigma$ -локальная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- (1)  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$ ;
- (2) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее  $\sigma$ -локальная не  $\sigma$ -нильпотентная подформация;
- (3) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{M}$  с  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$ .

В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ , из теоремы 3.11 имеем

**Следствие 3.21.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ . Тогда если  $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ , то следующие условия равносильны:

- (1)  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\pi = 1$ ;
- (2) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация;
- (3) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее локальная подформация  $\mathfrak{M}$  с  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\pi = 1$ .

Кроме того, если  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$  – формация всех nilпотентных групп из теоремы 3.4 получаем следующий известный результат (см. следствие 5.2.11).

**Следствие 3.21** [2, с. 197]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – не-нильпотентная локальная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- (1)  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}|_\pi = 1$ ;
- (2) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее ненильпотентная локальная подформация;
- (3) в  $\mathfrak{F}$  дополняема каждая ее локальная подформация  $\mathfrak{M}$  с  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}|_\pi = 1$ .

#### 4 Приводимые $\sigma$ -локальные формации ограниченного $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта

Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальная формация. Формацию  $\mathfrak{F}$  мы называем *неприводимой  $\sigma$ -локальной*

формацией (или  $l_\sigma$ -неприводимой формацией), если  $\mathfrak{F} \neq l_\sigma \text{form}(\cup_{i \in I} \mathfrak{X}_i) = \vee_\sigma (\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$ , где  $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$  – набор всех собственных  $\sigma$ -локальных подформаций из  $\mathfrak{F}$ . Если же найдутся такие собственные  $\sigma$ -локальные подформации  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{H}$  из  $\mathfrak{F}$ , что  $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H}$ , то формация  $\mathfrak{F}$  называется *приводимой  $\sigma$ -локальной* (или  $l_\sigma$ -приводимой) формацией.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема, развивающая наблюдения работ [18], [50], [51].

**Теорема 4.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие  $\sigma$ -локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ , и пусть  $\mathfrak{F}$  –  $l_\sigma$ -приводима. Тогда и только тогда  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен  $k$ , когда  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(1)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта  $t$ ,  $1 \leq t \leq k-1$ , а  $\mathfrak{M}$  – такая  $\sigma$ -локальная формация  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта  $k-1$ , что  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$  является максимальной  $\sigma$ -локальной подформацией формации  $\mathfrak{L}$ ;

(2)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта  $k$ ,  $\mathfrak{M}$  – такая  $\sigma$ -локальная формация, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$ .

**Доказательство. Достаточность.** Пусть формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (1). Поскольку  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$  – единственная максимальная  $\sigma$ -локальная подформация формации  $\mathfrak{L}$ , то  $|\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = t-1$ . Значит, в силу леммы 3.13 имеем

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = t + k - 1 - (t - 1) = k.$$

Пусть теперь формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (2). Тогда по лемме 3.13 получим

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = k + 0 - 0 = k.$$

Таким образом, имеет место  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = k$ .

**Необходимость.** Доказательство необходимости проведем индукцией по  $k$ . Пусть  $k=1$  и  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальная формация с  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом 1. Так как  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , то по теореме 3.8 в  $\mathfrak{F}$  содержится некоторая минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация  $\mathfrak{L}$ . Поскольку  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен 1, то  $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация в  $\mathfrak{F}$ . Поэтому  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$  и формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть  $k > 1$  и, предположим, что для  $k-1$  теорема верна. Обозначим через  $\mathfrak{M}$  максимальную  $\sigma$ -локальную подформацию из  $\mathfrak{F}$ , у которой  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект равен  $k-1$ .

Допустим, что в формации  $\mathfrak{F}$  найдется такая неприводимая  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{X}$ , что  $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{M}$  и  $1 \leq |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma \leq k-1$ . Тогда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X}$ . Пусть  $t = |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma$ . Если  $t=1$ , то  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$  – единственная максимальная  $\sigma$ -локальная подформация формации  $\mathfrak{X}$ . В силу максимальной формации  $\mathfrak{M}$  имеет место равенство  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ . Поэтому  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ . Значит,  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$  и формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть теперь  $2 \leq t \leq k-1$  и любая неприводимая  $\sigma$ -локальная подформация формации  $\mathfrak{F}$  с  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом меньшим  $t$  содержится в формации  $\mathfrak{M}$ . Пусть  $\mathfrak{X}_1$  – такая максимальная  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{X}$ , что  $|\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}_1|_\sigma = t-1$ . Если  $\mathfrak{X}_1$  –  $l_\sigma$ -неприводима, то по предположению  $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ . Следовательно,  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$  и  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть  $\mathfrak{X}_1$  – приводимая  $\sigma$ -локальная формация. Поскольку  $t-1 < k-1$ , то по предположению индукции для формации  $\mathfrak{X}_1$  теорема верна. Поэтому формация  $\mathfrak{X}_1$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(а)  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$ , где  $\mathfrak{L}_1$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация и  $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = s$ ,  $1 \leq s \leq k-2$ , а  $\mathfrak{M}_1$  – такая  $\sigma$ -локальная формация, что  $|\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1|_\sigma = k-2$  и  $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{M}_1$  – максимальная  $\sigma$ -локальная подформация формации  $\mathfrak{L}_1$ ;

(б)  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$ , где  $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ , а  $\mathfrak{L}_1$  – такая неприводимая  $\sigma$ -локальная формация, что  $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = k-1$  и  $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{L}_1$ .

Пусть имеет место (б). Тогда по предположению  $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ . Кроме того, поскольку  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ . Следовательно,  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$  и формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть теперь имеет место (а). Если формация  $\mathfrak{M}_1$  является  $l_\sigma$ -неприводимой, то по предположению формации  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{L}_1$  должны содержаться в  $\mathfrak{M}$ . Значит,  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$  и формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (1) теоремы.

Если же формация  $l_\sigma$ -приводима, то по индукции для нее теорема верна. Повторяя приведенные выше рассуждения для  $\mathfrak{M}_1$  и т.д., через конечное число шагов (поскольку  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект рассматриваемых формаций конечен и строго уменьшается) мы получим, что  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$ . Поэтому формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (1) теоремы.

Допустим теперь, что любая неприводимая  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$ , имеющая  $\mathfrak{H}$ -дефект меньше  $k$ , содержится в  $\mathfrak{M}$ . Поскольку  $\mathfrak{F}$  – приводимая  $\sigma$ -локальная формация, то в  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$  найдется группа  $G$  такая, что  $\mathcal{L} = l_{\sigma} \text{form}(G) \neq \mathfrak{F}$ . Тогда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathcal{L}$ . Ввиду леммы 2.2 имеем  $d = |\mathcal{L} : \mathfrak{H} \cap \mathcal{L}|_{\sigma} \leq k$ . Предположим, что  $d < k$ .

Если  $\mathcal{L} = l_{\sigma}$ -неприводима, то по предположению  $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{M}$ . Что невозможно. Значит,  $\mathcal{L}$  – приводимая  $\sigma$ -локальная формация. Но тогда по индукции для формации  $\mathcal{L}$  теорема верна. Учитывая предположение о неприводимых  $\sigma$ -локальных подформациях, имеющих  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефект меньше  $k$ , и то, что  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ , снова заключаем, что  $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{M}$ . Противоречие. Поэтому  $d = k$ .

Пусть  $\mathcal{D}$  – такая неприводимая  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{M}$ , что  $\mathcal{D} \not\subseteq \mathcal{L}$ . По лемме 2.2 имеем  $m = |\mathcal{D} : \mathfrak{H} \cap \mathcal{D}|_{\sigma} \leq k$ . Ввиду того, что формации  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{D}$  содержатся в  $\mathfrak{F}$ , имеем  $\mathfrak{K} = \mathcal{L} \vee_{\sigma} \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{F}$ , и по лемме 2.2 имеем  $d = |\mathfrak{K} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}|_{\sigma} \leq k$ .

С другой стороны, по лемме 3.13 имеет место равенство

$$d = k + m - b, \text{ где } b = |\mathcal{L} \cap \mathcal{D} : \mathfrak{H} \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{D})|_{\sigma}.$$

Так как  $\mathcal{D} \not\subseteq \mathcal{L}$ , то  $b \leq m - 1$ . Поэтому  $a \geq k + m - (m - 1) = k + 1$ . Противоречие. Таким образом, любая неприводимая  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{M}$  содержится в  $\mathcal{L}$ . Значит, если  $\mathfrak{M}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация, то  $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}$ . Но тогда  $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_{\sigma} \mathfrak{M} = \mathcal{L}$ , что противоречит определению формации  $\mathcal{L}$ . Поэтому формация  $\mathfrak{M} = l_{\sigma}$ -приводима.

Предположим, что  $\mathcal{L} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ . Так как  $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_{\sigma} = k - 1$ , то по индукции для формации  $\mathfrak{M}$  теорема верна. Поэтому формацию  $\mathfrak{M}$  можно представить в виде (а) или (б). Учитывая, что любая неприводимая  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{H}$ -подформация из  $\mathfrak{M}$  содержится в  $\mathcal{L}$ , получаем, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}$ . Противоречие. Таким образом,  $\mathcal{L} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ . Поскольку  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathcal{L} \cap \mathfrak{H}$ .

Пусть  $\mathcal{L}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация. Тогда, используя представление формации  $\mathfrak{M}$  в виде (а) или (б) и учитывая, что любая неприводимая  $\sigma$ -локальная формация с  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефектом меньше  $k$  содержится в  $\mathcal{L}$ , получим, что  $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_{\sigma} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ . Таким образом, формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть теперь  $\mathcal{L}$  – приводимая  $\sigma$ -локальная формация. Тогда, так как  $\mathcal{L} \not\subseteq \mathfrak{M}$ , то по теореме

3.8 в  $\mathcal{L}$  содержится по меньшей мере одна  $\mathfrak{M}_{\sigma}$ -критическая формация  $\mathfrak{X}$ . Поскольку любая неприводимая  $\sigma$ -локальная формация с  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефектом меньше  $k$  содержится в формации  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ , то  $|\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_{\sigma} = k$ . Заметим также, что любая неприводимая  $\sigma$ -локальная формация из  $\mathcal{L}$  с  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефектом меньше  $k$  содержится в  $\mathfrak{X}$ , поскольку в противном случае формация  $\mathfrak{F}$  будет содержать  $l_{\sigma}$ -подформацию с  $\mathfrak{H}_{\sigma}$ -дефектом больше  $k$ , что невозможно ввиду леммы 2.1. В силу максимальности формации  $\mathfrak{M}$  имеем  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{X}$ . Поскольку  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathcal{L} \cap \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ . Поэтому, учитывая представление формации  $\mathfrak{M}$  в виде (а) или (б), имеем  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \vee_{\sigma} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ .

Таким образом, формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию (2) теоремы.  $\square$

В случае, когда  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}$ , мы получаем следующий специальный случай теоремы 4.1.

**Следствие 4.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – приводимая  $\sigma$ -локальная формация. Тогда и только тогда  $\sigma$ -нильпотентный  $l_{\sigma}$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен  $k$ , когда  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(1)  $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}$ , где  $\mathcal{L}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация  $\sigma$ -нильпотентного  $l_{\sigma}$ -дефекта  $t$ ,  $1 \leq t \leq k - 1$ , а  $\mathfrak{M}$  – такая  $\sigma$ -локальная формация  $\sigma$ -нильпотентного  $l_{\sigma}$ -дефекта  $k - 1$ , что  $\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}$  является максимальной  $\sigma$ -локальной подформацией формации  $\mathcal{L}$ ;

(2)  $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}$ , где  $\mathcal{L}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация  $\sigma$ -нильпотентного  $l_{\sigma}$ -дефекта  $k$ ,  $\mathfrak{M}$  – такая  $\sigma$ -локальная формация, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathcal{L}$ .

В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$  из теоремы 4.1 получаем

**Следствие 4.3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – такие локальные формации, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ , и пусть  $\mathfrak{F}$  – приводима. Тогда и только тогда  $\mathfrak{H}_1$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен  $k$ , когда  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(1)  $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_1 \mathfrak{M}$ , где  $\mathcal{L}$  – неприводимая локальная формация  $\mathfrak{H}_1$ -дефекта  $t$ ,  $1 \leq t \leq k - 1$ , а  $\mathfrak{M}$  – такая локальная формация  $\mathfrak{H}_1$ -дефекта  $k - 1$ , что  $\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}$  является максимальной локальной подформацией формации  $\mathcal{L}$ ;

(2)  $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_1 \mathfrak{M}$ , где  $\mathcal{L}$  – неприводимая локальная формация  $\mathfrak{H}_1$ -дефекта  $k$ ,  $\mathfrak{M}$  – такая локальная формация, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathcal{L}$ .

Кроме того, если  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$  – формация всех нильпотентных групп, из теоремы 4.1 получаем следующий известный результат.

**Следствие 4.4** [18]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – приводимая локальная формация. Тогда и только тогда нильпотентный  $l$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен  $k$ , когда  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(1)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая локальная формация нильпотентного  $l$ -дефекта  $t$ ,  $1 \leq t \leq k-1$ , а  $\mathfrak{M}$  – такая локальная формация нильпотентного  $l$ -дефекта  $k-1$ , что  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$  является максимальной локальной подформацией формации  $\mathfrak{L}$ ;

(2)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая локальная формация нильпотентного  $l$ -дефекта  $k$ ,  $\mathfrak{M}$  – такая локальная формация, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$ .

Кроме того, в случае, когда  $\mathfrak{H} = (1)$ , из теоремы 4.1 получаем следующий результат

**Теорема 4.5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – приводимая  $\sigma$ -локальная формация. Тогда и только тогда  $l_\sigma$ -длина формации  $\mathfrak{F}$  равна  $k$ , когда  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(1)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация  $l_\sigma$ -длины  $t$ ,  $1 \leq t \leq k-1$ , а  $\mathfrak{M}$  – такая  $\sigma$ -локальная формация  $l_\sigma$ -длины  $k-1$ , что  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$  является максимальной  $\sigma$ -локальной подформацией формации  $\mathfrak{L}$ ;

(2)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая  $\sigma$ -локальная формация  $l_\sigma$ -длины  $k$ ,  $\mathfrak{M}$  – такая  $\sigma$ -локальная формация, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$ .

В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ , из теоремы 4.5 имеем

**Следствие 4.6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – приводимая локальная формация. Тогда и только тогда  $l$ -длина формации  $\mathfrak{F}$  равна  $k$ , когда  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

(1)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая локальная формация  $l$ -длины  $t$ ,  $1 \leq t \leq k-1$ , а  $\mathfrak{M}$  – такая локальная формация  $l$ -длины  $k-1$ , что  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$  является максимальной локальной подформацией формации  $\mathfrak{L}$ ;

(2)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{L}$  – неприводимая локальная формация  $l$ -длины  $k$ ,  $\mathfrak{M}$  – такая локальная формация, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 255 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

3. Skiba, A.N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

4. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.

5. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара; под ред. канд. физ.-мат. наук М.И. Салука. – Минск: Наука и техника. – 1986. – С. 135–149.

6. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Математические заметки. – 1987. – Т. 41, № 4. – С. 490–499.

7. Скиба, А.Н. О локальных формациях с ограниченным  $p$ -разложимым дефектом / А.Н. Скиба // Известия вузов. Серия Математика. – 1991. – № 4. – С. 63–69.

8. Аниськов, В.В. Классификация разрешимых неприводимых локальных формаций с  $p$ -нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. – 1995. – № 2. – С. 66–69.

9. Аниськов, В.В. О неприводимых  $p$ -разрешимых локальных формациях с  $\pi$ -разложимым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вопросы алгебры. – 1995. – № 8. – С. 11–21.

10. Сафонов, В.Г. О кратко локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 112–127.

11. Сафонов, В.Г. О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1996. – № 3. – С. 8–12.

12. Аниськов, В.В. О приводимых локальных формациях с заданным  $\mathfrak{H}$ -дефектом / В.В. Аниськов // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 65–68.

13. Аниськов, В.В. Разрешимые локальные формации с  $\pi$ -нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 1999. – № 1 (15). – С. 60–63.

14. Сафонов, В.Г. О неразрешимых насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2004. – № 4 (25). – С. 142–147.

15. Аниськов, В.В. О локальных формациях с  $p$ -замкнутым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 6 (51). – С. 137–140.

16. Анищков, В.В. Разрешимые приводимые локальные формации  $p$ -разложимого дефекта 3 / В.В. Анищков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 91–94.
17. Анищков, В.В. О неприводимых разрешимых локальных формациях  $p$ -разложимого дефекта 3 / В.В. Анищков // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 16–21.
18. Сафонов, В.Г. О кратко локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 161–175.
19. Сафонов, В.Г. О кратко насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2005. – № 3 (37). – С. 105–109.
20. Сафонов, В.Г. О приводимых totally насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 4 (31). – С. 157–162.
21. Сафонов, В.Г. О неприводимых totally насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 131–136.
22. Сафонов, В.Г. Totally насыщенные формации с метанильпотентным  $I_\infty$ -дефектом 3 / В.Г. Сафонов // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2007. – № 4. – С. 40–46.
23. Сафонов, В.Г. О приводимых  $\omega$ -насыщенных формациях с разрешимым дефектом  $\leq 2$  / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 162–165.
24. Рябченко, А.И. Частично насыщенные формации с  $\pi$ -специальным дефектом 1 / А.И. Рябченко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 5 (37). – С. 59–68.
25. Сафонов, В.Г. О  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенных формациях с максимальной разрешимой подформацией / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия Математика. – 2008. – № 2. – С. 53–57.
26. Сафонов, В.Г. О  $\tau$ -замкнутых  $\omega$ -насыщенных формациях разрешимого  $I_\tau^\omega$ -дефекта 1 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2008. – № 2 (48). – С. 120–125.
27. Рябченко, А.И. О частично насыщенных формациях с  $\mathfrak{X}$ -дефектом 1 / А.И. Рябченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 28–34.
28. Рябченко, А.И. О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 216–222.
29. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.
30. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Известия АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
31. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Известия АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1981. – № 3. – С. 33–38.
32. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 780–782.
33. Скиба, А.Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Группы и др. алгебраические системы с условиями конечности. Новосибирск. Наука. – 1984. – Т. 4. – С. 101–118.
34. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.
35. Сафонова, И.Н. О минимальных  $\sigma$ -локальных не- $\mathfrak{H}$ -формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.
36. Сафонова, И.Н. О критических  $\sigma$ -локальных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.
37. Chi, Z. On one application of the theory of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – С. 85–88.
38. Zhang, Ch. On  $\Sigma_i^\sigma$ -closed classes of finite groups / Ch. Zhang, Z. Chi, A.N. Skiba // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 70 (2). – P. 1707–1716.
39. Chi, Z. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47 (3). – P. 957–968.
40. Tsarev, A. Laws of the lattices of  $\sigma$ -local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Article: 75.
41. Safonova, I.N. On some properties of the lattice of totally  $\sigma$ -local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2020. – № 3. – P. 1–14.
42. Воробьев, Н.Н. Отделимые решетки кратко  $\sigma$ -локальных формаций / Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько, А.О. Ходжагулыев // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 4. – С. 721–735.

43. *Safonova, I.N.* Some properties of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / I.N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – 2250138 (12 pages).

44. *Safonova, I.N.* A criterion for  $\sigma$ -locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.

45. *Safonova, I.N.* On properties of the lattice of all  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2023. – Vol. 51, № 10. – P. 4454–4461.

46. *Safonova, I.N.* On  $\sigma$ -inductive lattices of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / I.N. Safonova // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, № 1. – 2450017 (13 p).

47. *Safonova, I.N.* On the  $\tau$ -closedness of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation / I.N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136.

48. *Safonova, I.N.* On separability of the lattice of  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2024. – Vol. 52, № 2. – P. 3309–3318.

49. *Биркгоф, Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва: Наука, 1984. – 568 с.

50. *Safonov, V.G.* On reducible partially saturated formations with limited soluble defect / V.G. Safonov, I.N. Safonova // 5 Международная алгебраическая конференция в Украине: тезисы докладов, Одесса, 20-27 июля 2005 г. – Одесса: Изд-во Одесского ун-та, 2004. – С. 176.

51. *Safonova, I.N.* On totally  $\omega$ -composition formations with limited soluble  $c_\infty^\omega$ -defect / I.N. Safonova // The 9th International Algebraic Conference in Ukraine, L'viv, July 8-13 2013. – L'viv Ukraine, 2013. – P. 162.

*Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).*

*Поступила в редакцию 14.01.2025.*

---

#### Информация об авторах

*Сафонова Инна Николаевна* – к.ф.-м.н., доцент

*Скрундь Валентина Викторовна* – аспирант