

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА В ПСЕВДО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМИ

Я.Т. Мегралиев, Р.Ш. Садыхзаде

Бакинский государственный университет

INVERSE PROBLEM OF SIMULTANEOUS DETERMINATION OF THE RIGHT-HAND SIDE AND THE COEFFICIENT IN A THIRD-ORDER PSEUDO-HYPERBOLIC EQUATION WITH PERIODIC AND INTEGRAL CONDITIONS

Y.T. Mehraliyev, R.S. Sadikhzade

Baku State University

Аннотация. В работе исследована обратная краевая задача с неизвестным коэффициентом, который зависит от времени, для псевдо гиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. Существование и единственность решения вспомогательной задачи доказываются с помощью сжатых отображений. Затем снова производится переход к исходной обратной задаче и, следовательно, делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, псевдо гиперболическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Для цитирования: Мегралиев, Я.Т. Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента в псевдо гиперболическом уравнении третьего порядка с периодическим и интегральным условиями / Я.Т. Мегралиев, Р.Ш. Садыхзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 78–86. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_78. – EDN: NZDPLC

Abstract. The inverse boundary value problem with an unknown time-dependent coefficient for a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions is studied. When solving the original inverse boundary value problem, the transition from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem is carried out. The existence and uniqueness of the solution to an auxiliary problem are proved with the help of contracted mappings. Then the transition to the original inverse problem is made again, as a result, the conclusion is made on the solvability of the original inverse problem.

Keywords: inverse problem, pseudo-hyperbolic equation, Fourier method, classical solution.

For citation: Mehraliyev, Y.T. Inverse problem of simultaneous determination of the right-hand side and the coefficient in a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions / Y.T. Mehraliyev, R.S. Sadikhzade // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 78–86. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_78 (in Russian). – EDN: NZDPLC

Введение

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения надо определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, либо же правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. Другими словами, задача определения правой части дифференциального уравнения или (и) восстановления неизвестных коэффициентов по некоторым данным называется обратной краевой задачей в теории уравнений математической физики. Если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача называется линейной; если же

неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной.

Теория обратных задач ведет начало с XVII века. Это задачи нахождения фигуры равновесия вращающейся жидкости, кинематическая проблема в сейсмологии, обратная задача Штурма – Лиувилля и др.

Обратные задачи являются благоприятно развивающимся разделом современной математики и в последнее время широко применяются в различных областях науки. Обратные задачи для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим работы А.Н. Тихонова [1],

М.М. Лаврентьева [2], [3], А.М. Денисова [4], М.И. Иванчова [5] и их последователей.

Псевдо гиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа при распространении начальных уплотнений в вязком газе [6], в теории солитонов [7] при описании процесса движения электронов в системе «сверхпроводник – диэлектрик с туннельной проводимостью – сверхпроводник».

Разрешимость обратных задач в различных постановках с теми или иными условиями перепредопределения для псевдо гиперболических уравнений была предметом исследования в работах [8]–[13].

Данная работа посвящена исследованию нелинейной обратной задачи с неизвестным коэффициентом и правой части для псевдо гиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{xxx}(x,t) - \beta u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t) \quad (1.1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \int_0^T p_1(t)u(x,t) + \varphi(x), \quad (1.2)$$

$$u_t(x,0) = \int_0^T p_2(t)u(x,t) + \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_i,t) = h_i(t), \quad (i=1,2; 0 \leq t \leq T), \quad (1.5)$$

где $x_i \in (0,1)$, $i=1,2$; $x_1 \neq x_2$ – фиксированное, $\alpha > 0, \beta > 0$ – заданные числа, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_i(t)$ ($i=1,2$) – заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$ – искомые функции.

Введем обозначения

$$\tilde{C}^2(D_T) = \{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{xxx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение 1.1. Тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ и $b(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1.1) в D_T , условиям (1.2) в $[0,1]$, условиями (1.3)–(1.5) в $[0,T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.5).

Для исследования (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.6)$$

$$y(0) = \int_0^T p_1(t)y(t)dt, \quad y'(0) = \int_0^T p_2(t)y(t)dt, \quad (1.7)$$

где $p_1(t)$, $p_2(t)$, $a(t) \in C[0,T]$ – заданные функции, а $y = y(t)$ – искомая функция, причем под решением задачи (1.6), (1.7) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^2[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (1.6), (1.7) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1.1 [14]. Пусть $p_1(t)$, $p_2(t)$, $a(t) \in C[0,T]$ и выполняется неравенство

$$\left(T \|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2} \|a(t)\|_{C[0,T]} \right) T < 1,$$

то задача (1.6), (1.7) имеет только тривиальное решение.

Теперь наряду с обратной краевой задачей (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$, $a(t)$, $b(t) \in C[0,T]$, из соотношений (1.1)–(1.3) и

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.8)$$

$$h''_i(t) - \alpha u_{xxx}(x_i,t) - \beta u_{xx}(x_i,t) = a(t)h_i(t) + b(t)g(x_i,t) + f(x_i,t) \quad (i=1,2; 0 \leq t \leq T). \quad (1.9)$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть

$$\varphi(x) \in C^1[0,1], \quad \psi(x) \in C[0,1], \quad \varphi'(0) = \varphi'(1),$$

$$p_i(t) \in C[0,T], \quad h_i(t) \in C^2[0,T] \quad (i=1,2),$$

$$p_1(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad f(x,t), \quad g(x,t) \in C(D_T),$$

$$\int_0^1 f(x,t) dx = 0, \quad \int_0^1 g(x,t) dx = 0,$$

$$h(t) \equiv h_1(t)g(x_2,t) - h_2(t)g(x_1,t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (1.10)$$

$$h_i(0) = \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt + \varphi(x_i), \quad (1.11)$$

$$h'_i(0) = \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt + \psi(x_i), \quad i=1,2.$$

Тогда верны следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1.1)–(1.5) также является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9);

2. Каждое решение $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) такое, что

$$\left(T \|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2} \|a(t)\|_{C[0,T]} \right) T < 1, \quad (1.12)$$

является классическим решением (1.1)–(1.5).

Доказательство. Пусть $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.5). Интегрируя уравнение (1.1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx - \alpha(u_{xx}(1, t) - u_{xx}(0, t)) - \\ & - \beta(u_x(1, t) - u_x(0, t)) = \\ & = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx + b(t) \int_0^1 g(x, t) dx + \\ & + \int_0^1 f(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Допуская, что

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 g(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

из (1.13) находим:

$$\alpha(u_{xx}(1, t) - u_{xx}(0, t)) + \beta(u_x(1, t) - u_x(0, t)) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.14)$$

В силу (1.2), с учетом $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & u_x(1, 0) - u_x(0, 0) - \int_0^T p_1(t)(u_x(1, t) - u_x(0, t)) dt = \\ & = u_x(1, 0) - \int_0^T p_1(t)u_x(1, t) dt - (u_x(0, 0) - \\ & - \int_0^T p_1(t)u_x(0, t) dt) = \varphi'(1) - \varphi'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Очевидно, что общее решение (1.14) имеет вид:

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = Ce^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.16)$$

Отсюда, с учетом (1.15), получаем:

$$C \left(1 + \int_0^T p_1(t) e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} dt \right) = 0. \quad (1.17)$$

В силу $p_1(t) \geq 0$ ($0 \leq t \leq T$) из (1.17) получим $C = 0$, подставляя его в (1.16), заключаем, что $u_x(1, t) - u_x(0, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$). Следовательно, ясно, что выполняется и условие (1.8).

Подставляя в уравнение (1.1), $x = x_i$ ($i = 1, 2$) находим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} u(x_i, t) - \alpha u_{xx}(x_i, t) - \beta u_{xx}(x_i, t) = \\ & = a(t)u(x_i, t) + b(t)g(x_i, t) + f(x_i, t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Далее, считая $h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$) и дифференцируя два раза (1.5), имеем:

$$u_{ii}(x_i, t) = h_i''(t) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \quad (1.19)$$

Из (1.18), с учетом (1.5) и (1.19), приходим к выполнению (1.9).

Теперь предположим, что $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.8),

(1.9). Тогда из (1.13), с учетом

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 g(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

и (1.8), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.20)$$

В силу (1.2), с учетом (1.10), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(x, 0) dx - \int_0^T p_1(t) \left(\int_0^1 u(x, t) dx \right) dt = \\ & = \int_0^1 \left(u(x, 0) - \int_0^T p_1(t)u(x, t) dt \right) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \\ & \int_0^1 u_t(x, 0) dx - \int_0^T p_2(t) \left(\int_0^1 u(x, t) dx \right) dt = \\ & = \int_0^1 \left(u_t(x, 0) - \int_0^T p_2(t)u(x, t) dt \right) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Так как, в силу леммы 1.1, задача (1.20), (1.21) имеет только тривиальное решение, то

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

т. е. выполняется условие (1.4).

Далее, из (1.9) и (1.18) находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(x_i, t) - h_i(t)) = a(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \quad (1.22)$$

В силу (1.2) и условий согласования (1.11), имеем:

$$\begin{aligned} & u(x_i, 0) - h_i(0) - \int_0^T p_1(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) dt = \\ & = u(x_i, 0) - \int_0^T p_1(t)u(x_i, t) dt - \\ & - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t) dt \right) = \\ & = \varphi(x_i) - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t) dt \right) = 0, \\ & u_t(x_i, 0) - h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) dt = \\ & = u_t(x_i, 0) - \int_0^T p_2(t)u(x_i, t) dt - \\ & - \left(h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t) dt \right) = \\ & = \psi(x_i) - \left(h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t) dt \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Из (1.22) и (1.23), в силу леммы 1.1, заключаем, что выполняются условия (1.5). $\square$

2 Приведение вспомогательной обратной задачи к системе

Известно [15], система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \quad (2.1)$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots$

Так как система (2.1) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) его первую компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \quad (2.2)$$

$$\lambda_k = 2\pi k,$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t) dx,$$

$$u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искоемых коэффициентов $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) функции $u(x,t)$ из (1.1) и (1.2) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; u, a, b) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.3)$$

$$u''_{ik}(t) + \alpha \lambda_k^2 u'_{ik}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; u, a, b) \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (2.4)$$

$$u_{10}(0) = \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t) u_{10}(t) dt, \quad (2.5)$$

$$u'_{10}(0) = \psi_{10} + \int_0^T p_2(t) u_{10}(t) dt,$$

$$u_{ik}(0) = \varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt, \quad (2.6)$$

$$u'_{ik}(0) = \psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt, \quad i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$$

где

$$F_{1k}(t; u, a, b) = a(t) u_{1k}(t) + b(t) g_{1k}(t) + f_{1k}(t),$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t) dx,$$

$$f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$g_{10}(t) = \int_0^1 g(x,t) dx,$$

$$g_{1k}(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \psi_{10} = 2 \int_0^1 \psi(x) dx,$$

$$\varphi_{1k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$F_{2k}(t; u, a, b) = a(t) u_{2k}(t) + b(t) g_{2k}(t) + f_{2k}(t),$$

$$f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$g_{2k}(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{2k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx,$$

$$\psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь предположим, что $\alpha^2 \pi^2 - \beta > 0$.

Далее, из (2.3)–(2.6) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t) u_{10}(t) dt + \quad (2.7)$$

$$+ t \left(\psi_{10} + \int_0^T p_2(t) u_{10}(t) dt \right) + \int_0^t (t - \tau) F_{10}(\tau; u, a, b) d\tau,$$

$$u_{ik}(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (2.8)$$

$$(i = 1, 2; k = 1, 2, \dots),$$

где

$$\mu_{ik} = -\frac{\alpha \lambda_k^2}{2} + (-1)^i \lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (i = 1, 2),$$

$$\gamma_k = \mu_{2k} - \mu_{1k} = 2\lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

После подстановки выражения из (2.7), (2.8) в (2.2), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9), получаем:

$$u(x,t) = \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t) u_{10}(t) dt + \\ + t \left(\psi_{10} + \int_0^T p_2(t) u_{10}(t) dt \right) + \int_0^t (t - \tau) F_{10}(\tau; u, a, b) d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \left(\varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \left(\psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \right\} \cos \lambda_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k}t}) \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (e^{\mu_{2k}t} - e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \right\} \sin \lambda_k x. \quad (2.9)$$

Теперь, из (1.9), с учетом (2.2), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ g(x_2, t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) - \right. \\ \left. - g(x_1, t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{1k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) \times \right. \\ \left. \times (g(x_2, t) \cos \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \cos \lambda_k x_2) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{2k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t)) \times \right. \\ \left. \times (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \right\}, \quad (2.10)$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h_1(t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\ \left. - h_2(t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{1k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) \times \right. \\ \left. \times (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{2k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t)) \times \right. \\ \left. \times (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \right\}. \quad (2.11)$$

Два раза дифференцируя (2.8), получим:

$$u_{ik}'(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (e^{\mu_{1k}t} - e^{\mu_{2k}t}) \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (\mu_{2k} e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k} e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k} e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k} e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (i=1,2),$$

$$u_k''(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] + \\ + F_{ik}(t; u, a, b) \quad (i=1,2). \quad (2.13)$$

В силу (2.4) и (2.13) имеем:

$$\alpha \lambda_k^2 u_{ik}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; u, a, b) - u_{ik}''(t) =$$

$$= -\frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (i=1,2). \quad (2.14)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ и третьей компоненты $b(t)$ решение задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9), подставив выражение (2.14) в (2.10), (2.11) получаем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ g(x_2, t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) - \right. \\ \left. - g(x_1, t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \times \\ \times (g(x_2, t) \cos \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \cos \lambda_k x_2) + \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \times \\ \times (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \right\}, \quad (2.15)$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h_1(t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\ \left. - h_2(t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) + \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \times \\ \times (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) + \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \times \\ \times (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \right\}.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b)(\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(\tau-t)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(\tau-t)}) d\tau \times \\
& \times (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \times \right. \\
& \times \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \\
& + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) + \\
& + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b)(\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(\tau-t)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(\tau-t)}) d\tau \times \\
& \times (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \Big\}. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) сведено к решению системы (2.9), (2.15), (2.16) относительно неизвестных функций $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Справедлива следующая

Лемма 2.1. Если $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ любое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9), то функции

$$\begin{aligned}
u_{10}(t) &= \int_0^1 u(x, t) dx, \\
u_{1k}(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots, \\
u_{2k}(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

удовлетворяют системе (2.7), (2.8) в $C[0, T]$.

Из леммы 2.1 следует

Следствие 2.1. Пусть система (2.9), (2.15), (2.16) имеет единственное решение. Тогда если задача (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) имеет решение, то оно единственное.

3 Исследование существования и единственности классического решения обратной задачи

Обозначим через $B_{2,T}^\alpha$ [16] совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x,$$

$$\lambda_k = 2\pi k,$$

рассматриваемых в $\bar{D}_T$, где каждая из функций $u_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}
J(u) &\equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,
\end{aligned}$$

где α – некоторое неотрицательное число.

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^\alpha} = J(u).$$

Через E_T^α обозначим пространство

$$B_{2,T}^\alpha \times C[0, T] \times C[0, T]$$

вектор-функций $z(x, t) = \{u(x, t), a(t), b(t)\}$ с нормой

$$\|z(x, t)\|_{E_T^\alpha} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^\alpha} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^\alpha$ и E_T^α являются банаховыми пространствами.

В пространстве E_T^3 рассмотрим оператор

$$\Phi(u, a, b) = \{\Phi_1(u, a, b), \Phi_2(u, a, b), \Phi_3(u, a, b)\},$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_1(u, a, b) &= \\
&= \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x,
\end{aligned}$$

$$\Phi_2(u, a, b) = \tilde{a}(t), \quad \Phi_3(u, a, b) = \tilde{b}(t),$$

а $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$), $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равно соответственно правым частям (2.7), (2.8), (2.15) и (2.16).

Нетрудно видеть, что $\mu_{ik} < 0$,

$$|\mu_{ik}| \leq \frac{1}{2}(\alpha \lambda_k^2 - 1) + \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha \lambda_k^2 - 1)^2 - \beta \lambda_k^2} \leq \alpha \lambda_k^2,$$

$$|\mu_{1k} \mu_{2k}| = \beta \lambda_k^2,$$

$$\frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}(\alpha \lambda_k^2 - 1)^2 - \beta \lambda_k^2}} \leq \frac{1}{\alpha \lambda_k^2} \equiv \frac{\gamma_0}{\lambda_k^2}$$

$$(i = 1, 2; k = 1, 2, \dots).$$

Учитывая эти соотношения, имеем:

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \leq |\phi_{10}| + T|\psi_{10}| + \\
&+ T \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + T\|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \\
&+ |\psi_{10}| + T\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ T\sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T |g_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{7} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\phi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sqrt{7} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sqrt{7} \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) \times$$

$$\times T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{7T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \sqrt{7T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \sqrt{7T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2) \\
 & \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \{ \|g(x_2, t)(h''(t) + f(x_1, t)) - \\
 & - g(x_1, t)(h''(t) - f(x_2, t))\|_{C[0,T]} + \\
 & + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1, t)| + |g(x_2, t)| \|_{C[0,T]} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^2 \left[\alpha \beta \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & + \alpha T (\beta \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \alpha \|p_2(t)\|_{C[0,T]}) \times \\
 & \times \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & + \alpha^2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \alpha^2 \sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \alpha^2 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big\}, \quad (3.3) \\
 & \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \{ \|h_1(t)(h''(t) - f(x_2, t)) - \\
 & - h_2(t)(h''(t) - f(x_1, t))\|_{C[0,T]} + \\
 & + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |h_1(t)| + |h_2(t)| \|_{C[0,T]} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^2 \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & + \alpha T (\beta \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \alpha \|p_2(t)\|_{C[0,T]}) \times \\
 & \times \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & + \alpha^2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \alpha^2 \sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} +
 \end{aligned}$$

$$+ \alpha^2 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big\}. \quad (3.4)$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha^2 \pi^2 - \beta > 0$.
2. $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi'''(x) \in L_2(0,1),$
 $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1).$
3. $\psi(x) \in C^2[0,1], \psi'''(x) \in L_2(0,1),$
 $\psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1).$
4. $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T),$
 $f_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T),$
 $f(0, t) = f(1, t), f_x(0, t) = f_x(1, t),$
 $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T).$
5. $g(x, t), g_x(x, t), g_{xx}(x, t) \in C(D_T),$
 $g_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T),$
 $g(0, t) = g(1, t), g_x(0, t) = g_x(1, t),$
 $g_{xx}(0, t) = g_{xx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T).$
6. $p_i(t) \in C[0, T], h_i(t) \in C^2[0, T], i = 1, 2,$
 $h(t) \equiv h_1(t)g(x_2, t) - h_2(t)g(x_1, t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T).$

Тогда из (3.1)–(3.4) соответственно находим

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} & \leq A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \\
 & + C_1(T) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + D_1(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} & \leq A_2(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \\
 & + C_2(T) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + D_2(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} & \leq A_3(T) + B_3(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \\
 & + C_3(T) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + D_3(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1(T) & = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & + T \sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\
 & + 2\sqrt{7}\alpha\gamma_0 \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{7}\alpha\gamma_0 \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & + 2\sqrt{7T}\gamma_0 \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\
 B_1(T) & = T^2 + 2\sqrt{7}\gamma_0 T, \\
 C_1(T) & = T(1 + \sqrt{7}\alpha\gamma_0) \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \\
 & + T(T + \sqrt{7}\alpha\gamma_0) \|p_2(t)\|_{C[0,T]}, \\
 D_1(T) & = T \sqrt{T} \|g(x, t)\|_{L_2(D_T)} + 2\sqrt{7T}\gamma_0 \|g_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\
 A_2(T) & = \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \{ \|h_1(t)(h''(t) - f(x_2, t)) - \\
 & - h_2(t)(h''(t) - f(x_1, t))\|_{C[0,T]} + \\
 & + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1, t)| + |g(x_2, t)| \|_{C[0,T]} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left[\|\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right] \Bigg\},$$

$$B_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \right\|_{C[0,T]} T,$$

$$C_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \right\|_{C[0,T]} \times \\ \times \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) T,$$

$$D_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \right\|_{C[0,T]} \sqrt{T} \|g_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \\ A_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|g(x_2,t)(h''(t) - f(x_1,t)) - \right. \\ \left. - g(x_1,t)(h''(t) - f(x_2,t))\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} \right\} \times \\ \times \left[\|\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right] \Bigg\},$$

$$B_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} T,$$

$$C_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} \times \left(\|P_1(t)\|_{C[0,T]} + \|P_2(t)\|_{C[0,T]} \right) T,$$

$$D_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} \sqrt{T} \|g_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}.$$

Из неравенств (3.5)–(3.7) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} + \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \\ + C(T) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.8)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \\ B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T), \\ C(T) = C_1(T) + C_2(T) + C_3(T), \\ D(T) = D_1(T) + D_2(T) + D_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия 1–6 и справедливо неравенство

$$(A(T) + 2)(B(T)(A(T) + 2) + C(T) + D(T)) < 1, \quad (3.9)$$

тогда задача (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) имеет в шаре $K = K_R \left(\|z\|_{E_T^3} \leq R \leq A(T) + 2 \right)$ пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (3.10)$$

где $z = \{u, a, b\}$, компоненты $\Phi_i(u, a, b)$ ($i = 1, 2, 3$), оператора $\Phi(u, a, b)$, определены правыми частями уравнений (2.9), (2.15) и (2.16) соответственно.

Аналогично (3.8) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \\ + C(T) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D(T) \|b(t)\|_{C[0,T]} \leq \quad (3.11)$$

$$\leq A(T) + (A(T) + 2)(B(T)(A(T) + 2) + C(T) + D(T)),$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq B(T)(A(T) + 2) \times$$

$$\times \left(\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} \right) + \\ + C(T) \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \\ + D(T) \|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]}. \quad (3.12)$$

Тогда из оценок (3.11) и (3.12), с учетом (3.9) следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому оператор Φ в шаре $K = K_R$ имеет единственную неподвижную точку $\{z\} = \{u, a, b\}$, которая является решением уравнения (3.10), т. е. является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (2.9), (2.15) и (2.16).

Тогда функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T .

Теперь из (2.12) получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{7} \beta \gamma_0 \|\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ + \sqrt{7} \alpha \gamma_0 \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{7} \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) \times \\ \times T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \gamma_{0\sqrt{7T}} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ + \sqrt{7} \alpha \gamma_{0T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \alpha \gamma_{0\sqrt{7T}} \|b(t)\|_{C[0,T]} \|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда следует, что $u_i(x,t)$, $u_{ix}(x,t)$, $u_{ixx}(x,t)$ непрерывны в $\bar{D}_T$.

Из уравнения (2.4) имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \|u''_{ik}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq 2\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + 2\beta \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + 2 \left\| f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t) + b(t)g_x(x,t) \right\|_{C[0,T]} \Big\|_{L_2(0,1)} \\
& \quad (i=1,2).
\end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что функция $u_{ii}(x,t)$ непрерывна в $\bar{D}_T$.

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9). В силу следствия леммы 2.1, оно единственно в шаре $K = K_R$. $\square$

С помощью теоремы 1.1, в силу теоремы 2.1, непосредственно вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

Теорема 3.2. Пусть выполняются все условия теоремы 3.1 и $p_1(t) \geq 0$ ($0 \leq t \leq T$),

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\
& \int_0^1 f(x,t) dx = \int_0^1 g(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \\
& h_i(0) = \int_0^T p_1(t) h_i(t) dt + \varphi(x_i), \\
& h'_i(0) = \int_0^T p_2(t) h_i(t) dt + \psi(x_i), \quad i=1,2,
\end{aligned}$$

$$\left(T \|P_2(t)\|_{C[0,T]} + \|P_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2} (A(T) + 2) \right) T < 1.$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет в шаре $K = K_R$ ($\|z\|_{E_T^3} \leq A(T) + 2$) единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А.И. Об устойчивости обратных задач / А.И. Тихонов // Доклады АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
2. Лаврентьев, М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения / М.М. Лаврентьев // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 157, № 3. – С. 520–521.
3. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.Т. Шишатский. – Москва: Наука, 1980. – 288 с.
4. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танина. – Москва: Наука, 1978. – 206 с.

5. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – Москва: МГУ, 1994. – 206 с.

6. Войт, С.С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе / С.С. Войт // Ученые записки МГУ. Серия Механика. – 1954. – Т. 4, вып. 172. – С. 125–142.

7. Лонгрен, К. Солитоны в действии / К. Лонгрен, Э. Скотт. – Москва: Мир, 1981.

8. Кожанов, А.И. Об одном классе псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом / А.И. Кожанов, Р.Р. Сафиуллова // Челябинский физ.-матем. журнал. – 2022. – Т. 7, вып. 2. – С. 164–180.

9. Lorenzi, A. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator equation / A. Lorenzi, E. Paparoni // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1993. – Vol. 5, № 19. – P. 523–548.

10. Mehraliyev, Y. Two-dimensional inverse boundary value problem for a third-order pseudo hyperbolic equation with an additional integral condition / Y. Mehraliyev, R. Sadikhzade, A. Ramazanov // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2023. – Vol. 16, № 2. – P. 670–686.

11. Меграниев, Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с дополнительным интегральным условием / Я.Т. Меграниев // Известия вузов Поволжского региона. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – № 1. – С. 19–33.

12. Azizbayova, E.I. Inverse Boundary-Value Problem for the Equation of Longitudinal Wave Propagation with Non-self-adjoint Boundary Conditions / E.I. Azizbayova, Y.T. Mehraliyev // Filomat. – 2019. – Vol. 33, № 16. – P. 5259–5271. – DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1916259A>

13. Lorenzi, A. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator equation / A. Lorenzi, E. Paparoni // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1993. – Vol. 5, № 19. – P. 523–548.

14. Меграниев, Я.Т. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода / Я.Т. Меграниев, Ф.Х. Ализаде // Вестник Удмуртского ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки. – 2016. – Т. 26, № 4. – С. 503–514.

15. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – Москва: Наука, 1972.

16. Меграниев, Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка / Я.Т. Меграниев // Вестник ТвГУ. Серия Прикладная математика. – 2011. – № 23. – С. 25–38.

Поступила в редакцию 25.06.2024.

Информация об авторах

Меграниев Яшар Топуш – д.ф.-м.н., профессор
Садыхзаде Рена Шафи – аспирантка