

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЯХ КОНТУРА

Е.А. Лачугина

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

## FREE VIBRATIONS OF A FIVE-LAYER CIRCULAR PLATE AT DIFFERENT FIXATIONS OF THE CONTOUR

E.A. Lachugina

*Belarusian State University of Transport, Gomel*

**Аннотация.** Разработана математическая модель исследования собственных колебаний пятислойной несимметричной по толщине круглой пластины при защемленном или шарнирном опертом контуре. Для нахождения собственных чисел выписаны трансцендентные уравнения в зависимости от граничных условий. Приведена формула, связывающая собственные числа и частоты колебаний. Проведено численное исследование влияния толщины внутреннего несущего слоя и упругих характеристик материалов слоев на собственные числа и частоты. Показано, что увеличение упругих модулей материалов или толщины несущего слоя приводит к росту собственных частот.

**Ключевые слова:** пятислойная круговая пластина, несимметричность по толщине, собственные колебания, частоты.

**Для цитирования:** Лачугина, Е.А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е.А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_25](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_25). – EDN: WGDTR

**Abstract.** A mathematical model for the study of the natural vibrations of a five-layer circular plate asymmetric in thickness with pinched or hinged contours is developed. Transcendental equations depending on boundary conditions are written out to find the eigenvalues. The formula linking the eigennumbers and frequencies of oscillations is given. A numerical study of the influence of the thickness of the inner non-substantial layer and the elastic characteristics of the layer materials on the eigen-numbers and frequencies is carried out. It is shown that an increase in the elastic moduli of the materials or in the thickness of the supporting layer leads to an increase in the natural frequencies.

**Keywords:** five-layer circular plate, thickness asymmetry, natural oscillations, frequencies.

**For citation:** Lachugina, E.A. Free vibrations of a five-layer circular plate at different fixations of the contour / E.A. Lachugina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 25–30. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_25](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_25) (in Russian). – EDN: WGDTR

### Введение

Из-за повсеместного использования слоистых конструкций в технике и промышленности, возникает потребность в создании расчетных математических моделей для определения прочности конструкций.

В последние годы в различных отраслях народного хозяйства наблюдается повышенный интерес к применению композитных элементов конструкций. Это обуславливает необходимость разработки соответствующих математических моделей и методов расчета. Этой проблеме посвящены монографии [1]–[8]. Колебания неоднородных цилиндрических оболочек и стержней при резонансных и нестационарных нагрузках исследованы в статьях [9]–[13].

Изгиб трехслойных стержней в температурном поле рассмотрен в работах [14]–[16]. Публикации [17], [18] посвящены деформированию трехслойных пластин, связанных с упругим основанием Пастернака. Аналитическое исследование и

численная апробация полученных решений задач об изгибе трехслойных пластин различными нагрузками приведены в [19]–[22].

Работы [23]–[28] посвящены разработке математической модели и решению частных задач о собственных колебаниях симметричной по толщине круговой пятислойной пластины с легкими заполнителями. Здесь предложена постановка и приведено аналитическое решение задачи о собственных колебаниях *несимметричной* по толщине пятислойной круговой пластины.

### 1 Постановка начально-краевой задачи

Рассматриваются поперечные колебания несимметричной по толщине круглой пятислойной пластины (рисунок 1.1). Постановка начально-краевой задачи осуществляется в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя.

Три тонких несущих слоя, толщины которых  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_4$  (внешние (2, 4), внутренний (1)),

изготовлены из высокопрочного материала. Для них принимаются гипотезы Кирхгофа, т. е. нормали в этих слоях сохраняют свою длину и остаются прямолинейными и перпендикулярными к деформированной срединной поверхности. Менее прочные легкие заполнители (3, 5) имеют большую толщину, служат связующими для обеспечения совместной работы слоев. Их деформирование подчиняется гипотезе Тимошенко, согласно которой нормаль после приложения нагрузки не изменяет длины, остается прямолинейной, но не перпендикулярной срединной поверхности. Они поворачиваются на некоторые углы  $\psi_i(r, t)$  ( $i = 1, 2$ ) относительно новой нормали (относительный сдвиг). Касательные напряжения в легких заполнителях не велики и их работа не принимается во внимание. Деформации малые. Между слоями склейка, предотвращающая проскальзывание.

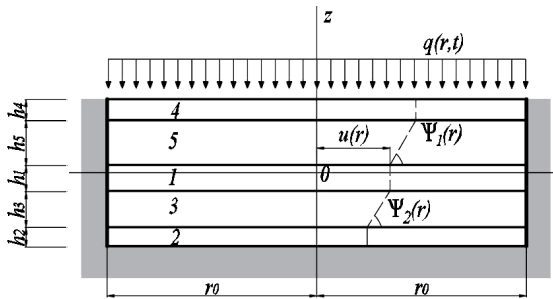


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пятислойной пластины

Предполагается, что осесимметричная распределенная нагрузка  $q(r, t)$  действует на внешнюю поверхность верхнего несущего слоя (2). На границе пластины ( $r = r_0$ ) могут быть приложены погонные силы и моменты  $T_r^0, H_{r1}^0, H_{r2}^0, M_r^0, Q^0$ . На контуре пластины жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев ( $\psi_i = 0$  при  $r = r_0$ ).

Радиальные перемещения изменяются линейно по толщине каждого слоя, тангенциальные смещения в этих слоях отсутствуют ( $u_\phi^{(k)} = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  – номер слоя, здесь и далее) в силу осесимметричности нагрузки. Согласно принятым гипотезам слои несжимаемые по толщине, следовательно, перемещения вдоль оси  $z$  для любой точки пластины совпадают с прогибом в срединной плоскости заполнителя:

$$u_z^{(k)}(r, t) = w(r, t).$$

Прогиб пластины, относительные сдвиги в заполнителях и радиальное перемещение срединной плоскости не зависят от угловой координаты  $\phi$ , т. е.  $w(r, t)$ ,  $\psi_i(r, t)$ ,  $u(r, t)$ . В дальнейшем эти функции являются искомыми.

Согласно предположению о прямолинейности нормалей в заполнителях, в них возникают сдвиговые деформации:

$$2\varepsilon_{rz}^{(5)} = u_{r,z}^{(5)} + w_{,r} = \psi_1,$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi_2.$$

Используя интегралы от этих деформаций, и исходя из геометрических соображений, получим выражения для радиальных перемещений в слоях  $u_r^{(k)}$  через искомые функции

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5\psi_1, \\ (0,5h_1 + h_5 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5), \\ u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi_1, \\ (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5), \\ u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, \quad (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1), \\ u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi_2, \\ (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1), \\ u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\psi_2, \\ (-0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $(u + h_5\psi_1)$  – смещение верхнего несущего слоя, вызванное деформацией заполнителя;  $(u - h_3\psi_2)$  – смещение нижнего несущего слоя; запятой в нижнем индексе обозначена производная по радиальной координате.

Деформации в слоях получим из (1.1), используя соотношения Коши [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(4)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + h_5\psi_{1,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(4)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} + h_5\psi_1); \quad \varepsilon_{rz}^{(4)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(5)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_{1,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(5)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_1\right); \quad \varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{\psi_1}{2}; \\ \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_{2,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(3)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_2\right); \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{\psi_2}{2}; \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - zw_{,rr} - h_3\psi_{2,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} - h_3\psi_2); \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Физические уравнения состояния (1.2) соответствуют закону Гука:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\ (\alpha &= r, \phi; k = 1, 2, \dots, 5); \\ s_{rz}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{rz}^{(k)}, \quad (k = 3, 5), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $s_\alpha^{(k)}$ ,  $\varepsilon_\alpha^{(k)}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформаций;  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – гидростатическое напряжение и средняя деформация,  $G_k$ ,  $K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования.

Используя выражения (1.3), введем внутренние силы  $T_\alpha^{(k)}$  и моменты  $M_\alpha^{(k)}$ ,  $H_{\alpha i}^{(k)}$  в слоях пластины:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &= \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_{\alpha 1} &= h_5 T_\alpha^{(4)} - 0,5 h_1 T_\alpha^{(5)} + M_\alpha^{(5)}, \\ H_{\alpha 2} &= -h_3 T_\alpha^{(2)} + 0,5 h_1 T_\alpha^{(3)} + M_\alpha^{(3)}, \quad \alpha = r, \varphi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

С помощью вариационного принципа Лагранжа и выражений (1.1), (1.4), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих колебания рассматриваемой пластины в перемещениях:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \psi_1 - a_4 \psi_2) &= 0, \\ L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \psi_1) &= 0, \\ L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \psi_2) &= 0, \end{aligned}$$

$L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_5 \psi_1 + a_7 \psi_2) - M_0 \ddot{w} = -q$ , (1.5) где  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные силы при поперечных колебаниях; точка сверху обозначает производную по времени;  $M_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5$ ;  $\rho_k$  – плотность материала;  $L_2, L_3$  – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

$a_i$  – коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^5 h_k K_k^+,$$

$$a_2 = \left[ K_4^+ h_4 (0,5 h_4 + 0,5 h_1 + h_5) + K_5^+ 0,5 h_5 (h_1 + h_5) - K_3^+ 0,5 h_3 (h_1 + h_3) - K_2^+ h_2 (0,5 h_2 + 0,5 h_1 + h_3) \right],$$

$$a_3 = \left[ K_4^+ h_4 h_5 + K_5^+ 0,5 h_5^2 \right],$$

$$a_4 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 + K_3^+ 0,5 h_3^2 \right],$$

$$a_5 = \left[ K_4^+ h_4 h_5 (0,5 h_1 + 0,5 h_4 + h_5) + K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right) \right],$$

$$a_6 = \left[ K_4^+ h_5^2 h_4 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3} \right],$$

$$a_7 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (0,5 h_1 + 0,5 h_2 + h_3) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$a_8 = \left[ K_2^+ h_3^2 h_2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right],$$

$$a_9 = \left[ K_4^+ h_4 \left( \frac{h_4^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + \right.$$

$$\left. + K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_2^+ h_2 \left( \frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \right].$$

В качестве кинематических граничных условий в дальнейшем принимается защемление или шарнирное опирание контура. При защемлении должны выполняться требования

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0, \text{ при } r = r_0. \quad (1.6)$$

При шарнирном опирании –

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = M_r = 0, \text{ при } r = r_0, \quad (1.7)$$

где  $M_r$  – радиальный момент, введенный в (1.4).

В начальный момент перемещения и скорость колебаний принимаются нулевыми:

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = \dot{w} = 0, \text{ при } t = 0. \quad (1.8)$$

## 2 Решение краевой задачи

Положив в (1.5) нагрузку  $q = 0$ , получим систему уравнений, описывающую собственные колебания пластины. С помощью простых преобразований и последующего двукратного интегрирования первых трех уравнений эта система приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \\ \psi_1 &= b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ \psi_2 &= b_3 w_{,r} + C_5 r + C_6 / r, \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{a_8(a_6 a_2 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6},$$

$$b_2 = \frac{a_3(a_2 a_8 + a_4 a_7) - a_5(a_1 a_8 - a_4^2)}{a_3^2 a_8 - a_6(a_1 a_8 - a_4^2)},$$

$$b_3 = \frac{a_4(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_7(a_1 a_6 - a_3^2)}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6},$$

$$M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_6 a_8 b_4}{b_4 b_7 - b_5 b_6},$$

$$b_4 = a_8(a_2 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6,$$

$$b_5 = a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7,$$

$$b_6 = a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7,$$

$$b_7 = a_8(a_6 a_9 - a_5^2) - a_6 a_7^2.$$

В начале координат перемещения  $u$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  ограничены по величине, поэтому необходимо положить  $C_2 = C_4 = C_6 = 0$ .

Для удовлетворения четвертому уравнению системы (2.1) прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (2.2)$$

где  $v(r)$  – неизвестная функция;  $\omega$  – частота собственных колебаний;  $A$  и  $B$  – константы, следующие из начальных условий.

После подстановки прогиба (2.2) в (2.3) получим дифференциальное уравнение четвертого порядка для нахождения функции  $v(r)$ :

$$L_3(v, r) - \beta^4 v = 0, \quad (2.3)$$

или

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r} v_{,rrr} - \frac{1}{r^2} v_{,rr} + \frac{1}{r^3} v_{,r} - \beta^4 v = 0,$$

где  $\beta^4 = M^4 \omega^2$ .

Решение уравнения (2.4) следующее

$$v(\beta r) = C_7 J_0(\beta r) + C_8 I_0(\beta r) + C_9 Y_0(\beta r) + C_{10} K_0(\beta r), \quad (2.4)$$

где  $J_0, Y_0, I_0, K_0$  – разновидности функций Бесселя;  $C_7, \dots, C_{10}$  – константы интегрирования.

Исходя из ограниченности радиального перемещения и относительных сдвигов в центре пластины, в (2.4) следует положить  $C_9 = C_{10} = 0$ , т. к. функции  $Y_0(\beta r)$  и  $K_0(\beta r)$  неограниченны в начале координат. Тогда решение системы (2.1) представляется в виде:

$$\begin{aligned} u(r, t) &= b_1 w_{,r} + C_1 r, \\ \psi_1(r, t) &= b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ \psi_2(r, t) &= b_3 w_{,r} + C_5 r, \\ w(r, t) &= (C_7 J_0(\beta r) + C_8 I_0(\beta r)) \times \\ &\times (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

При защемленном контуре пластины должны выполняться требования (1.6). Два последние из них приводят к однородной системе алгебраических уравнений для определения  $C_7, C_8$ :

$$\begin{aligned} C_7 J_0(\beta r_0) + C_8 I_0(\beta r_0) &= 0, \\ -C_7 J_1(\beta r_0) + C_8 I_1(\beta r_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $J_1, I_1$  – функции Бесселя первого порядка.

Для существования ненулевых решений у системы (2.6) должен быть нулевой детерминант:

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (2.7)$$

Это трансцендентное уравнение служит для определения собственных чисел пластины с защемленным контуром.

При шарнирном опирании пластины и наличии на контуре жесткой диафрагмы, при  $r = r_0$ , должны выполняться условия (1.7). Следовательно,

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = 0 \text{ при } r = r_0,$$

$$\begin{aligned} M_r &= \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz \Big|_{r=r_0} = \\ &= \left( a_2 u_{,r} + a_5 \psi_{1,r} + a_7 \psi_{2,r} - a_9 w_{,rr} - a_{90} \frac{w_{,r}}{r_0} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \\ a_{90} &= \left[ K_4^- h_4 \left( \frac{h_4^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + \right. \\ &+ K_5^- h_5 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_3^- h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + \\ &+ K_1^- \frac{h_1^3}{12} + K_2^- h_2 \left( \frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \Big]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогичное уравнение для определения собственных чисел пластины с шарнирно опертым контуром следует из двух последних требований (2.8):

$$\begin{aligned} J_0(\beta r_0) \left[ a_{10} \left( \beta I_0(\beta r_0) - \frac{I_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} I_1(\beta r_0) \right] + \\ + I_0(\beta r_0) \left[ a_{10} \left( \beta J_0(\beta r_0) - \frac{J_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} J_1(\beta r_0) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_9 - a_2 b_1 - a_5 b_2 - a_7 b_3, \\ a_{11} &= a_{90} + a_2 b_1 + a_5 b_2 + a_7 b_3. \end{aligned}$$

После вычисления собственных чисел  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) из уравнений (2.7) и (2.9), частоты собственных колебаний следуют из соотношения, введенного в (2.3)  $\omega^2 = \beta^4 / M^4$ .

### 3 Численные результаты

Параметры собственных колебаний исследованы для пластины единичного радиуса, составленной из материалов ДТ16-Т–фторопласт-4–ДТ16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Геометрические размеры слоев, отнесенные к радиусу  $r_0$ , следующие:  $h_1 = 0,01$ ,  $h_2 = h_4 = 0,015$ ,  $h_3 = h_5 = 0,025$ . В таблице 3.1 приведены отношения собственных чисел  $\beta_n$  при защемленном и при шарнирно опертом контурах пластины.

Таблица 3.1 – Собственные числа пяти-слойной пластины

| Номер $n$ | $\beta_n$<br>заделка /<br>шарнир | Номер $n$ | $\beta_n$<br>заделка /<br>шарнир |
|-----------|----------------------------------|-----------|----------------------------------|
| 0         | 3,196 / 3,165                    | 8         | 28,279 / 28,063                  |
| 1         | 6,306 / 6,248                    | 9         | 31,378 / 31,186                  |
| 2         | 9,439 / 9,354                    | 10        | 34,561 / 34,311                  |
| 3         | 12,577 / 12,466                  | 11        | 37,702 / 37,436                  |
| 4         | 15,716 / 15,582                  | 12        | 40,844 / 40,562                  |
| 5         | 18,857 / 18,700                  | 13        | 43,985 / 43,690                  |
| 6         | 21,997 / 21,819                  | 14        | 47,126 / 46,817                  |
| 7         | 25,138 / 24,940                  |           |                                  |

Собственные числа при шарнирном опирании несколько меньше. Они отличаются, как правило, по второй значащей цифре.

В таблице 3.2 приведены отношения собственных частот колебаний  $\omega_n$  при защемленном и при шарнирно опертом контурах пластины.

Здесь, как и у собственных чисел, частоты колебаний при шарнирном опирании несколько ниже, что объясняется меньшей жесткостью конструкций.

На рисунке 3.1 показано изменение собственных чисел  $\beta_0$  и соответствующих собственных частот  $\omega_0$  в зависимости от толщины внутреннего несущего слоя при шарнирном опирании (1, 2) и при защемлении контура (1', 2').

Интересно отметить, что у шарнирно опертой пластины жесткость увеличивается вместе с  $h_1$ , что приводит к росту частот, в то время как собственные числа уменьшаются.

Таблица 3.2 – Собственные частоты пятислойной пластины

| Номер $n$ | $\omega_n$<br>заделка / шарнир | Номер $n$ | $\omega_n$<br>заделка / шарнир |
|-----------|--------------------------------|-----------|--------------------------------|
| 0         | 223,129 / 218,821              | 8         | 17469,090 / 17203,246          |
| 1         | 868,661 / 852,755              | 9         | 21507,638 / 21245,235          |
| 2         | 1946,230 / 1911,336            | 10        | 26092,446 / 25716,3284         |
| 3         | 3455,384 / 3394,661            | 11        | 31050,670 / 30614,070          |
| 4         | 5395,432 / 5303,818            | 12        | 36441,709 / 35940,236          |
| 5         | 7767,610 / 7638,805            | 13        | 42262,131 / 41697,142          |
| 6         | 10569,857 / 10399,486          | 14        | 48513,584 / 47879,473          |
| 7         | 13803,958 / 13587,361          |           |                                |

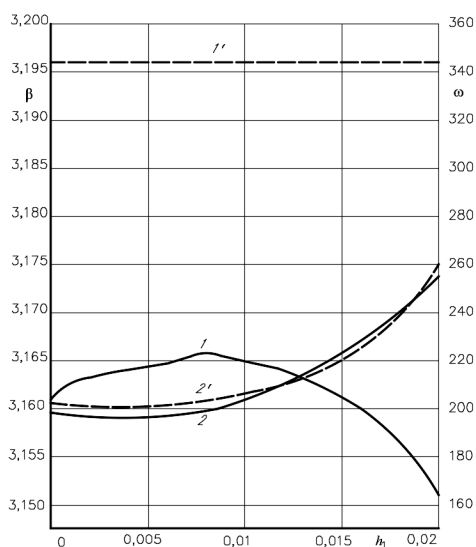


Рисунок 3.1. – Зависимость собственных чисел (частот) пятислойной пластины от толщины внутреннего несущего слоя:

1 –  $\beta_0$  (шарнир), 2 –  $\omega_0$  (шарнир),  
1' –  $\beta_0$  (заделка), 2' –  $\omega_0$  (заделка)

На рисунке 3.2 показана аналогичная зависимость собственных чисел (частот) пятислойной пластины при других материалах пакета: для несущих слоев – титан, для заполнителей – пенополиуретан. Здесь наблюдается подобный эффект: с ростом  $h_1$  растут частоты, собственные числа убывают.

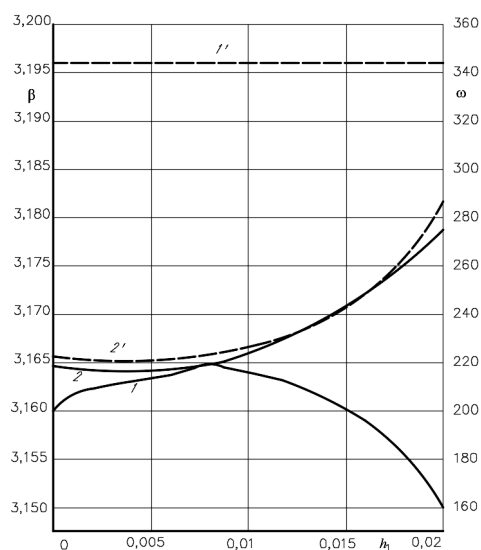


Рисунок 3.2. – Изменение собственных чисел и частот при росте толщины внутреннего несущего слоя: 1 –  $\beta_0$  (шарнир), 2 –  $\omega_0$  (шарнир), 1' –  $\beta_0$  (заделка), 2' –  $\omega_0$  (заделка)

### Заключение

Предложенная постановка задачи и полученное общее решение уравнений свободных колебаний позволяют исследовать собственные числа и частоты круговой несимметричной по толщине пятислойной пластины в зависимости от материалов слоев и их размеров.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.
2. Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: Белорусский государственный университет, 2021. – 535 с. – EDN: FICEUF.
3. Zhuravkov, M. Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore: Springer Verlag, 2023. – 317 p. – DOI: 10.1007/978-981-19-8410-5. – EDN YECKNS.
4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузках / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
5. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore – London, World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
6. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Гомель, БелГУТ, 2004. – 376 с.
7. Старовойтов, Э.И. Механика материалов / Э.И. Старовойтов. – Гомель, БелГУТ, 2011. – 380 с.
8. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э.И. Старовойтов,

Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель, БелГУТ, 2024. – 395 с.

9. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т. 21, № 2. – Р. 162–169.

10. Леоненко, Д.В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании / Д.В. Леоненко, Э.И. Старовойтов // *Прикладная механика*. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 37–46. – EDN: TUBEPP.

11. Bakulin, V.N. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V.N. Bakulin, D.A. Boitsova, A.Ya. Nedbai // *Mechanics of composite materials*. – 2021. – Vol. 57, № 5. – Р. 623–634.

12. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, № 2. – Р. 145–152. – DOI: 10.3103/S1052618814010178.

13. Suvorov, Ye.M. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium / Ye.M. Suvorov, D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2012. – Vol. 76, № 5. – Р. 511–518. – DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.

14. Pradhan, M. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient / M. Pradhan, P.R. Dash, P.K. Pradhan // *Meccanica*. – 2016. – Vol. 51, № 3. – Р. 725–739.

15. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

16. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т. 2, № 3. – С. 392–406.

17. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сдвиг пластины / А.Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – Т. 332, № 6. – С. 25–34.

18. Zadeh, H.V. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load / H.V. Zadeh, M. Tahani // *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. – 2017. – Vol. 6, № 1. – Р. 1–10.

19. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels / L. Yang, O. Harrysson, H. West, D. Cormier // *Materials Sciences and Applications*. – 2013. – Vol. 4, № 8. – Р. 471–477. – DOI: 10.4236/msa.2013.48057.

20. Захарчук, Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Т. 12, № 12. – С. 66–75.

21. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Т. 12, № 12. – С. 152–157.

22. Салицкий, В.С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Т. 15, № 15. – С. 209–213.

23. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

24. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е.А. Лачугина // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник* – Минск: БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

25. Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е.А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – Вып. 16.

26. Лачугина, Е.А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины / Е.А. Лачугина // *Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа, Гомель, 16-17 ноября 2023 года*. – Гомель: БелГУТ, 2023. – С. 111–113. – EDN: FGFSZY.

27. Лачугина, Е.А. Собственные колебания пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е.А. Лачугина // *Механика, Сейсмостойкость, Машиностроение по проблемам «Обеспечения сейсмической безопасности и сейсмостойкости зданий и сооружений, решению прикладных задач механики»*: сборник докладов международной научной конференции, посвященной 90-ю академика АН РУз Т.Р. Рашидова. – Ташкент, 2024. – Том II. – С. 385–390.

28. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е.А. Лачугина // *III Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования: сборник / редкол.: Н.Н. Шалобыта (гл. ред.) [и др.]*. – Брест: БрГТУ, 2024. – С. 42–43.

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект №T24M-004).*

*Поступила в редакцию 14.11.2024.*

#### Информация об авторах

Лачугина Екатерина Андреевна – аспирантка