

УДК 517.5

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67

EDN: NEPSMJ

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СТРУКТУРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Г.Н. Казимиров, В.В. Бураковский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EQUIVALENT STRUCTURAL CHARACTERISTIC OF A FUNCTION FROM A LEBESGUE SPACE

G.N. Kazimirov, V.V. Burakovskiy

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Доказывается эквивалентность итерированного модуля гладкости и K -функционала Петре.

Ключевые слова: итерированный модуль гладкости, K -функционал.

Для цитирования: Казимиров, Г.Н. Эквивалентная структурная характеристика функции из пространства Лебега / Г.Н. Казимиров, В.В. Бураковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 67–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67. – EDN: NEPSMJ

Abstract. The equivalence of the iterated modulus of smoothness and the Petre K -functional is proved.

Keywords: iterated modulus of smoothness, K -functional.

For citation: Kazimirov, G.N. Equivalent structural characteristic of a function from a Lebesgue space / G.N. Kazimirov, V.V. Burakovskiy // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 67–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67 (in Russian). – EDN: NEPSMJ

Введение

Ранее в [1]–[3] были получены теоремы о связи итерированных обобщённых модулей гладкости с K -функционалом Петре. В настоящей работе рассматривается обычный итерированный модуль гладкости и его связь с K -функционалом Петре.

1 Основные определения

Будем говорить, что 2π -периодическая функция $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, если для $1 \leq p < \infty$ она измерима на отрезке $[0, 2\pi]$ и

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$ и $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$.

Введём обозначения ($r = 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(f, x) &= f(x+h) - f(x), \\ \Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x) &= \Delta_{h_1}^1(\Delta_{h_2, \dots, h_{r-1}}^{r-1}(f, x), x), \\ \Delta_h^r(f, x) &= \Delta_h^1(\Delta_h^{r-1}(f, x), x), \\ \tilde{\omega}_r(f, \delta)_p &= \sup_{h_i \leq \delta, i=1, \dots, r} \left\| \Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x) \right\|_p. \end{aligned}$$

Через $W_p^{(r)}$ обозначим классы (пространства Соболева) таких функций g , что $g \in L_p$ для $1 \leq p \leq \infty$, а для $p = \infty$ существует величина

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \inf \left\{ M : |f(x)| \leq M n.в. \right\}$$

и

$$\begin{aligned} W_p^{(1)} &= \left\{ f : f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \varphi - 2\pi\text{-периодическая и } \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0, \varphi \in L_p \right\}, \\ &\quad \dots \\ W_p^{(r)} &= \left\{ f : f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \varphi - 2\pi\text{-периодическая и } \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0, \varphi \in W_p^{(r-1)} \right\}. \end{aligned}$$

Для $f \in L_p$ введём K -функционал Петре по формуле:

$$K_r(f, \delta)_p = \inf_{g \in W_p^{(r)}} \left\{ \|f - g\|_p + \delta^r \|g^{(r)}(x)\|_p \right\}.$$

2 Вспомогательные утверждения

$$\text{Положим } H^1(f, x) = \int_0^x f(z) dz,$$

$$L_h^1(f, x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u) du,$$

а для $k = 2, 3, \dots$

$$L_{h_1, \dots, h_k}^k(f, x) = L_{h_k}(L_{h_1, \dots, h_{k-1}}^{k-1}(f, x), x),$$

$$H^k(f, x) = H^1(H^{k-1}(f, x), x).$$

Лемма 2.1. Если $f \in L_1$, то для любых $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$L_h^k(f, x) = \frac{1}{h^k} \Delta_h^k(H^k(f, x), x).$$

Доказательство: воспользуемся индукцией по k .

1. Пусть $k = 1$. Тогда $f(x) = (H^1(f, x))'$,

$$f(x+u) = (H^1(f, x+u))',$$

$$L_h^1(f, x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u) du = \frac{1}{h} \int_0^h (H(f, x+u))' du =$$

$$= \frac{1}{h} (H(f, x+h) - H(f, x)) = \frac{1}{h} \Delta_h^1(H(f, x), x).$$

2. Предположим Лемма 2.1 справедлива для $k-1$, т. е.

$$L_h^{k-1}(f, x) = \frac{1}{h^{k-1}} \Delta_h^{k-1}(H^{k-1}(f, x), x).$$

Тогда

$$(H^k(f, x))' = H^{k-1}(f, x),$$

$$L_h^k(f, x) = \frac{1}{h} \int_0^h L_h^{k-1}(f, x+u) du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \int_0^h \Delta_h^{k-1}(H^{k-1}(f, x), x+u) du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \int_0^h \Delta_h^{k-1}((H^k(f, x))', x+u) du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \int_0^h (\Delta_h^{k-1}(H^k(f, x), x+u))' du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \Delta_h^k(H^k(f, x), x). \quad \square$$

3 Основной результат

Теорема 3.1. Пусть даны числа p, r такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для $f \in L_p$ справедливо неравенства:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta)_p \leq K_r(f, \delta)_p \leq C_2 \tilde{\omega}(f, \delta)_p,$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и δ .

Доказательство. Для любой функции $g \in L_p$ $\tilde{\omega}_r(f, \delta)_p \leq \tilde{\omega}_r(f - g, \delta)_p + \tilde{\omega}(g, \delta)_p$.

Очевидно, что $\tilde{\omega}_r(f - g, \delta)_p \leq C_3 \|f - g\|_p$.

Далее

$$\Delta_{t_1}^1(g, x) = g(x+t_1) - g(x) = \int_0^{t_1} g'(x+u) du,$$

$$\|\Delta_{t_1}^1(g, x)\|_p \leq \left| \int_0^{t_1} \|g'(x+u)\|_p du \right| = |t_1| \|g'(x)\|_p.$$

По индукции получаем, что

$$\|\Delta_{t_1, \dots, t_r}^r(g, x)\|_p \leq |t_1| \cdot |t_2| \cdot \dots \cdot |t_r| \|g^{(r)}(x)\|_p.$$

Следовательно, $\tilde{\omega}_r(g, \delta)_p \leq \delta^r \|g^{(r)}(x)\|_p$.

Переходя к точной нижней грани по всем функциям $g \in W_p^{(r)}$, получим:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta)_p \leq K_r(f, \delta)_p.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$$A_h^r(f, x) = f(x) - (E - L_h^r)^r(f, x),$$

где

$$E(f, x) = f(x).$$

Очевидно, $L_h^r(f, x) \in W_p^{(r)}$. Нетрудно проверить, что $W_p^{(l)} \subset W_p^{(r)}$ при $l \geq r \geq 1, l = r, r+1, \dots$

Поэтому $A_h^r(f, x) \in W_p^{(r)}$. Так как $L_h^r(f, x, v, \mu)$ имеет абсолютно непрерывную производную на каждом $[a, b] \subset (-1, 1)$, то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и обобщённое неравенство Минковского, имеем для $l = 2, 3, \dots$

$$\|((L_h^r)'(f, x))^{(l)}\|_p \leq C_4 \|(L_h^r(f, x))^{(l)}\|_p.$$

Так как $A_h^r(f, x)$ представляет собой сумму произведений $L_h^r(f, x)$, то

$$\|(A_h^r(f, x))^{(r)}\|_p \leq C_5 \|(L_h^r(f, x))^{(r)}\|_p.$$

Применяя лемму 2.1, имеем

$$h^r \|(A_h^r(f, x))^{(r)}\|_p \leq C_6 \|(\Delta_h^r(H^r(f, x), x))^{(r)}\|_p =$$

$$= C_3 \|(\Delta_h^r((H^r(f, x))^{(r)}, x))\|_p \leq$$

$$\leq C_3 \sup_{|t| \leq h} \|A_t^r(f, x)\|_p \leq C_3 \tilde{\omega}_r(f, h)_p,$$

где положительные постоянные C_2 и C_3 не зависят от h .

С другой стороны, так как

$$E - L_h^r = (E - L_h)(E + L_h + \dots + L_h^{r-1}),$$

то из определения $L_h(f, x)$ и обобщённого неравенства Минковского следует, что

$$\|L_h(f, x)\|_p \leq C_4 \|f\|_p.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|(E - L_h^r)(g, x)\|_p &\leq C_5 \|(E - L_h)(g, x)\|_p \leq \\ &\leq C_6 \sup_{0 \leq u \leq h} \|A_u(g, x)\|_p. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из неравенства (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} \|f(x) - A_h^r(f, x)\|_p &\leq \\ &\leq C_7 \sup_{0 \leq u_1 \leq h} \sup_{0 \leq u_2 \leq h} \dots \sup_{0 \leq u_r \leq h} \|\Delta_{u_1, u_2, \dots, u_r}^r(f, x)\|_p \leq \\ &\leq C_8 \tilde{\omega}_r(f, h)_p. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$K_r(f, \delta)_p \leq C_9 \tilde{\omega}(f, \delta)_p. \quad \square$$

Заключение

В статье рассмотрена эквивалентная структурная характеристика функций $f \in L_p$. Ранее этот результат был получен для обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига типа Чебышева [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Казимиров, Г.Н. Эквивалент структурной характеристики сложного процесса, модулируемого алгебраическими многочленами / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 76–79.

2. Казимиров, Г.Н. О теоремах Джексона для k -го обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Деп. в ВИНТИ РАН 27.12.94, 3054-В94. – С. 1–40.

3. Казимиров, Г.Н. Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 28.12.2024.

Информация об авторах

Казимиров Григорий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Бураковский Владимир Викторович – к.ф.-м.н., доцент