

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ СО СЛОЖНЫМ АСТИГМАТИЗМОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ENERGY AND POLARIZATION PROPERTIES OF VECTOR GAUSSIAN LIGHT BEAMS WITH COMPLEX ASTIGMATISM

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследованы новые решения параболического уравнения, описывающие векторные декартовы параксиальные ТМ световые пучки Гаусса со сложным астигматизмом. Установлены допустимые значения свободных параметров, при которых пучки Гаусса переносят конечную мощность. Предложены явные выражения, описывающие энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом. Выполнено графическое моделирование и проведен соответствующий анализ эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных параксиальных световых пучков Гаусса с однородной и неоднородной (ТМ-моды) поляризацией.

Ключевые слова: поляризация, векторные пучки, пучки Гаусса, сложный астигматизм, ТМ-моды, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_14. – EDN: VHVSNG

Abstract. The new solutions of the parabolic equation describing vectorial Cartesian paraxial TM Gaussian light beams with complex astigmatism are investigated. The admissible values of the free parameters at which Gaussian beams carry finite power are established. The explicit expressions describing energy and polarization properties of vector Gaussian light beams with complex astigmatism are proposed. The graphical modeling and corresponding analysis of polarization ellipses, intensity and transverse energy fluxes of vector Gaussian paraxial light beams with homogeneous and inhomogeneous (TM-modes) polarization are performed.

Keywords: polarization, vector beams, Gauss beams, complex astigmatism, TM-modes, transverse energy fluxes.

For citation: Girgel, S.S. Energy and polarization properties of vector Gaussian light beams with complex astigmatism / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_14 (in Russian). – EDN: VHVSNG

Введение

В настоящее время широко используются лазерные круговые гауссовы световые пучки, у которых пучки обладают круговой симметрией относительно оси пучка z [1]. Пучки с общим астигматизмом изучены значительно меньше [2]–[6]. Данная работа представляет собой развитие предыдущей работы автора [7]–[11], где исследовались энергетические и поляризационные свойства векторных астигматических световых пучков. Здесь используемый математический формализм распространяется на более общие векторные гауссовы световые пучки со сложным астигматизмом.

Сначала обсуждается общий формализм для описания скалярных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом. В следующих разделах сначала обсуждаются энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых

световых пучков со сложным астигматизмом и однородной поляризацией по сечению пучка, затем гауссовы ТМ-моды со сложным астигматизмом и неоднородно поляризованные по сечению пучка.

1 Общий скалярный астигматический гауссиан, характеризующий скалярные гауссовы световые пучки со сложным астигматизмом

Начнем с обсуждения свойств скалярных пучков Гаусса с общим астигматизмом. Предварительно обсудим необходимый математический формализм для описания пучков со сложным астигматизмом. Для 3D параболического уравнения

$$(\nabla_{\perp}^2 + 2ik\partial_z)f = 0 \quad (1.1)$$

общий скалярный астигматический гауссиан

$$G = \sqrt{\frac{\det Q(0)}{\det Q(z)}} \exp\left(\frac{ik\mathbf{r}_{\perp} Q^{-1}\mathbf{r}_{\perp}}{2}\right)$$

является его точным решением [4]. Здесь (2×2) -матрица пучка $Q = zI - Q_0$, Q – комплексный матричный параметр пучка, $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$. Поворотом системы координат вокруг оси Z матрицу Q'_0 можно привести к диагональному виду, а последующим сдвигом вдоль оси Z привести к простейшей форме:

$$Q'_0 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; \quad Q''_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{012} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$Q = \begin{bmatrix} z + a - i\alpha_{11} & -i\alpha_{12} \\ -i\alpha_{12} & z - a - i\alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

(2×2) матрица Q''_0 для выполнения квадратичной интегрируемости гауссиана G должна быть положительно определенной, т. е. ее компоненты должны удовлетворять ограничениям

$$\{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 > 0, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} > 0\}. \quad (1.2)$$

Обратная матрица

$$Q^{-1} \equiv \Gamma = \frac{1}{\det Q} \begin{bmatrix} z - a - i\alpha_{22} & i\alpha_{12} \\ i\alpha_{12} & z + a - i\alpha_{11} \end{bmatrix}.$$

Матрицу Q^{-1} можно представить также в инвариантной форме:

$$Q^{-1} = \frac{(z - Q_{oc})I - Q_0}{|Q_0| - Q_{oc}z + z^2}.$$

Заметим, что $\nabla_{\perp} G = ik \cdot \mathbf{b}_{\perp} \cdot G$. Здесь ввели, для краткости, вектор $\mathbf{b} = Q^{-1} \mathbf{r}_{\perp} \equiv \Gamma \mathbf{r}_{\perp}$. Его компоненты $(b_x, b_y) = (\Gamma_{11}x + \Gamma_{12}y, \Gamma_{12}x + \Gamma_{22}y)$. Теперь

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} \mathbf{b}_{\perp} = \Gamma_c$ и здесь $\Gamma_c = Q_c / \det Q$ – след матрицы Γ . Детерминант $\det Q \equiv |Q| = |Q'| + i|Q''|$, где

$|Q'| = z^2 - a^2 - |Q''_0|$, где $|Q''_0| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$. Здесь и далее символ $||$ означает детерминант.

$|Q''| = -\alpha_{11}(z - a) - \alpha_{22}(z + a)$. Главные значения

матрицы Γ : $a_{1,2} = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma_{11} - \Gamma_{22}}{2}\right)^2 + \Gamma_{12}^2}$.

После некоторых преобразований мнимую часть Γ'' матрицы $\Gamma = \Gamma' + i\Gamma''$ представим как

$$\Gamma'' = \begin{bmatrix} \Gamma''_{11} & \Gamma''_{12} \\ \Gamma''_{12} & \Gamma''_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(|Q'|)^2 + (|Q''|)^2} \times \\ \times \begin{bmatrix} (z - a)^2 \alpha_{11} + \alpha_{22} |Q''_0| & \alpha_{12} (z^2 - a^2 - |Q''_0|) \\ \alpha_{12} (z^2 - a^2 - |Q''_0|) & (z + a)^2 \alpha_{22} + \alpha_{11} |Q''_0| \end{bmatrix}.$$

2 Однородно поляризованные гауссовы моды с общим астигматизмом

Для однородно поляризованных параксиальных векторных гауссовых пучков с общим

астигматизмом возьмем поперечную часть вектора электрического поля в форме: $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{e}_{\perp} f$; где нормированный $(|\mathbf{e}_{\perp}|^2 = 1)$ вектор поляризации $\mathbf{e}_{\perp} = \eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y$. Как и в предыдущем разделе, в качестве решения возьмем $f = G$. Геометрические характеристики эллипса поляризации электрического вектора светового пучка задаются комплексным параметром [8]

$$\frac{\eta_y}{\eta_x} = \eta = \eta' + i\eta'' = \operatorname{tg}(\psi' + i\psi'').$$

При этом азимут главной оси эллипса поляризации относительно оси OX равен ψ' , а эллиптичность $\gamma = \operatorname{th}\psi''$. Полные векторы светового поля равны

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp} \mathbf{b}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z\} G,$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} ([\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\perp}] - [\mathbf{e}_{\perp}, \mathbf{b}_{\perp}]) G.$$

Плотность энергии электромагнитного поля параксиального светового пучка равна $w = \frac{\varepsilon |G|^2}{8\pi}$,

где $|G|^2 = \left| \frac{\det Q(0)}{\det Q(z)} \right| \exp(-kr_{\perp} \operatorname{Im}(\mathbf{b}_{\perp}))$. Плотности

продольного S_z , поперечного орбитального S_o и спинного S_s потоков энергии параксиального пучка соответственно равны

$$S_z = \frac{c}{n} w, \quad S_o = S_z \cdot \operatorname{Re}(b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y),$$

$$S_s = S_z \cdot \operatorname{th} 2\psi'' \cdot \operatorname{Im}(-b_y \mathbf{e}_x + b_x \mathbf{e}_y),$$

причем $\mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$.

Картина интенсивности гауссова светового пучка с общим астигматизмом представляет собой световое пятно эллиптической формы (рисунки 2.1–2.3). Азимуты главных осей эллипса интенсивности светового пятна определяются

формулой $\operatorname{tg}(2\psi) = \frac{2\Gamma''_{12}}{\Gamma''_{11} - \Gamma''_{22}}$. Параметр эллиптичности светового пятна

$$\sin(2\chi) = \frac{2\sqrt{\Gamma''_{11}\Gamma''_{22} - \Gamma_{12}^2}}{\Gamma''_{11} + \Gamma''_{22}} = \frac{2\sqrt{|\Gamma''|}}{\Gamma''_c}.$$

Для графического моделирования полученных результатов для наглядности был выполнен переход к безразмерным переменным $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, где $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно. Некоторые результаты графического моделирования поперечных потоков энергии и интенсивности однородно поляризованного параксиального светового гауссова пучка с общим астигматизмом изображены в относительных единицах на рисунках 2.1–2.3 при различных

значениях свободных параметров. Чтобы обеспечить квадратичную интегрируемость (КИ) функций векторной амплитуды пучков Гаусса и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2).

Световое пятно не может вырождаться в прямую линию, так как $|\Gamma''| > 0$. В круг тоже не может превращаться. В отличие от пучков Гаусса с простым астигматизмом азимуты главных осей эллипса интенсивности не фиксированные, $\psi \neq 0, \pi/2$ и зависят от расстояния Z . Размеры эллипса интенсивности возрастают с расстоянием Z . Компьютерное моделирование показывает, что линии спинового потока энергии эллиптической формы и полностью повторяют очертания

эллипса интенсивности. Линии полных поперечных потоков энергии $S_{\perp}$ образуют спиральные вихри. Линии потоков S_0 и S_s при удалении от оси Z стремятся к радиальным направлениям. При выравнивании коэффициентов α_{11} и α_{22} пятно интенсивности стремится к круговому. Интенсивности поперечных потоков $|S_0| \gg |S_s|$, что иллюстрируют рисунки 2.1 и 2.2.

При распространении пучков Гаусса с общим астигматизмом и однородной поляризацией их световое пятно деформируется и вращается. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главная ось эллипса интенсивности вращается на 180 градусов. Практически основное вращение происходит в интервале $(-1 > Z > 1)$ (рисунок 2.3).

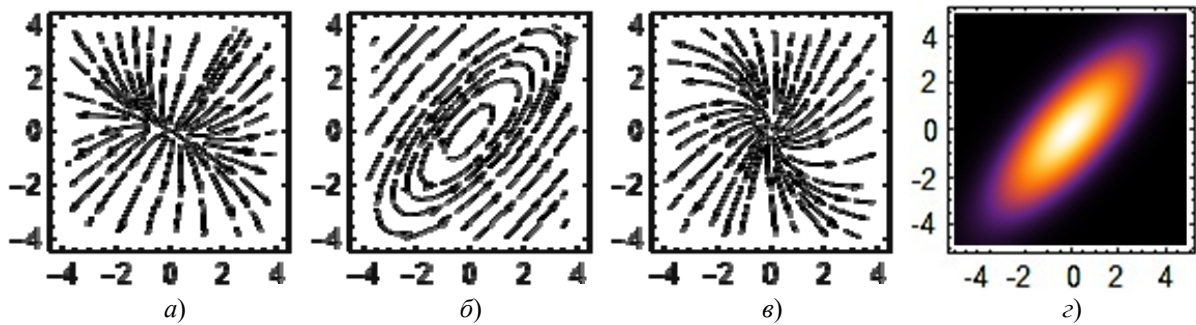


Рисунок 2.1 – Поперечные потоки энергии векторного однородно поляризованного светового гауссова пучка с общим астигматизмом: (а) орбитальный, (б) спиновый, (в) суммарный поперечный потоки энергии и (г) общая интенсивность пучка. Свободные параметры: $Z = 1,67$; $\alpha_{11} = 1$; $\alpha_{22} = 0,5$; $\alpha_{12} = 0,6$.

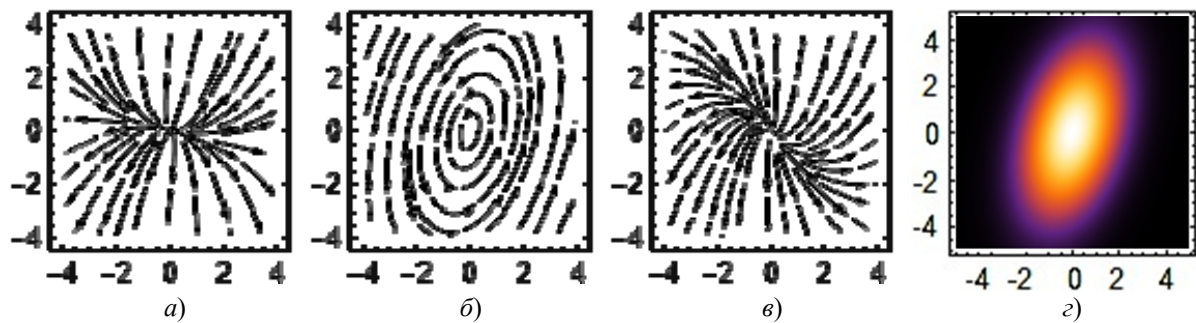


Рисунок 2.2 – Поперечные потоки энергии векторного однородно поляризованного светового гауссова пучка с общим астигматизмом: (а) орбитальный, (б) спиновый, (в) суммарный поперечный потоки энергии и (г) общая интенсивность пучка. Свободные параметры: $Z = 3,0$; $\alpha_{11} = 3$; $\alpha_{22} = 0,5$; $\alpha_{12} = 0,6$.

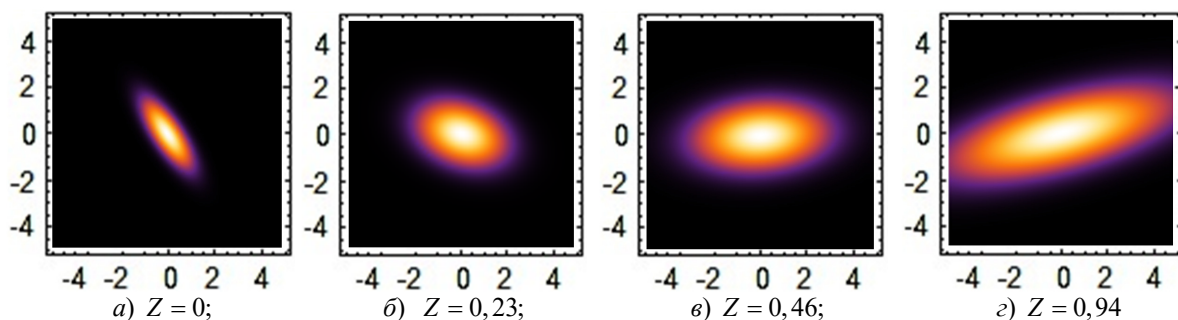


Рисунок 2.3 – Деформация и вращение эллипсов интенсивности пучков Гаусса с общим астигматизмом и однородной поляризацией. Свободные параметры: $\alpha_{11} = 0,6$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,3$; $a = 0,2$

3 Гауссовы ТМ-моды с общим астигматизмом

Перейдем к анализу свойств гауссовых световых пучков с общим астигматизмом и неоднородной по сечению поляризацией (ТМ-моды).

Возьмем в (1.1) $f = -\frac{1}{k}G$. Тогда для ТЕ мод поперечная часть вектора электрического поля гауссового пучка с общим астигматизмом

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(1)} = \nabla_{\perp} \left(-\frac{i}{k}G \right) = \mathbf{b}_{\perp} \cdot G;$$

где по-прежнему $\mathbf{r}_{\perp} Q^{-1} \equiv \mathbf{b}_{\perp}$. Так как $\nabla_{\perp} \mathbf{b}_{\perp} = \Gamma_c$, то

$$\mathbf{E}_{TM}^{(1)} = \left(\mathbf{b}_{\perp} + \left(\frac{i}{k} \Gamma_c - \mathbf{b}_{\perp}^2 \right) \cdot \mathbf{e}_z \right) \cdot G; \quad \mathbf{H}_{TM}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_{\perp}] \cdot G.$$

Поляризация пучка определяется комплексным параметром

$$\eta = E_y^{(1)} / E_x^{(1)} = \frac{b_y}{b_x} = \frac{\mathbf{b}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{b}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_x} = \frac{\mathbf{r}_{\perp} \Gamma \mathbf{e}_y}{\mathbf{r}_{\perp} \Gamma \mathbf{e}_x} = \operatorname{tg}(\psi' + i\psi'').$$

Азимут эллипсов поляризации ψ' , эллиптичность $\gamma = \operatorname{th} \psi''$. Общая плотность поперечного потока энергии для ТМ мод равна [10]

$\mathbf{S}_{\perp} = -\frac{c}{8\pi n} \operatorname{Re}(\varepsilon \mathbf{E}_{\perp}^* \cdot \mathbf{E}_{\perp})$. Вычисляя в инвариантной форме, находим, что

$$\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im}(\mathbf{b}_{\perp}^* \cdot (\Gamma_c / k + i\mathbf{b}_{\perp}^2)).$$

Согласно [12], плотности орбитального $\mathbf{S}_0$ и спинного $\mathbf{S}_s$ потоков энергии параксиального пучка $\mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_s$ выражаются, соответственно, как

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \operatorname{Im}(\mathbf{E}_x^* \nabla_{\perp} E_x + E_y^* \nabla_{\perp} E_y)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon}{16\pi nk} \operatorname{Im}([\nabla_{\perp} \times [\mathbf{E}_{\perp}^* \times \mathbf{E}_{\perp}]]);$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \operatorname{Im}([\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z](E_x^* E_y)).$$

После некоторых преобразований, учитывая, что

$\operatorname{Im}(b_x^* b_y) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\mathbf{b}_{\perp}^*, \mathbf{b}_{\perp}] \cdot \mathbf{e}_z$, представим эти выражения в инвариантных формах

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im}\{\mathbf{b}_{\perp}^* \Gamma / k + i\mathbf{b}_{\perp} \cdot |\mathbf{b}_{\perp}|^2\},$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{k} \Gamma - \operatorname{Im}(\mathbf{b}_{\perp}) \cdot \mathbf{b}_{\perp}\right) [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_{\perp}^*], \mathbf{e}_z\right],$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im}\left\{\frac{(\Gamma_c - \Gamma) \mathbf{b}_{\perp}^*}{k} + i\mathbf{b}_{\perp} \cdot (\mathbf{b}^2 - |\mathbf{b}_{\perp}|^2)\right\}.$$

В декартовой системе координат

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{\Gamma_{22}(2\Gamma_{12}^* y + \Gamma_{11}^* x)}{k} - 2b_y^* b_x \operatorname{Im}(b_y)\right) \mathbf{e}_x,\right.$$

$$\left.\left(\frac{\Gamma_{11}(2\Gamma_{12}^* x + \Gamma_{22}^* y)}{k} - 2b_y^* b_x \operatorname{Im}(b_x)\right) \mathbf{e}_y\right\},$$

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im}\left\{\frac{\Gamma_{12}^*(\Gamma_{11} - \Gamma_{22})}{k} (\mathbf{e}_x y - \mathbf{e}_y x) + i\mathbf{b}_{\perp} \cdot |\mathbf{b}_{\perp}|^2\right\}.$$

На рисунках 3.1–3.6 показаны некоторые характерные картины поперечных потоков энергии и общих интенсивностей в относительных единицах для ТМ мод Гаусса с общим астигматизмом. Чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Гаусса и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2). На всех рисунках 3.1–3.6 взят одинаковый свободный параметр $k \rightarrow 2$. Видно, что линии орбитальных и спинных потоков энергии ориентированы самыми разнообразными способами. Картины общей интенсивности содержат одно или два пика интенсивности. Поляризация ТМ мод Гаусса с общим астигматизмом является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. При изменениях расстояния Z от оси пучка поляризация периодически видоизменяется от линейной до круговой.

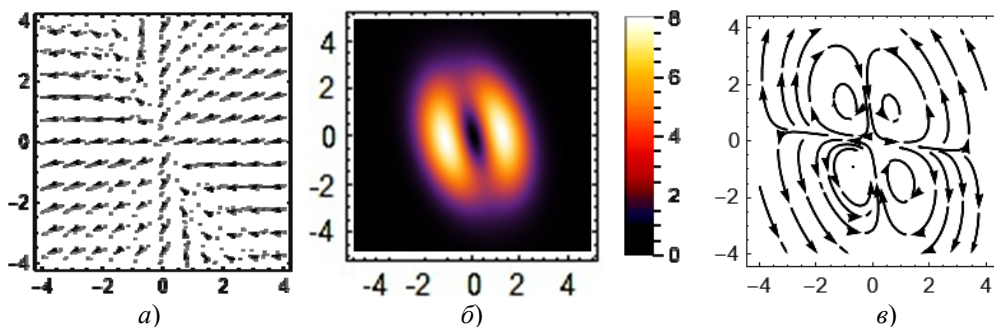


Рисунок 3.1 – Эллипсы поляризации (а), интенсивность (б) и линии поперечных спинных потоков энергии ТМ-моды гауссового пучка с общим астигматизмом.

Свободные параметры: $Z = 0$; $\alpha_{11} = 2$; $\alpha_{22} = 6$; $\alpha_{12} = 1$; $a = 1$

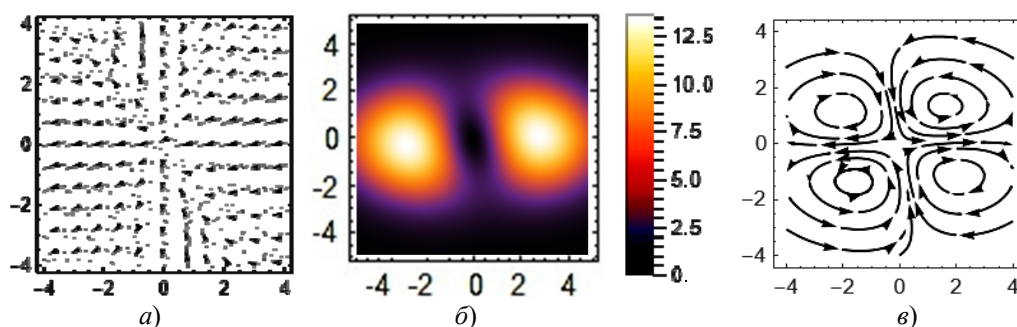


Рисунок 3.2 – Эллипсы поляризации (а), интенсивность (б) и линии поперечных спиновых потоков энергии ТМ- моды гауссового пучка с общим астигматизмом.

Свободные параметры: $Z = 2$; $\alpha_{11} = 0,9$; $\alpha_{22} = 6$; $\alpha_{12} = 1$; $a = 1$

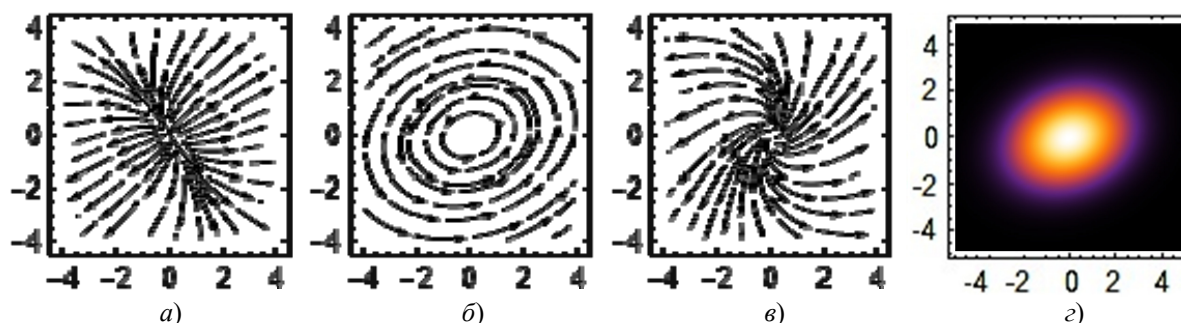


Рисунок 3.3 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Гаусса (ТМ моды) с общим астигматизмом (в), интенсивность пучка (г).

Свободные параметры: $Z = 3$; $\alpha_{11} = 1,7$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,1$; $a = 0,2$

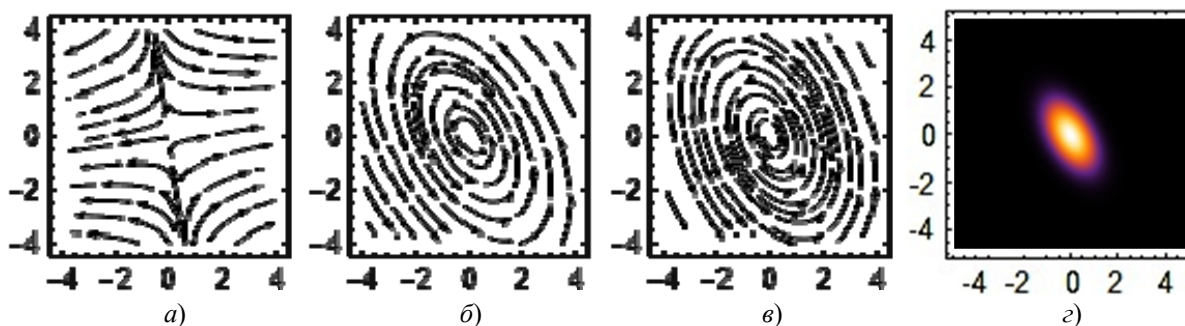


Рисунок 3.4 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Гаусса (ТМ моды) с общим астигматизмом (в), интенсивность пучка (г).

Свободные параметры: $Z = 0$; $\alpha_{11} = 1,7$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,1$; $a = 0,2$

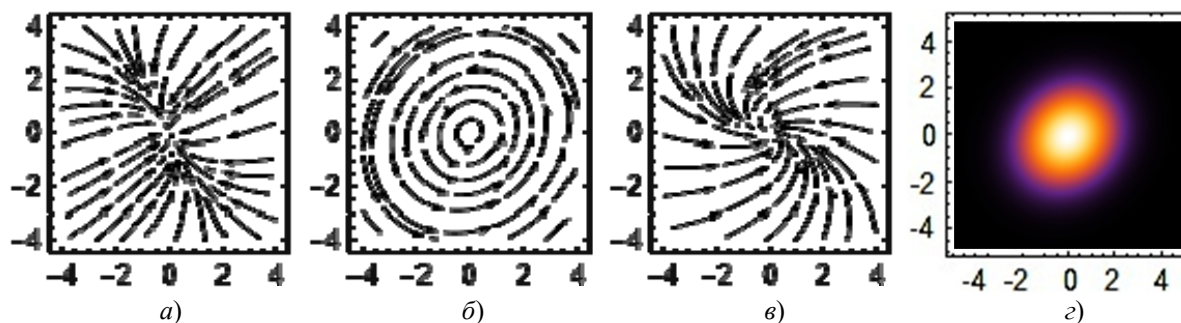


Рисунок 3.5 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Гаусса (ТМ моды) с общим астигматизмом (в), интенсивность пучка (г).

Свободные параметры: $Z = -2,72$; $\alpha_{11} = 1,7$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,1$; $a = 0,2$

Интересно, что линии спиновых потоков энергии ТМ пучков Гаусса образуют замкнутые кривые. Это соответствует общим спиралевидным энергетическим спиновым потокам. Как и для однородной поляризации, на рисунках 3.3–3.5 эллипсы поперечных спиновых потоков энергии по форме такие же, как эллипсы интенсивности. Однако на рисунках 3.1–3.2 формы замкнутых линий поперечных спиновых потоков энергии не соответствуют форме интенсивности пучка, хотя их симметрии совпадают.

Отметим также, что при распространении пучков Гаусса с общим астигматизмом и ТМ поляризацией их световое пятно деформируется и вращается, как и для однородно поляризованных пучков Гаусса. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главная ось эллипса интенсивности снова вращается на 180 градусов.

Заключение

В данной работе представлены новые решения векторного параболического уравнения, описывающие параксиальные векторные световые пучки Гаусса с однородной и неоднородной поляризацией (ТМ-моды). Представлены явные выражения для векторов поля, интенсивности, орбитального, спинного и общего потоков энергии пучков Гаусса с однородной и неоднородной поляризацией.

Проведенное графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии (орбитального S_o , спинного S_s и общего $S_{\perp} = S_o + S_s$) потоков подтвердило и проиллюстрировало аналитические расчеты.

Наличие нескольких свободных параметров позволяет в определенных пределах изменять физические свойства рассматриваемых пучков Гаусса с общим астигматизмом. Дальнейшее их изучение может открыть новые перспективы использования таких пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. Arnaud, J. Gaussian beams with general astigmatism / J. Arnaud, H. Kogelnik // *Applied Optics*. – 1969. – Vol. 25. – P. 2908–2911.

3. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.

4. Heyman, H. Gaussian beam and pulsed beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics / E. Heyman, L.B. Felsen // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2001. – Vol. 18. – P. 1588–1611.

5. Абрамочкин, Е.Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

6. Modeling of the general astigmatic Gaussian beam and its propagation through 3D optical systems / E. Kochkina [et al.] // *Applied Optics*. – 2013. – Vol. 42, № 24. – P. 6030–6040.

7. Гиргель, С.С. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.

8. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.

9. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация // С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.

10. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

11. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бесель-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.

12. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 21.10.2024.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор