

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. III

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. III

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантные l -арные подгруппы, n -полуинвариантные l -арные подгруппы.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 64–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_64. – EDN: CRZWMH

Abstract. The study on the polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroups, n -semiinvariant l -ary subgroups.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 64–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_64 (in Russian). – EDN: CRZWMH

Введение

Данная статья, посвящённая изучению полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, является продолжением статей [1], [2] и составляет с ними единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в новой статье. В ней ссылки на результаты из работ [1], [2] даются без указания на эти работы. Например, ссылка на следствие 5.1 означает, что имеется в виду следствие 5.1 из раздела 5 в [2].

6 Условия полуинвариантности, но не n -полуинвариантности

Теорема 6.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не n -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, которая не является n -полуабелевой.

Доказательство. n -Арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ является полуинвариантной в ней. Поэтому, согласно

утверждению 2) теорем 3.1, l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, а согласно утверждению 2) следствия 5.1 $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда по теореме 4.5 из [3] $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева l -арная группа, не являющаяся n -полуабелевой. $\square$

Замечание 6.1. В доказательстве теоремы 6.1 полуинвариантность $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ может быть получена как следствие полуабелевости $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Кроме того, если в теореме 6.1 $\langle B, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная подгруппа, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуабелевой, но не n -полуабелевой. Это следует из теоремы 4.5 из [3] ввиду полуабелевости $\langle B, \eta \rangle$.

Полагая в теореме 6.1 $n = 2$, получим

Следствие 6.1. Пусть нетождественная подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, B – подгруппа абелевой группы A , $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не инвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, которая не является абелевой.

Ясно, что в теореме 6.1 σ – нетождественная подстановка. Если при этом подстановка σ^n

является тождественной, $s = n$, то получим приведённую ниже теорему.

Теорема 6.2. Пусть для нетождественной подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^n является тождественной, $l = n(n-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не n -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$, которая не является n -полуабелевой.

Замечание 6.2. Если в теореме 6.2 $\langle B, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная подгруппа, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуабелевой, но не n -полуабелевой. Это следует из теоремы 4.5 из [3] ввиду полуабелевости $\langle B, \eta \rangle$.

Следующее следствие вытекает из теоремы 6.2, если в ней положить σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , $n = k$.

Следствие 6.2. Пусть $l = k(k-1) + 1$, σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , $\langle B, \eta \rangle$ – k -арная подгруппа полуабелевой k -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{k, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не k -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{k, \sigma, k} \rangle$, которая не является k -полуабелевой.

Полагая в следствии 6.2 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 6.3. Пусть $l = k(k-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – k -арная подгруппа полуабелевой k -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{k, (12 \dots k), k} \rangle$ полуинвариантна, но не k -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{k, (12 \dots k), k} \rangle$, которая не является k -полуабелевой.

Полагая в следствиях 6.2 и 6.3 $k = 3$, получим ещё два следствия.

Следствие 6.4. Пусть σ – цикл длины 3 из S_3 , $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа полуабелевой тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда 7-арная подгруппа $\langle B^3, \eta_{3, \sigma, 3} \rangle$ полуинвариантна, но не 3-полуинвариантна в полуабелевой 7-арной группе $\langle A^3, \eta_{3, \sigma, 3} \rangle$, которая не является 3-полуабелевой.

Следствие 6.5. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа полуабелевой тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $B \neq A$. Тогда 7-арная подгруппа $\langle B^3, \eta_{3, (123), 3} \rangle$ полуинвариантна, но не 3-полуинвариантна в полуабелевой 7-арной группе $\langle A^3, \eta_{3, (123), 3} \rangle$, которая не является 3-полуабелевой.

7 Случай тождественной подстановки

Согласно утверждению 1) следствия 5.1, l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ может быть инвариантной в ней только в случае тождественности подстановки σ . Следующая теорема показывает, что это действительно так.

Теорема 7.1. Если ϵ – тождественная подстановка из S_k , $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \epsilon, k} \rangle$ инвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \epsilon, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ инвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Необходимость. Инвариантность $\langle B^k, \eta_{s, \epsilon, k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s, \epsilon, k} \rangle$ означает, что

$$\eta_{s, \epsilon, k}(\underbrace{x B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s, \epsilon, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} x \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}) \quad (7.1)$$

для любого $x = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ и любого $t = 2, \dots, l$. Тогда, применив к левой части полученного равенства утверждение 3) леммы 2.1, а к правой части – предложение 2.2 при $B = C$, получим

$$\begin{aligned} \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\epsilon^{t-1}(1)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\epsilon^{l-1}(k)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Это равенство, ввиду тождественности подстановки ϵ , переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_1 \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_k \underbrace{B \dots B}_{l-t}). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Так как $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то равенство (7.3) при $t = 2, \dots, n-1$ принимает вид

$$\begin{aligned} \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-t}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_k \underbrace{B \dots B}_{n-t}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Следовательно,

$$\eta(x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_j \underbrace{B \dots B}_{n-t}) \quad (7.5)$$

для любого $t = 2, \dots, n$ и любого $j = 1, \dots, k$, что означает инвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$.

Достаточность. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k . Из инвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ следует (7.5) для любого $t = 2, \dots, n$ и любого $j = 1, \dots, k$, откуда получаем (7.4). Так как $\langle B, \eta \rangle$ – инвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то равенство (7.4) может быть переписано в виде (7.3). Далее последовательно получаем (7.2) и (7.1). Следовательно, l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \epsilon, k} \rangle$ инвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \epsilon, k} \rangle$. $\square$

8 Новое доказательство теоремы 4.1

Приведём доказательство первого утверждения теоремы 4.1, отличное от приведённого в [2].

Теорема 8.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ и для некоторого

$t = 2, \dots, l-1$ подстановка σ^{t-1} не является тождественной, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё. Тогда существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что $\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t})$. (8.1)

Доказательство. Зафиксируем элементы $b \in B, u \in A, u \notin B$. Пусть для определённости $\sigma^{t-1}(j) = m$, где $j < m$. Положим

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{m-1}, x_m = u, x_{m+1}, \dots, x_k),$$

где $x_1 = \dots = x_{j-1} = x_j = x_{j+1} = \dots = x_{m-1} = x_{m+1} = \dots = x_k = b$.

Тогда, используя второе равенство из предложения 2.1, получим

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \\ & \quad \times \underbrace{\eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{l-1})}_{m-j-1} \times \\ & \quad \times \underbrace{\eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1})}_{k-m} = \\ & = \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \\ & \quad \times \underbrace{\eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1})}_{m-j-1} \times \\ & \quad \times \underbrace{\eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1})}_{k-m} = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{\eta(u B \dots B)}_{n-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}, \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{\eta(u B \dots B)}_{n-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}. \quad (8.2)$$

Аналогично, используя первое равенство из предложения 2.1 и учитывая, что $x_{\sigma^{t-1}(r)} = b$ для любого $r \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, m-1, m, m+1, \dots, k\}$, получим

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} \underbrace{b B \dots B}_{l-t}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} \underbrace{b B \dots B}_{l-t}) \times \\ & \quad \times \underbrace{\eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(j)} \underbrace{B \dots B}_{l-t})}_{j-1} \times \\ & \quad \times \underbrace{\eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} \underbrace{b B \dots B}_{l-t}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} \underbrace{b B \dots B}_{l-t})}_{m-j-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(m)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \\ & \times \underbrace{\eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} \underbrace{b B \dots B}_{l-t}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} \underbrace{b B \dots B}_{l-t})}_{k-m} = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_m \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \\ & \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_j \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m} = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} u \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \\ & \quad \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}, \end{aligned}$$

то есть $\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}) = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} u \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}. \quad (8.3)$

Если предположить

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}),$$

то из (8.2) и (8.3) следует

$$\begin{aligned} & \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \\ & \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m} = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} u \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \\ & \quad \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}. \end{aligned}$$

Сравнивая множители, стоящие в левой и правой частях полученного равенства на j -ом и m -ом местах, получим

$$B = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} u \underbrace{B \dots B}_{l-t}), \quad B = \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}),$$

что невозможно, так как

$$B \cap \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} u \underbrace{B \dots B}_{l-t}) = \emptyset, \quad B \cap \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) = \emptyset.$$

Следовательно, сделанное предположение неверно, а верно неравенство (8.1) для выбранного $\mathbf{x}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (60). – С. 54–58.
2. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (61). – С. 45–47.
3. Гальмак, А.М. Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.

Поступила в редакцию 06.01.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

Проблемы физики, математики и техники, № 1 (62), 2025