МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_48
EDN: DBDFPO

О *p*-ДЛИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ *B*-ГРУПП

В.Н. Княгина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE *p*-LENGTH OF A PRODUCT OF TWO *B*-GROUPS

V.N. Kniahina

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Конечная ненильпотентная группа называется *B*-группой, если в ее фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Исследуется *p*-длина $l_p(G)$ конечной *p*-разрешимой группы, являющейся произведением двух *B*-подгрупп. В частности, доказывается, что $l_p(G) \le 1$, если *p* не делит индекс одной из *B*-подгрупп.

Ключевые слова: *конечная группа*, *B-группа*, *p-разрешимая группа*, *p-длина*, *произведение подгрупп*.

Для цитирования: *Княгина*, *В.Н.* О *p*-длине произведения двух *B*-групп / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 48–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_48. – EDN: DBDFPO

Abstract. A finite non-nilpotent group is called a *B*-group if every proper subgroup of its quotient group by Frattini subgroup is primary. The *p*-length $l_p(G)$ of a finite *p*-soluble group, which is the product of two *B*-subgroups, is studied. It has been proved that $l_p(G) \le 1$ if *p* does not divide the index of one of the *B*-subgroups.

Keywords: *finite group*, *B-group*, *p-soluble group*, *p-length*, *product of subgroups*.

For citation: *Kniahina*, *V.N.* On the *p*-length of a product of two *B*-groups / V.N. Kniahina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 48–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_48 (in Russian). – EDN: DBDFPO

Введение

B-группой называют конечную ненильпотентную группу, у которой в фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Группа Шмидта (конечная ненильпотентная группа с нильпотентными собственными подгруппами) является *B*-группой. В строении *B*-групп и групп Шмидта есть сходства и есть различия. Так, обе они бипримарны, одна из силовских подгрупп в этих группах нормальна, а другая силовская подгруппа – циклическая, см. лемму 2.2 [1]. Одно из различий между *B*-группами и группами Шмидта заключается в том, что если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в *B*-группе это свойство нарушается. Например, диэдральная группа порядка 18 является *B*-группой и не является группой Шмидта.

В работе [1] были описаны начальные свойства *B*-групп и изучена группа, факторизуемая примарной группой и *B*-группой. В частности, было доказано, что если конечная группа $G = HK$ представима в виде произведения *B*-подгруппы *H* и примарной подгруппы *K*, и если порядок ненормальной силовской подгруппы в *H* не равен 3 и 7, то группа *G* разрешима. В работе [2] было установлено, что конечная *p*-разрешимая группа, представимая в виде произведения двух своих подгрупп Шмидта, имеет *p*-длину не более 2. Эта оценка точная, симметрическая группа S_4 имеет 2-длину, равную 2, и является произведением двух групп Шмидта A_4 и S_3.

В настоящей работе исследуется конечная группа $G = HK$, представимая в виде произведения двух *B*-подгрупп *H* и *K*. Такая группа может быть простой, например, знакопеременная группа A_5 степени 5 является произведением двух *B*-подгрупп $H \cong A_4$ и $K \cong [C_5]C_2$. В случае, когда конечная группа $G = HK$ *p*-разрешима устанавливаются достаточные условия, при которых она имеет единичную *p*-длину. Если *B*-подгруппы *H* и *K* сверхразрешимы, то конечная группа $G = HK$ будет разрешимой, а если порядок *G* нечетен, то *G* сверхразрешима.

1 Вспомогательные результаты

Порядки всех рассматриваемых в работе групп конечны. Мы используем стандартные обозначения, а также терминологию из [3], [4].

Напомним некоторые обозначения. Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A записывается $[A]B$. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются соответственно через $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $Y \le X$ $(Y < X)$ означает, что Y – подгруппа (собственная подгруппа) группы X.

Для фиксированных групп будем использовать следующие обозначения:

Z_m – циклическая группа порядка m,

E_{p^m} – элементарная абелева группа порядка p^m,

D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$,

S_n и A_n – симметрическая и знакопеременная группы степени n.

Группа G с нормальной силовской p-подгруппой G_p называется p-замкнутой. Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$ такая, что $G = [G_{p'}]G_p$, то группа G называется p-нильпотентной.

Будем использовать обозначения $B_{\langle p,q\rangle}$ для B-группы с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской Q-подгруппой.

Приведем используемые при доказательстве теорем свойства B-групп.

***Лемма* 1.1** [1, лемма 2.2]. *Пусть B – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, p и Q – ее силовские p- и Q-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ *и* $P / \Phi(P)$ – *главный фактор группы B порядка* p^m, *где m – показатель числа p по модулю Q*;

(3) $Q = \langle y \rangle$ – *циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(B)$. *Кроме того*, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ *и* $Z(B) \le \Phi(B)$;

(4) *Если H – нормальная в B подгруппа и* $H \ne B$, *то H нильпотентна*;

(5) *Если m – максимальная в B подгруппа, то либо m нормальна в B и* $M = P \times \langle y^q \rangle$, *либо* $M = [\Phi(P)]Q^x$ *для некоторого* $x \in B$.

***Лемма* 1.2** [1, лемма 2.4]. *Пусть N – нормальная подгруппа $B_{\langle p,q\rangle}$-группы B, $N \ne B$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *силовская p-подгруппа P_1 из N либо совпадает с силовской p-подгруппой группы B, либо* $P_1 \le \Phi(B) \cap P = \Phi(P)$;

(2) *силовская Q-подгруппа Q_1 из N содержится в* $\langle y^q \rangle \le Z(B)$, *где* $\langle y \rangle$ *– силовская Q-подгруппа группы B*;

(3) либо $P \le N$, либо $N \le \Phi(B)$;

(4) *фактор-группа B / N либо является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой, либо циклической Q-группой.*

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы примарны, называется группой типа A. Таким образом, B-группу можно определить как группу, у которой фактор-группа по подгруппе Фраттини является группой типа A.

Приведем свойства групп типа A, используемые в дальнейшем.

***Лемма* 1.3** [5, с. 83]. *Если S – группа типа A, то справедливы следующие утверждения*:

(1) $S = [P]Q$, *где p – нормальная силовская p-подгруппа, Q – ненормальная силовская Q-подгруппа, p и Q – различные простые числа*;

(2) *Q – циклическая подгруппа простого порядка Q и Q действует неприводимо на p*;

(3) *p – элементарная абелева подгруппа порядка* p^m, *где m – показатель числа p по модуля Q, подгруппа p является минимальной нормальной подгруппой группы S*;

(4) $Z(S) = \Phi(S) = 1$;

(5) $1 < P < S$ *– главный ряд группы S.*

В следующих двух примерах показано, что при определенных условиях B-группа не является группой Шмидта.

***Пример* 1.1.** Диэдральная группа порядка $2p^n$, $p > 2$, $n \in \mathbb{N}$, является $B_{\langle p,2\rangle}$-группой. При $n > 1$ она не будет группой Шмидта.

***Пример* 1.2.** Пусть p и Q – простые числа, p делит $q - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда ненильпотентная группа $[Z_{q^n}]Z_p$ является $B_{\langle q,p\rangle}$-группой. При $n > 1$ она не будет группой Шмидта.

***Лемма* 1.4.** *Если H – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа и Q делит $p - 1$, то силовская p-подгруппа в H циклическая.*

Доказательство. Пусть $H = [P]Q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа. Тогда $H / \Phi(H)$ – группа типа А порядка $p^m q$, где m – показатель p по модулю Q. По условию Q делит $p - 1$, поэтому $m = 1$. По лемме 1.1 (2) $P \cap \Phi(H) = \Phi(P)$, поэтому $| P / \Phi(P) | = p$ и p – циклическая группа.

Пусть π – множество простых чисел. У каждой π-разрешимой группы существует нормальный ряд, факторы которого являются π-группами или π'-группами. Такой ряд называют (π, π')-рядом. π-длиной π-разрешимой группы G называют наименьшее число π-факторов среди всех (π, π')-рядов группы G. π-длина π-разрешимой группы G обозначается через $l_\pi(G)$. Как обычно, $O_{\pi'}(G)$ и $O_\pi(G)$ – наибольшие нормальные π'- и π-подгруппы группы G соответственно. □

***Лемма* 1.5** [6, лемма 4]. *Пусть в p-разрешимой группе G силовская p-подгруппа является произведением двух циклических подгрупп. Тогда*:

(1) *если* $p > 2$, *то* $l_p(G) \le 1$;

(2) *если* $p = 2$, *то* $G/O_{2',2}(G)$ *либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна* S_3. *В частности,* $l_2(G) \le 2$.

***Лемма* 1.6** [2, лемма 5]. *Пусть* G – π*-разрешимая группа. Если силовские p-подгруппы группы G циклические для всех* $p \in \pi(G)$, *то* $l_\pi(G) \le 1$.

2 Достаточные условия, при которых произведение двух *B*-групп имеет единичную *p*-длину

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – p-разрешимая конечная группа и B – ее* $B_{\langle p,q\rangle}$*-подгруппа для некоторого* $q \in \pi(G)$. *Если p не делит индекс подгруппы B в группе G, то* $l_p(G) \le 1$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы *G*. Пусть *N* – неединичная нормальная подгруппа группы *G*, а *B* – ее $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, $B = [P]Q$. По условию, *p* не делит $|G : B|$,$ поэтому *p* – силовская *p*-подгруппа группы *G*. По свойствам *B*-групп (лемма 1.2 (4)) фактор-группа BN/N либо циклическая *Q*-группа, либо $B_{\langle p,q\rangle}$-группа. Если BN/N – циклическая *Q*-группа, то G/N – p'-группа и $l_p(G/N) \le 1$. Пусть теперь BN/N – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа. Так как

$$|G/N : BN/N| = |G : BN|,$$
$$|G : B| = |G : BN||BN : B|,$$

то *p* не делит $|G : BN| = |G/N : BN/N|$. По индукции $l_p(G/N) \le 1$. Значит, в любом случае $l_p(G/N) \le 1$ для каждой неединичной нормальной в *G* подгруппы *N*. Предположим, что $l_p(G) > 1$. По лемме VI.6.9 [3] следует считать, что

$$\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1,\ O_p(G) = C_G(O_p(G))$$

и $N = O_p(G)$ является единственной минимальной нормальной в *G* подгруппой. Пусть *m* – максимальная в *G* подгруппа, не содержащая *N*. Тогда $N \cap M = 1$ и $G = [N]M$. Так как $N \le P \le B$, то согласно лемме 1.2 (3) либо $N = P$, либо $N \le \Phi(B)$. Если $N = P$, то $l_p(G) \le 1$. Если $N \le \Phi(B)$, то по тождеству Дедекинда

$$B = [N](B \cap M) = \Phi(B)(B \cap M) = B \cap M,$$

что невозможно. □

***Теорема* 2.2.** *Пусть A и B – B-подгруппы p-разрешимой конечной группы G и пусть G = AB. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если A и B – p-замкнутые pd-подгруппы и* $p \ne 3$ *или* $\pi(G) \ne \{2,3\}$, *то G p-замкнута*;

(2) *если A и B – p-нильпотентные pd-подгруппы и* $p \ne 2$ *или* $3 \notin \pi(G)$, *то группа G p-нильпотентна*;

(3) *если p не делит* НОД $(|G : A|, |G : B|)$, *то* $l_p(G) \le 1$.

Доказательство. (1) Введем следующие обозначения: $A = [P_1]Q$, $B = [P_2]R$, где P_1 и P_2 – силовские *p*-подгруппы из *A* и *B* такие, что P_1P_2 – силовская *p*-подгруппа из *G* (см. лемму VI.4.7 [3]), *Q* – силовская *Q*-подгруппа из *A*, *R* – силовская *r*-подгруппа из *B*. Поскольку $\pi(G) = \{p, q, r\}$ и *G p*-разрешима, то группа *G* разрешима и по лемме VI.4.7 [3] можно считать, что *QR* – $\{q, r\}$-холлова подгруппа при $q \ne r$ или *QR* – силовская *Q*-подгруппа при *q* = *r*.

Предположим, что $q \ne r$ и пусть $\pi = \{q, r\}$. Тогда $l_\pi(G) \le 1$ по лемме 1.6 и $K = O_p(G)(QR)$ нормальна в *G*. Теперь $Q \le A \cap K \lhd A$ и $R \le B \cap K \lhd B$. По свойствам *B*-групп (*Q* не содержится в собственной подгруппе, нормальной в *A*) $A \le K$. Аналогично, $B \le K$. Поэтому $G = O_p(G)(QR)$ – *p*-замкнутая группа.

Пусть $q = r$. Если $l_q(G) = 1$, то $O_p(G)(QR)$ – нормальна в *G* и опять $G = O_p(G)(QR)$ – *p*-замкнутая группа. Пусть $l_q(G) > 1$. Так как силовская *Q*-подгруппа группы *G* является произведением двух циклических подгрупп *Q* и *R*, то по лемме 1.5 получаем, что $q = 2$ и $p = 3$. Теперь P_1 и P_2 – циклические подгруппы по лемме 1.4 и по лемме 1.5 $l_3(G) \le 1$.

(2) Введем следующие обозначения: $A = [Q]P_1$, $B = [R]P_2$, где P_1 и P_2 – силовские *p*-подгруппы в *A* и в *B* такие, что P_1P_2 является силовской *p*-подгруппой группы *G* (см. лемму VI.4.7 [3]), *Q* – силовская *Q*-подгруппа из *A*, *R* – силовская *r*-подгруппа из *B*.

Если $p > 2$, то P_1P_2 – метациклическая группа по лемме III.11.5 [3] и $l_p(G) \le 1$ по лемме 1.5. Теперь $K = O_{p'}(G)(P_1P_2)$ нормальна в *G*, поэтому $P_1 \le A \cap K$ и $A \cap K$ нормальна в *A*. По свойствам *B*-групп получаем, что $A \le K$. Аналогично, $B \le K$ и $K = G$ – *p*-нильпотентная группа.

Пусть $p = 2$. Тогда силовская 2-подгруппа P_1P_2 в группе *G* является произведением двух циклических подгрупп. По лемме 1.5 либо фактор-группа $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3.

Пусть $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок. Тогда $P_1P_2 \le O_{2',2}(G)$ и $A \cap O_{2',2}(G)$ – нормальная подгруппа в группе *A*, причем

$P_1 \le A \cap O_{2',2}(G)$. Это возможно лишь когда $A \le O_{2',2}(G)$. Аналогично, $B \le O_{2',2}(G)$ и $G = O_{2',2}(G)$ – 2-нильпотентная группа. Если $G / O_{2',2}(G) \simeq S_3$, то $3 \in \pi(G)$, что исключается условием (2) теоремы.

(3) Утверждение следует из теоремы 2.1. □

3 О произведении сверхразрешимых *B*-групп

***Теорема* 3.1.** *Пусть A – сверхразрешимая B-подгруппа конечной группы G и пусть $G = AB$, где B – циклическая или сверхразрешимая B-подгруппа. Тогда третий коммутант G''' – абелева 2-группа и $n(G) \le 3$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.7 [1] все силовские подгруппы в *A* и в *B* циклические. Если группа *G* имеет нечетный порядок, то по теореме Берковича [7] группа *G* сверхразрешима. В частности, коммутант G' нильпотентен. Так как силовские подгруппы в *G* метациклические, то G' – метациклическая подгруппа и $G''' = 1$.

Далее считаем, что группа *G* имеет четный порядок. Если силовская 2-подгруппа в *G* циклическая, то *G* 2-нильпотентна, в частности, разрешима. Если силовская 2-подгруппа в *G* нециклическая, то *A* и *B* имеют четные порядки и в каждой из них имеется циклическая подгруппа индекса ≤ 2 согласно лемме 1.1 (3). По теореме В.С. Монахова [8] группа *G* разрешима. Несложно проверить, что условия теоремы наследуются фактор-группами, поэтому группа *G* примитивна: $\Phi(G) = 1$, $G = [N]M$, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ – единственная минимальная нормальная в *G* подгруппа, *m* – максимальная подгруппа и $M_G = 1$. Так как *N* дополняема в силовской *p*-подгруппе, то $|N| = p$ или $|N| = p^2$ согласно леммам 2 и 3 [6]. Если $|N| = p$, то *G* сверхразрешима [6, лемма 5] и теорема справедлива. Если $|N| = p^2$, то силовская *p*-подгруппа в группе *G* нециклическая, поэтому *p* делит порядок подгруппы *A* и порядок подгруппы *B*. Кроме того, обе подгруппы *A* и *B* имеют нормальные силовские *p*-подгруппы порядка *p*. Так как *B*-группа с нормальной силовской подгруппой простого порядка является группой Шмидта, то применима теорема из [9], по которой G''' – абелева 2-группа и $n(G) \le 3$. □

***Пример* 3.1.** Группа $GL(2,3) = AB$ является произведением *B*-группы $A \cong S_3$ и циклической 2-группы $B \cong C_8$. Производная длина $GL(2,3)$ равна 4, а нильпотентная длина $GL(2,3)$ равна 3. Этот пример подтверждает точность полученных в теореме верхних границ для нильпотентной и производной длин.

***Следствие* 3.1.** *Пусть A и B – B-подгруппы конечной группы G нечетного порядка и пусть G = AB. Если A и B сверхразрешимы, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 3.2.** *Пусть A и B – сверхразрешимые B-подгруппы конечной группы G и пусть G = AB. Если | A | нечетен, то G 2-нильпотентна и $l_p(G) \le 1$ для всех $p \in \pi(G)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.7 [1] все силовские подгруппы в *A* и в *B* циклические. Силовская 2-подгруппа из *B* является силовской 2-подгруппой группы *G*, поэтому *G* 2-нильпотентна. Силовские подгруппы нечетного порядка в группе *G* метациклические. Применяя лемму 1.5 получаем, что $l_p(G) \le 1$ для всех $p \in \pi(G)$. □

***Пример* 3.2.** Пусть *p* – простое нечетное число и C_p – циклическая группа порядка *p*. Эта группа обладает автоморфизмом α порядка 2. Зададим отображение $\phi : S_4 \to <\alpha>$ следующим образом: $\phi(\tau) = \alpha$, если τ – нечетная перестановка и $\phi(\tau) = 1$, если τ – четная перестановка. Тогда ϕ – гомоморфизм группы S_4 на $<\alpha>$, ядро которого совпадает с A_4. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [C_p]S_4$ относительно гомоморфизма ϕ. Тогда $G = S_3([C_p] < (1234) >)$ есть произведение двух сверхразрешимых *B*-подгрупп, причем *G* – не 2-нильпотентная группа и $l_2(G) = 2$. При $p = 3$ построенная группа не 3-замкнута. Этот пример показывает, что произведение двух сверхразрешимых *B*-подгрупп может быть несверхразрешимой группой, в частности, 2-длина группы может быть > 1.

***Пример* 3.3.** Полупрямое произведение $[E_{7^2}]S_3$, в котором симметрическая группа S_3 неприводимо действует на элементарной абелевой группе E_{7^2} порядка 49, является минимальной несверхразрешимой группой, она 2- и 3-сверхразрешима, но не 7-сверхразрешима. Группа

$$[E_{7^2}]S_3 = ([U]Z_2)([V]Z_3),$$

$$E_{7^2} = U \times V, U \simeq V \simeq Z_7$$

является произведением двух сверхразрешимых *B*-подгрупп порядков 14 и 21.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Князина*, *В.Н.* О произведении *B*-группы и примарной группы / В.Н. Князина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.

2. *Князина*, *В.Н.* О *p*-длине произведения двух групп Шмидта / В.Н. Князина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 329–333.

3. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

4. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.

5. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. – Киев: Институт математики НАУ. – 2002. – секция № 1. – С. 81–90.

6. *Монахов*, *В.С.* О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 32–36.

7. *Беркович*, *Я.Г.* О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Математический сборник. – 1967. – Т. 74, № 1. – С. 75–92.

8. *Монахов*, *В.С.* О произведении двух групп, одна из которых содержит циклическую подгруппу индекса ≤ 2 / В.С. Монахов // Математические заметки. – 1974. – Т. 16, № 2. – С. 285–295.

9. *Монахов*, *В.С.* Произведение сверхразрешимых групп Шмидта / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 1999. – № 1. – С. 41–46.

Поступила в редакцию 13.06.2024.

Информация об авторах

Князина Виктория Николаевна – к.ф.-м.н., доцент