ОБЗОРЫ

УДК 512.542
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_89
EDN: BHOFNX

σ-ПРОБЛЕМА КЕГЕЛЯ – ВИЛАНДТА: ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

С.Ф. Каморников[1], **В.Н. Тютянов**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»*

THE KEGEL – WIELANDT σ-PROBLEM: REVIEW OF RESULTS

S.F. Kamornikov[1], **V.N. Tyutyanov**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Gomel Branch of International University «MITSO»*

Аннотация. Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел. В работе обсуждаются результаты разных лет и разных авторов, касающиеся σ-проблемы Кегеля – Виландта, и анализируются подходы к ее решению.

Ключевые слова: *конечная группа*, *холлова подгруппа*, *конечная простая группа*, *субнормальная подгруппа*, *проблема Кегеля – Виландта*, *разбиение множества всех простых чисел*, *σ-субнормальная подгруппа*, *σ-полная группа*, *σ-проблема Кегеля-Виландта*, *решетка подгрупп*.

Для цитирования: *Каморников*, *С.Ф.* σ-Проблема Кегеля – Виландта: обзор результатов / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 89–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_89. – EDN: BHOFNX

Abstract. Let *σ* be a partition of the set of all prime numbers. In the paper the results of different years and different authors concerning the Kegel-Wielandt σ-problem are discussed, and the approaches to its solution are analised.

Keywords: *finite group*, *Hall subgroup*, *finite simple group*, *subnormal subgroup*, *Kegel – Wielandt problem*, *partition of the set of all prime numbers*, *σ-subnormal subgroup*, *σ-complete group*, *Kegel – Wielandt σ-problem*, *subgroup lattice.*

For citation: *Kamornikov*, *S.F.* The Kegel – Wielandt σ-problem: review of results / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 89–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_89 (in Russian). – EDN: BHOFNX

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

Кегель в 1962 году в работе [1] предложил следующую концепцию *p*-субнормальной подгруппы: для данного простого числа *p* подгруппа *H* группы *G* называется *p-субнормальной* в *G* (при этом, следуя [2], мы пишем $H \le_p G$), если $H \cap P \in Syl_p(H)$ для любой силовской *p*-подгруппы *P* группы *G*. Очевидно, отношение $\le_p$ является транзитивным и если $H \lhd G$, то $H \le_p G$ для любого простого *p*. Отсюда следует, что если подгруппа *H* субнормальна в *G*, то $H \le_p G$ для любого простого *p*.

В [1] Кегель выдвинул следующую гипотезу: *подгруппа H конечной группы G является субнормальной в G тогда и только тогда*, *когда она p-субнормальна для любого простого числа p*.

Виландт в 1980 году (см. [3]), когда классификация конечных простых групп была практически завершена, включил эту гипотезу в список наиболее важных проблем, требующих решения после завершения классификации. Поэтому с тех пор эту гипотезу называют проблемой Кегеля – Виландта.

Полное решение гипотезы Кегеля – Виландта, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в 1991 году. Оно связано с изучением структуры минимального контрпримера (G, H), где H – такая подгруппа из *G*, что $H \le_p G$ для любого простого *p*, а под минимальностью контрпримера понимается минимальность суммы $|G| + |H|$. В работе [4] установлено, что в минимальном контрпримере (G, H) группы *G* и *H* являются простыми. Дальнейший анализ в [4] ввиду классификационной теоремы связан с перебором всех простых неабелевых групп и установлением в каждом возможном случае простого числа *p* и *p*-элемента $h \in H$, для которого не выполняется равенство $\Theta_H(h) = \Theta_G(h)$, где

$$\Theta_G(h) = \frac{|Syl_p(G)|}{|\{P \in Syl_p(G) \mid h \in P\}|}$$

и

$$\Theta_H(h) = \frac{|\,Syl_p(H)\,|}{|\,\{F \in Syl_p(H) \mid h \in F\}\,|}.$$

Работа [4] стимулировала развитие целого ряда новых концепций обобщенной субнормальности (с основными результатами, касающимися некоторых из них, можно ознакомиться в [5]). С позиций проблемы Кегеля – Виландта наибольший интерес представляет предложенная А.Н. Скибой в рамках σ-метода концепция σ-субнормальной подгруппы.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое *разбиение* множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Пусть G – *σ-полная* группа, т. е. G обладает по крайней мере одной холловой σ_i-подгруппой для любого $i \in I$. Для $i \in I$ мы пишем $H \leq_{\sigma_i} G$, если подгруппа обладает тем свойством, что $H \cap S_i \in Hall_{\sigma_i}(H)$ для каждой холловой σ_i-подгруппы S_i группы G и любого $i \in I$.

В [6] под номером 6.4 А.Н. Скиба сформулировал следующий интересный аналог гипотезы Кегеля – Виландта (см. также вопрос 19.86 из «Коуровской тетради» [7]).

σ-Проблема Кегеля – Виландта: *Верно ли, что подгруппа H σ-полной группы G является σ-субнормальной в G, если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$?*

Решить σ-проблему Кегеля – Виландта – значит либо доказать, что для любого разбиения σ подгруппа H σ-полной группы G является σ-субнормальной в G, либо построить пример разбиения σ, для которого подгруппа H σ-полной группы G не является σ-субнормальной в G, если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$.

Отметим также, что если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ и подгруппа H является σ-субнормальной в σ-полной группе G, то ввиду леммы 2.6 из [8] $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. Таким образом, по сути, σ-проблема Кегеля – Виландта ставит вопрос о нахождении нового критерия σ-субнормальности подгруппы в σ-полной группе.

Концепция σ-субнормальности, развивающая идею субнормальной подгруппы, предложена А.Н. Скибой в [8]. Эта концепция базируется на следующем определении.

Для заданного разбиения σ множества всех простых чисел подгруппа H группы G называется σ-*субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ_j-группой для некоторого $j \in I$.

Ясно, что подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, состоящего из одноэлементных подмножеств. Поэтому для минимального разбиения σ-проблема Кегеля – Виландта превращается в проблему Кегеля – Виландта.

В [9] предложена обобщенная σ-проблема Кегеля – Виландта. Появление ее связано с существованием групп, обладающих несколькими классами сопряженных холловых подгрупп, и идея состоит в том, чтобы рассматривать не все полные холловы множества типа σ, а лишь некоторые из них.

Следуя [8], будем говорить, что для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ система $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ холловых σ_i-подгрупп $(i = 1, 2, \ldots, k)$ группы G является *полным холловым множеством типа* σ группы G, если выполняются следующие два условия:

1) $(|\,S_i\,|, |\,S_j\,|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \ldots \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G, то, очевидно, система $\Sigma^g = \{S_1^g, S_2^g, \ldots, S_k^g\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы G для любого элемента $g \in G$.

Будем говорить, что полное холлово множество Σ типа σ группы G *редуцируется* в подгруппу H группы G, если $H \cap S_i$ – холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ (возможно, что $H \cap S_i = 1$ для некоторых $i = 1, 2, \ldots, k$).

Обобщенная σ-проблема Кегеля – Виландта: *Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел и $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G. И пусть H – такая подгруппа из G, что Σ^g редуцируется в H для любого элемента $g \in G$. Верно ли, что подгруппа H является σ-субнормальной в G?*

Если в σ-проблеме Кегеля – Виландта требуется, чтобы любое полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцировалось в подгруппу H группы G, то в ее обобщенном аналоге речь идет только о полных холловых множествах Σ^g $(g \in G)$ для некоторого заданного полного холлового множества Σ группы G. Ввиду леммы 2.6 из [8] положительное решение обобщенной σ-проблемы Кегеля – Виландта всегда приводит к решению σ-проблемы Кегеля – Виландта.

В настоящее время, кроме минимального разбиения, σ-проблема Кегеля – Виландта решена для целого ряда разбиений σ множества всех простых чисел. В третьей части обзора мы приводим эти разбиения и относящиеся к ним результаты. Мы описываем также содержание всех сложившихся в настоящее время подходов к решению σ-проблемы Кегеля – Виландта, выделяя следующие из них:

1) исследовать σ-проблему Кегеля – Виландта для ***фиксированного разбиения*** σ;

2) исследовать σ-проблему Кегеля – Вилландта ***для фиксированных простых групп и произвольного разбиения*** σ;

3) исследовать σ-проблему Кегеля – Виландта для произвольного разбиения σ, ***отталкиваясь от решеточных свойств*** группы;

4) исследовать σ-проблему Кегеля – Виландта для произвольного разбиения σ, ***отталкиваясь от факторизационных свойств*** простых групп.

Структурно работа построена так, что ее основные разделы связаны с описанием перечисленных выше подходов 1)-4).

В основу обзора положен доклад авторов «Об обобщенной проблеме Кегеля – Виландта» [10] на Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева (г. Нальчик, 9–15 июля 2023 года).

1 Определения и обозначения

В работе используются определения и обозначения, принятые в [11]. Что касается терминологии теории σ-субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к работе [8].

Если π – некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π. В частности, если множество π состоит из одного простого числа p, то p' – дополнение множества $\{p\}$ в множестве всех простых чисел.

Подгруппа H называется *холловой* π-подгруппой группы G, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G:H|) \subseteq \pi'$. Будем говорить, следуя [12], что группа G *обладает свойством*:

– E_π, если она содержит холлову π-подгруппу (т. е. $Hall_\pi(G) \neq \varnothing$);

– C_π, если G обладает свойством E_π и любые две холловы π-подгруппы группы G сопряжены;

– D_π, если G обладает свойством C_π и всякая π-подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе.

Будем также использовать следующие обозначения:

– если p – простое число, то G_p – силовская p-подгруппа группы G и $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G;

– если π – некоторое множество простых чисел, то G_π – холлова π-подгруппа группы G и $Hall_\pi(G)$ – множество всех холловых π-подгрупп группы G;

– $\mathscr{E}_\pi$ – множество всех групп, обладающих свойством E_π (в частности, σ-полнота группы G для $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ означает, что $G \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{E}_{\sigma_i}$);

– если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел и n – натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;

– $\sigma(G) = \sigma(|G|)$;

– Z_n – циклическая группа порядка n.

Мы будем часто использовать обозначения из «Атласа конечных групп» [13]. Если A и B – подгруппы группы G, то $A \times B$ – их прямое произведение, а $A:B$ и $A.B$ – расщепляемое и произвольное расширение группы A с помощью группы B, соответственно.

Обозначения $H \trianglelefteq G$, $H \in sn(G)$ и $H \in sn_\sigma(G)$ используются нами вместо слов «H – нормальная подгруппы группы G», «H – субнормальная подгруппы группы G», и «H – σ-субнормальная подгруппы группы G» соответственно.

Следуя [14], для E_π-группы G через $\mathrm{SZ}_\pi(G)$ обозначим множество всех ее подгрупп, в которые редуцируются все холловы π-подгруппы группы G.

Понятно, что подгруппа H σ-полной группы G удовлетворяет условиям σ-проблемы Кегеля – Виландта тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap_{i \in I} \mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$.

Следуя [8], для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ будем говорить, что группа G называется:

1) σ-*примарной*, если она является σ_i-группой для некоторого $i \in I$;

2) σ-*разрешимой*, если она обладает главным рядом, каждый фактор которого σ-примарен;

3) σ-*нильпотентной*, если G является прямым произведением некоторых σ-примарных групп, т.е. группа G представима в виде прямого произведения своих холловых σ_i-подгрупп для некоторых $i \in I$ (далее класс всех σ-нильпотентных групп обозначается $\mathfrak{N}_\sigma$).

Простая проверка показывает, что произведение двух нормальных σ-нильпотентных подгрупп группы G является σ-нильпотентной подгруппой, а потому в G существует наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа, которая обозначается $F_\sigma(G)$ и называется σ-нильпотентная радикалом группы G.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной в смысле Кегеля*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Простая проверка показывает, что подгруппа H группы G σ-субнормальна в G для некоторого разбиения σ множества всех простых чисел тогда и только тогда, когда она является $\mathfrak{N}_\sigma$-субнормальной в G в смысле Кегеля.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных в смысле Кегеля подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы.

2 Некоторые технические результаты

Для иллюстрации техники доказательства в данном разделе мы приводим в виде лемм некоторые результаты, играющие ключевую роль при доказательстве основных теорем разделов 3–5.

Пусть H – подгруппа σ-полной группы G, $\sigma(G)=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k\}$ и $\Sigma=\{S_1,S_2,...,S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G. Будем говорить, что пара (G,H) является *контрпримером к обобщенной σ-проблеме Кегеля – Виландта*, если для любого $g\in G$ полное холлово множество Σ^g редуцируется в H, но подгруппа H не является σ-субнормальной в G. Если при этом пара (G,H) такова, что сумма $|G|+|H|$ минимальна, то контрпример (G,H) будем называть *минимальным контрпримером к обобщенной σ-проблеме Кегеля – Виландта*.

Следующая лемма, устанавливает строение минимального контрпримера к обобщенной σ-проблеме Кегеля – Виландта и сводит ее решение к анализу строения холловых подгрупп простых неабелевых групп.

***Лемма* 2.1** [9, лемма 2.4]. *Пусть $\sigma=\{\sigma_i\mid i\in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел. Если (G,H) – минимальный контрпример к обобщенной σ-проблеме Кегеля – Виландта, то G и H – простые неабелевы группы.*

Таким образом, структура минимального контрпримера к обобщенной σ-проблеме Кегеля – Виландта такая же, как и контрпримера к гипотезе Кегеля – Виландта.

Отметим, что, как и для обобщенной σ-проблемы, минимальный контрпример к σ-проблеме Кегеля – Виландта имеет такое же строение, которое описано в лемме 2.1.

Ввиду требования σ-полноты группы G в σ-проблеме Кегеля – Виландта ее решение тесно связано со следующим вопросом (известным как проблема 3.2 из [15]):

Найти холловы подгруппы конечных простых групп.

Изучением этой проблемы занимались многие математики (см., например, обзор [15]). Полная классификация холловых подгрупп известных простых групп завершена в работе [15] и содержится в приложении 1 к ней.

Понятно, что классификация холловых подгрупп простых групп не решает проблемы описания σ-полных простых групп, которая даже для конкретных разбиений σ является достаточно сложной теоретико-групповой и теоретико-числовой задачей.

Приведем лишь несколько примеров разбиений σ, для которых классифицированы все σ-полные простые группы. Первый из них связан с известной теоремой Л.С. Казарина, описывающей простые неабелевы группы, которые содержат холлову p'-подгруппу:

***Лемма* 2.2** [16, теорема 7]. *Пусть p – простое число, $\sigma=\{\{p\},p'\}$ и G – простая группа, порядок которой делится на p. Тогда и только тогда G является σ-полной, когда выполняется одно из следующих условий*:

(a) $G=A_p$ *и* $G_{p'}\cong A_{p-1}$;

(b) $G=PSL_n(q)$, *где* $q=r^m$, $m\ge 1$, *r – простое число и* $G_{p'}$ *– параболическая подгруппа в G; при этом* $|G:G_{p'}|=(q^n-1)/(q-1)=p^k$ *и n – простое число*;

(c) $G=PSL_2(11)$, $p=11$ *и* $G_{p'}\simeq A_5$;

(d) $G=M_{11}$, $p=11$ *и* $G_{p'}\simeq M_{10}$;

(e) $G=M_{23}$, $p=23$ *и* $G_{p'}\simeq M_{22}$.

Другой пример связан с разбиением $\sigma=\{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$.

***Лемма* 2.3** [17, теорема B]. *Пусть* $\pi=\{2,3\}'$ *и* $\sigma=\{\{2\},\{3\},\pi\}$. *Если* $|G:G_\pi|=2^\alpha\cdot 3^\beta$, *где* $\alpha\ge 2$, $\beta\ge 1$, *то простая группа G является σ-полной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G\cong A_5\cong SL_2(4)\cong PSL_2(5)$, $G_\pi\cong Z_5$;

(2) $G\cong A_6\cong PSL_2(9)$, $G_\pi\cong Z_5$;

(3) $G\cong PSL_2(7)\cong SL_3(2)$, $G_\pi\cong Z_7$;

(4) $G\cong SL_2(8)$, $G_\pi\cong Z_7$;

(5) $G\cong PSL_2(17)$, $G_\pi\cong Z_{17}$;

(6) $G\cong SL_3(3)$, $G_\pi\cong Z_{13}$;

(7) $G\cong SU_3(3)$, $G_\pi\cong Z_7$;

(8) $G\cong PSU_4(2)\cong PSp_4(3)$, $G_\pi\cong Z_5$;

(9) $G\cong M_{11}$, $G_\pi\cong Z_{11}:Z_5$;

(10) $G\cong M_{12}$, $G_\pi\cong Z_{11}:Z_5$;

(11) $G\cong PSL_2(q)$, $q=p^n$, $p\ge 5$, G_π *содержится в подгруппе Бореля группы* $PSL_2(q)$.

Доказательство леммы 2.3 опирается на теорему 1.1 из [18], описывающую простые группы, которые содержат подгруппу, индекс которой имеет в точности два различные простые делители.

Разбиение $\sigma=\{\{p\},p'\}$ является частным случаем *бинарного* разбиения, т. е. разбиения σ, имеющего вид $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ для некоторого множества простых чисел π.

Следуя [15], будем говорить, что группа G обладает *стандартной* холловой π-подгруппой, если либо $|\pi \cap \pi(G)| \le 1$, либо $\pi(G) \subseteq \pi$. В противном случае холлова π-подгруппа называется *нестандартной*.

Следующая лемма, приведенная в [19], описывает простые группы, факторизуемые двумя нестандартными холловыми подгруппами. Доказательство ее следует из результатов работ [20]–[22].

***Лемма* 2.4** [19, лемма 2]. *Пусть G – простая группа, представимая в виде произведения нестандартных холловых подгрупп A и B таких, что $A \cap B = 1$. Тогда выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G \cong M_{11}$, $A \cong 3^2 : Q_8.2$ *и* $B \cong 11:5$;

(2) $G \cong M_{23}$, $A \in \{2^4 : A_7, PSL_3(4):2_2\}$ *и* $B \cong 23:11$;

(3) $G \cong PSL_2(11)$, $A \in \{A_4, D_{12}\}$ *и* $B \cong 11:5$;

(4) $G \cong PSL_2(29)$, $A \cong A_5$ *и* $B \cong 29:7$;

(5) $G \cong PSL_2(59)$, $A \in \{A_5, D_{60}\}$ *и* $B \cong 59:29$;

(6) $G \cong PSL_2(2^n)$, $A \cong U : Z_{2^n-1}$ *и* $B \cong Z_{2^n+1}$ $(n \ge 2, |U| = 2^n)$;

(7) $G \cong PSL_2(p^n)$, $A \cong U : Z_{(p^n-1)/2}$ *и* $B \cong D_{2^n+1}$ (*p – нечетное простое число*, $p^n \notin \{7, 11, 29, 59\}$, $p^n \equiv -1 \pmod 4)$, $|U| = p^n$);

(8) $G \cong PSL_5(2)$, $A \cong 2^6 : (S_3 \times PSL_2(7))$ *и* $B \cong 31:5$;

(9) $G \cong PSL_r(p^n)$ $(\{r, p\} \ne \{5, 2\})$, $A \cong P_i$ – *параболическая подгруппа* $(i \in \{1, r-1\})$, *и* $B \in \{T : Z_r, T\}$ (*p – простое число, r – нечетное простое число и* $(r, p^n - 1) = 1$, *T – тор порядка* $(p^{rn}-1)/(p^n-1)$).

Леммы 2.2 и 2.4 приводят к следующей классификации σ-полных простых групп для бинарного разбиения σ.

***Лемма* 2.5**. *Пусть π – некоторое множество простых чисел и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Простая группа G является σ-полной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

(1) $\pi(G) \subseteq \pi$;

(2) $\pi(G) \subseteq \pi'$;

(3) $\pi(G) \cap \pi \ne \varnothing$, $\pi(G) \cap \pi' \ne \varnothing$ *и G – группа из списков, представленных в леммах* 2.2 *и* 2.4.

Нам понадобятся результаты работы [2], из которых следует решение проблемы Кегеля – Виландта, основанное на факторизационных свойствах простых групп. Следуя [2], будем говорить, что подгруппа H является *силовски p-транзитивной* в G, если H, действуя сопряжением, транзитивно переставляет силовские p-подгруппы из G (т. е. выполняется равенство $G = HN_G(P)$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G).

Как отмечено в [2], если подгруппа H является силовски p-транзитивной в G, то $H \le_p G$. Следующая лемма, вытекающая из теоремы 1.4 работы [2], показывает, что для $p \ge 5$ и при условии $p \in \pi(H)$ обратное утверждение имеет место лишь в трех нетривиальных случаях.

***Лемма* 2.6**. *Пусть G – простая группа и H – такая ее собственная подгруппа, что $|H|$ делится на p и $H \le_p G$ для некоторого простого числа $p \ge 5$. Тогда H является силовски p-транзитивной в G и выполняется одно из следующих условий*:

(a) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, *где* $n = s \cdot p^a > p$ *и* $1 \le s < p$;

(b) $G \cong U_3(5)$, $H \cong A_7$ *и* $p = 5$;

(c) $G \cong HS$ – *группа Хигмэна – Симса*, $H \cong M_{22}$ *и* $p = 5$.

Из леммы 2.6 для простой группы G, в частности, следует, что если $|H|$ делится на pq для двух различных простых чисел p и q, $\{p, q\} \ne \{2, 3\}$, $H \le_p G$ и $H \le_q G$, то $G = H$. С учетом строения минимального контрпримера к проблеме Кегеля – Виландта это дает ее другое и более короткое решение.

В случае σ-проблемы Кегеля – Виландта лемма 2.6 позволяет при рассмотрении минимального контрпримера (G, H) исходить из того, что если $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$, $|\sigma_i| = 1$ и $\sigma_i \cap \pi(H) \ne \varnothing$, то либо $\sigma_i = \{2\}$, либо $\sigma_i = \{3\}$. При этом в общем случае требование $|\sigma_i| = 1$ нельзя заменить требованием $|\sigma_i \cap \pi(H)| = 1$. В то же время имеет место следующая

***Лемма* 2.7** [19, лемма 4]. *Пусть H – подгруппа группы G и $S \in Hall_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел. Если $S_p \lhd S$ для некоторого $p \in \pi$ и $S^g \cap H \in Hall_\pi(H)$ для любого $g \in G$, то $H \le_p G$.*

Отметим также, что в случае минимального контрпримера (G, H) множество $\pi(H)$ не может содержаться в некоторой компоненте разбиения σ.

***Лемма* 2.8** [9, лемма 2.5]. *Пусть (G, H) – минимальный контрпример к обобщенной σ-проблеме Кегеля – Виландта и $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$. Тогда $\pi(H)$ не содержится в σ_i для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*

Существенную роль при анализе минимального контрпримера играет введенная в [19] по аналогии с [4] функция $\Theta_{G,\pi}$, сопоставляющая каждому π-элементу g группы G число

$$\Theta_{G,\pi}(g)=\frac{|Hall_\pi(G)|}{|\{S\in Hall_\pi(G)\mid g\in S\}|}.$$

***Лемма* 2.9** [19, лемма 7]. *Пусть H – подгруппа* D_π*-группы G и* $H\in C_\pi$. *Если* $S\cap H\in Hall_\pi(H)$ *для любой холловой* π*-подгруппы S группы G, то для каждого* π*-элемента* $h\in H$ *имеет место равенство* $\Theta_{G,\pi}(h)=\Theta_{H,\pi}(h)$.

3 Фиксированные разбиения

Один из подходов исследования σ-проблемы Кегеля – Виландта связан с рассмотрением частных разбиений.

Алгоритм решения при таком подходе состоит в выполнении следующих трех шагов:

1) зафиксировать некоторое разбиение σ;

2) классифицировать для σ все σ-полные простые группы;

3) на основе анализа строения описанных σ-полных простых групп доказать, что множество контрпримеров к σ-проблеме Кегеля – Виландта для данного σ является пустым.

Работа Кляйдмана [4] связана с рассмотрением частного разбиения $\sigma=\{\{2\},\{3\},\{5\},...\}$. Понятно, что в этом случае в силу теоремы Силова любая конечная группа является σ-полной. Поэтому при анализе минимального контрпримера следует рассматривать все известные простые неабелевы группы.

Отметим также, что из леммы 2.6 с учетом p^aq^b-теоремы Бернсайда следует, что σ-проблема Кегеля – Виландта имеет положительное решение для разбиения σ, в котором все компоненты, не содержащие числа 2 или 3, являются одноэлементными.

Первый пример отличного от минимального разбиения и разбиения $\sigma=\{\{2,3\},\{5\},\{7\},...\}$, подтверждающий σ-гипотезу Кегеля – Виландта, рассмотрен в [9].

***Теорема* 3.1** [9, теорема 1.1]. *Пусть p – простое число,* $\sigma=\{\{p\},p'\}$ *и G – σ-полная группа. Если H – такая подгруппа из G, что* $H\le_p G$ *и* $H\le_{p'} G$, *то* $H\in sn_\sigma(G)$.

Отметим, что в оригинальном изложении теорема 1.1 работы [9] дает положительное решение обобщенной σ-проблемы Кегеля – Виландта для разбиения $\sigma=\{\{p\},p'\}$.

Доказательство теоремы 3.1 опирается на лемму 2.1, устанавливающую строение минимального контрпримера к обобщенной σ-проблеме Кегеля – Виландта для произвольного разбиения σ, а также на лемму 2.2, описывающую σ-полные простые группы для разбиения $\sigma=\{\{p\},p'\}$. При этом ввиду лемм 2.6 и 2.8 достаточно ограничиться рассмотрением случаев $p=2$ и $p=3$.

Для произвольного бинарного разбиения σ-проблема Кегеля – Виландта решена в работе [19].

***Теорема* 3.2** [19, теорема A]. *Пусть* π *– некоторое множество простых чисел и* $\sigma=\{\pi,\pi'\}$. *Подгруппа H группы σ-полной группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(1) $H\le_\pi G$;

(2) $H\le_{\pi'} G$.

При анализе минимального контрпримера к теореме 3.2 используется лемма 2.9.

В работе [17] σ-проблема Кегеля – Виландта решена для разбиения $\sigma=\{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$.

***Теорема* 3.3** [17, теорема A]. *Пусть* $\sigma=\{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$. *Подгруппа H группы* $G\in E_{\{2,3\}'}$ *является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(1) $H\le_2 G$;

(2) $H\le_3 G$;

(3) $H\le_{\{2,3\}'} G$.

Доказательство теоремы 3.3 опирается на лемму 2.5.

Приведем несколько открытых вопросов.

***Проблема* 3.4**. Решить σ-проблему Кегеля – Виландта для разбиения $\sigma=\{\{2,3\},\{p\},\{2,3,p\}'\}$, где $p\ge 5$.

Будем говорить, что разбиение σ является *тринарным*, если $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$.

***Проблема* 3.5**. Решить σ-проблему Кегеля – Виландта для произвольного тринарного разбиения σ.

Понятно, что проблема 3.5 связана с решением следующей интересной задачи.

***Проблема* 3.6**. Пусть $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ – тринарное разбиение множества всех простых чисел. Классифицировать все простые неабелевы группы *G*, принадлежащие классу $E_{\sigma_1}\cap E_{\sigma_2}\cap E_{\sigma_3}$.

***Проблема* 3.7**. Решить σ-проблему Кегеля – Виландта для такого разбиения σ, что $\sigma_i=\{2,3\}$ для некоторого $i\in I$.

4 σ-Проблема Кегеля – Виландта в классе простых неабелевых групп

Из леммы 2.1 следует, что если *G* – минимальный контрпример к σ-проблеме Кегеля – Виландта, то *G* – простая неабелева группа (при этом *H* также является простой неабелевой группой). С учетом этого, второй подход к решению σ-проблемы Кегеля – Виландта связан со следующим алгоритмом действий:

1) зафиксировать простую неабелеву группу G (или некоторый класс простых неабелевых групп);

2) доказать, что для любого разбиения σ множества всех простых чисел группа G не может входить в минимальный контрпример (G, H) для каждой ее простой подгруппы H.

Пусть далее $\mathfrak{K}$ – класс простых неабелевых групп, которые не являются минимальными контрпримерами к σ-проблеме Кегеля – Виландта. Тогда справедлива следующая

***Теорема* 4.1**. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *и* G – *σ-полная группа, все неабелевы композиционные факторы которой принадлежат* $\mathfrak{K}$. *Если* H – *такая подгруппа группы* G, *что* $H \cap S_i$ – *холлова* σ_i *-подгруппа из* H *для любого* $i \in I$ *и всякой холловой* σ_i *-подгруппы* S_i *группы* G, *то* $H \in sn_\sigma(G)$.

В настоящее время известно, что классу $\mathfrak{K}$ принадлежат:

1) знакопеременные группы [9, предложение 2.6];

2) группы Судзуки [23];

3) спорадические группы [24];

4) группы Ри [25];

5) лиевы группы ранга 1 [26].

Таким образом, имеет место следующая

***Теорема* 4.2** [26, теорема 1]. *Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел*, G – *σ-полная группа, все неабелевы композиционные факторы которой являются либо знакопеременными группами*, *либо спорадическими группами*, *либо лиевыми группами ранга* 1. *Если* Σ – *полное холлово множество типа* σ *группы* G, *то подгруппа* H *группы* G *является σ-субнормальной в* G *тогда и только тогда*, *когда* Σ^g *редуцируется в* H *для любого* $g \in G$.

5 σ-Проблема Кегеля – Виландта и решетки подгрупп

В [27] (см. также работу [28]) описаны все наследственные насыщенные решеточные формации. Из этого описания следует, что формация $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является решеточной, т. е. множество $sn_\sigma(G)$ всех σ-субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G.

В связи с этим, естественно, возникает задача исследования σ-проблемы Кегеля – Виландта в группе G при дополнительном предположении, что некоторые классы ее подгрупп обладают определенными решеточными свойствами. Первые результаты, относящиеся к такой постановке задачи, опубликованы в [29] и инициированы работой [14].

Напомним, что множество L подгрупп группы G является (по вложению):

– *нижней полурешеткой*, если из $A \in \mathrm{L}$ и $B \in \mathrm{L}$ всегда следует, что $A \cap B \in \mathrm{L}$;

– *верхней полурешеткой*, если из $A \in \mathrm{L}$ и $B \in \mathrm{L}$ всегда следует, что $< A, B > \in \mathrm{L}$;

– *решеткой*, если L является одновременно верхней и нижней полурешетками.

***Теорема* 5.1** [29, теорема 1]. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – *некоторое разбиение множества всех простых чисел*, G – *σ-полная группа и* $\mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$ *является верхней полурешеткой для любого* $i \in I$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *группа G является σ-разрешимой*;

2) *подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда*, *когда* $H \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$.

***Следствие* 5.2**. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – *некоторое разбиение множества всех простых чисел*, G – *σ-полная группа и* $\mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$ *является решеткой для любого* $i \in I$. *Тогда и только тогда подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G*, *когда* $H \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$.

Таким образом, в σ-полной группе G, обладающей тем свойством, что $\mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$ является либо верхней полурешеткой, либо решеткой для любого $i \in I$, σ-проблема Кегеля – Виландта решается положительно.

Следует отметить, что группа G с отмеченным свойством устроена достаточно просто. На это указывает следующая

***Теорема* 5.3** [29, теорема 2]. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – *некоторое разбиение множества всех простых чисел*, G – *σ-полная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *множество* $\mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$ *является верхней полурешеткой для любого* $i \in I$;

2) *группа* $G / F_\sigma(G)$ *является σ-нильпотентной.*

В связи с теоремами 5.1 и 5.3 возникает несколько вопросов.

***Проблема* 5.4**. Каково строение σ-полной группы G, обладающей тем свойством, что $\mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$ является нижней полурешеткой для любого $i \in I$?

***Проблема* 5.5**. Пусть G – σ-полная группа и для любого $i \in I$ множество $\mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$ образует нижнюю полурешетку. Доказать, что если подгруппа H группы G для любого $i \in I$ принадлежит множеству $\mathrm{SZ}_{\sigma_i}(G)$, то она σ-субнормальна в G.

В связи с проблемой 5.5 интересна следующая

***Проблема* 5.6**. Существует ли простая неабелева группа, содержащая собственную *TI*-подгруппу, являющуюся простой неабелевой группой?

Напомним, что подгруппа H группы G называется *TI-подгруппой*, если $H \cap H^x \in \{1, H\}$ для любого $x \in G$.

6 σ-Проблема Кегеля – Виландта и σ-транзитивные группы

Пусть π – некоторое множество простых чисел. По аналогии с [2] будем говорить, что подгруппа H группы $G \in E_\pi$ называется *π-транзитивной*, если сопряжением она действует транзитивно на множестве всех холловых π-подгрупп группы G. Если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, то подгруппа H σ-полной группы G называется *σ-транзитивной*, если она σ_i-транзитивна для любого $i \in I$.

Понятно, что если подгруппа H π-транзитивна в G, то $G \in C_\pi$. Кроме того, $G = HN_G(G_\pi)$ для любой холловой π-подгруппы G_π.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

***Лемма* 6.1.** *Если подгруппа H π-транзитивна в G, то $H \leq_\pi G$.*

***Проблема* 6.2**. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел и H – σ-транзитивная подгруппа σ-полной группы G. Верно ли, что $H \in sn_\sigma(G)$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel*, *O.H.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

2. *Guralnick*, *R.* Sylow *p*-subgroups and subnormal subgroups of finite groups / R. Guralnick, P.B. Kleidman, R. Lyons // Proc. London Math. Soc. – 1993. – Vol. 66, № 1. – P. 129–151.

3. *Wielandt*, *H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute / H. Wielandt // Proc. Pure Math. – 1980. – Vol. 37. – P. 161–173.

4. *Kleidman*, *P.B.* A proof of the Kegel – Wielandt conjecture on subnormal subgroups / P.B. Kleidman // Ann. Math. – 1991. – Vol. 133, № 2. – P. 369–428.

5. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорусская наука, 2003. – 256 с.

6. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.

7. *The Kourovka Notebook*: Unsolved problems in group theory. – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2022. – 269 p.

8. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

9. *Каморников*, *С.Ф.* О σ-субнормальных подгруппах конечных групп / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 2. – С. 337–343.

10. *Каморников*, *С.Ф.* Об обобщенной проблеме Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Тезисы докладов Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева, Нальчик, 9–15 июля 2023 г. – Нальчик: Издательство «Принт-центр», 2023. – С. 62–64.

11. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

12. *Hall*, *P.* Theorems like Sylow's / P. Hall // Proc. London Math. Soc. –1956. – Vol. 6. – P. 286–304.

13. *Atlas of sporadic groups* / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

14. *Ballester-Bolinches*, *A.* On join properties of Hall π-subgroups of finite π-soluble groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // J. Algebra. – 1998. – Vol. 204, № 2. – P. 532–548.

15. *Вдовин*, *Е.П.* Теоремы силовского типа / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // УМН. – 2011. – Т. 66, № 5. – С. 3–46.

16. *Казарин*, *Л.С.* О произведении конечных групп / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, № 3. – С. 528–531.

17. *Каморников*, *С.Ф.* σ-Проблема Кегеля – Виландта для разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}'\}$ / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 64–68.

18. *Li*, *C.H.* On permutation groups of degree a product of two prime-powers / C.H. Li, X. Li // Communications in Algebra. – 2014. – Vol. 42, № 11. – P. 4722–4743.

19. *Ballester-Bolinches*, *A.* On the Kegel – Wielandt σ-problem for binary partitions / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2022. – Vol. 201, № 1. – P. 443–451.

20. *Arad*, *Z.* On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522–548.

21. *Fisman*, *E.* On the product of two finite solvable groups / E. Fisman // J. Algebra. – 1983. – Vol. 80, № 2. – P. 517–536.

22. *Тихоненко*, *Т.В.* О факторизации конечной группы холловыми подгруппами / Т.В. Тихоненко, В.Н. Тютянов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 1 (52). – С. 125–133.

23. *Каморников*, *С.Ф.* О σ-субнормальных подгруппах конечных 3′-групп / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Украинский математический журнал. – 2020. – Т. 72, № 6. – С. 806–811.

24. *Каморников*, *С.Ф.* О некоторых аспектах σ-проблемы Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 2. – С. 18–28.

25. *Каморников*, *С.Ф.* К σ-проблеме Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Математические заметки. – 2021. – Т. 109, № 4. – С. 564–570.

26. *Каморников*, *С.Ф.* К σ-проблеме Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 4. – С. 121–129.

27. *Васильев*, *А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

28. *Ballester-Bolinches*, *A.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – Vol. 148. – P. 42–52.

29. *Xu*, *Zh.* On some aspects of the Kegel – Wielandt σ-problem / Zh. Xu, X. Yi, S.F. Kamornikov // Ricerche di Matematica. – 2024. – Vol. 73. – P. 2771–2778.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

Поступила в редакцию 18.08.2024.

Информация об авторах

Каморников Сергей Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Тютянов Валентин Николаевич – д.ф.-м.н., профессор