УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_45
EDN: QDMGXA

# ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

**А.М. Гальмак**

*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий*, *Могилёв*

# POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. II

**A.M. Gal'mak**

*Belarusian State University of Food and Chemical Technologies*, *Mogilev*

**Аннотация.** В статье продолжается изучение полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида.

**Ключевые слова:** *полиадическая операция*, *полуинвариантные l-арные подгруппы*, *n-полуинвариантные l-арные подгруппы.*

**Для цитирования:** *Гальмак*, *А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 45–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_45. – EDN: QDMGXA

**Abstract.** The study on the polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form is carried on.

**Keywords:** *polyadic operation*, *semiinvariant l-ary subgroups*, *n-semiinvariant l-ary subgroups*.

**For citation:** *Gal'mak*, *A.M.* Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 45–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_45 (in Russian). – EDN: QDMGXA

## Введение

Данная статья, посвящённая изучению полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на лемму 2.1 означает, что имеется в виду лемма 2.1 из раздела 2 в [1].

## 4 Условия не *n*-полуинвариантности

В следующей теореме доказываются неравенства, позволяющие сформулировать признаки не $n$-полуинвариантности, в частности неинвариантности подалгебр в полиадических группах специального вида.

***Теорема* 4.1**. *Пусть подстановка* $\sigma$ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда*:

1) *если для некоторого* $t = 2, \ldots, l-1$ *подстановка* $\sigma^{t-1}$ *не является тождественной*, *то существует такой элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$, *что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{t-1}\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-t}), \quad (4.1)$$

*то есть l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *если для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *не является тождественной*, *то существует такой элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$, *что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{(i-1)(n-1)}\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}),$$

*то есть* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

*Доказательство*. 1) Если $\sigma^{t-1}$ – нетождественная подстановка, то существует $j \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $\sigma^{t-1}(j) \neq j$, а так как $B \neq A$, то найдется такой элемент $u \in A$, $u \notin B$, что

$$\eta(u\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \neq B. \quad (4.2)$$

Зафиксируем элемент $b \in B$ и выберем в $A^k$ элемент $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ так, что $x_j = u$, все остальные компоненты равны $b$, в частности $x_{\sigma^{t-1}(j)} = b$.

Неравенство $\sigma^{t-1}(j) \neq j$ гарантирует такой выбор. Для случая $\sigma^{t-1}(j) = j$ такой выбор был бы невозможен, так как $u \neq b$.

Если предположить инвариантность $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{t-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-t})$$

для выбранного $\mathbf{x}$.

Применяя к левой части последнего равенства утверждение 3) леммы 2.1, а к правой – предложение 2.2 при $B = C$, получим

$$\eta(x_1\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots \times \eta(x_j\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots \times \eta(x_k\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} \underbrace{B \ldots B}_{l-t}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(j)} \underbrace{B \ldots B}_{l-t}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} \underbrace{B \ldots B}_{l-t}),$$

откуда

$$\eta(x_j\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(j)} \underbrace{B \ldots B}_{l-t}).$$

Тогда из условия

$$x_j = u,\ x_{\sigma^{t-1}(j)} = b \in B,\ u \notin B$$

получаем

$$\eta(u\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = B,$$

что противоречит (4.2). Поэтому верно (4.1). Следовательно, $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является инвариантной в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

2) Полагаем в 1) $t = (i-1)(n-1) + 1$. □

***Замечание* 4.1.** В утверждении 1) теоремы 4.1 отсутствует случай $t = l$, так как в этом случае из условия $\sigma^l = \sigma$ следует тождественность подстановки $\sigma^{t-1}$, что противоречит условию.

***Замечание* 4.2.** В утверждении 2) теоремы 4.1 условием $i = 2, \ldots, s$ исключается случай $l = n$, так как в этом случае $s = 1$.

## 5 Следствия

Полагая в теореме 4.1 $t = 2$, $i = 2$, получим

***Следствие* 5.1.** *Пусть подстановка* $\sigma$ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда*:

1) *если подстановка* $\sigma$ *не является тождественной, то существует элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ *такой, что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(B^k\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-2}),$$

*то есть l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *если подстановка* $\sigma^{n-1}$ *не является тождественной, то существует элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ *такой, что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{n-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots B^k}_{(s-1)(n-1)}),$$

*то есть* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Считая в утверждении 1) теоремы 4.1 $\sigma$ циклом длины $m \geq 2$, где $m$ делит $l-1$, получим

***Следствие* 5.2.** *Пусть* $\sigma$ – *цикл из* $\mathbf{S}_k$ *длины* $m \geq 2$, $m$ *делит* $l-1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$, $t$ – *любой элемент множества* $\{2, \ldots, m\}$. *Тогда существует элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ *такой, что верно равенство* (4.1), *то есть l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Доказательство теоремы 4.1 позволяет более конкретно переформулировать следствие 5.2.

***Следствие* 5.3.** *Пусть* $\sigma = \{i_1, \ldots, i_m\}$ – *цикл из* $\mathbf{S}_k$ *длины* $m \geq 2$, $m$ *делит* $l-1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$, $b$ – *произвольный элемент из* $B$, $u$ – *произвольный элемент из* $A \setminus B$, *зафиксируем любой* $j \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ *и положим*

$$\mathbf{x} = (x_1 = b, \ldots, x_{j-1} = b, x_j = u, x_{j+1} = b, \ldots, x_k = b).$$

*Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(B^k\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-2}),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(B^kB^k\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-3}),$$

$$\ldots,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{m-2}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-m+1}),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{m-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-m}),$$

*то есть l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Если $\sigma$ – цикл длины $m \geq 2$, $m$ не делит $n-1$, то подстановка $\sigma^{n-1}$ не является тождественной. Поэтому, считая в утверждении 2) теоремы 4.1 $i = 2$, $\sigma$ циклом длины $m \geq 2$, где $m$ делит $l-1$, $m$ не делит $n-1$, получим

***Следствие* 5.4.** *Пусть* $\sigma = \{i_1, \ldots, i_m\}$ – *цикл из* $\mathbf{S}_k$ *длины* $m \geq 2$, $m$ *делит* $l-1$, $m$ *не делит* $n-1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$, $b$ – *произвольный элемент из* $B$, $u$ – *произвольный элемент из* $A \setminus B$, *зафиксируем любой* $j \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ *и положим*

$$\mathbf{x} = (x_1 = b, \ldots, x_{j-1} = b, x_j = u, x_{j+1} = b, \ldots, x_k = b).$$

*Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{n-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots B^k}_{(s-1)(n-1)}),$$

*то есть* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуинвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Замечание* 5.1.** В следствиях 5.3 и 5.4 в качестве цикла длины $m$ можно взять цикл $(12 \ldots m) \in \mathbf{S}_k$. При этом будут выполняться все неравенства из этих следствий. Сформулируем соответствующие следствия, не указывая эти неравенства.

***Следствие* 5.5.** *Пусть* $m$ *делит* $l-1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$.

*Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,(12\ldots m),k} >$ *не является инвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots m),k} >$.

***Следствие* 5.6.** *Пусть m делит* $l-1$, *m не делит* $n-1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,(12\ldots m),k} >$ *не является n-полуинвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots m),k} >$.

Полагая в следтвиях 5.5 и 5.6 $m = k$, получим ещё два следствия.

***Следствие* 5.7.** *Пусть k делит* $l-1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,(12\ldots k),k} >$ *не является инвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k} >$.

***Следствие* 5.8.** *Пусть k делит* $l-1$, *k не делит* $n-1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,(12\ldots k),k} >$ *не является n-полуинвариантной в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k} >$.

***Случай n* = 2**. В этом случае понятия 2-полуинвариантности и полуинвариантности для *n*-арных подгрупп тождественны понятию нормальности для подгрупп. Потому при $n = 2$ из теорем 3.1 (утверждение 2)) и 4.1 (утверждение 1) при $t = 2$) вытекает

***Следствие* 5.9.** [2, предложение 4.1.1]. *Пусть подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *B – подгруппа группы A. Тогда*:

1) *l-арная подгруппа* $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда подгруппа B нормальна в группе A*;

2) *если* $B \neq A$, *подстановка* σ *не является тождественной, то* $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Можно сформулировать аналогичные бинарные результаты для других приведённых выше следствий. Ограничимся здесь таким результатом для следствий 3.3 (утверждение 2)) и 5.8, считая в нём $n = 2$, $l = k + 1$.

***Следствие* 5.10** [2, следствие 4.1.4]. *Пусть B – подгруппа группы A. Тогда*:

1) $(k+1)$*-арная подгруппа* $< B^k, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ $(k+1)$*-арной группы* $< A^k, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ *полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда подгруппа B нормальна в группе A*;

2) *если* $B \neq A$, *то* $< B^k, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ *не является инвариантной в* $< A^k, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$.

***Случай n* = 3**. Полагая в теореме 4.1 $n = 3$, получим

***Следствие* 5.11.** *Пусть для подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *подстановка* $\sigma^{2s}$ *является тождественной*, $< B, \eta >$ – *тернарная подгруппа тернарной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда*:

1) *если для некоторого* $t = 2, \ldots, 2s$ *подстановка* $\sigma^{t-1}$ *не является тождественной, то существует такой элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$, *что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{t-1}\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2s-t+1}), \quad (5.1)$$

*то есть* $(2s+1)$*-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в* $(2s+1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *если для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{2(i-1)}$ *не является тождественной, то существует такой элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$, *что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2(i-1)}\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2(s+1-i)}),$$

*то есть* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является* 3*-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Аналогичные результаты, соответствующие случаю $n = 3$, можно сформулировать для всех полученных выше следствий из теоремы 4.1. Ограничимся следствиями 5.1 и 5.2.

***Следствие* 5.12.** *Пусть для подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *подстановка* $\sigma^{2s}$ *является тождественной*, $< B, \eta >$ – *тернарная подгруппа тернарной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда*:

1) *если подстановка* σ *не является тождественной, то существует элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ *такой, что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(B^k\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2s-1}),$$

*то есть* $(2s+1)$*-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в* $(2s+1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *если подстановка* $\sigma^2$ *не является тождественной, то существует элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ *такой, что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(B^kB^k\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{2(s-1)}),$$

*то есть* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является* 3*-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Следствие* 5.13.** *Пусть* σ – *цикл из* $\mathbf{S}_k$ *длины* $m \geq 2$, *m делит* 2*s*, $< B, \eta >$ – *тернарная подгруппа тернарной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$, *t – любой элемент множества* $\{2, \ldots, m\}$. *Тогда существует элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ *такой, что верно неравенство* (5.1), *то есть* $(2s+1)$*-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в* $(2s+1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гальмак, А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58.

2. *Гальмак, А.М.* Полиадические операции и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.


*Поступила в редакцию* 25.09.2024.

**Информация об авторах**

*Гальмак Александр Михайлович* – д.ф.-м.н., профессор