МАТЕМАТИКА

УДК 517.954
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40
EDN: UESTUB

НЕРЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В $\mathbb{R}^4$

А.И. Басик[1], **Е.В. Грицук**[2], **Д.В. Галуц**[1]

[1]*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*
[2]*Брестский государственный технический университет*

IRREGULARIZABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE BIHARMONIC SYSTEM IN $\mathbb{R}^4$

A.I. Basik[1], **E.V. Gricuk**[2], **D.V. Haluts**[1]

[1]*Brest State A.S. Pushkin University*
[2]*Brest State Technical University*

Аннотация. Линейную однородную систему p дифференциальных уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^d$ назовем бигармонической, если каждая компонента произвольного ее непрерывно дифференцируемого решения удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0,$ где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$. В настоящей статье приводится пример бигармонической системы в $\mathbb{R}^4$, не являющейся ни четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, ни эллиптической псевдосимметрической системой. Для этой системы рассматривается задача Дирихле в произвольной ограниченной области с достаточно гладкой границей. Доказывается, что в некоторой точке границы ранг матрицы Лопатинского задачи Дирихле не является максимальным. Также показывается, что в этой точке предельная задача для рассматриваемой задачи Дирихле не является однозначно разрешимой.

Ключевые слова: *эллиптическая система*, *задача Дирихле*, *регуляризуемая краевая задача*, *условие Лопатинского*.

Для цитирования: *Басик*, *А.И.* Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Д.В. Галуц // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 40–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40. – EDN: UESTUB

Abstract. A linear homogeneous system of p first order differential equations in $\mathbb{R}^d$ is called biharmonic if each component of its arbitrary continuously differentiable solution satisfies the equation $\Delta^2 u = 0,$ where Δ is the Laplace operator in $\mathbb{R}^d$. In this article we give an example of a biharmonic system in $\mathbb{R}^4$, which is neither a four-dimensional analogue of the Cauchy – Riemann system nor an elliptic pseudo-symmetric system. For this system we consider the Dirichlet problem in an arbitrary bounded region with a sufficiently smooth boundary. It is proved that at some point of the boundary the rank of the Lopatinski matrix of the Dirichlet problem is not maximal. It is also shown that at this point the limit problem for the considered Dirichlet problem is not uniquely solvable.

Keywords: *elliptic system*, *Dirichlet problem*, *regularizable boundary value problem*, *Lopatinski condition.*

For citation: *Basik*, *A.I.* Irregularizability of the Dirichlet problem for one biharmonic system in $\mathbb{R}^4$ / A.I. Basik, E.V. Gricuk, D.V. Haluts // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 40–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40 (in Russian). – EDN: UESTUB

Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \qquad (0.1)$$

где $A_j \quad (j = 1,2,3,4)$ – заданные действительные квадратные матрицы четвертого порядка, $U = (u_1(x),...,u_4(x))^T$ – искомая четырехкомпонентная вектор-функция, $x = (x_1,...,x_4) \in \mathbb{R}^4$, T означает транспонирование.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ – ограниченная область, границей которой является достаточно гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим краевую задачу отыскания решения $U(x)$ системы (0.1) в области Ω, удовлетворяющего граничным условиям

$$\mathfrak{B}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Bigg|_{\Omega \ni x \to y} = f(y) \ \ (y \in \partial\Omega). \qquad (0.2)$$

Здесь $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ – заданный двухкомпонентный вектор-столбец; $\mathfrak{B}$ – матричный, размера 2×4, граничный оператор, состоящий из скалярных линейных операторов, «полиномиальных относительно нормали» к $\partial\Omega$ [1].

Как показали исследования ряда ученых, граничный оператор для эллиптической системы нельзя задавать произвольно. Он должен в некотором смысле дополнять свойства решений системы. Для эллиптических систем дифференциальных уравнений условие дополнительности граничных условий было получено Я.Б. Лопатинским [2]; его принято называть условием регуляризуемости краевой задачи, а задачу, для которой это условие выполнено, регуляризуемой. Известно [1], [3], что регуляризуемость краевой задачи является необходимым и достаточным условием нетеровости оператора, отвечающего этой задаче и действующего в определенных банаховых пространствах.

В свое время был неожиданным тот факт, что для системы Фьютера (системы простейшей структуры в $\mathbb{R}^4$ по терминологии М.З. Соломяка) любые граничные условия не могут образовывать вместе с системой регуляризуемую краевую задачу [4].

В.С. Виноградов выделил в пространстве $\mathbb{R}^4$ класс эллиптических псевдосимметрических систем четырех уравнений первого порядка [5]. Для (0.1) это означает, что $A_1 = E$ – единичная, а $A_j = -A_j^T$ при $j = 2,3,4$ – кососимметрические матрицы четвертого порядка. В работе [5] показывается, что, в случае когда (0.2) есть оператор умножения на постоянную матрицу размера 2×4 (задача Римана – Гильберта), однородная краевая задача (0.1), (0.2) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Позже было доказано отсутствие внутренних регуляризумых краевых задач для эллиптических псевдосимметрических систем [6].

В статье [7] определяется понятие многомерного аналога системы Коши – Римана. Применительно к рассматриваемому случаю, система (0.1) называется четырехмерным аналогом системы Коши – Римана (кратко ЧКР-системой), если каждая компонента произвольного непрерывно дифференцируемого ее решения удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbb{R}^4$. Необходимыми и достаточными условиями принадлежности системы (0.1) ЧКР типу является невырожденность матриц A_j $(j = 1,\dots,4)$ и выполнение матричных равенств

$$A_k^{-1}A_j + A_j^{-1}A_k = 0 \quad (k, j = 1,\dots,4, k \neq j). \quad (0.3)$$

А.Т. Усс показал отсутствие для ЧКР-систем регуляризуемых внутренних краевых задач [7].

Отметим, что в трехмерном пространстве для системы Моисила – Теодореску [8], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [9], для систем ортогонального типа [10] существуют регуляризуемые внутренние краевые задачи.

В настоящей статье приводится пример эллиптической системы (0.1), которая не является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана [7], не принадлежит классу эллиптических псевдосимметрических систем [5], однако каждое непрерывно дифференцируемое ее решение является бигармонической функцией. Для этой системы в настоящей работе исследуется регуляризуемость задачи Дирихле.

1 Пример бигармонической системы в $\mathbb{R}^4$

Здесь и всюду ниже, если не оговорено противное, считаем, что $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Характеристическая матрица системы (0.1) с матричными коэффициентами (1.1) имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \sum_{j=1}^{4} A_j \xi_j =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_4 & \xi_3 + \xi_4 & \xi_2 \\ \xi_3 - \xi_4 & \xi_1 - \xi_2 & -2\xi_2 & 2\xi_4 \\ -\xi_3 & \xi_2 & \xi_1 + \xi_2 & \xi_3 - \xi_4 \\ -\xi_2 & -\xi_3 & -\xi_3 + \xi_4 & \xi_1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

и при этом для всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$\det \mathfrak{A}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^2 \neq 0.$$

Последнее означает, что рассматриваемая система (0.1), (1.1) является эллиптической.

Очевидно, что (0.1) не является псевдосимметрической системой в $\mathbb{R}^4$. Поскольку

$$A_2^{-1}A_3 + A_3^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

(т. е. нарушаются равенства (0.3)), то система (0.1) не является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 1.1.** *Каждая компонента* $u_k(x)$ $(k = 1,\dots,4)$ *произвольного непрерывно дифференцируемого решения* $U(x)$ *системы* (0.1) *является бигармонической функцией.*

Доказательство. Пусть $U : \Omega \to \mathbb{R}^4$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, удовлетворяющая системе (0.1). Поскольку рассматриваемая система является эллиптической, то каждая компонента $u_k(x)$ $(k=1,...,4)$ вектора $U(x)$ является бесконечно дифференцируемой в области Ω функцией [11, с. 141]. Применяя к нулевой вектор-функции $\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U(x)}{\partial x_j}$ оператор $\sum_{k=1}^{4} A_k^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k}$, получим

$$\begin{gathered}\Delta u_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_4} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \\ - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0,\end{gathered} \quad (1.3)$$

$$\Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0,$$

$$\Delta u_3 + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0, \quad \Delta u_4 \equiv 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^4$. Тогда

– из четвертого равенства (1.3) следует, что $\Delta^2 u_4 = 0$ в области Ω;

– из третьего равенства (1.3) с учетом четвертого:

$$\Delta^2 u_3 = -\frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_4} = 0;$$

– из второго равенства (1.3) с учетом четвертого:

$$\Delta^2 u_2 = \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_4} = 0;$$

– из первого равенства (1.3) с учетом второго и третьего:

$$\begin{gathered}\Delta^2 u_1 = -\frac{\partial^2 \Delta u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_2}{\partial x_2 \partial x_4} - \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \\ + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_2 \partial x_4} = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4}\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4}\left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4}\right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4}\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4}\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4}\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4}\right) = 0.\end{gathered}$$

Таким образом, каждая из функций $u_k(x)$ $(k=1,2,3,4)$ удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0$ в области Ω, т. е. является бигармонической в Ω функцией. □

2 Задача Дирихле для рассматриваемой системы

В теории аналитических функций под задачей Дирихле понимают задачу отыскания голоморфной в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функции $u + iv$ по известной на границе этой области ее действительной (или мнимой) части

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \ \ (v|_{\partial\Omega} = \varphi).$$

Если функция φ непрерывна по Гельдеру на границе области $\partial\Omega$, то существует единственная гармоническая в Ω функция, принимающая заданные граничные значения. Сопряженная к ней гармоническая функция определяется из системы Коши – Римана с точностью до произвольной действительной постоянной. Из приведенных рассуждений также следует, что произвольно задавать значения аналитической функции на границе области нельзя, ибо действительная часть функции восстанавливается по мнимой части функции с точностью до произвольной постоянной и наоборот. Таким образом, задача восстановления аналитической функции по известной на границе области «половине» ее значений (действительной или мнимой части) является регуляризуемой.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ ограниченная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. По аналогии с двумерным случаем под задачей Дирихле для системы (0.1) будем понимать задачу отыскания непрерывно дифференцируемого решения системы (0.1) в области Ω и непрерывного по Гельдеру в замыкании этой области, удовлетворяющего граничным условиям вида

$$u_3|_{\partial\Omega} = f_1(x), \quad u_4|_{\partial\Omega} = f_2(x) \quad (x \in \partial\Omega), \quad (2.1)$$

где $f_1, f_2 : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции (два граничных условия – «половина» значений вектор-функции $U(x)$).

***Теорема* 2.1.** *Задача Дирихле для системы* (0.1), (1.1) *не является регуляризуемой.*

Доказательство. Напомним, что задача (0.1), (2.1) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Лопатинского. Оно представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора (2.1) и для рассматриваемой задачи состоит в том, что ранг матрицы

$$L(y,\tau) = \int_\gamma \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}^{-1}(\lambda\nu(y) + \tau)\, d\lambda \quad (2.2)$$

является максимальным в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе τ. В формуле (2.2) через $\nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, матрица граничного оператора (2.1) имеет вид

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и интегрирование ведется по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости и охватывающему находящиеся там корни уравнения

$$\det \mathfrak{A}(\lambda\nu(y)+\tau) = 0. \qquad (2.3)$$

Покажем, что в той точке $\tilde{y}$ границы $\partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль параллельна оси Ox_1, условие Я.Б. Лопатинского задачи (0.1), (2.1) не выполняется. В этом случае $\nu(\tilde{y}) = (1,0,0,0)$, $\tau = (0,\tau_1,\tau_2,\tau_3)$, уравнение (2.3) принимает вид $(\lambda^2+|\tau|^2)^2 = 0$, где $|\tau|^2 = \tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2 \neq 0$. Пусть контур γ охватывает точку $i|\tau|$. Тогда, применяя основную теорему о вычетах, получим

$$L(\tilde{y},\tau) = \int_\gamma \frac{1}{(\lambda^2+|\tau|^2)^2} \begin{pmatrix} \lambda^2\tau_2 - \lambda\tau_1\tau_2 + \tau_2|\tau|^2 + \tau_1^2\tau_3 & -\lambda^2\tau_1 - \lambda\tau_2^2 - \tau_1|\tau|^2 + \tau_1\tau_2\tau_3 & \lambda^3 - \lambda^2\tau_1 + \lambda(\tau_1^2+\tau_2\tau_3+\tau_3^2) - \tau_1|\tau|^2 + \tau_1\tau_2\tau_3 - \tau_1\tau_3^2 & -\lambda^2(\tau_2-\tau_3) + \lambda\tau_1\tau_3 + \tau_3|\tau|^2 \\ \tau_1(\lambda^2+|\tau^2|) & \tau_2(\lambda^2+|\tau|^2) & (\tau_2-\tau_3)(\lambda^2+|\tau|^2) & \lambda(\lambda^2+|\tau|^2) \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= 2\pi i \begin{pmatrix} -\frac{i\left(2\tau_2|\tau|^2+\tau_1^2\tau_3\right)}{4|\tau|^3} & \frac{i\left(2\tau_1|\tau|^2-\tau_1\tau_2\tau_3\right)}{4|\tau|^3} & \frac{2|\tau|^3+i(2\tau_1|\tau|^2+\tau_1\tau_3^2-\tau_1\tau_2\tau_3)}{4|\tau|^3} & \frac{i\left(\tau_2-2\tau_3\right)}{4|\tau|^2} \\ -\frac{i\tau_1}{2|\tau|} & -\frac{i\tau_2}{2|\tau|} & -\frac{i\left(\tau_2-\tau_3\right)}{2|\tau|} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Осталось заметить, что при $\tau = (0,0,0,1)$ матрица Лопатинского задачи Дирихле в точке $\tilde{y}$ принимает вид

$$L(\tilde{y},\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi i & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & \pi i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rank} L(\tilde{y},\tau) = 1 < 2$. □

Доказанная теорема означает [1], что оператор, отвечающий задаче Дирихле для системы (0.1), не является нетеровским в определенных банаховых пространствах, т. е. имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро.

3 Другое доказательство теоремы 2.1

Рассмотрим другое доказательство теоремы 2.1. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $\tilde{y}$ совпадает с началом координат. Задаче (0.1), (2.1) соответствует так называемая предельная задача [12] для исходной системы (0.1) в полупространстве $x_1 > 0$ и граничного условия (2.1), заданного на гиперплоскости $x_1 = 0$ (по терминологии И.М. Гельфанда [12], мы рассматриваем краевую задачу под микроскопом в окрестности точки $\tilde{y}$ со все бо́льшим и бо́льшим увеличением). Сделав в предельной задаче преобразование Фурье по переменным x_2, x_3 и x_4 получим

$$\frac{\partial\hat{U}}{\partial x_1}(x_1,\xi') = -i(A_2\xi_2 + A_3\xi_3 + A_4\xi_4)\hat{U}(x_1,\xi') \qquad (3.1)$$

$$(x_1 > 0),$$

$$\hat{u}_3|_{x_1=0} = h_1,\ \hat{u}_4|_{x_1=0} = h_2, \qquad (3.2)$$

где $\xi' = (\xi_2,\xi_3,\xi_4)$, $\hat{U}(x_1,\xi')$ – преобразование Фурье $U(x)$:

$$\hat{U}(x_1,\xi') = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x_2\xi_2+x_3\xi_3+x_4\xi_4)} U(x)\,dx_2dx_3dx_4.$$

Эквивалентная формулировка условия регуляризуемости краевой задачи (0.1), (2.1) в точке $\tilde{y}$ состоит в том, что при каждом ненулевом векторе ξ' в пространстве устойчивых решений $\mathfrak{M}_+$ системы уравнений (3.1) (т. е. стремящихся к нулю при $x_1 \to +\infty$) задача (3.1), (3.2) однозначно разрешима [12], [13].

Рассмотрим (3.1), (3.2) при $\xi' = (0,0,1)$ (сравнить с вектором τ из доказательства теоремы 2). В этом случае $-iA_4$ есть матрица системы (3.1), имеющая двукратные собственные значения -1 и 1. Тогда множество устойчивых решений системы (3.1) задается формулой

$$\hat{U}(x_1,\xi') = (C_1v_1 + C_2(v_1x_1+v_2))e^{-x_1}, \qquad (3.3)$$

где $v_1 = (i,1,0,0)^T$ – собственный вектор матрицы $-iA_4$, отвечающий собственному значению -1; $v_2 = (0,-3,2,2i)^T$ – вектор, присоединенный к вектору v_1; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Осталось заметить, что при любом C_1 и $C_2 = 0$ функция $\hat{U}(x_1,\xi')$, заданная формулой (3.3), является устойчивым решением однородной задачи (3.1), (3.2) при $\xi' = (0,0,1)$. Таким образом, условие однозначной разрешимости (3.1), (3.2) в $\mathfrak{M}_+$ нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агранович*, *М.С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

2. *Лопатинский*, *Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Украинский математический журнал. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.

3. *Волевич*, *Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л.Р. Волевич // Математический сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 373–416.

4. *Соломяк*, *М.З.* О линейных эллиптических системах первого порядка / М.З. Соломяк // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.

5. *Виноградов*, *В.С.* Граничная задача для псевдосимметрических систем / В.С. Виноградов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.

6. *Басик*, *А.И.* О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, А.Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

7. *Усс*, *А.Т.* Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.

8. *Шевченко*, *В.И.* Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Республиканский межведомственный сборник «Математическая физика». – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

9. *Усс*, *А.Т.* Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

10. *Басик*, *А.И.* Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.А. Грицук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – DOI: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16.

11. *Хермандер*, *Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – Москва: Мир, 1965. – 379 с.

12. *Гельфанд*, *И.М.* Об эллиптических уравнениях / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

13. *Агранович*, *М.С.* Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области / М.С. Агранович, А.С. Дынин // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 511–514.

Поступила в редакцию 22.04.2024.

Информация об авторах

Басик Александр Иванович – к.ф.-м.н., доцент
Грицук Евгений Васильевич – к.ф.-м.н., доцент
Галуц Дмитрий Владимирович – студент