МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.7

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_77
EDN: JLQBBW

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВИДЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СУММ

А.П. Шилин

Белорусский государственный университет, *Минск*

LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENTS IN THE FORM OF SPECIAL SUMS

A.P. Shilin

Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Решено в явном виде новое линейное гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение задано на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения выражаются в виде сумм некоторых слагаемых. Во все слагаемые сумм определенным образом входит конечное число одних и тех же заданных функций. Используются классические и обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевой задачи Римана, формулы решения линейных дифференциальных уравнений, свойства аналитических функций. Решение проиллюстрировано примером.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение*, *формулы Сохоцкого*, *краевая задача Римана*, *линейное дифференциальное уравнение.*

Для цитирования: *Шилин*, *А.П.* Линейное интегро-дифференциальное уравнение с коэффициентами в виде специальных сумм / А.П. Шилин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 77–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_77. – EDN: JLQBBW

Abstract. A new linear hypersingular integro-differential equation of the first order has been explicitly solved. The equation is given on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation are expressed as sums of some summands. A finite number of the same functions are included in all summands of sums in a certain way. Classical and generalized Sokhotsky formulas, the theory of the Riemann boundary value problem, formulas for solving linear differential equations, properties of analytical functions are used. The solution is illustrated with an example.

Keywords: *integro-differential equation*, *Sokhotsky formulas*, *Riemann boundary problem*, *linear differential equation.*

For citation: *Shilin*, *A.P.* Linear integro-differential equation with coefficients in the form of special sums / A.P. Shilin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 77–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_77 (in Russian). – EDN: JLQBBW

Введение

Для развития теории интегро-дифференциальных уравнений важно выявлять такие случаи уравнений, которые допускают точное аналитическое решение. В [1] Э.И. Зверович указал решение линейного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, основанное на использовании обобщенных формул Сохоцкого. Настоящая работа примыкает к изучению тех пока немногих случаев переменных коэффициентов в подобных уравнениях (напр., [2], [3]), когда сохраняется возможность точного аналитического решения.

1 Постановка задачи

Пусть $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ – два каких-либо множества, элементы которых упорядочены и могут перемножаться, $n \in \mathbb{N}$. Будем составлять произведения вида $A = c_1 c_2 \cdot ... \cdot c_n$, где для каждого $k = \overline{1, n}$ либо $c_k = a_k$, либо $c_k = b_k$. Обозначим $L_s(a_k, b_k; n)$ сумму всевозможных произведений вида A таких, в которых множители a_k встречаются s раз (и, следовательно, множители b_k встречаются $n-s$ раз), $s = \overline{0, n}$. Например,

$$L_3(a_k, b_k; 5) = a_1a_2a_3b_4b_5 + a_1a_2b_3a_4b_5 + a_1a_2b_3b_4a_5 + +a_1b_2a_3a_4b_5 + a_1b_2a_3b_4a_5 + a_1b_2b_3a_4a_5 + b_1a_2a_3a_4b_5 + +b_1a_2b_3a_4a_5 + b_1b_2a_3a_4a_5,$$

$$L_0(a_k, b_k; 2) = b_1b_2, \quad L_1(a_k, b_k; 1) = a_1.$$

Обозначим через L простую гладкую замкнутую положительно ориентированную кривую на комплексной плоскости. Пусть D_+ и D_- – соответственно внутренняя и внешняя области комплексной плоскости по отношению к этой кривой. Зададим H-непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции $f(t)$,

$p_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, $t\in L$. Пусть на кривой L существуют H-непрерывные производные $p_k'(t)$, $k=\overline{1,n}$. Будем искать на этой кривой H-непрерывную вместе со своей производной функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} L_{2s}\left(p_k(t),\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-t};n\right)\varphi'(t)- \\ -\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} L_{2s}\left(p_k'(t),\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{p_k(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2};n\right)\varphi(t)+ \tag{1.1}$$

$$+\sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} L_{2s-1}\left(p_k(t),\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-t};n\right)\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-$$

$$-\sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} L_{2s-1}\left(p_k'(t),\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{p_k(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2};n\right)\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t),$$

$$t\in L.$$

Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару [4], [5]; интегралы с $\tau-t$ в знаменателе совпадают при этом с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши. Квадратные скобки означают целую часть числа. В частности, при $n=1$ получим уравнение

$$\frac{\varphi'(t)}{\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t}-\frac{\varphi(t)}{\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+$$

$$+\frac{p_1(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-\frac{p_1'(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t),\quad t\in L,$$

способ решения которого указан в [6]. Считаем далее $n\ge 2$. Укажем еще развернутый вид уравнения (1.1) при $n=3$:

$$\left(\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{p_1(t)p_2(t)p_3(\tau)}{\tau-t}+\frac{p_1(t)p_2(\tau)p_3(t)}{\tau-t}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{p_1(\tau)p_2(t)p_3(t)}{\tau-t}\right)d\tau-$$

$$\left.-\frac{1}{\pi^3 i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{p_2(\tau)d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{p_3(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\varphi'(t)-$$

$$-\left(\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{p_1'(t)p_2'(t)p_3(\tau)}{(\tau-t)^2}+\frac{p_1'(t)p_2(\tau)p_3'(t)}{(\tau-t)^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{p_1(\tau)p_2'(t)p_3'(t)}{(\tau-t)^2}\right)d\tau-$$

$$\left.-\frac{1}{\pi^3 i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\int_L\frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\int_L\frac{p_3(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\right)\varphi(t)+$$

$$+\left(p_1(t)p_2(t)p_3(t)-\frac{p_1(t)}{\pi^2}\int_L\frac{p_2(\tau)d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{p_3(\tau)d\tau}{\tau-t}-\right.$$

$$-\frac{p_2(t)}{\pi^2}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{p_3(\tau)d\tau}{\tau-t}-$$

$$\left.-\frac{p_3(t)}{\pi^2}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{p_2(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-$$

$$-\left(p_1'(t)p_2'(t)p_3'(t)-\frac{p_1'(t)}{\pi^2}\int_L\frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\int_L\frac{p_3(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-\right.$$

$$-\frac{p_2'(t)}{\pi^2}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\int_L\frac{p_3(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-$$

$$\left.-\frac{p_3'(t)}{\pi^2}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\int_L\frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\right)\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t), \tag{1.2}$$

$$t\in L.$$

2 Решение уравнения

Введем интегралы типа Коши

$$P_{k\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-z},\ k=\overline{1,n},\ z\in D_\pm.$$

Далее будем использовать классические и обобщенные формулы Сохоцкого [1], [4] для соответствующих предельных значений, являющихся H-непрерывными функциями на кривой L:

$$P_{k\pm}^{(m)}(t)=\pm\frac{1}{2}p_k^{(m)}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p_k(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}},$$

$$k=\overline{1,n},\ m=0,1,\ t\in L.$$

В результате коэффициент при $\varphi'(t)$ в уравнении (1.1) преобразуется следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} L_{2s}\left(p_k(t),\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-t};n\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(p_k(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)+\right.$$

$$\left.+\prod_{k=1}^{n}\left(-p_k(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\right)=$$

$$=2^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}p_k(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)+\right.$$

$$\left.+\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}p_k(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p_k(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\right)=$$

$$=2^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(t)+\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(t)\right).$$

Аналогично преобразуя остальные коэффициенты уравнения (1.1), получим

$$\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(t)+\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(t)\right)\varphi'(t)- \\ -\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k+}'(t)+\prod_{k=1}^{n}P_{k-}'(t)\right)\varphi(t)+ \tag{2.1}$$

$$+\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(t)-\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(t)\right)\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-$$

$$-\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k+}'(t)-\prod_{k=1}^{n}P_{k-}'(t)\right)\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\frac{f(t)}{2^{n-1}},\ t\in L.$$

Введем еще интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\ z\in D_{\pm}.$$

После использования формул Сохоцкого

$$\varphi^{(m)}(t)=\Phi_{+}^{(m)}(t)-\Phi_{-}^{(m)}(t),\qquad(2.2)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}=\Phi_{+}^{(m)}(t)+\Phi_{-}^{(m)}(t),\ t\in L,\ m=0{,}1,$$

уравнение (2.1) приобретает вид

$$\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(t)\right)\Phi'_{+}(t)-\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(t)\right)\Phi'_{-}(t)-$$
$$-\left(\prod_{k=1}^{n}P'_{k+}(t)\right)\Phi_{+}(t)+\left(\prod_{k=1}^{n}P'_{k-}(t)\right)\Phi_{-}(t)=\frac{f(t)}{2^n},$$
$$t\in L,$$

который можно расценивать как краевую задачу Римана о скачке

$$\Psi_{+}(t)-\Psi_{-}(t)=\frac{f(t)}{2^n},\ t\in L,\qquad(2.3)$$

для функций

$$\Psi_{+}(z)=\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(z)\right)\Phi'_{+}(z)-\left(\prod_{k=1}^{n}P'_{k+}(z)\right)\Phi_{+}(z),\qquad(2.4)$$
$$z\in D_{+},$$

$$\Psi_{-}(z)=\left(\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(z)\right)\Phi'_{-}(z)-\left(\prod_{k=1}^{n}P'_{k-}(z)\right)\Phi_{-}(z),\qquad(2.5)$$
$$z\in D_{-}.$$

Будем предполагать далее для простоты, что

$$P_{k\pm}(z)\neq 0,\ k=\overline{1,n},\ z\in D_{\pm}\cup L,\ z\neq\infty.\qquad(2.6)$$

Обозначим l – суммарный порядок нуля на бесконечности функций $P_{k-}(z),\ k=\overline{1,n}.$ Из соотношения (2.5) вытекает, что задачу Римана (2.3) следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль порядка по меньшей мере $l+2$. Согласно [7] для разрешимости этой задачи необходимы и достаточны условия

$$\int_L f(t)\,t^k\,dt=0,\ k=\overline{0,l},\qquad(2.7)$$

которые далее предполагаем выполненными. Тогда

$$\Psi_{\pm}(z)=F_{\pm}(z),\ F_{\pm}(z)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_L\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-z},\ z\in D_{\pm}.$$

Теперь из соотношений (2.4), (2.5) находим функции $\Phi_{\pm}(z)$ как решения линейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_{\pm}(z)=$$
$$=\left(\int_{z_{\pm}}^{z}\frac{F_{\pm}(\zeta)d\zeta}{\prod_{k=1}^{n}P_{k\pm}(\zeta)}\exp\left(-\int_{z_{\pm}}^{\zeta}\frac{\prod_{k=1}^{n}P'_{k\pm}(\omega)}{\prod_{k=1}^{n}P_{k\pm}(\omega)}d\omega\right)+C_{\pm}\right)\times$$
$$\times\exp\left(\int_{z_{\pm}}^{z}\frac{\prod_{k=1}^{n}P'_{k\pm}(\zeta)}{\prod_{k=1}^{n}P_{k\pm}(\zeta)}d\zeta\right),\ z\in D_{\pm},\qquad(2.8)$$

где $z_{\pm}$ – фиксированные точки в соответствующих областях $D_{\pm}$, $C_{\pm}\in\mathbb{C}$. Следует также обеспечить выполнение условия $\Phi_{-}(\infty)=0$, выражающего известное свойство интеграла типа Коши. Удобно в дальнейшем брать $z_{-}=\infty$, и тогда для выполнения этого условия должно быть $C_{-}=0$. Отметим, что все интегралы в формулах (2.8) существуют и дают однозначные аналитические функции в соответствующих областях. При этом у функций $\Phi_{\pm}(z)$ и у их производных существуют предельные H-непрерывные значения на L.

3 Основной результат. Пример

Теперь при $m=0$ из равенства (2.2) можно найти искомую функцию, а также заключить, что эта функция удовлетворяет предполагавшимся на нее требованиям. Таким образом, оказывается справедливым следующий результат.

Теорема. *Для разрешимости уравнения* (1.1) *необходимо и достаточно выполнение условий* (2.7). *Если эти условия выполняются, то решение уравнения* (1.1) *содержит одну произвольную постоянную* C_{+} *и имеет вид*

$$\varphi(t)=\left(\int_{z_{+}}^{t}\frac{F_{+}(\zeta)d\zeta}{\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(\zeta)}\exp\left(-\int_{z_{+}}^{\zeta}\frac{\prod_{k=1}^{n}P'_{k+}(\omega)}{\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(\omega)}d\omega\right)+C_{+}\right)\times$$
$$\times\exp\left(\int_{z_{+}}^{t}\frac{\prod_{k=1}^{n}P'_{k+}(\zeta)}{\prod_{k=1}^{n}P_{k+}(\zeta)}d\zeta\right)-\int_{\infty}^{t}\frac{F_{-}(\zeta)d\zeta}{\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(\zeta)}\times$$
$$\times\exp\left(-\int_{\infty}^{\zeta}\frac{\prod_{k=1}^{n}P'_{k-}(\omega)}{\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(\omega)}d\omega\right)\exp\left(\int_{\infty}^{t}\frac{\prod_{k=1}^{n}P'_{k-}(\zeta)}{\prod_{k=1}^{n}P_{k-}(\zeta)}d\zeta\right).$$

В качестве примера приведем решение уравнения (1.2) на окружности $|t-1|=0{,}5,$ взяв

$$p_1(t)=\sin t-\frac{1}{t-1},\ p_2(t)=\cos t-\frac{1}{t-1},$$
$$p_3(t)=\frac{t^2-2}{t-1},\ f(t)=8\left(\sin 2t-\frac{1}{(t-1)^6}\right).$$

Легко вычислить, что

$$\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau-1|=0{,}5}\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t}=\sin t+\frac{1}{t-1},$$
$$\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau-1|=0{,}5}\frac{p_2(\tau)d\tau}{\tau-t}=\cos t+\frac{1}{t-1},$$
$$\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau-1|=0{,}5}\frac{p_3(\tau)d\tau}{\tau-t}=t+1+\frac{1}{t-1},$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=\cos t-\frac{1}{(t-1)^2},$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=-\sin t-\frac{1}{(t-1)^2},$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{p_3(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=1-\frac{1}{(t-1)^2}.$$

Укажем сразу вид (2.1) уравнения в этом примере, получающийся после упрощения его коэффициентов:

$$\left(\sin t\cos t(t+1)+\frac{1}{(t-1)^3}\right)\varphi'(t)+$$

$$+\left(\sin t\cos t+\frac{1}{(t-1)^6}\right)\varphi(t)+$$

$$+\left(\sin t\cos t(t+1)-\frac{1}{(t-1)^3}\right)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+$$

$$+\left(\sin t\cos t-\frac{1}{(t-1)^6}\right)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau-1|=0,5}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=$$

$$=2\left(\sin 2t-\frac{1}{(t-1)^6}\right),\ \ |t-1|=0,5.$$

Соответствующая задача Римана (2.3) о скачке

$$\Psi_+(t)-\Psi_-(t)=\sin 2t-\frac{1}{(t-1)^6},\ \ |t-1|=0,5,$$

должна решаться в классе функций, имеющих на бесконечности нуль по меньшей мере 5-го порядка. Ее решение очевидно:

$$\Psi_+(z)=\sin 2z,\ \ \Psi_-(z)=\frac{1}{(z-1)^6}.$$

Теперь уравнениям (2.4), (2.5) в случае примера легко придать вид

$$(z+1)\Phi'_+(z)+\Phi_+(z)=2,\ \ |z-1|<0,5,$$

$$\Phi'_-(z)+\frac{1}{(z-1)^3}\Phi_-(z)=\frac{1}{(z-1)^3},\ \ |z-1|>0,5,$$

а их решениями (с учетом условия $\Phi_-(\infty)=0$) будут функции

$$\Phi_+(z)=\frac{2z+C_+}{z+1},\ \ \Phi_-(z)=1-e^{\frac{1}{2(z-1)^2}}.$$

Наконец, получим решение примера

$$\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_-(t)=\frac{t-1+C_+}{t+1}+e^{\frac{1}{2(t-1)^2}}.$$

Заключительное замечание

Условия (2.6) можно ослабить, допуская у функций $P_{k\pm}(z)$ конечное число нулей в областях $D_\pm$. Это приведет к дополнительным ограничениям на функцию $f(t)$, при выполнении которых метод решения уравнения сохранится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зверович*, *Э.И.* Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э.И. Зверович // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

2. *Шилин*, *А.П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа / А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. – DOI: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29.

3. *Шилин*, *А.П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах / А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 358–369. – DOI: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369.

4. *Зверович*, *Э.И.* Обобщение формул Сохоцкого / Э.И. Зверович // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2012. – №2. – С. 24–28.

5. *Адамар*, *Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.

6. *Зверович*, *Э.И.* Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э.И. Зверович, А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. – DOI: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.

7. *Гахов*, *Ф.Д.* Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

Поступила в редакцию 18.12.2023.

Информация об авторе

Шилин Андрей Петрович – к.ф.-м.н., доцент