

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, порядка делящего $l - 1$, и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантные l -арные подгруппы, n -полуинвариантные l -арные подгруппы.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_54. – EDN: QXHKOX

Abstract. The article studies the normal subgroups in polyadic groups of special form, that is in polyadic groups with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ which order divides $l - 1$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroups, n -semiinvariant l -ary subgroups.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 54–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_54 (in Russian). – EDN: QXHKOX

Введение

Инвариантные и полуинвариантные l -арные подгруппы впервые появились у В. Дёрнте в [1] и являются полиадическими аналогами нормальных подгрупп. При $l = 2$ понятия полуинвариантности и инвариантности совпадают, так как определяющие их равенства принимают вид равенства $xB = Bx$, определяющего нормальные подгруппы. Указанные полиадические аналоги В. Дёрнте являются частными случаями более общего понятия – n -полуинвариантных l -арных подгрупп. Их изучению в полиадических группах специального вида и посвящена данная статья.

1 Предварительные сведения

Напомним, что l -арную подгруппу $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называют [2, с. 52] *инвариантной* в ней, если

$$\begin{aligned} \eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) &= \eta(Bx \underbrace{B \dots B}_{l-2}) = \dots \\ \dots &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} xB) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x) \end{aligned}$$

для любого $x \in A$. Если же

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x)$$

для любого $x \in A$, то $\langle B, \eta \rangle$ называют [2, с. 55] *полуинвариантной* в $\langle A, \eta \rangle$.

Полуинвариантные и инвариантные l -арные подгруппы являются частными случаями более общего понятия из следующего определения.

Определение 1.1. l -Арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$, называется *n -полуинвариантной* в ней, если

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{i(n-1)} x \underbrace{B \dots B}_{(s-1)(n-1)})$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, s$.

В развёрнутом виде последнее равенство переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x \underbrace{B \dots B}_{(s-1)(n-1)}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{2(n-1)} x \underbrace{B \dots B}_{(s-2)(n-1)}) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-2)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{2(n-1)}}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{n-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{l-1}} x). \end{aligned}$$

Ясно, что l -полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы – это в точности её полуинвариантные l -арные подгруппы, а 2-полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы – это в точности её инвариантные l -арные подгруппы.

Из определения 1.1 также следует, что всякая n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы является и полуинвариантной в ней. В частности, полуинвариантными являются инвариантные l -арные подгруппы.

Имеет место

Лемма 1.1 [3, лемма 6.2]. *Если l -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$, удовлетворяет условию*

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}),$$

то для любого $i \geq 1$ выполняется условие

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{j(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{i(l-1)-j(n-1)}}),$$

где $j = 0, 1, \dots, is - 1$.

Полагая в лемме 1.1 $i = 1$, получим

Следствие 1.1. *Если l -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$, удовлетворяет условию*

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}),$$

то выполняется условие

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{j(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-j)(n-1)}}),$$

где $j = 0, 1, \dots, s - 1$.

В развёрнутом виде последнее равенство из следствия 1.1 переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{2(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-2)(n-1)}}) = \dots = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-2)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{2(n-1)}}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{n-1}}). \end{aligned}$$

Ясно, что этого недостаточно для n -полуинвариантности l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ в l -арной группе $\langle A, \eta \rangle$. Однако следствие 1.1 позволяет сформулировать следующий критерий n -полуинвариантности l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ в l -арной группе $\langle A, \eta \rangle$, с помощью которого в [3] были определены n -полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы.

Предложение 1.1. *Полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ явля-*

ется n -полуинвариантной в ней тогда и только тогда, когда

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}).$$

Можно показать [4, теорема 2.3.29], что для n -полуинвариантности конечной l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ в l -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ достаточно равенства

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}).$$

В частности [4, следствие 2.3.30], для инвариантности конечной l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ достаточно равенства

$$\eta(\underbrace{B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B x B \dots B}_{{l-2}}).$$

Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ определяется на декартовой степени A^k следующим образом:

$$\eta_{s, \sigma, k}(x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk}) = (y_1, \dots, y_k),$$

$$\begin{aligned} \text{где} \\ y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \\ &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{i\sigma^{i-1}(j)}), j \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

В [5] было доказано, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

2 Вспомогательные результаты

Предложение 2.1. *Пусть H_1, H_2, \dots, H_l – подмножества n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда*

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{t-1}^k \mathbf{x} H_{t+1}^k \dots H_l^k) &= \\ &= \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{j-1}(1)} H_{t+1} \dots H_l) \times \dots \\ &\dots \times \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{j-1}(k)} H_{t+1} \dots H_l) \end{aligned}$$

для любого $t = 1, \dots, l$. В частности,

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} H_2^k \dots H_l^k) &= \\ &= \eta(x_1 H_2 \dots H_l) \times \dots \times \eta(x_k H_2 \dots H_l), \\ \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{l-1}^k \mathbf{x}) &= \\ &= \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_{\sigma^{j-1}(1)}) \times \dots \times \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_{\sigma^{j-1}(k)}). \end{aligned}$$

Если подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{l-1}^k \mathbf{x}) &= \\ &= \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_1) \times \dots \times \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_k). \end{aligned}$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{t-1}^k \mathbf{x} H_{t+1}^k \dots H_l^k) &= \\ &= \{ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{t-1} \mathbf{x} \mathbf{h}_{t+1} \dots \mathbf{h}_l) \mid \\ &\mathbf{h}_i \in H_i^k, i = 1, \dots, t-1, t+1, \dots, l \} = \\ &= \{ \eta_{s, \sigma, k}((h_{11}, \dots, h_{1k}) \dots (h_{(t-1)1}, \dots, h_{(t-1)k})(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (h_{(t+1)1}, \dots, h_{(t+1)k}) \dots (h_{l1}, \dots, h_{lk}) | \\ & h_{ij} \in H_i, i = 1, \dots, t-1, t+1, \dots, l; j = 1, \dots, k \} = \\ & = \{ \eta(h_{11}h_{2\sigma(1)} \dots h_{(t-1)\sigma^{t-2}(1)} x_{\sigma^{t-1}(1)} h_{(t+1)\sigma(1)} \dots h_{l\sigma^{l-1}(1)}), \dots \\ & \dots, \eta(h_{1k}h_{2\sigma(k)} \dots h_{(t-1)\sigma^{t-2}(k)} x_{\sigma^{t-1}(k)} h_{(t+1)\sigma(k)} \dots h_{l\sigma^{l-1}(k)}) | \\ & \quad h_{i\sigma(j)} \in H_i, \\ & \quad i = 1, \dots, t-1, t+1, \dots, l; \sigma(j) = 1, \dots, k \} = \\ & = \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} H_{t+1} \dots H_l) \times \dots \\ & \dots \times \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} H_{t+1} \dots H_l), \end{aligned}$$

то верно первое равенство из условия леммы.

Второе и третье равенства получаются из первого, если в нём положить соответственно $t = 1$ и $t = l$.

Четвёртое равенство является следствием третьего, так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. \square

Следующее предложение, получается из предложения 2.1, если в нём положить

$$H_1 = \dots = H_{t-1} = B, H_{t+1} = \dots = H_l = C.$$

Предложение 2.2. Пусть B и C – подмножества n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{l-t}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} \underbrace{C \dots C}_{l-t}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} \underbrace{C \dots C}_{l-t}) \end{aligned}$$

для любого $t = 1, \dots, l$. В частности,

$$\begin{aligned} & \eta_{1,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{n-t}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} \underbrace{C \dots C}_{n-t}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} \underbrace{C \dots C}_{n-t}), \end{aligned}$$

где $t = 1, \dots, n$.

Лемма 2.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ – n -арные подгруппы n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда

$$\begin{aligned} & 1) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}) \end{aligned}$$

для любого $i = 2, \dots, s+1$;

$$\begin{aligned} & 2) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \end{aligned}$$

для любого $i = 2, \dots, s+1$;

$$\begin{aligned} & 3) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & = \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{l-1}(1)}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{l-1}(k)}); \end{aligned}$$

5) если подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k).$$

Доказательство. 1) Полагая в первом равенстве предложения 2.1

$$t = (i-1)(n-1) + 1,$$

$$H_1 = \dots = H_{t-1} = B, H_{t+1} = \dots = H_l = C,$$

где $i = 2, \dots, s+1$, и, учитывая тот факт, что $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ – n -арные подгруппы в $\langle A, \eta \rangle$, получим

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \dots C}_{(s+1-i)(n-1)}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \dots C}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство из 1) верно.

2) Получается из 1) при $B = C$.

3) Полагая во втором равенстве предложения 2.1

$$H_2 = \dots = H_l = B,$$

где $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$.

4) Полагая в третьем равенстве предложения 2.1

$$H_1 = \dots = H_{l-1} = B,$$

где $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$.

5) Следует из 4), так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. \square

Замечание 2.1. Все равенства в предложениях 2.1, 2.2 и лемме 2.1 можно записать более компактно. Например, если для $j = 1, \dots, k$ положить

$$F_j = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

$$G_j = \eta(x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \quad H_j = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j),$$

то равенства 2), 3) и 5) из леммы 2.1 примут вид

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = F_1 \times \dots \times F_j \times \dots \times F_k,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = G_1 \times \dots \times G_j \times \dots \times G_k,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) = H_1 \times \dots \times H_j \times \dots \times H_k.$$

Полагая в лемме 2.1 $n = 2$, $B = C$, $\sigma^l = \sigma$, получим

Следствие 2.1 [6, лемма 4.1.1]. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, B – подгруппа группы A ,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k.$$

Тогда:

$$1) \left[\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-i} \right]_{l,\sigma,k} = Bx_{\sigma^{i-1}(1)} B \times \dots \times Bx_{\sigma^{i-1}(k)} B$$

для любого $i = 2, \dots, l-1$;

$$2) \left[\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \right]_{l,\sigma,k} = x_1 B \times \dots \times x_k B;$$

$$3) \left[\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x} \right]_{l,\sigma,k} = Bx_1 \times \dots \times Bx_k.$$

3 Основной результат

Как отмечалось выше, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа. Понятно, что если $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

Теорема 3.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если подстановка σ^{n-1} является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Доказательство. Так как подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

1) **Необходимость.** Из n -полуинвариантности $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ следует полуинвариантность $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$, а это означает, что

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

для любого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда, ввиду утверждений 3) и 5) леммы 2.1,

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k), \end{aligned} \quad (3.2)$$

откуда

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j), j = 1, \dots, k \quad (3.3)$$

для любого $x_j \in A$. В частности,

$$\eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1)$$

для любого $x_1 \in A$, что означает полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k . Из полуинвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ следует (3.3), а это значит верно (3.2). Тогда, ввиду утверждений 3) и 5) леммы 2.1, верно (3.1).

Кроме того, используя полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, а также тот факт, что $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$, получим

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) &= \eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \end{aligned}$$

для любого $j = 1, \dots, k$, то есть

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Последнее равенство в силу тождественности подстановки σ^{n-1} переписывается следующим образом

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{B \dots B}_{n-1})$$

для любого $i = 2, \dots, s$. Тогда

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \end{aligned}$$

Применив к последнему равенству утверждения 3) и 2) леммы 2.1, получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}),$$

откуда и из равенства (3.1) следует n -полуинвариантность $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

2) Полагаем в 1) $n = l$. □

Считая в теореме 3.1 σ циклом длины $m \geq 2$, при этом m делит $l-1$, получим

Следствие 3.1. Пусть σ – цикл из S_k длины $m \geq 2$, m делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если m делит $n-1$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и

только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Полагая в следствии 3.1 $\sigma = (12 \dots m) \in S_k$, получим

Следствие 3.2. Пусть t делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если t делит $n-1$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Полагая в следствии 3.2 $t = k$, получим

Следствие 3.3. Пусть k делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если k делит $n-1$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

2. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

3. Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

4. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

5. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – №1 (51). – С. 4–10.

6. Гальмак, А.М. Полиадические операции и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.

Поступила в редакцию 30.04.2024.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор