МАТЕМАТИКА

УДК 517.9+534 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_70
EDN: NIDZVS

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ КАК АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДОМ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, В.В. Орлов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INVESTIGATION OF FLUCTUATIONS IN MOLECULAR GENERATOR AS SELF-OSCILLATORY SYSTEM BY METHOD OF CANONICAL REPRESENTATIONS

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, V.V. Orlov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Методом канонических разложений исследованы установившиеся случайные колебания в такой автоколебательной системе с двумя с половиной степенями свободы, как молекулярный генератор. Найдены соотношения для нахождения наиболее вероятных значений характеристик стационарного режима колебаний молекулярного генератора с учетом тепловых шумов резонатора и спонтанного излучения пучка активных молекул.

Ключевые слова: *автоколебательная система*, *случайные колебания*, *метод канонических разложений*, *амплитуда стационарных случайных колебаний*, *молекулярный генератор*.

Для цитирования: *Жогаль*, *С.П.* Исследование флуктуаций в молекулярном генераторе как автоколебательной системе методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, В.В. Орлов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 70–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_70. – EDN: NIDZVS

Abstract. Steady-state random oscillations in a self-oscillatory system with two and a half degrees of freedom, such as a molecular generator, have been studied using the method of canonical representations. The relationships have been found for finding the most probable values of the characteristics of the stationary mode of oscillations of a molecular oscillator, taking into account the thermal noise of the resonator and the spontaneous emission of a beam of active molecules.

Keywords: *self-oscillatory system*, *stochastic oscillations*, *method of canonical representations*, *amplitude of stationary stochastic oscillations*, *molecular generator*.

For citation: *Zhogal*, *S.P.* Investigation of fluctuations in molecular generator as self-oscillatory system by method of canonical representations / S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, V.V. Orlov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 70–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_70 (in Russian). – EDN: NIDZVS

Введение

В работе [1] рассмотрено применение метода канонических разложений в задачах исследования установившихся случайных колебаний автоколебательных систем с одной степенью свободы. Обобщение применения метода канонических разложений на системы с конечным числом степеней свободы дано в [2]. Рассмотрим применение метода канонических разложений при нахождении наиболее вероятных значений «выходных» характеристик установившегося колебательного процесса в такой сложной автоколебательной системе, как молекулярный генератор.

1 Математическая модель молекулярного генератора как стохастической автоколебательной системы с двумя с половиной степенями свободы

В качестве математической модели, описывающей стохастические колебательные процессы в молекулярных генераторах, мазерах и лазерах, может быть выбрана следующая система стохастических дифференциальных уравнений [3], [4]:

$$\frac{d^2E}{dt^2}+\frac{\omega_1}{Q_1}\frac{dE}{dt}+\omega_1^2E=-4\pi\frac{d^2P}{dt^2}+\sqrt{\varepsilon}\sigma_1\xi_1(t),$$

$$\frac{d^2P}{dt^2}+\frac{2}{\tau}\frac{dP}{dt}+\omega_2^2P=-2\omega_2\frac{|\mu|^2}{\hbar}NE+\sqrt{\eta}\sigma_2\xi_2(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{dN}{dt}+\frac{1}{\tau}(N-N_0)=\frac{2}{\hbar\omega_2}\frac{dP}{dt}E+\sqrt{\eta}\sigma_2\xi_2(t),$$

где $E(t)$ – электрическая компонента электромагнитного поля резонатора, Q_1 – добротность резонатора, ω_1 – собственная частота резонатора, $P(t)$ – поляризация в пучке частиц активной среды, усредненная по скоростям частиц и по времени пролета частиц через резонатор, τ – среднее время пролета активной частицы через резонатор (среднее время жизни активной частицы, среднее время взаимодействия частицы с полем), ω_2 – частота перехода между рабочими уровнями частиц, μ – матричный элемент дипольного момента частицы, $\hbar$ – постоянная Планка, $N(t)$ – разность населенностей верхнего и нижнего уровней в активной среде, усредненная по времени пролета частиц, N_0 – уровень накачки активной среды, $\varepsilon > 0, \eta > 0, \eta \approx \varepsilon^2$ – малые положительные параметры, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – положительные постоянные, члены $\sigma_1\xi_1(t), \sigma_2\xi_2(t), \sigma_3\xi_3(t)$ характеризуют наличие в генераторе теплового шума резонатора, спонтанного излучения пучка частиц активной среды и флуктуаций числа активных частиц в пучке соответственно, $\xi_i(t)$ – стационарные широкополосные случайные процессы.

Уравнения системы (1.1) являются квазилинейными, поскольку Q_1^{-1} при высокой добротности резонатора – величина малая, а поляризация $P(t)$ – на порядок меньше, чем $E(t)$. Поскольку добротность пучка частиц активной среды

$$Q_2 = \frac{\omega_2 \tau}{2}$$

на порядок выше добротности резонатора, то величина $2/\tau = \omega_2 / Q_2$ также мала и имеет порядок малости $\omega_2\eta$. Таким образом, порядки малостей нелинейных частей уравнений системы (1.1) равны соответственно $\omega_1^2\varepsilon, \omega_2\eta, \omega_2\eta$. Введя расстройку γ между собственной частотой резонатора ω_1 и частотой перехода частиц ω_2

$$\gamma = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2}$$

и, полагая ее малой: $\gamma \approx \varepsilon$, получаем следующие стохастические дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2E}{dt^2} + \omega_2^2 E = \gamma\omega_2^2 E - \frac{\omega_1}{Q_1}\frac{dE}{dt} - 4\pi\frac{d^2P}{dt^2} + \sqrt{\varepsilon}\sigma_1\xi_1(t),$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \omega_2^2 P = -\frac{2}{\tau}\frac{dP}{dt} - 2\omega_2\frac{|\mu|^2}{\hbar}NE + \sqrt{\eta}\sigma_2\xi_2(t),$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2}{\hbar\omega_2}\frac{dP}{dt}E - \frac{1}{\tau}(N - N_0) + \sqrt{\eta}\sigma_2\xi_2(t). \quad (1.2)$$

Таким образом, получена система стохастических дифференциальных уравнений (1.2), которая описывает динамику процессов в молекулярном генераторе как в автоколебательной системе с двумя с половиной степенями свободы с учетом флуктуационных явлений.

2 Применение метода канонических разложений при исследовании флуктуаций в молекулярном генераторе

Будем искать решение первых двух уравнений системы (1.2) в виде:

$$E(t) = a(t)\cos(\omega_2 t + \theta(t)) = a(t)\cos\psi_1(t),$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\omega_2 a(t)\sin(\omega_2 t + \theta(t)) = -\omega_2 a(t)\sin\psi_1(t),$$

$$P(t) = b(t)\cos(\omega_2 t + \upsilon(t)) = b(t)\cos\psi_2(t), \quad (2.1)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\omega_2 b(t)\sin(\omega_2 t + \upsilon(t)) = -\omega_2 b(t)\sin\psi_2(t),$$

где $a(t)$, $b(t)$, $\theta(t)$, $\upsilon(t)$ – также как и $N(t)$ – медленно меняющиеся функции времени.

Используя полученные в [2] соотношения

$$a_k \underset{t}{M}\left[f_k\left(t, a_1, a_2, ..., a_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\right)\sin\psi_k\right] = \frac{\sigma_k^2}{4\omega_k},$$

$$\underset{t}{M}\left[f_k\left(t, a_1, a_2, ..., a_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\right)\cos\psi_k\right] = 0, \quad (2.2)$$

$$(k = 1, 2, ..., n),$$

после подстановки (2.1) вместо $E(t), P(t)$ и их производных из уравнений (1.2) для наиболее вероятных значений a, b, θ, υ и N, соответствующих установившемуся режиму колебаний в системе (1.1), имеем:

$$a\underset{t}{M}\left\{\left[\gamma\omega_2^2 a\cos\psi_1 + \frac{\omega_1}{Q_1}\omega_2 a\sin\psi_1 + 4\pi\omega_2^2 b\cos\psi_2\right]\sin\psi_1\right\} = \frac{\varepsilon\sigma_1^2}{4\omega_2},$$

$$\underset{t}{M}\left\{\left[\gamma\omega_2^2 a\cos\psi_1 + \frac{\omega_1}{Q_1}\omega_2 a\sin\psi_1 + 4\pi\omega_2^2 b\cos\psi_2\right]\cos\psi_1\right\} = 0, \quad (2.3)$$

$$b\underset{t}{M}\left\{\left[\frac{2}{\tau}\omega_2 b\sin\psi_2 - 2\omega_2\frac{|\mu|^2}{\hbar}Na\cos\psi_1\right]\sin\psi_2\right\} = \frac{\eta\sigma_2^2}{4\omega_2},$$

$$\underset{t}{M}\left\{\left[\frac{2}{\tau}\omega_2 b\sin\psi_2 - 2\omega_2\frac{|\mu|^2}{\hbar}Na\cos\psi_1\right]\cos\psi_2\right\} = 0,$$

$$\underset{t}{M}\left\{-\frac{2}{\hbar}b\sin\psi_2 a\cos\psi_1 - \frac{1}{\tau}(N - N_0)\right\} = 0.$$

После проведения усреднения из (2.3) получаем уравнения

$$\frac{\omega_1\omega_2}{2Q_1}a^2 + 2\pi\omega_2^2 ab\sin(\theta - \upsilon) = \frac{\varepsilon\sigma_1^2}{4\omega_2},$$

$$\frac{1}{2}\gamma\omega_2^2 a + 2\pi\omega_2^2 b\cos(\theta - \upsilon) = 0,$$

$$\frac{1}{\tau}\omega_2 b^2 - \omega_2\frac{|\mu|^2}{\hbar}Nab\sin(\upsilon - \theta) = \frac{\eta\sigma_2^2}{4\omega_2}, \quad (2.4)$$

$$\omega_2\frac{|\mu|^2}{\hbar}Na\cos(\upsilon - \theta) = 0,$$

$$\frac{1}{\hbar}ba\sin(\upsilon - \theta) + \frac{1}{\tau}(N - N_0) = 0.$$

Из последних двух уравнений системы (2.4) для разности населенностей верхнего и нижнего уровней активной среды имеем:

$$N = N_0 - \frac{\tau}{\hbar} ab. \qquad (2.5)$$

Подставляя полученное соотношение (2.5) в уравнения (2.4), для амплитуд колебаний a и b получаем уравнения:

$$\begin{gathered} \left[\frac{\omega_1\omega_2}{2Q_1}a^2 - \frac{\varepsilon\sigma_1^2}{4\omega_2}\right]^2 + \frac{1}{4}\gamma^2\omega_2^4 a^4 = 4\pi^2\omega_2^4 a^2 b^2, \\ \left[\frac{\omega_2}{\tau}b^2 - \frac{\eta\sigma_2^2}{4\omega_2}\right]^2 = \frac{\omega_2^2}{\hbar^2}|\mu|^4\left(N_0 - \frac{\tau}{\hbar}ab\right)^2 a^2 b^2. \end{gathered} \qquad (2.6)$$

В случае нулевой расстройки

$$\gamma = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} = 0$$

получаем следующие уравнения для нахождения a, b и N:

$$\begin{gathered} \frac{\omega^2}{2Q_1}a^2 - \frac{\varepsilon\sigma_1^2}{4\omega} = 2\pi\omega^2 ab, \\ \frac{\omega}{\tau}b^2 - \frac{\eta\sigma_2^2}{4\omega} = \frac{\omega}{\hbar}|\mu|^2\, Nab, \;\; N = N_0 - \frac{\tau}{\hbar}ab, \end{gathered} \qquad (2.7)$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2$.

Если пренебречь влиянием флуктуаций $(\sigma_1 = \sigma_2 = 0)$, то из (2.7) получаем, что в детерминированном случае для амплитуд установившегося режима колебаний $E(t)$ и $P(t)$, а также разности населенностей верхнего и нижнего уровней N имеют место соотношения:

$$\begin{gathered} a^2 = \frac{4\pi Q_1\hbar}{\tau}N_0 - \left(\frac{\hbar}{|\mu|\tau}\right)^2, \\ b^2 = \frac{\hbar}{4\pi Q_1\tau}N_0 - \left(\frac{\hbar}{4\pi Q_1|\mu|\tau}\right)^2, \; N = \frac{\hbar}{4\pi Q_1|\mu|^2\tau}. \end{gathered} \qquad (2.8)$$

Соотношения (2.8) вполне согласуются с результатами работы [4]. Из (2.8) следует, что для возбуждения колебаний в молекулярном генераторе необходимо, чтобы уровень накачки активной среды был достаточно высок, а конкретно N_0 должно удовлетворять соотношению

$$N_0 > \frac{\hbar}{4\pi Q_1|\mu|^2\tau}.$$

Система (2.7) позволяет находить наиболее вероятные значения таких «выходных» характеристик установившегося колебательного процесса в молекулярном генераторе, как амплитуды электрического поля резонатора $E(t)$ и поляризации пучка молекул $P(t)$. Эти характеристики с учетом влияния флуктуаций следующим образом выражаются через N и N_0:

$$\begin{gathered} a^2 = \frac{4\pi Q_1\hbar}{\tau}\left(N_0 - N\right) + \frac{\varepsilon\sigma_1^2 Q_1}{2\omega^3}, \\ b^2 = |\mu|^2 N\left(N_0 - N\right) + \frac{\eta\sigma_2^2\tau}{4\omega^2}. \end{gathered} \qquad (2.9)$$

Как видно из соотношений (2.9), тепловые шумы резонатора приводят к возрастанию амплитуды a электрического поля генератора $E(t)$, аналогичное влияние оказывает и спонтанное излучение молекул активной среды на амплитуду b поляризации $P(t)$.

Получение аналитического решения полной системы (2.7) весьма трудоемкая задача, но система (2.7) применима в численных расчетах при исследовании конкретных квантовых генераторов.

Заключение

На основе метода канонических разложений и методики его применения к системам с конечным числом степеней свободы, изложенной в [2], получены соотношения для нахождения наиболее вероятных значений характеристик стационарного режима колебаний в молекулярном генераторе с учетом тепловых шумов резонатора и спонтанного излучения пучка активных молекул, которые уточняют и обобщают результаты работ [4], [5] при учете флуктуационных явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жогаль*, *С.П.* Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 37–41.

2. *Жогаль*, *С.П.* О наиболее вероятных характеристиках установившихся процессов в стохастических автоколебательных системах / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2019): материалы Международной научной конференции. Могилёв, 14–17 мая 2019 г. – Ч. 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси. – 2019. – С. 74–76.

3. *Ораевский*, *А.Н.* Особенности динамики лазеров с насыщающимся поглотителем / А.Н. Ораевский // Квантовая электроника. – 2003. – Т. 33, № 10. – С. 849–855.

4. *Малахов*, *А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах / А.Н. Малахов. – Москва: Наука, 1968. – 660 с.

5. *Основы теории колебаний* / В.В. Мигулин, В.И. Медведев, Е.Р. Мустель, В.Н. Парыгин. – Москва: Наука, 1988. –384 с.

Поступила в редакцию 29.01.2024.

Информация об авторах

Жогаль Сергей Петрович – к.ф.-м.н., доцент
Жогаль Светлана Ивановна – к.т.н., доцент
Орлов Владимир Васильевич – к.т.н., доцент