МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_64
EDN: RJFGYO

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ ИЗ ФОРМАЦИИ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

ON SOME GROUPS FROM THE FORMATION OF SUPERSOLUBLE FINITE GROUPS

T.I. Vasilyeva

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. В работе для максимальной подгруппы группы G введено понятие n-модулярно вложенной подгруппы (n – некоторое натуральное число). Установлен критерий, при котором каждая максимальная подгруппа в G является n-модулярно вложенной, а также необходимые и достаточные условия, при которых в каждой подгруппе A группы G любая максимальная подгруппа n-модулярно вложена в A для некоторого натурального числа n, $n \le k$ (k – фиксированное натуральное число).

Ключевые слова: *сверхразрешимая группа*, *максимальная подгруппа*, *n-модулярно вложенная подгруппа*, *класс Шунка*.

Для цитирования: *Васильева*, *Т.И.* О некоторых группах из формации сверхразрешимых конечных групп / Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 64–69. – DOI: https://doi.org/ 10.54341/ 20778708_2024_2_59_64. – EDN: RJFGYO

Abstract. In this work, for a maximal subgroup of a group G, the concept of an n-modularly embedded subgroup (n is some natural number) is introduced. A criterion is established under which every maximal subgroup in G is n-modularly embedded, as well as necessary and sufficient conditions under which in every subgroup A of G any maximal subgroup is n-modularly embedded in A for some natural number n, $n \le k$ (k – fixed natural number).

Keywords: *supersoluble group*, *maximal subgroup*, *n-modularly embedded subgroup*, *Schunck class*.

For citation: *Vasilyeva*, *T.I.* On some groups from the formation of supersoluble finite groups / T.I. Vasilyeva // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 64–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_64 (in Russian). – EDN: RJFGYO

Введение

Все рассматриваемые группы конечные. В нильпотентной группе всякая максимальная подгруппа является нормальной. Хупперт [1, гл. VI, теорема 9.2 (b)] установил, что если группа G сверхразрешима, то все ее максимальные подгруппы имеют в G простой индекс. Шмидт в [2] доказал, что подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M – максимальная нормальная подгруппа в G, либо G/M_G неабелева порядка pq для некоторых простых чисел p и q. В связи с этим введем следующее

***Определение* 0.1.** *Пусть n – натуральное число. Максимальную подгруппу M группы G будем называть n-модулярно вложенной в G, если либо $M \trianglelefteq G$, либо $M \ne M_G$, $|G:M| = p$ и $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$ для некоторых простых чисел p и q.*

Отметим, если $n=1$ и максимальная подгруппа в G является n-модулярно вложенной, то она модулярна в G.

В работе получен критерий, при котором все максимальные подгруппы группы G n-модулярно вложены в G, а также необходимые и достаточные условия, при которых в любой подгруппе группы всякая максимальная подгруппа является n-модулярно вложенной для некоторого натурального числа n, $n \le k$ (k – фиксированное натуральное число).

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения (см., например, монографии [3], [4]).

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел. Если G – группа, то $|G|$ – порядок G, $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей $|G|$, G_p – силовская p-подгруппа из G для $p \in \mathbb{P}$, $\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп из G, $\mathrm{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп из G. Если H – подгруппа из G, то используется обозначение $H \le G$ и $H < G$

для $H \neq G$. Через $|G:H|$ обозначается индекс H в G, $\pi(G:H)$ – множество всех различных простых делителей $|G:H|$. Для максимальной подгруппы M группы G через M_G обозначается ядро M в G, т. е. $M_G = \cap M^x$ для всех $x \in G$.

Класс групп $\mathfrak{H}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{H}$ и $N \trianglelefteq G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{H}$; *наследственным*, если вместе с $G \in \mathfrak{H}$ все подгруппы из G принадлежат $\mathfrak{H}$; *примитивно замкнутым*, если из $G/M_G \in \mathfrak{H}$ для любой максимальной в G подгруппы M всегда следует, что $G \in \mathfrak{H}$; *классом Шунка*, если $\mathfrak{H}$ – примитивно замкнутый гомоморф.

Через $\mathfrak{U}$ обозначается класс всех сверхразрешимых групп, который образует наследственную насыщенную формацию.

***Теорема* 1.1** [5, теорема 1.4]. *Пусть H/K – p-главный фактор группы G. Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $Aut_G(H/K)$ абелева экспоненты, делящей $p-1$.*

***Теорема* 1.2** [1, гл. VI, теорема 9.5]. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют в G простой индекс.*

***Теорема* 1.3** [3, гл. A, теорема 15.6] *Пусть M – максимальная подгруппа разрешимой группы G и $M_G = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, M дополняет N в G и $N = C_G(N) = F(G)$.*

(2) *Если p – простой делитель $|N|$, то $O_p(M) = 1$.*

(3) *Все дополнения к N в G сопряжены с M.*

2 Группы с заданными максимальными подгруппами

***Лемма* 2.1.** *Пусть n – натуральное число и M – максимальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) M является n-модулярно вложенной в G.

(2) *Либо $M \trianglelefteq G$, либо G/M_G ненильпотентна, $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$ для простых p и q, причем G/M_G – группа с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой M/M_G.*

Доказательство. Предположим, что выполняется утверждение (1). Если $M = M_G$, то $M \trianglelefteq G$. Допустим, что $M \neq M_G$. Тогда G/M_G ненильпотентна и по (1) $|G/M_G| = pq^n$. Ввиду бипримарности G/M_G по теореме Бернсайда G/M_G разрешима. Так как G/M_G примитивна, по теореме 1.3 (1) $G/M_G = N/M_G \cdot M/M_G$, где N/M_G – минимальная нормальная подгруппа в G/M_G, $(N/M_G) \cap (M/M_G) = 1$,

$$N/M_G = C_{G/M_G}(N/M_G).$$

Отсюда следует, что $|N/M_G| = |G:M| = p$. Тогда

$$M/M_G \cong G/M_G / C_{G/M_G}(N/M_G)$$

изоморфна подгруппе из $Aut(Z_p) \cong Z_{p-1}$. Поэтому p не делит $|M/M_G|$, M/M_G – циклическая силовская q-подгруппа в G/M_G, $|M/M_G| = q^n$ делит $p-1$ и $N/M_G \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Итак, из утверждения (1) следует утверждение (2).

Если выполняется утверждение (2), то легко проверяется, что M является n-модулярно вложенной в G. Таким образом, из утверждения (2) следует утверждение (1). □

***Лемма* 2.2.** *Пусть k – натуральное число. Если в группе G любая максимальная подгруппа является n-модулярно вложенной для некоторого натурального числа n, $n \leq k$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть W – любая максимальная подгруппа группы G. Если $W = W_G$, то $W \trianglelefteq G$. Тогда $G = WP$ для некоторой $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $p \in \pi(G:W)$. Из максимальности W в G следует, что $|G:W| = p$. Предположим, что $W \neq W_G$. Тогда по определению 0.1 $|G:W|$ – простое число. По теореме 1.2 G сверхразрешима. □

***Теорема* 2.1.** *Пусть k – натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *В G любая максимальная подгруппа является n-модулярно вложенной для некоторого натурального числа n, $n \leq k$.*

(2) *G сверхразрешима и $Aut_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого дополняемого главного фактора H/K из G, $q \in \mathbb{P}$ и некоторого натурального числа n, $n \leq k$.*

Доказательство. Предположим, что выполняется утверждение (1). По лемме 2.2 G сверхразрешима.

Возьмем в G любой дополняемый главный фактор H/K. Тогда $G = HM$ для некоторой подгруппы M из G и $H \cap M = K$. Ввиду сверхразрешимости G/K следует, что $|H/K| = p$ – простое число. Тогда из $|G/K : M/K| = |H/K|$ заключаем, что M максимальна в G.

Если $M = M_G$, то $G = HM \leq C_G(H/K)$ и $G/C_G(H/K) = 1$.

Предположим, что $M \neq M_G$. Тогда

$$G/M_G = HM_G/M_G \cdot M/M_G,$$

причем $K = H \cap M_G$. Из $HM_G/M_G \cong H/K$

следует, $|HM_G / M_G| = p$ и HM_G / M_G – минимальная нормальная подгруппа в G / M_G. По теореме 1.3 (1) $HM_G / M_G = C_{G/M_G}(HM_G / M_G)$. Так как M является n-модулярно вложенной в G и G / M_G ненильпотентна, по лемме 2.1 $|G / M_G| = pq^n$ для некоторого простого q, $M / M_G \in \mathrm{Syl}_q(G / M_G)$ и M / M_G – циклическая группа порядка q^n, q^n делит $p-1$. Заметим, что $HM_G \le C_G(HM_G / M_G)$. Тогда

$$G / C_G(HM_G / M_G) \cong$$
$$\cong G / M_G / C_{G/M_G}(HM_G / M_G) \cong M / M_G.$$

Из теорем 1 и 3 [5, приложение В] следует, что

$$G / C_G(H / K) \cong Aut_G(H / K) \cong$$
$$\cong Aut_G(HM_G / M_G) \cong G / C_G(HM_G / M_G).$$

Таким образом, из (1) следует (2).

Пусть справедливо утверждение (2). Возьмем любую максимальную в G подгруппу M. Если $M \trianglelefteq G$, то M является n-модулярно вложенной в G. Пусть $M \ne M_G$. Так как G / M_G разрешима, $G / M_G = N / M_G \cdot M / M_G$, где N / M_G – минимальная нормальная подгруппа в G / M_G,

$$(N / M_G) \cap (M / M_G) = 1,$$
$$N / M_G = C_{G/M_G}(N / M_G).$$

Отметим, что $|N / M_G| = p$ – простое число ввиду сверхразрешимости G. Имеем

$$M / M_G \cong G / M_G / C_{G/M_G}(N / M_G) \cong$$
$$\cong G / C_G(N / M_G)$$

– циклическая группа порядка q^n, q^n делит $p-1$. Таким образом, G / M_G ненильпотентна и $|G / M_G| = pq^n$. По лемме 2.1 M является n-модулярно вложенной в G. Итак, из (2) следует (1). □

Теорема 2.2. *Пусть k – натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *В любой подгруппе A из G всякая максимальная в A подгруппа является n-модулярно вложенной для некоторого натурального числа n, $n \le k$.*

(2) *G сверхразрешима и $Aut_G(H / K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого главного фактора H / K из G, $q \in \mathbb{P}$ и некоторого натурального числа n, $n \le k$.*

Доказательство. Предположим, что выполняется утверждение (1). Тогда любая максимальная подгруппа из G является n-модулярно вложенной в G. По лемме 2.2 G сверхразрешима. Пусть H / K – главный фактор группы G. Тогда $|H / K| = p$ – простое число. В G / K существует холлова p'-подгруппа R / K ввиду разрешимости G / K. Тогда $G / K = P / K \cdot R / K$ для некоторой $P / K \in \mathrm{Syl}_p(G / K)$. Обозначим

$$A / K = H / K \cdot R / K.$$

Тогда $A = HR$, $H \cap R = K$ и H / K – главный фактор в A. По теореме 2.1 $A / C_A(H / K)$ есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^n, q^n делит $p-1$, $n \le k$. Так как $H \le C_A(H / K)$, имеем $A = C_A(H / K)R$ и

$$A / C_A(H / K) \cong R / R \cap C_A(H / K) = R / C_R(H / K).$$

С другой стороны из $H / K \le Z(P / K)$ следует, что $P \le C_G(H / K)$. Тогда $G = PR = C_G(H / K)R$ и

$$G / C_G(H / K) \cong R / R \cap C_G(H / K) = R / C_R(H / K).$$

Итак, доказано, что из (1) следует (2).

Пусть теперь выполняется утверждение (2). Возьмем любую подгруппу $A \le G$. Так как G сверхразрешима, существует главный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{m-1} < G_m = G,$$

где $|G_i / G_{i-1}|$ – простое число, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим ряд

$$1 = G_0 \cap A \le G_1 \cap A \le \cdots \le$$
$$\le G_{m-1} \cap A \le G_m \cap A = A. \qquad (2.1)$$

Если $G_{i-1} \cap A = G_i \cap A$ для любого $i = 1, \ldots, m$, то $1 = A$ и для A утверждение (1) теоремы выполняется.

Предположим, что существует $j \in \{1, \ldots, m\}$, для которого $G_{j-1} \cap A \ne G_j \cap A$. Тогда $1 \ne A$. Для $m = 1$ утверждение теоремы выполняется. Поэтому пусть $m > 1$. Из максимальности G_{j-1} в G_j, $G_{j-1} \le (G_j \cap A)G_{j-1} \le G_j$ и $G_{j-1} \cap A \ne G_j \cap A$ заключаем, что $G_j = (G_j \cap A)G_{j-1}$. Тогда $G_j / G_{j-1} \cong G_j \cap A / G_{j-1} \cap A$ – главный фактор из A. Отбрасывая из ряда (2.1) повторения, получим главный ряд

$$1 = A_0 < A_1 < \cdots < A_{l-1} < A_l = A,$$

где $A_i = G_k \cap A$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, m\}$, для которого $G_{k-1} \cap A \ne G_k \cap A$. Возьмем любой главный фактор T / S группы A. Тогда

$$S \le (A_0 \cap T)S \le (A_1 \cap T)S \le \cdots$$
$$\cdots \le (A_{l-1} \cap T)S \le (A_l \cap T)S = T.$$

Из $S \ne T$ следует, что $(A_{i-1} \cap T)S \ne (A_i \cap T)S$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, l\}$. Ввиду максимальности S в T имеем $S = (A_{i-1} \cap T)S$ и $T = (A_i \cap T)S$. Поэтому

$$T / S \cong (A_i \cap T) / (A_{i-1} \cap T)(A_i \cap S).$$

С другой стороны

$$(A_i \cap T)A_{i-1} / (A_i \cap S)A_{i-1} \cong$$
$$\cong (A_i \cap T) / (A_{i-1} \cap T)(A_i \cap S).$$

Тогда $A_{i-1} \le (A_i \cap S)A_{i-1} \ne (A_i \cap T)A_{i-1} \le A_i$. Отсюда $A_{i-1} = (A_i \cap S)A_{i-1}$ и $A_i = (A_i \cap T)A_{i-1}$. Значит, $T/S \cong A_i / A_{i-1} = G_k \cap A / G_{k-1} \cap A$ для некоторого $k \in \{1,\dots,m\}$.

Пусть $|G_k / G_{k-1}| = p$ – простое число. По предположению $G/C_G(G_k/G_{k-1})$ есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^n, q^n делит $p-1$, $n \le k$.

Поскольку $AC_G(G_k/G_{k-1})/C_G(G_k/G_{k-1})$ – подгруппа в $G/C_G(G_k/G_{k-1})$, заключаем, что

$$A/C_G(G_k/G_{k-1}) \cap A \cong$$
$$\cong AC_G(G_k/G_{k-1})/C_G(G_k/G_{k-1})$$

есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^{n_1}, q^{n_1} делит $p-1$ для некоторого натурального числа $n_1 \le n$. Из

$$C_G(G_k/G_{k-1}) \cap A \le C_A(G_k \cap A / G_{k-1} \cap A) =$$
$$= C_A(A_i / A_{i-1})$$

заключаем, что $A/C_A(A_i/A_{i-1})$ является гомоморфным образом $A/C_G(G_k/G_{k-1}) \cap A$. Ввиду теорем 1 и 3 [5, приложение B]

$$A/C_A(T/S) \cong Aut_A(T/S) \cong$$
$$\cong Aut_A(A_i/A_{i-1}) \cong A/C_A(A_i/A_{i-1})$$

есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^{n_2}, q^{n_2} делит $p-1$ для некоторого натурального числа $n_2 \le n_1 \le n$. По теореме 2.1 любая максимальная подгруппа в A является n-модулярно вложенной. Таким образом, из утверждения (2) следует утверждение (1). □

Заметим, что группы из теоремы 2.1 не всегда являются группами из теоремы 2.2.

***Пример* 2.1.** Пусть $n = 1$, группа

$$P = \langle a,b,c \mid a^7 = b^7 = c^7 = 1,$$
$$ab = ba, ac = ca, b^c = ba\rangle$$

– неабелева группа порядка 7^3. Пусть $g \in Aut(P)$ с действием $(c^i b^j a^k)^g = c^{i6} b^{j2} a^{k12}$ для любых $i,j,k \in \{0,1,\dots,6\}$. Группа p имеет экспоненту 7 и $|\langle g\rangle| = 6$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = P \leftthreetimes \langle g\rangle$. Покажем, что любая максимальная подгруппа из G модулярна в G и G имеет подгруппу, в которой максимальная подгруппа не является модулярной. Обозначим $A = \langle a\rangle$, $B = \langle b\rangle$, $C = \langle c\rangle$, $D = \langle g\rangle$, $X = \langle g^3\rangle$, $Y = \langle g^2\rangle$. Отметим некоторые свойства G.

Так как $A \trianglelefteq P$, имеем $A \le Z(P)$. Из неабелевости p следует, что $P/Z(P)$ не может быть циклической. Поэтому $A = Z(P)$ и P/A – элементарная абелева группа порядка 7^2. Тогда $A = P' = \Phi(P)$. Так как $P \trianglelefteq G$ и $D = X \times Y$, $X \in \mathrm{Syl}_2(D)$, $Y \in \mathrm{Syl}_3(D)$, имеем $PX \trianglelefteq G$ и $PY \trianglelefteq G$. Тогда $\Phi(G) \le P$. По [3, гл. A, лемма 9.2 (e)] $\Phi(P) \le \Phi(G)$ и $\Phi(G/\Phi(P)) = \Phi(G)/\Phi(P)$. Экспонента p равна 7, поэтому $\Phi(P) = \Phi(G)$. Итак,

1. $A = Z(P) = P' = \Phi(P) = \Phi(G)$.

Из $ab = ba, ac = ca$ и $|C \times A| = |B \times A| = 7^2$ следует, что $C \times A \trianglelefteq P$ и $B \times A \trianglelefteq P$. Из $b^c = ba$ и $c^b = ca^{-1}$ заключаем, что B и C не являются нормальными подгруппами в p. Таким образом,

2. $P = (C \times A) \leftthreetimes B = (B \times A) \leftthreetimes C$.

Так как $(c^i a^k)^{g^m} = c^{i6^m} a^{k(12)^m}$ и $(b^j a^k)^{g^m} = b^{j2^m} a^{k(12)^m}$ для $i,j,k \in \{0,1,\dots,6\}$, $m \in \{0,1,\dots,5\}$, имеем $D \le N_G(C)$, $D \le N_G(B)$, $D \le N_G(A)$. Итак,

3. $CA/A \trianglelefteq G/A$, $BA/A \trianglelefteq G/A$.

Из $6^2 = 7\cdot 5 + 1$, $6^4 = 7\cdot 185 + 1$, $2^3 = 7 + 1$ следует, что $(c^i)^{g^2} = (c^i)^{g^4} = c^i$ и $(b^j)^{g^3} = b^j$. Поэтому $Y \le C_G(C)$ и $X \le C_G(B)$. Тогда

4. $PY = C_G(CA/A)$ и $PX = C_G(BA/A)$.

5. $1 < A < CA < P < PY < G$ и

$$1 < A < BA < P < PX < G$$

– главные ряды группы G.

Пусть M – максимальная подгруппа из G. Тогда $A \le M$ по п. 1.

Если $P \le M$, то $|G:M| \in \{2,3\}$. При $|G:M| = 2$ подгруппа $M \trianglelefteq G$. Допустим, что $|G:M| = 3$. Тогда по теореме Силова $X^y \in \mathrm{Syl}_2(M)$ для некоторого $y \in G$ и $M = PX^y$. Поэтому $M = (PX)^y = PX \trianglelefteq G$.

Предположим, что P не содержится в M. Тогда $G = PM$. Ввиду разрешимости G подгруппа $D^x \le M$ для некоторого $x \in G$. Из сверхразрешимости G следует, что $|G:M| = 7$. Так как $G = PD^x$, имеем $M = (P \cap M)D^x$ и $|(P \cap M)/A| = 7$. Тогда $(P \cap M)/A$ совпадает либо с BA/A, либо с CA/A.

Допустим, что $BA/A = (P \cap M)/A$. Тогда $G/A = CA/A \cdot M/A$ и

$$(M/A)_{G/A} = M_G/A \le C_{G/A}(CA/A).$$

Значит, $M_G \le PY$. Поэтому 2 не делит $|M_G/A|$. Заметим, что $CA \cap M = (C \cap M)A = A$ и $CM_G/M_G \cong CA/(CA \cap M_G) = CA/A$. Поэтому

$$G/C_G(CM_G/M_G) \cong Aut_G(CM_G/M_G) \cong$$
$$\cong Aut_G(CA/A) \cong G/C_G(CA/A)$$

– циклическая группа порядка 2. Так как $CM_G/M_G = C_{G/M}(CM_G/M_G)$, имеем

$$G/C_G(CM_G/M_G) \cong M/M_G.$$

Если $CA/A = (P \cap M)/A$, то

$G/A = BA/A \cdot M/A$. В этом случае

$G/C_G(BM_G/M_G) \cong G/C_G(BA/A) \cong M/M_G$ – циклическая группа порядка 3. Это означает, что M модулярна в G.

Заметим, что в G подгруппа AD имеет максимальную подгруппу D, которая не является модулярной.

***Теорема* 2.3.** *Пусть k – натуральное число. Класс $\mathfrak{X}$ всех групп G, в которых любая максимальная подгруппа является n-модулярно вложенной для некоторого натурального числа n, $n \le k$, есть класс Шунка, состоящий из сверхразрешимых групп.*

Доказательство. По лемме 2.2 $\mathfrak{X}$ состоит из сверхразрешимых групп.

Покажем, что $\mathfrak{X}$ – гомоморф. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$. Для любой максимальной в G/N подгруппы M/N подгруппа M максимальна в G. Так как $N \le M_G$, имеем $(M/N)_{G/N} = M_G/N$. Подгруппа M n-модулярно вложена в G. Если $M \trianglelefteq G$, то $M/N \trianglelefteq G/N$. Допустим, что $M/N \ne (M/N)_{G/N}$. Из $M \ne M_G$ по определению 0.1 заключаем, что $|G:M| = p$ и $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$. Поэтому

$$|G/N : M/N| = |G:M| = p$$

и $|G/N/(M/N)_{G/N}| = pq^n$, q^n делит $p-1$. Итак, M/N n-модулярно вложена в G/N и $G/N \in \mathfrak{X}$. Значит, $\mathfrak{X}$ – гомоморф.

Докажем, что $\mathfrak{X}$ примитивно замкнут. Пусть $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной в G подгруппы M. Если $M = M_G$, то $M \trianglelefteq G$. Предположим, что $M \ne M_G$. Из $G/M_G \in \mathfrak{X}$ следует, что M/M_G является n-модулярно вложенной в G/M_G. Так как ядро M/M_G изоморфно 1, имеем

$$|G:M| = |G/M_G : M/M_G| = p$$

и $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$, т. е. M n-модулярно вложена в G. Таким образом, $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ примитивно замкнут. □

***Теорема* 2.4.** *Пусть k – натуральное число. Класс $\mathfrak{Y}$ всех групп G таких, что в любой подгруппе A из G всякая максимальная подгруппа из A является n-модулярно вложенной в A для некоторого натурального числа n, $n \le k$, есть наследственный гомоморф, который обладает следующим свойством: если $G = G_1 \times G_2$ и $G_i \in \mathfrak{Y}$, $i = 1, 2$, то $G \in \mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Наследственность класса групп $\mathfrak{Y}$ очевидна.

Докажем, что $\mathfrak{Y}$ – гомоморф. Возьмем $G \in \mathfrak{Y}$ и $N \trianglelefteq G$. Пусть A/N – любая подгруппа из G/N и M/N – максимальная в A/N подгруппа. Тогда из максимальности M в $A \le G \in \mathfrak{Y}$ следует, что M n-модулярно вложена в A. Если $M = M_A$, то $M \trianglelefteq A$ и $M/N \trianglelefteq A/N$. Допустим, что $M/N \ne (M/N)_{A/N}$. Тогда $M \ne M_A$. Так как M n-модулярно вложена в A, имеем $|A:M| = p$ и $|A/M_A| = pq^n$, q^n делит $p-1$. Отсюда получаем, что $|A/N : M/N| = p$ и $|A/N/(M/N)_{A/N}| = pq^n$. Это означает, что M/N n-модулярно вложена в A/N. Итак, $\mathfrak{Y}$ – гомоморф.

Предположим, что $G = G_1 \times G_2$, $G_i \in \mathfrak{Y}$, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ – формация, имеем $G \in \mathfrak{U}$. Пусть A – подгруппа группы G и H/K – ее главный фактор. Из наследственности $\mathfrak{Y}$ и $AG_i/G_i \le G/G_i \in \mathfrak{Y}$ следует, что

$$A/A \cap G_i \cong AG_i/G_i \in \mathfrak{Y},\ i = 1, 2.$$

В случае, когда $A \cap G_i = 1$ или $A \le G_i$, $i = 1, 2$, имеем $A \in \mathfrak{Y}$.

Пусть $1 \ne A \cap G_i \ne A$. По теореме 4 [5, приложение B] $A \cap G_1$ либо покрывает, либо изолирует H/K.

1. Если $A \cap G_1$ покрывает H/K, то $H(A \cap G_1) = K(A \cap G_1)$. Поэтому $H = K(H \cap G_1)$ и H/K изоморфен главному фактору $(H \cap G_1)(A \cap G_2)/A \cap G_2 / (K \cap G_1)(A \cap G_2)/A \cap G_2$ группы $A/A \cap G_2 \in \mathfrak{Y}$. Отсюда и из теоремы 2.2 заключаем, что $A \in \mathfrak{Y}$.

2. Если $A \cap G_1$ изолирует H/K, то

$$H \cap G_1 = H \cap A \cap G_1 = K \cap A \cap G_1 = K \cap G_1.$$

Тогда H/K изоморфен главному фактору

$$H(A \cap G_1)/A \cap G_1 / K(A \cap G_1)/A \cap G_1$$

группы $A/A \cap G_1 \in \mathfrak{Y}$. Отсюда и из теоремы 2.2 следует, что $A \in \mathfrak{Y}$. □

3 Связь приведенных теорем с известными результатами

Приведенные теоремы включают известные результаты.

***Следствие* 3.1** [6, теорема 5.3.10]. *Каждая максимальная подгруппа группы G модулярна в G тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $Aut_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого дополняемого главного фактора H/K из G.*

Доказательство следует из теоремы 2.1, так как для $n = k = 1$ максимальная подгруппа, которая является в G n-модулярно вложенной, есть модулярная подгруппа.

Решетка подгрупп группы G называется нижней полумодулярной, если для каждой пары подгрупп A, B из G такой, что A максимальна в

$\langle A, B\rangle$, подгруппа $A \cap B$ максимальна в B. Группа G называется LM-группой [5, с. 130], если ее решетка подгрупп является нижней полумодулярной. Такие группы были охарактеризованы Ито в [7] (см. также [5]). Для $n = k = 1$ теорема 2.2 включает

***Следствие* 3.2** [5, гл. 4, теорема 4.4]. *Группа G является* LM-*группой тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и* $Aut_G(H/K)$ *есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого главного фактора* H/K *из G.*

Отметим, что если максимальная подгруппа *M* группы *G* является *n*-модулярно вложенной в *G*, то в *G* она является K-$\mathbb{P}$-субнормальной и $\mathbb{P}$-субнормальной в смысле следующих определений из [8] и [9]. Подгруппа *H* группы *G* называется:

K-$\mathbb{P}$*-субнормальной* в G [8], если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G \qquad (3.1)$$

такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$;

$\mathbb{P}$*-субнормальной* в G [9], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп (3.1), в которой $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

В [10] через $\mathfrak{U}_k$ обозначен класс всех сверхразрешимых групп экспоненты, свободной от $(k+1)$-ых степеней простых чисел, k – натуральное число, и установлено, что $\mathfrak{U}_k$ – наследственная формация. Отметим, если максимальная подгруппа *M* группы *G* является *k*-модулярно вложенной в *G*, то M $\mathfrak{U}_k$-субнормальна в *G*.

Напомним [4], для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ подгруппа *H* группы *G* называется $\mathfrak{F}$*-субнормальной* в *G*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп (3.1) такая, что $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Однако, если максимальная подгруппа $\mathfrak{U}_k$-субнормальна в группе *G*, то она не всегда *k*-модулярно вложена в *G*. Это следует из примера 2.1, где для $k = 1$ в $AD = \langle a\rangle \rtimes \langle g\rangle$ максимальная подгруппа D $\mathfrak{U}_k$-субнормальна, но не *k*-модулярно вложена в *AD*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

2. *Schmidt*, *R*. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.

3. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

4. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer-Verlag, 2006. – 385 p.

5. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.

6. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

7. *Ito*, *N*. Note on (LM)-groups of finite order / N. Ito // Kodai Math. Sem. Reports. – 1951. – P. 1–6.

8. *Васильев*, *А.Ф.* О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

9. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

10. *Monakhov*, *V.S.* Finite groups with formational subnormal primapy subgroups of bounded exponent / V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // Сиб. электрон. матем. изв. – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 785–796.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*грант* № 20211750 «*Конвергенция* – 2025»).

Поступила в редакцию 04.04.2024.

Информация об авторах

Васильева Татьяна Ивановна – к.ф.-м.н., доцент