

## ПРИБЛИЖЕНИЕ РЭЛЕЯ – ДЖИНСА В ИНФРАКРАСНОМ ДИАПАЗОНЕ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВЁЗД

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

## RAYLEIGH – JEANS APPROXIMATION IN THE INFRARED RANGE OF THERMAL RADIATION OF STARS

O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

**Аннотация.** В работе проведена количественная оценка эффективности приближения Рэля – Джинса для теплового излучения звёзд в инфракрасной области спектра. Для ряда фиксированных температур рассчитано относительное отклонение спектральной плотности Рэля – Джинса от планковской на границах диапазонов *NIR*, *MIR* и *FIR*. Для указанных диапазонов также определены относительные отклонения излучательных способностей, светимостей и блесков. Проведена оценка эффективности приближения для некоторых звёзд.

**Ключевые слова:** инфракрасное излучение, спектральная плотность, кривая Планка, формула Рэля – Джинса, относительное отклонение, светимость.

**Для цитирования:** Новикова, О.В. Приближение Рэля – Джинса в инфракрасном диапазоне теплового излучения звёзд / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 39–42. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_2\\_59\\_39](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_39). – EDN: RRPKNB

**Abstract.** The paper provides a quantitative assessment of the effectiveness of the Rayleigh – Jeans approximation for the thermal radiation of stars in the infrared region of the spectrum. For a number of fixed temperatures, the relative deviations of the Rayleigh – Jeans spectral density from the Planck one at the edges of the *NIR*, *MIR* and *FIR* ranges are calculated. For the same ranges, the relative deviations of emissivities, luminosities and fluxes are also determined. The efficiency of the approximation for some stars is assessed as well.

**Keywords:** infrared radiation, spectral density, Planck curve, Rayleigh – Jeans formula, relative deviation, luminosity.

**For citation:** Novikova, O.V. Rayleigh – Jeans approximation in the infrared range of thermal radiation of stars / O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 39–42. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_2\\_59\\_39](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_39) (in Russian). – EDN: RRPKNB

### Введение

Вид непрерывных составляющих спектров электромагнитного излучения звёзд говорит о правомерности использования модели абсолютно-чёрного тела (АЧТ) для их описания [1], [2]. Как любая модель, АЧТ не является идеально точной, но она достаточно эффективна. Физическая привлекательность модели заключается в том, что единственным параметром звезды, определяющим характер излучения, является температура её поверхности  $T$ . И теперь законы, описывающие излучение АЧТ, можно использовать в качестве законов излучения звёзд. В этом случае функция спектральной плотности  $\varepsilon(T, \lambda)$ , параметризованная температурой  $T$  и длиной волны  $\lambda$ , часто называемая «кривой Планка», имеет вид [1], [2]

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \equiv \varepsilon_p(T, \lambda). \quad (0.1)$$

В (0.1) присутствуют физические константы:  $h$  – постоянная Планка,  $k$  – постоянная Больцмана,  $c$  – скорость света в вакууме. Численные значения этих констант общеизвестны.

В свою очередь,  $\varepsilon(T, \lambda)$  имеет связь с интегральной мощностью излучения с единицы поверхности  $\varepsilon(T)$ , которую также часто называют излучательной способностью, вида

$$\varepsilon(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda = \sigma T^4. \quad (0.2)$$

Выражение (0.2) – это закон Стефана – Больцмана, где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^2}$  – постоянная Стефана – Больцмана. Если же проинтегрировать (0.2) в пределах от некоторого  $\lambda_1$  до некоторого  $\lambda_2$ , то получится мощность излучения с единицы поверхности в выбранном диапазоне

$$\varepsilon(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda. \quad (0.3)$$

В дальнейшем на  $\varepsilon(T)$  будем навешивать индексы диапазона и типа спектральной плотности, например,  $\varepsilon_p^{FIR}(T)$  – то есть, FIR диапазон и «планковская» плотность.

Исследование функции (0.1) на экстремум при фиксированной температуре, требующее выполнения условия

$$\left[ \frac{\partial \varepsilon(T, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_T = 0,$$

приводит к координате максимума

$$\lambda_{(max)} = \frac{b}{T}. \quad (0.4)$$

Выражение (0.4) – закон «смещения Вина», где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м · К – постоянная Вина.

Таким образом, приведенные здесь математические соотношения (0.1), (0.2) и (0.4) и рассматриваются в качестве законов излучения АЧТ.

### 1 Приближение Рэлея – Джинса

Выражение (0.1) для функции спектральной плотности  $\varepsilon(T, \lambda)$  сложно было интегрировать аналитическими методами. В настоящее же время используются численные методы, встроенные в компьютерные технологии, например [3]. Поэтому исторически сложилось так, что формула (0.1) была упрощена для случая «длинных» волн. Например, для середины традиционной инфракрасной (далее ИК) области спектра с длиной волны  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м при температуре  $T = 6000$  К показатель экспоненты в (0.1) действительно мал

$$\frac{hc}{\lambda kT} = 0,00479. \quad (1.1)$$

Что позволяет разложить экспоненту в ряд, ограничившись первым порядком малости

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 + \frac{hc}{\lambda kT}. \quad (1.2)$$

Предполагая правомерность утверждения о возможной малости (1.1) и для других «длинных» волн и температур, с использованием разложения (1.2) преобразуем (0.1) к виду

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \equiv \varepsilon_{RJ}(T, \lambda). \quad (1.3)$$

Полученную формулу (1.3) называют *формулой Рэлея – Джинса*, которую и надо понимать, как приближение Рэлея – Джинса для функции спектральной плотности (0.1) в «длинноволновой» области спектра.

### 2 Относительное отклонение спектральных плотностей в инфракрасной области спектра

Специфика различных научных дисциплин, часто предполагает наличие собственных единиц измерения, различных шкал, специфической терминологии и т. д. Это касается и деления

спектра электромагнитного излучения на области, диапазоны и поддиапазоны.

В астрономии, как правило, инфракрасную область спектра делят на диапазоны так, как это представлено в Таблице 2.1, см. например [4]. Следует заметить, что инфракрасная астрономия продолжает активно развиваться и, особенно, в технологическом отношении [5], [6]. И особые надежды ученых в наше время связаны с новейшей информацией, получаемой со снимков, сделанных в диапазонах ИК области спектра, космическим телескопом *James Webb* [7]–[9], в арсенале которого имеются камера, спектрограф и устройство формирования изображения в диапазоне NIR, а также приборы для работы в диапазоне MIR.

Таблица 2.1 – Общепринятое в астрономии разделение инфракрасного излучения на диапазоны

Название	Аббревиатура	Длины волн (мкм)
Ближний инфракрасный диапазон	NIR	0,7 – 5
Средний инфракрасный диапазон	MIR	5 – 40
Дальний инфракрасный диапазон	FIR	40 – 350*

\*в астрономии дальняя граница FIR диапазона фиксируется на данном уровне, а не на длине волны 1 мм, как, к примеру, в схеме ISO 20473.

Для оценки качества приближения можно использовать относительное отклонение спектральных плотностей  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  вида

$$\delta\varepsilon(T, \lambda) = \frac{\varepsilon_{RJ}(T, \lambda) - \varepsilon_p(T, \lambda)}{\varepsilon_p(T, \lambda)}, \quad (2.1)$$

которое характеризует близость расположения приближенной «рэлей-джинсовской» кривой к точной «планковской».

В Таблице 2.2 приведены значения  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  для ряда температур, совпадающих либо близких к границам спектральных классов, и для граничных длин волн диапазонов из Таблицы 2.1. При расчётах на основе формул (2.1), (0.1) и (1.3) использовалась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [10], которая была применена и при последующих вычислениях.

По данным Таблицы 2.2 можно сделать заключение, что в широком диапазоне температур поверхности исследуемое приближение хорошо работает у дальней границы ИК области, где  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  имеет значения от 1% и менее. Также оно эффективно на ближней границе FIR при температурах больше 5000 К. И совершенно непригодно для ближней границы ИК области, где в минимуме достигает только 19%. В Таблице

2.2 все приемлемые значения  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  меньше 5% выделены жирным шрифтом.

Таблица 2.2 – Относительное отклонение спектральных плотностей  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  на границах диапазонов

$\lambda$ , мкм $\delta\varepsilon(T, \lambda)$	0,7	5	40	350
$\delta\varepsilon(2000K, \lambda)$	2825,9123	1,2349	0,0956	<b>0,0103</b>
$\delta\varepsilon(5000K, \lambda)$	13,5941	0,3519	<b>0,0368</b>	<b>0,0041</b>
$\delta\varepsilon(10000K, \lambda)$	2,3132	0,1587	<b>0,0182</b>	<b>0,0021</b>
$\delta\varepsilon(30000K, \lambda)$	0,4363	<b>0,0495</b>	<b>0,0060</b>	<b>0,0006</b>
$\delta\varepsilon(60000K, \lambda)$	0,1926	<b>0,0244</b>	<b>0,0030</b>	<b>0,0003</b>

### 3 Относительное отклонение излучательных способностей (светимостей, блесков)

Теперь обратимся непосредственно к излучательной способности  $\varepsilon(T)$  вида (0.3), которая связана со светимостью звезды  $L$  и наблюдаемым блеском  $E$  в рассматриваемом диапазоне, соотношениями

$$L = 4\pi R^2 \varepsilon(T), \quad E = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \varepsilon(T), \quad (3.1)$$

где  $R$  – радиус звезды, а  $r$  – расстояние до звезды.

Данные её расчетов для случаев «планковской» (0.1) и «рэлей-джинсовской» спектральных плотностей (1.3) во всех диапазонах ИК области приведены в Таблице 3.1.

Теперь введем относительное отклонение излучательной способности  $\delta\varepsilon(T)$  вида

$$\delta\varepsilon(T) = \frac{\varepsilon_{RJ}(T) - \varepsilon_P(T)}{\varepsilon_P(T)}, \quad (3.2)$$

которое носит обобщающий характер в силу взаимосвязей (3.1) и будет равно относительным отклонениям светимости и блеска, то есть

$$\delta\varepsilon(T) = \delta L(T) = \delta E(T).$$

Таблица 3.1 – Значения излучательных способностей  $\varepsilon(T)$  в ИК диапазонах для различных температур

$T$ , К $\varepsilon(T)$ , Вт/м <sup>2</sup>	2000	5000	10000	30000	60000
$\varepsilon_P^{NIR}(T)$	$8,2234 \cdot 10^5$	$2,1592 \cdot 10^7$	$1,0821 \cdot 10^8$	$5,7910 \cdot 10^8$	$1,3264 \cdot 10^9$
$\varepsilon_{RJ}^{NIR}(T)$	$5,0409 \cdot 10^7$	$1,2602 \cdot 10^8$	$2,5204 \cdot 10^8$	$7,5613 \cdot 10^8$	$1,5123 \cdot 10^9$
$\varepsilon_P^{MIR}(T)$	$0,7763 \cdot 10^5$	$2,7698 \cdot 10^5$	$6,2021 \cdot 10^5$	$2,0026 \cdot 10^6$	$4,0786 \cdot 10^6$
$\varepsilon_{RJ}^{MIR}(T)$	$1,3843 \cdot 10^5$	$3,4608 \cdot 10^5$	$9,9216 \cdot 10^5$	$2,0765 \cdot 10^6$	$4,1529 \cdot 10^6$
$\varepsilon_P^{FIR}(T)$	$0,2527 \cdot 10^3$	$0,6582 \cdot 10^3$	$1,3343 \cdot 10^3$	$4,0392 \cdot 10^3$	$8,0967 \cdot 10^3$
$\varepsilon_{RJ}^{FIR}(T)$	$0,2705 \cdot 10^3$	$0,6762 \cdot 10^3$	$1,3525 \cdot 10^3$	$4,0575 \cdot 10^3$	$8,1149 \cdot 10^3$

Так как блеск является наблюдаемой характеристикой звёзд, отдадим ему приоритет.

Результаты расчётов  $\delta E(T)$  по данным Таблицы 3.1, абсолютно правомерные для  $\delta\varepsilon(T)$  и  $\delta L(T)$ , приведены в Таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Значения относительного отклонения блеска  $\delta E(T)$

$T$ , К $\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{NIR}$	$[\delta E(T)]^{MIR}$	$[\delta E(T)]^{FIR}$
2000	60,2993	0,7832	0,0706
5000	4,8364	0,2495	<b>0,0275</b>
10000	1,3292	0,1160	<b>0,0136</b>
30000	0,3057	<b>0,0369</b>	<b>0,0045</b>
60000	0,1401	<b>0,0182</b>	<b>0,0023</b>

На основе данных Таблицы 3.2 не сложно прийти к выводу, что приближение Рэлея – Джинса в диапазоне NIR абсолютно неприменимо при любых температурах поверхностей звёзд, так как минимальное значение относительного отклонения составляет 14%, что много даже для оценочных расчётов. Разумно полагать, что достаточно качественную оценку даёт относительное отклонение на уровне 5% и ниже. Здесь, как и в Таблице 2.2, все приемлемые значения  $\delta E(T, \lambda)$  выделены жирным шрифтом.

### 4 Данные расчётов $\delta E(T)$ для ряда звёзд

Проиллюстрируем выводы предыдущего пункта на примере ряда реальных звёзд в широком диапазоне температур поверхности. Результаты расчётов для них относительных отклонений блесков приведены в Таблице 4.1.

Очевидно, что эти результаты соответствуют общим тенденциям поведения  $\delta E(T)$ , а, следовательно, и поведения  $\delta\varepsilon(T)$  и  $\delta L(T)$ .

Таблица 4.1 – Значения относительного отклонения блеска  $\delta E(T)$  ряда звёзд

Звезда ( $T$ )	$\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{MIR}$	$[\delta E(T)]^{FIR}$
$\beta$ Ориона С (33000 К)		<b>0,0335</b>	<b>0,0041</b>
$\beta$ Южного Креста (30000 К)		<b>0,0369</b>	<b>0,0045</b>
Сириус В (25200 К)		<b>0,0441</b>	<b>0,0054</b>
Сика (22000 К)		0,0507	<b>0,0067</b>
Ахернар (15000 К)		0,0755	<b>0,0091</b>
Сириус А (9500 К)		0,1226	<b>0,0143</b>
Альтаир (8700 К)		0,1348	<b>0,0157</b>
$\tau$ Кита (5300 К)		0,2334	<b>0,0259</b>
$\epsilon$ Эридана (4830 К)		0,2596	<b>0,0285</b>
Вольф 359 (3000 К)		0,4592	<b>0,0464</b>

### Заключение

Таким образом, в работе показано, что приближение Рэлея – Джинса:

– некорректно использовать в *NIR* диапазоне для звёзд всех спектральных классов, за исключением, может быть, самых горячих звёзд класса *W*;

– правомерно использовать в *MIR* диапазоне для звёзд с температурой поверхности от 25000 К и выше (с относительным отклонением от 5% и ниже);

– применимо в *FIR* диапазоне для всех звёзд, начиная со спектрального класса *M*;

– некорректно для применения во всей *ИК* области спектра за исключением, как было сказано выше, горячих звёзд класса *W*, например, *WR 102*.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кононович, Э.В. Общий курс астрономии / Э.В. Кононович, В.И. Мороз. – Москва: URSS, 2022. – 544 с.
2. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – San

Francisco: Pearson International Edition, 2007. – 1351 p.

3. Schmidt, W. Numerical Python in Astronomy and Astrophysics / W. Schmidt, M. Völschow. – Cham, Switzerland: Springer, 2021. – 260 p.

4. Near, Mid & Far Infrared [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.ipac.caltech.edu/outreach/Edu/Regions/irregions.html/>. – Date of access: 13.03.2024.

5. Cooling Systems for Far-Infrared Telescopes and Instruments / W.A. Holmes, T. Chui, D. Johnson [et al.] // Astronomy. – 2009. – Vol. 2010. – P. 13–23.

6. Labadie, L. Mid-Infrared Guided Optics: a Perspective for Astronomical Instruments / L. Labadie, O. Wallner // Optics Express. – 2009. – Vol. 17. – P. 1947–1962.

7. Near Infrared Camera [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.stsci.edu/jwst/instruments/nircam/>. – Date of access: 09.04.2024.

8. NASA's Webb Delivers Deepest Infrared Image of Universe Yet [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.nasa.gov/image-article/nasa-webb-delivers-deepest-infrared-image-of-universe-yet/>. – Date of access: 31.03.2024.

9. Microshutters [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.jwst.nasa.gov/content/about/innovations/microshutters.html/>. – Date of access: 01.04.2024.

10. Wolfram, S. Metamathematics: Foundations & Physicalization / S. Wolfram. – New York: Wolfram Media Inc., 2022. – 190 p.

Поступила в редакцию 10.04.2024.

### Информация об авторах

Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент  
Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.