

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЭЛЕЯ – ДЖИНСА В ИНФРАКРАСНОМ ДИАПАЗОНЕ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВЁЗД

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

RAYLEIGH – JEANS APPROXIMATION IN THE INFRARED RANGE OF THERMAL RADIATION OF STARS

O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе проведена количественная оценка эффективности приближения Рэлея – Джинса для теплового излучения звёзд в инфракрасной области спектра. Для ряда фиксированных температур рассчитано относительное отклонение спектральной плотности Рэлея – Джинса от планковской на границах диапазонов *NIR*, *MIR* и *FIR*. Для указанных диапазонов также определены относительные отклонения излучательных способностей, светимостей и блесков. Проведена оценка эффективности приближения для некоторых звёзд.

Ключевые слова: инфракрасное излучение, спектральная плотность, кривая Планка, формула Рэлея – Джинса, относительное отклонение, светимость.

Для цитирования: Новикова, О.В. Приближение Рэлея – Джинса в инфракрасном диапазоне теплового излучения звёзд / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_39. – EDN: RRRPNB

Abstract. The paper provides a quantitative assessment of the effectiveness of the Rayleigh – Jeans approximation for the thermal radiation of stars in the infrared region of the spectrum. For a number of fixed temperatures, the relative deviations of the Rayleigh – Jeans spectral density from the Planck one at the edges of the *NIR*, *MIR* and *FIR* ranges are calculated. For the same ranges, the relative deviations of emissivities, luminosities and fluxes are also determined. The efficiency of the approximation for some stars is assessed as well.

Keywords: infrared radiation, spectral density, Planck curve, Rayleigh – Jeans formula, relative deviation, luminosity.

For citation: Novikova, O.V. Rayleigh – Jeans approximation in the infrared range of thermal radiation of stars / O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_39 (in Russian). – EDN: RRRPNB

Введение

Вид непрерывных составляющих спектров электромагнитного излучения звёзд говорит о правомерности использования модели абсолютно-чёрного тела (АЧТ) для их описания [1], [2]. Как любая модель, АЧТ не является идеально точной, но она достаточно эффективна. Физическая привлекательность модели заключается в том, что единственным параметром звезды, определяющим характер излучения, является температура её поверхности T . И теперь законы, описывающие излучение АЧТ, можно использовать в качестве законов излучения звёзд. В этом случае функция спектральной плотности $\varepsilon(T, \lambda)$, параметризованная температурой T и длиной волны λ , часто называемая «кривой Планка», имеет вид [1], [2]

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \equiv \varepsilon_p(T, \lambda). \quad (0.1)$$

В (0.1) присутствуют физические константы: h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, c – скорость света в вакууме. Численные значения этих констант общеизвестны.

В свою очередь, $\varepsilon(T, \lambda)$ имеет связь с интегральной мощностью излучения с единицы поверхности $\varepsilon(T)$, которую также часто называют излучательной способностью, вида

$$\varepsilon(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda = \sigma T^4. \quad (0.2)$$

Выражение (0.2) – это закон Стефана – Больцмана, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^2}$ – постоянная Стефана – Больцмана. Если же проинтегрировать (0.2) в пределах от некоторого λ_1 до некоторого λ_2 , то получится мощность излучения с единицы поверхности в выбранном диапазоне

$$\varepsilon(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda. \quad (0.3)$$

В дальнейшем на $\varepsilon(T)$ будем навешивать индексы диапазона и типа спектральной плотности, например, $\varepsilon_p^{FIR}(T)$ – то есть, FIR диапазон и «планковская» плотность.

Исследование функции (0.1) на экстремум при фиксированной температуре, требующее выполнения условия

$$\left[\frac{\partial \varepsilon(T, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_T = 0,$$

приводит к координате максимума

$$\lambda_{(max)} = \frac{b}{T}. \quad (0.4)$$

Выражение (0.4) – закон «смещения Вина», где $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м · К – постоянная Вина.

Таким образом, приведенные здесь математические соотношения (0.1), (0.2) и (0.4) и рассматриваются в качестве законов излучения АЧТ.

1 Приближение Рэлея – Джинса

Выражение (0.1) для функции спектральной плотности $\varepsilon(T, \lambda)$ сложно было интегрировать аналитическими методами. В настоящее же время используются численные методы, встроенные в компьютерные технологии, например [3]. Поэтому исторически сложилось так, что формула (0.1) была упрощена для случая «длинных» волн. Например, для середины традиционной инфракрасной (далее ИК) области спектра с длиной волны $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м при температуре $T = 6000$ К показатель экспоненты в (0.1) действительно мал

$$\frac{hc}{\lambda kT} = 0,00479. \quad (1.1)$$

Что позволяет разложить экспоненту в ряд, ограничившись первым порядком малости

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 + \frac{hc}{\lambda kT}. \quad (1.2)$$

Предполагая правомерность утверждения о возможной малости (1.1) и для других «длинных» волн и температур, с использованием разложения (1.2) преобразуем (0.1) к виду

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \equiv \varepsilon_{RJ}(T, \lambda). \quad (1.3)$$

Полученную формулу (1.3) называют *формулой Рэлея – Джинса*, которую и надо понимать, как приближение Рэлея – Джинса для функции спектральной плотности (0.1) в «длинноволновой» области спектра.

2 Относительное отклонение спектральных плотностей в инфракрасной области спектра

Специфика различных научных дисциплин, часто предполагает наличие собственных единиц измерения, различных шкал, специфической терминологии и т. д. Это касается и деления

спектра электромагнитного излучения на области, диапазоны и поддиапазоны.

В астрономии, как правило, инфракрасную область спектра делят на диапазоны так, как это представлено в Таблице 2.1, см. например [4]. Следует заметить, что инфракрасная астрономия продолжает активно развиваться и, особенно, в технологическом отношении [5], [6]. И особые надежды ученых в наше время связаны с новейшей информацией, получаемой со снимков, сделанных в диапазонах ИК области спектра, космическим телескопом *James Webb* [7]–[9], в арсенале которого имеются камера, спектрограф и устройство формирования изображения в диапазоне NIR, а также приборы для работы в диапазоне MIR.

Таблица 2.1 – Общепринятое в астрономии разделение инфракрасного излучения на диапазоны

Название	Аббревиатура	Длины волн (мкм)
Ближний инфракрасный диапазон	NIR	0,7 – 5
Средний инфракрасный диапазон	MIR	5 – 40
Дальний инфракрасный диапазон	FIR	40 – 350*

*в астрономии дальняя граница FIR диапазона фиксируется на данном уровне, а не на длине волны 1 мм, как, к примеру, в схеме ISO 20473.

Для оценки качества приближения можно использовать относительное отклонение спектральных плотностей $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ вида

$$\delta\varepsilon(T, \lambda) = \frac{\varepsilon_{RJ}(T, \lambda) - \varepsilon_p(T, \lambda)}{\varepsilon_p(T, \lambda)}, \quad (2.1)$$

которое характеризует близость расположения приближенной «рэлей-джинсовской» кривой к точной «планковской».

В Таблице 2.2 приведены значения $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ для ряда температур, совпадающих либо близких к границам спектральных классов, и для граничных длин волн диапазонов из Таблицы 2.1. При расчётах на основе формул (2.1), (0.1) и (1.3) использовалась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [10], которая была применена и при последующих вычислениях.

По данным Таблицы 2.2 можно сделать заключение, что в широком диапазоне температур поверхности исследуемое приближение хорошо работает у дальней границы ИК области, где $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ имеет значения от 1% и менее. Также оно эффективно на ближней границе FIR при температурах больше 5000 К. И совершенно непригодно для ближней границы ИК области, где в минимуме достигает только 19%. В Таблице

2.2 все приемлемые значения $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ меньше 5% выделены жирным шрифтом.

Таблица 2.2 – Относительное отклонение спектральных плотностей $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ на границах диапазонов

λ , мкм $\delta\varepsilon(T, \lambda)$	0,7	5	40	350
$\delta\varepsilon(2000K, \lambda)$	2825,9123	1,2349	0,0956	0,0103
$\delta\varepsilon(5000K, \lambda)$	13,5941	0,3519	0,0368	0,0041
$\delta\varepsilon(10000K, \lambda)$	2,3132	0,1587	0,0182	0,0021
$\delta\varepsilon(30000K, \lambda)$	0,4363	0,0495	0,0060	0,0006
$\delta\varepsilon(60000K, \lambda)$	0,1926	0,0244	0,0030	0,0003

3 Относительное отклонение излучательных способностей (светимостей, блесков)

Теперь обратимся непосредственно к излучательной способности $\varepsilon(T)$ вида (0.3), которая связана со светимостью звезды L и наблюдаемым блеском E в рассматриваемом диапазоне, соотношениями

$$L = 4\pi R^2 \varepsilon(T), \quad E = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \varepsilon(T), \quad (3.1)$$

где R – радиус звезды, а r – расстояние до звезды.

Данные её расчетов для случаев «планковской» (0.1) и «рэлей-джинсовкой» спектральных плотностей (1.3) во всех диапазонах ИК области приведены в Таблице 3.1.

Теперь введем относительное отклонение излучательной способности $\delta\varepsilon(T)$ вида

$$\delta\varepsilon(T) = \frac{\varepsilon_{RJ}(T) - \varepsilon_P(T)}{\varepsilon_P(T)}, \quad (3.2)$$

которое носит обобщающий характер в силу взаимосвязей (3.1) и будет равно относительным отклонениям светимости и блеска, то есть

$$\delta\varepsilon(T) = \delta L(T) = \delta E(T).$$

Таблица 3.1 – Значения излучательных способностей $\varepsilon(T)$ в ИК диапазонах для различных температур

T , К $\varepsilon(T)$, Вт/м ²	2000	5000	10000	30000	60000
$\varepsilon_P^{NIR}(T)$	$8,2234 \cdot 10^5$	$2,1592 \cdot 10^7$	$1,0821 \cdot 10^8$	$5,7910 \cdot 10^8$	$1,3264 \cdot 10^9$
$\varepsilon_{RJ}^{NIR}(T)$	$5,0409 \cdot 10^7$	$1,2602 \cdot 10^8$	$2,5204 \cdot 10^8$	$7,5613 \cdot 10^8$	$1,5123 \cdot 10^9$
$\varepsilon_P^{MIR}(T)$	$0,7763 \cdot 10^5$	$2,7698 \cdot 10^5$	$6,2021 \cdot 10^5$	$2,0026 \cdot 10^6$	$4,0786 \cdot 10^6$
$\varepsilon_{RJ}^{MIR}(T)$	$1,3843 \cdot 10^5$	$3,4608 \cdot 10^5$	$9,9216 \cdot 10^5$	$2,0765 \cdot 10^6$	$4,1529 \cdot 10^6$
$\varepsilon_P^{FIR}(T)$	$0,2527 \cdot 10^3$	$0,6582 \cdot 10^3$	$1,3343 \cdot 10^3$	$4,0392 \cdot 10^3$	$8,0967 \cdot 10^3$
$\varepsilon_{RJ}^{FIR}(T)$	$0,2705 \cdot 10^3$	$0,6762 \cdot 10^3$	$1,3525 \cdot 10^3$	$4,0575 \cdot 10^3$	$8,1149 \cdot 10^3$

Так как блеск является наблюдаемой характеристикой звёзд, отдадим ему приоритет.

Результаты расчётов $\delta E(T)$ по данным Таблицы 3.1, абсолютно правомерные для $\delta\varepsilon(T)$ и $\delta L(T)$, приведены в Таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Значения относительного отклонения блеска $\delta E(T)$

T , К $\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{NIR}$	$[\delta E(T)]^{MIR}$	$[\delta E(T)]^{FIR}$
2000	60,2993	0,7832	0,0706
5000	4,8364	0,2495	0,0275
10000	1,3292	0,1160	0,0136
30000	0,3057	0,0369	0,0045
60000	0,1401	0,0182	0,0023

На основе данных Таблицы 3.2 не сложно прийти к выводу, что приближение Рэля – Джинса в диапазоне NIR абсолютно неприменимо при любых температурах поверхностей звёзд, так как минимальное значение относительного отклонения составляет 14%, что много даже для оценочных расчётов. Разумно полагать, что достаточно качественную оценку даёт относительное отклонение на уровне 5% и ниже. Здесь, как и в Таблице 2.2, все приемлемые значения $\delta E(T, \lambda)$ выделены жирным шрифтом.

4 Данные расчётов $\delta E(T)$ для ряда звёзд

Проиллюстрируем выводы предыдущего пункта на примере ряда реальных звёзд в широком диапазоне температур поверхности. Результаты расчётов для них относительных отклонений блесков приведены в Таблице 4.1.

Очевидно, что эти результаты соответствуют общим тенденциям поведения $\delta E(T)$, а, следовательно, и поведения $\delta\varepsilon(T)$ и $\delta L(T)$.

Таблица 4.1 – Значения относительного отклонения блеска $\delta E(T)$ ряда звёзд

Звезда (T)	$\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{MIR}$	$[\delta E(T)]^{FIR}$
β Ориона С (33000 К)		0,0335	0,0041
β Южного Креста (30000 К)		0,0369	0,0045
Сириус В (25200 К)		0,0441	0,0054
Сика (22000 К)		0,0507	0,0067
Ахернар (15000 К)		0,0755	0,0091
Сириус А (9500 К)		0,1226	0,0143
Альтаир (8700 К)		0,1348	0,0157
τ Кита (5300 К)		0,2334	0,0259
ϵ Эридана (4830 К)		0,2596	0,0285
Вольф 359 (3000 К)		0,4592	0,0464

Заключение

Таким образом, в работе показано, что приближение Рэлея – Джинса:

– некорректно использовать в *NIR* диапазоне для звёзд всех спектральных классов, за исключением, может быть, самых горячих звёзд класса *W*;

– правомерно использовать в *MIR* диапазоне для звёзд с температурой поверхности от 25000 К и выше (с относительным отклонением от 5% и ниже);

– применимо в *FIR* диапазоне для всех звёзд, начиная со спектрального класса *M*;

– некорректно для применения во всей *ИК* области спектра за исключением, как было сказано выше, горячих звёзд класса *W*, например, *WR 102*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононович, Э.В. Общий курс астрономии / Э.В. Кононович, В.И. Мороз. – Москва: URSS, 2022. – 544 с.
2. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – San

Francisco: Pearson International Edition, 2007. – 1351 p.

3. Schmidt, W. Numerical Python in Astronomy and Astrophysics / W. Schmidt, M. Völschow. – Cham, Switzerland: Springer, 2021. – 260 p.

4. Near, Mid & Far Infrared [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.ipac.caltech.edu/outreach/Edu/Regions/irregions.html/>. – Date of access: 13.03.2024.

5. Cooling Systems for Far-Infrared Telescopes and Instruments / W.A. Holmes, T. Chui, D. Johnson [et al.] // Astronomy. – 2009. – Vol. 2010. – P. 13–23.

6. Labadie, L. Mid-Infrared Guided Optics: a Perspective for Astronomical Instruments / L. Labadie, O. Wallner // Optics Express. – 2009. – Vol. 17. – P. 1947–1962.

7. Near Infrared Camera [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.stsci.edu/jwst/instruments/nircam/>. – Date of access: 09.04.2024.

8. NASA's Webb Delivers Deepest Infrared Image of Universe Yet [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.nasa.gov/image-article/nasa-webb-delivers-deepest-infrared-image-of-universe-yet/>. – Date of access: 31.03.2024.

9. Microshutters [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.jwst.nasa.gov/content/about/innovations/microshutters.html/>. – Date of access: 01.04.2024.

10. Wolfram, S. Metamathematics: Foundations & Physicalization / S. Wolfram. – New York: Wolfram Media Inc., 2022. – 190 p.

Поступила в редакцию 10.04.2024.

Информация об авторах

Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент
Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.