МАТЕМАТИКА

УДК 517.934
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_84
EDN: BMLYHS

К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

К.Б. Мансимов[1,2], А.Ф. Мансимзаде[1]

[1]*Бакинский государственный университет*
[2]*Институт Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана*, *Баку*

TO THE NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE TWO-STAGE CONTROL PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE

K.B. Mansimov[1,2], A.F. Mansimzade[1]

[1]*Baku State University*
[2]*Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan*, *Baku*

Аннотация. Рассматривается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая на различных отрезках времени различными системами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. При различных предположениях на данные задачи построены два типа формул приращения функционала качества. Исследуя их на специальных вариациях управления, доказаны аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина и линеаризованного условия максимума.

Ключевые слова: *двухэтапная задача оптимального управления*, *интегро-дифференциальное уравнение*, *формула приращения*, *допустимое управление*, *необходимое условие оптимальности*, *оптимальное управление*.

Для цитирования: *Мансимов*, *К.Б.* К необходимым условиям оптимальности в одной двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра / К.Б. Мансимов, А.Ф. Мансимзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_84. – EDN: BMLYHS

Abstract. The paper considers one two-stage optimal control problem, described at different time intervals by various integro-differential equations of the Volterra type. Under different assumptions two types of formulas for the increment of the quality functional are constructed for these problems. Studying them on various control variations, the analogues of the maximum principle of L.S. Pontryagin and the linearized maximum condition are proved.

Keywords: *two-stage control problem*, *integro-differential equation*, *increment formula*, *admissible control*, *necessary optimality condition*, *optimal control*.

For citation: *Mansimov*, *K.B.* To the necessary optimality conditions in one two-stage control problem for integro-differential equations of Volterra type / K.B. Mansimov, A.F. Mansimzade // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_84 (in Russian). – EDN: BMLYHS

Введение

В работах [1]–[5] и др. исследованы многоэтапные (ступенчатые) задачи оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и установлены ряд необходимых условий оптимальности.

В предлагаемой работе ставится и рассматривается одна двухэтапная (ступенчатая) задача оптимального управления, описываемая интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

Получены необходимые условия оптимальности первого порядка.

1 Постановка задачи

Пусть $T_1=[t_0,t_1], T_1=[t_1,t_2]$ – заданные отрезки, $U_1\subset R^r, U_2\subset R^q$ – заданные непустые и ограниченные множества.

Предположим, что двухэтапный (ступенчатый) процесс описывается системами интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t)=f_1(t,x_1(t),u_1(t))+ \\ +\int_{t_0}^{t}K_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))d\tau,\ t\in T_1, \tag{1.1}$$

$$x_1(t_0)=x_{10}, \tag{1.2}$$

$$\dot{x}_2(t)=f_2(t,x_2(t),u_2(t))+ \\ +\int_{t_1}^{t}K_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))d\tau,\ t\in T_2. \tag{1.3}$$

$$x_2(t_1)=G(x_1(t_1)). \tag{1.4}$$

Здесь $f_i(t,x_i,u_i)$, $K_i(t,\tau,x_i,u_i)$, $i=1,2$ – заданные n-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $x_i, i=1,2$ соответственно, $G(x_1)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая n-мерная вектор-функция, x_{10} – заданный постоянный вектор, $u_1(t)\left(u_2(t)\right)$ – кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) $r(q)$-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из множества $U_1(U_2)$, т. е.

$$\begin{aligned} &u_1(t)\in U_1\subset R^n,\ t\in T_1,\\ &u_2(t)\in U_2\subset R^q,\ t\in T_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Пару $(u_1(t),u_2(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u_1(t),u_2(t))$ соответствует единственное кусочно-гладкое (в смысле, например [6], [7]) решение $(x_1(t),x_2(t))$ задачи (1.1)–(1.4).

На решениях задачи (1.1)–(1.4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$\begin{aligned} J(u_1,u_2)&=\varphi_1(x_1(t_1))+\varphi_2(x_2(t_2))+\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}F_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))d\tau\right]dt+\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t}F_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))d\tau\right]dt. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $\varphi_i(x_i), i=1,2$ – заданные непрерывно-дифференцируемые скалярные функции, $F_i(t,\tau,x_i,u_i)$, $i=1,2$ – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $x_i, i=1,2$ соответственно.

Допустимое управление $(u_1(t),u_2(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (1.6) при ограничениях (1.1)–(1.4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t),u_2(t),x_1(t),x_2(t))$ – оптимальным процессом.

2 Формула приращения функционала качества

Пусть $(u_1(t),u_2(t),x_1(t),x_2(t))$ и

$$\begin{aligned} &\big(\overline{u}_1(t)=u_1(t)+\Delta u_1(t),\ \overline{u}_2(t)=u_2(t)+\Delta u_2(t),\\ &\overline{x}_1(t)=x_1(t)+\Delta x_1(t),\ \overline{x}_2(t)=x_2(t)+\Delta x_2(t)\big) \end{aligned}$$

– некоторые допустимые процессы.

Запишем приращение минимизируемого функционала:

$$\Delta J(u_1,u_2)=J(\overline{u}_1,\overline{u}_2)-J(u_1,u_2)= \tag{2.1}$$

$$=\varphi_1(\overline{x}_1(t_1))-\varphi_1(x_1(t_1))+\varphi_2(\overline{x}_2(t_2))-\varphi_2(x_2(t_2))+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}\left(F_1(t,\tau,\overline{x}_1(\tau),\overline{u}_1(\tau))-F_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right)d\tau\right)dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t}\left(F_2(t,\tau,\overline{x}_2(\tau),\overline{u}_2(\tau))-F_2(t,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right)d\tau\right)dt.$$

Из введенных обозначений ясно, что приращение $(\Delta x_1(t),\Delta x_2(t))$ траектории $(x_1(t),x_2(t))$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_i(t)&=\left[f_i(t,\overline{x}_i(t),\overline{u}_i(t))-f_i(t,x_i(t),u_i(t))\right]+\\ &+\int_{t_{i-1}}^{t}\left[K_i(t,\tau,\overline{x}_i(\tau),\overline{u}_i(\tau))-\right.\\ &\left.-K_i(t,\tau,x_i(\tau),u_i(\tau))\right]d\tau,\ i=1,2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\Delta x_1(t_0)=0,\ \Delta x_2(t_1)=G(\overline{x}_1(t_1))-G(x_1(t_1)). \tag{2.3}$$

Пусть $\psi_i(t), i=1,2$ – пока неизвестные n-мерные вектор-функции. Учитывая это предположение, из соотношений (2.2) получим, что

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i'(t)\Delta\dot{x}_i(t)dt= \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i'(t)\left[f_i(t,\overline{x}_i(t),\overline{u}_i(t))-f_i(t,x_i(t),u_i(t))\right]dt+\\ &+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i'(t)\left(\int_{t_{i-1}}^{t}\left[K_i(t,\tau,\overline{x}_i(\tau),\overline{u}_i(\tau))-\right.\right.\\ &\left.\left.-K_i(t,\tau,x_i(\tau),u_i(\tau))\right]d\tau\right)dt,\ i=1,2. \end{aligned}$$

Применяя формулу дифференцирования по частям в определенном интеграле и учитывая начальные условия (2.3), получаем, что

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}\psi_1'(t)\Delta\dot{x}_1(t)dt=\\ &=\psi_1'(t_1)\Delta x_1(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}_1'(t)\Delta x_1(t)dt, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\psi_2'(t)\Delta\dot{x}_2(t)dt=\psi_2'(t_2)\Delta x_2(t_2)- \tag{2.6}$$

$$-\psi_2'(t_1)\left(G(\overline{x}_1(t_1))-G(x_1(t_1))\right)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{\psi}_2'(t)\Delta x_2(t)dt.$$

Далее, применяя формулу Дирихле (см. например, [8]) доказывается справедливость тождеств

$$\begin{aligned} &\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i'(t)\left(\int_{t_{i-1}}^{t}\left[K_i(t,\tau,\overline{x}_i(\tau),\overline{u}_i(\tau))-\right.\right.\\ &\left.\left.-K_i(t,\tau,x_i(\tau),u_i(\tau))\right]d\tau\right)dt=\\ &=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\int_{t}^{t_i}\psi_i'(\tau)\left[K_i(\tau,t,\overline{x}_i(t),\overline{u}_i(t))-\right.\right.\\ &\left.\left.-K_i(\tau,t,x_i(t),u_i(t))\right]d\tau\right)dt,\ i=1,2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\int_{t_{i-1}}^{t}\left[F_i(t,\tau,\overline{x}_i(\tau),\overline{u}_i(\tau))-F_i(t,\tau,x_i(\tau),u_i(\tau))\right]d\tau\right)dt=\\ &=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\int_{t}^{t_i}\left[F_i(\tau,t,\overline{x}_i(t),\overline{u}_i(t))-\right.\right.\\ &\left.\left.-F_i(\tau,t,x_i(t),u_i(t))\right]d\tau\right)dt,\ i=1,2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Введем аналоги функции Гамильтона – Понтрягина в виде

$$H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t)) = \psi_i'(t) f_i(t,x_i(t),u_i(t)) +$$
$$+\int_t^{t_i} \psi_i'(\tau) K_i(\tau,t,x_i(t),u_i(t))d\tau -$$
$$-\int_t^{t_i} F_i(\tau,t,x_i(t),u_i(t))d\tau,\ i=1,2.$$

Учитывая введенные обозначения и тождества (2.5)–(2.8) приращение (2.1) функционала (1.6) записывается в виде

$$\Delta J(u_1,u_2) = \varphi_1(\bar{x}_1(t_1)) - \varphi_1(x_1(t_1)) +$$
$$+\varphi_2(\bar{x}_2(t_2)) - \varphi_2(x_2(t_2)) -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H_1(t,\bar{x}_1(t),\bar{u}_1(t),\psi_1(t)) -\right.$$
$$\left.-H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))\right]dt +$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[H_2(t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t),\psi_2(t)) -\right.$$
$$\left.-H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))\right]dt +$$
$$+\psi_1'(t_1)\Delta x_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}_1'(t)\Delta x_1(t)dt +$$
$$+\psi_2'(t_2)\Delta x_2(t_2) - \int_{t_1}^{t_1}\dot{\psi}_2'(t)\Delta x_2(t)dt \qquad (2.9)$$
$$-\psi_2'(t_1)\left(G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1))\right).$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в формуле приращения (2.9). Имеем

$$H_i(t,\bar{x}_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t)) - H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t)) =$$
$$= H_i(t,x_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t)) - H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t)) +$$
$$+\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1}\Delta x_i(t) + \qquad (2.10)$$
$$+\left[\frac{\partial H_i(t,x_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1} -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1}\right]'\Delta x_i(t) +$$
$$+o_i\left(\|\Delta x_i(t)\|\right),\ i=1,2,$$

$$\varphi_i(\bar{x}_i(t_i)) - \varphi_i(x_i(t_i)) = \frac{\partial\varphi_i'(x_i(t_i))}{\partial x_i}\Delta x_i(t_i) +$$
$$+o_{i+2}\left(\|\Delta x_i(t_i)\|\right),\ i=1,2, \qquad (2.11)$$

$$\psi_2'(t_1)G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1)) = \qquad (2.12)$$
$$= \psi_2'(t_1)\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\Delta x_1(t_1) + o_5\left(\|\Delta x_1(t_1)\|\right).$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ – величина более высокого порядка малости, чем α, т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Принимая во внимания разложения (2.10)-(2.12) в формуле приращения (2.9) функционала (1.6), будем иметь

$$\Delta J(u_1,u_2) = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\varphi_i'(x_i(t_i))}{\partial x_i}\Delta x_i(t_i) -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_i-1}^{t_i}\dot{\psi}_i'(t)\Delta x_i(t)dt + \psi_1'(t_1)\Delta x_1(t_1) +$$
$$+\psi_2'(t_2)\Delta x_2(t_2) - \psi_2'(t_1)\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\Delta x_1(t_1) -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[H_i(t,x_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t)) -\right.$$
$$\left.-H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))\right]dt -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1}\Delta x_i(t)dt -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1} -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1}\right]\Delta x_i(t)dt +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}o_1\left(\|\Delta x_1(t)\|\right)dt - \int_{t_1}^{t_2}o_2\left(\|\Delta x_2(t)\|\right) + \qquad (2.13)$$
$$+o_3\left(\|\Delta x_1(t_1)\|\right) + o_4\left(\|\Delta x_2(t_2)\|\right) - o_5\left(\|\Delta x_1(t_1)\|\right).$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_i(t)$, $i=1,2$ удовлетворяют соотношениям

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_i},\ i=1,2, \quad (2.14)$$

$$\psi_1(t_1) = -\frac{\partial\varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial G'(x_1(t_1))}{\partial x_1}\psi_2(t_1),$$
$$\psi_2(t_2) = -\frac{\partial\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}. \qquad (2.15)$$

Задачу (2.14)–(2.15) назовем сопряженной системой для рассматриваемой задачи оптимального управления.

При выполнении соотношений (2.14)–(2.15) формула приращения (2.13) принимает вид

$$\Delta J(u_1,u_2) = -\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[H_i(t,x_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t)) -\right.$$
$$\left.-H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))\right]dt -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1} -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H_i'(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x_1}\right]\Delta x_i(t)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}o_1\left(\|\Delta x_1(t)\|\right)dt - \int_{t_1}^{t_2}o_2\left(\|\Delta x_2(t)\|\right) + \qquad (2.16)$$
$$+o_3\left(\|\Delta x_1(t_1)\|\right) + o_4\left(\|\Delta x_2(t_2)\|\right) - o_5\left(\|\Delta x_1(t_1)\|\right).$$

Полученная формула приращения (2.16) позволяет доказать необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Сначала получим оценку приращение траектории $\left(x_1(t), x_2(t)\right)$.

3 Оценка приращения траектории

Предположим, что $\Delta u_2(t)=0$.

Тогда из тождеств (2.2)–(2.3) переходя к эквивалентным интегральным соотношениям, получим, что

$$\Delta x_1(t)=\int_{t_0}^{t}\left[f_1(\tau,\bar{x}_1(\tau),\bar{u}_1(\tau))-f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right]d\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t}\left(\int_{\tau}^{t}\left[K_1(s,\tau,\bar{x}_1(\tau),\bar{u}_1(\tau))- \\ -K_1(s,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right]ds\right)d\tau, \quad (3.1)$$

$$\Delta x_2(t)=\int_{t_1}^{t}\left[f_2(\tau,\bar{x}_1(\tau),u_2(\tau))-f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right]d\tau+ \\ +\int_{t_1}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}\left[K_2(s,\tau,\bar{x}_2(\tau),u_2(\tau))- \quad (3.2) \\ -K_2(s,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right]ds\right]d\tau+G(\bar{x}_1(t_1))-G(x_1(t_1)).$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) переходя к норме, используя условие Липшица, и применяя лемму Гронуолла – Вендроффа (см. например, [9]) получим, что

$$\left\|\Delta x_1(t)\right\|\le \\ \le L_1\left[\int_{t_0}^{t}\left\|f_1(\tau,x_1(\tau),\bar{u}_1(\tau))-f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right\|d\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}\left\|K_1(s,\tau,x_1(\tau),\bar{u}_1(\tau))- \\ -K_1(s,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))\right\|ds\right]\right]d\tau, \quad (3.3)$$

$$\left\|\Delta x_2(t)\right\|=L_2,\ \left\|\Delta x_1(t_1)\right\|. \quad (3.4)$$

Здесь $L_i=const>0,\ i=1,2$ – некоторые постоянные.

Теперь пусть в рассматриваемой задаче $\Delta u_2(t)\ne 0$, а $\Delta u_1(t)=0$.

Тогда из соотношений (2.2)–(2.3) следует, что $\Delta x_1(t)=0$, а $\Delta x_2(t)$ определяется из соотношения

$$\Delta x_2(t)=\int_{t_1}^{t}\left[f_2(\tau,\bar{x}_1(\tau),\bar{u}_2(\tau))-f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right]d\tau+ \\ +\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\tau}^{t}\left[K_2(s,\tau,\bar{x}_2(\tau),\bar{u}_2(\tau))- \\ -K_2(s,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right]ds\right)d\tau.$$

Учитывая это тождество и используя лемму Гронуолла – Вендроффа получим, что

$$\Delta x_2(t)=L_3\left[\int_{t_1}^{t}\left[\left\|f_2(\tau,x_1(\tau),\bar{u}_2(\tau))- \\ -f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right\|+ \\ +\int_{\tau}^{t}\left\|K_2(s,\tau,x_2(\tau),\bar{u}_2(\tau))- \\ -K_2(s,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))\right\|ds\right]d\tau\right]. \quad (3.5)$$

($L_3=const>0$ некоторая постоянная).

4 Аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина

Пусть $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u_1(t)$, $v_1\in U_1$ – произвольный вектор, а $\varepsilon>0$ произвольное малое число, такое, что $\theta+\varepsilon<t_1$.

Тогда специальное (игольчатое) приращение управляющей функции $u_1(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t;\varepsilon)=\begin{cases}v_1-u_1(t), & t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\\ 0, & t\in T_1\setminus[\theta,\theta+\varepsilon).\end{cases} \quad (4.1)$$

Пусть $\left(\Delta x_1(t;\varepsilon),\Delta x_2(t;\varepsilon)\right)$ специальное приращение траектории $\left(x_1(t),x_2(t)\right)$.

Из оценок (3.3) и (3.4) следует, что

$$\left\|\Delta x_1(t;\varepsilon)\right\|\le L_4\varepsilon,\ t\in T_1, \\ \left\|\Delta x_2(t;\varepsilon)\right\|\le L_5\varepsilon,\ t\in T_2, \quad (4.2)$$

где $L_i=const>0,\ i=1,2$ некоторые постоянные.

Учитывая формулы (4.1) и (4.2) из формулы приращения (2.16) получаем, что

$$J\left(u_1(t)+\Delta u_1(t;\varepsilon),u_2(t)\right)-J\left(u_1(t,x),u_2(t,x)\right)= \\ =-\varepsilon\left(H_1(\theta,z(\theta),v_1,\psi_1(\theta))- \\ -H_1(\theta,z(\theta),u_1(\theta),\psi_1(\theta))\right)+o(\varepsilon). \quad (4.3)$$

Пусть теперь $v_2\in U_2$ – произвольный вектор, $\theta\in[t_1,t_2)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $u_2(t)$, а $\mu>0$ произвольное малое число, такое, что $\theta+\mu<t_2$.

Специальное приращение управляющей функции $u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t;\mu)=\begin{cases}v_2-u_2(t), & t\in[\theta,\theta+\mu),\\ 0, & t\in T_2\setminus[\theta,\theta+\mu).\end{cases} \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) из оценки (3.5) следует, что

$$\left\|\Delta x_2(t;\mu)\right\|\le L_6\mu,\ t\in T_2. \quad (4.5)$$

Принимая во внимания формулы (4.4) и (4.5), из формулы приращения (2.16) получаем, что

$$J\left(u_1(t),u_2(t)+\Delta u_1(t;\mu)\right)-J\left(u_1(t),u_2(t)\right)= \\ =-\mu[H_2(\theta,y(\theta),v_2,\psi_2(\theta))- \quad (4.6) \\ -H_2(\theta,y(\theta),u_2(\theta),\psi_2(\theta))]+o(\mu).$$

Из разложений (4.3) и (4.6) следует

***Теорема* 4.1.** При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$H_1(\theta, z(\theta), v_1, \psi_1(\theta)) - H_1(\theta, z(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta)) \le 0,$$

$$H_2(\theta, y(\theta), v_2, \psi_2(\theta)) - H_2(\theta, y(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta)) \le 0$$

выполнялись для всех $v_1 \in U_1$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v_2 \in U_2$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

5 Аналог линеаризованного условия максимума

Предположим, что в рассматриваемой задаче множества $U_i, i = 1,2$ – выпуклы, $f_i(t, x_i, u_i)$, $K_i(t, \tau, x_i, u_i)$, $F_i(t, \tau, x_i, u_i)$, $i = 1,2$ – непрерывно дифференцируемы также по u_i, $i = 1,2$.

При сделанных предположениях полное приращение функционала качества может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) = &-\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \Delta u_1(t) dt - \\ &-\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \Delta u_2(t) dt + \\ &+ o_3(\|\Delta x_1(t_1)\|) + o_4(\|\Delta x_2(t_2)\|) - o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) - \\ &-\int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x_1(t)\| + \|\Delta u_1(t)\|) dt - \\ &-\int_{t_1}^{t_2} o_2(\|\Delta x_2(t)\| + \|\Delta u_2(t)\|) dt. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Далее при сделанных предположениях гладкости, по аналогии с доказательством неравенств (3.3)–(3.5), доказывается, что при $\Delta u_1(t) = 0$

$$\|\Delta x_1(t)\| \le L_7 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(\tau)\| d\tau, \ t \in T_1, \tag{5.2}$$

$$\|\Delta x_2(t)\| \le L_8 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(\tau)\| d\tau, \ t \in T_2, \tag{5.3}$$

а при $\Delta u_1(t) = 0$

$$\Delta x_1(t) = 0, \ t \in T_1, \tag{5.4}$$

$$\|\Delta x_2(t)\| \le L_9 \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u_2(\tau)\| d\tau, \ t \in T_2. \tag{5.5}$$

Здесь $L_{i+6} = const > 0$, $i = \overline{1,3}$ некоторые постоянные.

Пусть $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное положительное число, а $v_1(t)$ – произвольное допустимое управление.

Специальное приращение управления $u_1(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_1(t; \varepsilon) = \varepsilon(v_1(t) - u_1(t)), \ t \in T_1. \tag{5.6}$$

Учитывая формулу (5.6) и оценки (5.2), (5.3), из формулы приращения (5.1) функционала (1.6) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} J(u_1(t) + \Delta u_1(t;\varepsilon), u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) = \\ = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \times \\ \times (v_1(t) - u_1(t)) dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Теперь определим специальное приращение управления $u_2(t)$ по формуле

$$\Delta u_2(t; \mu) = \mu(v_2(t) - u_2(t)), \ t \in T_2. \tag{5.8}$$

Здесь $\mu \in [0,1]$ произвольное положительное число, а $v_2(t)$ – произвольное допустимое управление.

Учитывая оценку (5.5) и формулу (5.8), из формулы приращения (5.1) функционала (1.6) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} J(u_1(t), u_2(t) + \Delta u_2(t;\mu)) - J(u_1(t), u_2(t)) = \\ = -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \times \\ \times (v_2(t) - u_2(t)) dt + o(\mu). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Из разложений (5.7) и (5.9) приходим к следующему утверждению.

***Теорема* 5.1.** Если множества $U_i, i = 1,2$ – выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} (v_1(t) - u_1(t)) \le 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} (v_2(t) - u_2(t)) \le 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

выполнялись для всех допустимых управляющих функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$.

Доказанная теорема является аналогом линеаризованного интегрального принципа максимума.

Из него можно получить аналог дифференциального (см. например, [7]) принципа максимума (поточечное необходимое условие оптимальности) используя произвольность допустимых управлений $v_i(t), i = 1,2$.

***Теорема* 5.2.** Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1'(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta))}{\partial u_1} (w_1 - u_1(\theta)) \le 0, \\ \frac{\partial H_2'(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2} (w_2 - u_2(\theta)) \le 0, \end{aligned} \tag{5.11}$$

выполнялись для всех $w_1 \in U_1$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $w_2 \in U_2$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Нетрудно доказать, что необходимые условия оптимальности (5.10) и (5.11) эквивалентны.

Заключение

В работе впервые для двухэтапной задачи оптимального управления, описываемой двумя системами нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра получены аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина и линеаризованного условия максимума.

Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы при численном решении соответствующих ступенчатых задач оптимального управления, методом последовательных приближений и методом градиентного типа.

С помощью схем предложенных в работах [3], [6], могут быть исследованы случаи вырождения (особый случай [10]) установленных необходимых условий оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ащепков*, *Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами / Л.Т. Ащепков. – Москва: Наука, 1987. – 226 с.

2. *Захаров*, *Г.К.* Оптимизация ступенчатых систем управления / Г.К. Захаров // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 8. – С. 3–9.

3. *Исмайлов*, *Р.Р.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления / Р.Р. Исмайлов, К.Б. Мансимов // Журн. Выч. мат. и мат. физики. – 2006. – № 10. – С. 1758–1770.

4. *Розова*, *В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом / В.Н. Розова // Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и компьютерная математика. – 2002. – № 1 (1). – С. 131–136.

5. *Никольский*, *М.С.* Об одной вариационной задаче с переменной структурой / М.С. Никольский // Вестник МГУ. Серия Вычислительная математика и кибернетика. – 1987. – № 2. – С. 36–41.

6. *Калинин*, *А.И.* К теории необходимых условий оптимальности второго порядка / А.И. Калинин // Доклады АН БССР. – 1982. – № 8. – С. 677–680.

7. *Методы оптимизации* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.В. Альсевич [и др.]. – Минск. Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

8. *Алексеев*, *В.М.* Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – Москва: Физматлит, 2005. – 432 с.

9. *Новоженов*, *М.М.* Методы оптимального управления системами математической физики / М.М. Новоженов, В.И. Сумин, М.И. Сумин. – Горький: Изд-во ГГУ, 1986. – 87 с.

10. *Габасов*, *Р.* Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Москва: Либроком, 2011. – 256 с.

Поступила в редакцию 28.12.2023.

Информация об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы – д.ф.-м.н., профессор

Мансимзаде Айгюль Фазил кызы – аспирантка