МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_79
EDN: MRRNFM

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИСТЕМАМИ *N*-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Н.С. Косенок, И.В. Близнец, И.А. Соболь, Я.А. Купцова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FINITE GROUPS WITH SYSTEMS OF *N*-QUASINORMAL SUBGROUPS

N.S. Kosenok, I.V. Blisnetz, I.A. Sobol, Ya.A. Kuptsova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Подгруппа A группы G называется *квазинормальной* в G, если $AH = HA$ для всех подгрупп H группы G. Если A – подгруппа в G, то A_{qG} – подгруппа в A, порожденная всеми теми ее подгруппами, которые квазинормальны в G. Мы говорим, что подгруппа A является *N-квазинормальной* в G $(N \le G)$, если для некоторой квазинормальной подгруппы подгруппы T группы G, содержащей A, N *изолирует пару* (T, A_{qG}), т. е. $N \cap T = N \cap A_{qG}$. Используя эти понятия, мы даем новые характеризации разрешимых и сверхразрешимых конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа*, *разрешимая группа*, *сверхразрешимая группа*, *решетка подгрупп*, *квазинормальная подгруппа*, *модулярная решетка*.

Для цитирования: *Конечные группы с системами N-квазинормальных подгрупп* / Н.С. Косенок, И.В. Близнец, И.А. Соболь, Я.А. Купцова // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 79–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_79. – EDN: MRRNFM

Abstract. Throughout the article, all groups are finite and G always denotes a finite group. A subgroup A of a group G is called *quasinormal* in G if $AH = HA$ for all subgroups H of G. If A is a subgroup of G, then A_{qG} is the subgroup of A generated by all those subgroups of A that are quasinormal in G. We say that the subgroup A is *N-quasinormal* in G $(N \le G)$, if for some quasinormal subgroup of T of G, containing A, N *avoids the pair* (T, A_{qG}), i. e. $N \cap T = N \cap A_{qG}$. Using these concepts, we give new characterizations of soluble and supersoluble finite groups.

Keywords: *finite group*, *soluble group*, *supersoluble group*, *subgroup lattice*, *quasinormal subgroup*, *modular lattice*.

For citation: *Finite groups with systems of N-quasinormal subgroups* / N.S. Kosenok, I.V. Blisnetz, I.A. Sobol, Ya.A. Kuptsova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 79–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_79 (in Russian). – EDN: MRRNFM

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны и G всегда обозначает группу; $\mathcal{L}(G)$ – решетка всех подгруппы группы G. Если $K \le H \le G$, то $[H/K]$ обозначает [1] подрешетку в $L(G)$, состоящую из всех подгрупп $V \le G$ с условием $K \le V \le H$.

Подгруппа A группы G называется *квазинормальной* в G, если $AH = HA$ для всех подгрупп H группы G.

Если A – подгруппа в G, то A_{qG} – подгруппа в A, порожденная всеми теми ее подгруппами, которые квазинормальны в G.

Мы говорим, что подгруппа A является *N-квазинормальной* в G (Оре [2]), если для некоторой квазинормальной подгруппы подгруппы T группы G, содержащей A, N *изолирует пару* (T, A_{qG}), т. е. $N \cap T = N \cap A_{qG}$.

Если A – подгруппа в G, то через A_{qG} мы обозначаем подгруппу в A, порожденную всеми теми ее подгруппами, которые квазинормальны в G.

Определение **0.1.** Пусть A и N – подгруппы в G. Тогда мы говорим, следуя [3], [4], что A является *N-квазинормальной* в G, если для некоторой квазинормальной подгруппы T группы G, содержащей A, подгруппа N *изолирует пару* (T, A_{qG}), т. е. $N \cap T = N \cap A_{qG}$.

Пример **0.2.** (i) Всякая нормальная погруппа является квазинормальной.

(ii) Если подгруппа A квазинормальна в G, то $A_{qG} = A$ и поэтому пологая $T = A$ видим, что A является N-квазинормальной в G для любой подгруппы $N \le G$.

(iii) p, q, r – попарно различные простые числа, где r делит $q-1$. Пусть $L = C_q \rtimes C_r$ – неабелева группа порядка qr.

Пусть $N = P \rtimes Q_8$, где Q_8 – группа кватернионов порядка 8 и P – простой $\mathbb{F}_p Q_8$-модуль, точный для Q_8. Пусть $S = PV$, где V – некоторая квазинормальная подгруппа группы Q_8, не являющаяся нормальной в Q_8. Тогда V является квазинормальной в G.

Пусть $G = N \times L = N \times (C_q \rtimes C_r)$ и $A = SC_r$. Тогда подгруппа C_r не является квазинормальной в L ввиду леммы 1.6 ниже и поэтому C_r не является квазинормальной в G. Следовательно, $A_{qG} = S$ и поэтому $N \cap AL = S = N \cap A_{qG} = S$, где подгруппа AL квазинормальна в G леммы 1.1 (4) ниже. Значит, A N-квазинормальна в G, и A не является квазинормальной в G.

Основной целью данной работы является доказательство следующих двух теорем.

***Теорема* 0.3.** *Группа G разрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *G имеет нормальную подгруппу N с разрешимым фактором* G / N и

(ii) *в G имеется цепь подгрупп*

$$1 = G_0 \le G_1 \le \cdots \le G_t = G,$$

где подгруппа G_i *N-квазинормальна в G и решетка* $[G_{i+1} / G_i]$ *модулярна для всех* $i = 0, \ldots, t-1$.

***Теорема* 0.4.** *Группа G сверхразрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *G имеет нормальную подгруппу N с сверхразрешимым фактором* G / N *и*

(ii) *в G имеется цепь подгрупп*

$$1 = G_0 \le G_1 \le \cdots \le G_t = G,$$

где подгруппа G_i *N-квазинормальна в G и решетка* $[G_{i+1} / G_i]$ *дистрибутивна для всех* $i = 0, \ldots, t-1$.

1 Некоторые предварительные результаты

***Лемма* 1.1.** *Пусть R*, *A*, *E* – подгруппы в *G*, где $R \trianglelefteq G$ и *A* квазинормальна в *G*. Тогда верны следующие утверждения.

(1) AR / R *квазинормальна в* G / R.

(2) *Если* U / R *– квазинормальная подгруппа в* G / R, *то U – квазинормальная подгруппа в G*.

(3) $A \cap E$ *– квазинормальная подгруппа в E*.

(4) *Если E – квазинормальная подгруппа в G*, *то* $\langle A, E \rangle$ *– квазинормальная подгруппа в G*.

(5) *Если* H / K *– главный фактор G и* $A_G \le K < H \le A^G$, *то* $H / K \le Z(G / K)$.

(6) *Решетки* $[\langle A, E \rangle / A]$ *и* $[E / (E \cap A)]$ *изоморфны*.

Доказательство. (1) Пусть H / R – подгруппа в G / R. Тогда H – подгруппа в G и поэтому $AH = HA$, что влечет

$$AH / R = (AR / R)(H / R) = (AR / R)(H / R) = HA / R$$

и поэтому AR / R квазинормальна в G / R.

(2) Пусть H – подгруппа в G. Тогда HR / R – подгруппа в G / R и поэтому

$$UH / R = UHR / R = (U / R)(HR / R) =$$
$$= (HR / R)(U / R) = HUR / R = HU / R,$$

что влечет $HU = UH$ и поэтому U – квазинормальная подгруппа в G.

(3) Пусть H – подгруппа в E. Тогда $HA = AH$ – подгруппа в G и поэтому $E \cap HA = H(A \cap E)$ – подгруппа в E, что влечет $H(A \cap E) = (A \cap E)H$ и поэтому $A \cap E$ – квазинормальная подгруппа в E.

(4) Пусть H – подгруппа в G. Тогда из $HA = AH$ и $HE = EH$ следует, что

$$H\langle A, E \rangle = \langle A, E \rangle H$$

ввиду [5, гл. A, лемма 1.6 (a)]. Следовательно, $\langle A, E \rangle$ – квазинормальная подгруппа в G.

(5) Это утверждение вытекает из теоремы 5.2.3 книги [5].

(6) Это утверждение вытекает из теорем 2.1.5 и 2.1.6 книги [1], поскольку каждая квазинормальная подгруппа является модулярной в этой группе ввиду теоремы 2.1.3 книги [1]. □

***Лемма* 1.2.** *Пусть* $R \le A \le E \le G$ *и* $R \trianglelefteq G$. *Тогда верны следующие утверждения*.

(1) A_{qG} *квазинормальна в G*.

(2) $A_{qG} \le E_{qE}$.

(3) $(A / R)_{q(G/R)} = A_{qG} / R$.

Доказательство. (1) Это утверждение является следствием леммы 1.1 (4).

(2) Это утверждение является следствием свойства (1) и леммы 1.1 (3).

(3) Ввиду свойства (1) и леммы 1.1(1), $A_{qG} / R \le (A / R)_{q(G/R)}$. Пусть теперь $U / R \le A / R$, где U / R квазинормальна в G / R. Тогда $U \le A$ и U – квазинормальная подгруппа в G по лемме 1.1 (2). Это означает, что $U \le A_{qG}$ и, следовательно, $(A / R)_{q(G/R)} \le A_{qG} / R \le (A / R)_{q(G/R)}$, что влечет $(A / R)_{q(G/R)} = A_{qG} / R$. □

***Лемма* 1.3.** *Пусть A и N – подгруппы в G и для нормальной подгруппы R группы G мы имеем либо* $R \le N$, *либо* $R \le A$. *Если A N-квазинормальна в G*, *то* AR / R *является* (NR / R)*-квазинормальной в* G / R.

Доказательство. Пусть $A \le T \le G$, где T квазинормальна в G и $N \cap T = N \cap A_{mG}$. Тогда $AR / R \le TR / R$, где TR / R квазинормальна в G / R ввиду леммы 1.1 (1). Покажем, что

$$NR / R \cap TR / R = NR / R \cap (AR / R)_{q(G/R)}.$$

Предположим, что $R \le N$. Тогда

$$(NR / R) \cap (TR / R) = (N / R) \cap (TR / R) =$$
$$= (N \cap TR) / R = R(N \cap T) / R = R(N \cap A_{qG}) / R.$$

С другой стороны,

$$R(N \cap A_{qG}) / R \le RA_{qG} / R \le (RA)_{qG} / R =$$
$$= (RA/R)_{q(G/R)}$$

по лемме 1.2 (3). Это означает, что

$$N/R \cap TR/R \le N/R \cap (AR/R)_{q(G/R)} \le$$
$$\le N/R \cap TR/R$$

и, следовательно,

$$NR/R \cap TR/R = NR/R \cap (AR/R)_{q(G/R)}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$NR/R \cap TR/R = NR/R \cap (AR/R)_{q(G/R)}$$

и в случае, когда $R \le N$. Таким образом, подгруппа AR/R является (NR/R)-квазинормальной в G/R. □

***Лемма* 1.4.** *Пусть $A \le E$ и $L \le N \le G$. Если A N-квазинормальна в G, то A L-квазинормальна в G и A $(N \cap E)$-квазинормальна в E.*

Доказательство. Пусть $A \le T \le G$, где T квазинормальна в G и $N \cap T = N \cap A_{qG}$. Тогда

$$L \cap T = L \cap N \cap T = L \cap N \cap A_{qG} = L \cap A_{qG},$$

т. е. A L-квазинормальна в G. Кроме того, $A \le T \cap E$ и $T \cap E$ квазинормальна в E по лемме 1.1 (3). Покажем, что

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{qE}.$$

Действительно, из

$$N \cap T = N \cap A_{qG}$$

следует, что

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{qG},$$

где $(N \cap E) \cap A_{qG} \le (N \cap E) \cap A_{qE}$ по лемме 1.2 (2) и, следовательно,

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) \le (N \cap E) \cap A_{qE} \le$$
$$\le (N \cap E) \cap (T \cap E).$$

Итак,

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{qE}.$$

Следовательно, A $(N \cap E)$-квазинормальна в E. □

Напомним, что подгруппа A группы G называется $\mathfrak{U}$-*нормальной* в G [6], если каждый главный фактор G между A^G и A_G цикличен.

Следующая лемма является следствием теорем 1.3 и 1.4 из [6].

***Лемма* 1.5.** *Если A и B – $\mathfrak{U}$-нормальные подгруппы группы G, то пересечение $A \cap B$ также $\mathfrak{U}$-нормально в G.*

Подгруппа M группы G называется *модулярной* в G, если M – модулярный элемент (в *смысле Куроша* [1, стр. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е.

(1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z$, и

(2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \le G$, $Z \le G$ таких, что $M \le Z$.

***Лемма* 1.6** [1, Теорема 5.1.1]. *Подгруппа A квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A модулярна и субнормальна в G.*

2 Доказательство основных результатов

***Доказательство теоремы* 0.3.** Если

$$1 = G_0 \le G_1 \le \cdots \le G_t = G$$

– главный ряд разрешимой группы G, то условия (i) и (ii), очевидно, выполнены для G_i и $[G_{i+1}/G_i]$.

Покажем теперь, что если условия (i) и (ii) выполнены в G, то G является разрешимой группой. Предположим, что не так и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда мы можем считать, не теряя общности, что

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G.$$

(1) *Если R – минимальная нормальная подгруппа в G и $R \le N$, то G/R разрешима.*

В G/R рассмотрим ряд

$$G_0R/R \le G_1R/R \le \cdots \le G_tR/R = G/R.$$

Прежде заметим, что G_iR/R является N/R-квазинормальной в G/R для всех $i = 0, \ldots, t-1$ ввиду леммы 1.3, где $(G/R)/(N/R) \simeq G/N$ разрешима.

Подгруппа R, очевидно, является квазинормальной в G (см. пример 0.2 (i)) и поэтому решетки $[G_{i+1}/G_i]$ и $[(G_{i+1}R/R)/(G_iR/R)]$ изоморфны ввиду леммы 1.1 (6). Таким образом, решетка $[(G_{i+1}R/R)/(G_iR/R)]$ является модулярной для всех $i = 0, \ldots, t-1$. Следовательно, условия (i) и (ii) выполнены в G/R и поэтому G/R является разрешимой группой по выбору G.

(2) *G_{t-1} разрешима*.

Ввиду леммы 1.4, подгруппа G_i является $(N \cap G_{t-1})$-квазинормальной в G_{t-1}, где

$$G_{t-1}/(N \cap G_{t-1}) \simeq NG_{t-1}/N \le G/N$$

разрешима. Таким образом, условия (i) и (ii) выполнены для G_{t-1} и поэтому G_{t-1} разрешима ввиду выбора G.

(3) *R является неабелевой группой и $R \nleq G_{t-1}$*

(Это вытекает из утверждений (1) и (2) и выбора группы G).

(4) *Если V – $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в G и $V \le R$, то либо $V = 1$, либо $V = R$.*

Предположим, что $1 < V < R$. Тогда $V_G = 1$ и $V^G = R$ ввиду минимальности R. Следовательно, R – циклическая группа, что противоречит утверждению (3). Таким образом, имеет место (4).

(5) *Если T – квазинормальная подгруппа в G, содержащая G_{t-1}, и $N \cap T = N \cap (G_{t-1})_{qG}$, то $R \cap T = R \cap (G_{t-1})_{qG} = 1$. В частности, $R \cap G_{t-1} = 1$.*

Из $N \cap T = N \cap (G_{t-1})_{qG}$ вытекает, что $R \cap T = R \cap (G_{t-1})_{qG}$ по лемме 1.4. Предположим, что $V := R \cap (G_{t-1})_{qG} \ne 1$. Ввиду лемм 1.1 (5) и 1.2 (1), $(G_{t-1})_{qG}$ – $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в G. Следовательно, V – $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в

G по лемме 1.5. Но тогда $V = R$ ввиду утверждения (4) поскольку $V \neq 1$. Следовательно, $R \leq (G_{t-1})_{qG} \leq G_{t-1}$, что противоречит утверждению (3). Таким образом, мы имеем (5).

(6) $G = R \rtimes G_{t-1}$.

Покажем, что условия (i) и (ii) выполнены для $E := R \rtimes G_{t-1}$. Рассмотрим ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < E.$$

Ввиду леммы 1.4, все подгруппы G_i являются $(N \cap E)$-квазинормальными в E, где фактор

$$E/(N \cap E) \simeq NE/N \leq G/N$$

разрешим. Кроме того, решетка $[E/G_{t-1}]$ является подрешеткой в $[G_t/G_{t-1}]$ и поэтому она модулярна поскольку модулярна решетка $[G_t/G_{t-1}]$. Следовательно, условия (i) и (ii) выполнены для E. Если $E < G$, то E разрешима ввиду выбора G и тогда R – абелева группа, что противоречит утвержденению (3). Значит, $G = R \rtimes G_{t-1}$.

Заключительное противоречие. Из утверждений (5) и (6) вытекает, что

$$T = T \cap (R \rtimes G_{t-1}) = G_{t-1}(T \cap R) = G_{t-1}$$

– квазинормальная в G подгруппа и $R \nleq (G_{t-1})_G$. Значит, G_{t-1} $\mathfrak{U}$-нормальна в G по лемме 1.1 (5). Предположим, что $R \leq (G_{t-1})^G$. Тогда из G-изоморфизма

$$R/1 \simeq (G_{t-1})_G R/(G_{t-1})_G$$

вытекает, что R – циклическая группа. Это противоречие показывает, что $R \nleq (G_{t-1})^G$, и тогда из утверждений (1) и (6) и выбора группы G вытекает, что $G_{t-1} = (G_{t-1})^G$ – нормальная подгруппа в $G = R \times G_{t-1}$ и модулярная решетка $[G_t/G_{t-1}]$ изоморфна решетке всех подгрупп $\mathcal{L}(G/G_{t-1})$ фактор группы G/G_{t-1}. Таким образом, G/G_{t-1} – разрешимая группа по теореме 2.4.4 книги [1]. Но

$$R \simeq RG_{t-1}/G_{t-1} \leq G/G_{t-1}$$

и поэтому R – абелева группа, что невозможно ввиду утверждения (3). □

***Доказательство теоремы* 0.4.** Если

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G$$

– главный ряд сверхразрешимой группы G, то условия (i) и (ii), очевидно, выполнены для G_i и $[G_{i+1}/G_i]$.

Покажем теперь, что если условия (i) и (ii) выполнены в G, то G является сверхразрешимой группой. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $N \neq 1$. Пусть R – минимальная подгруппа G, содержащаяся в N. Тогда для некоторого i имеет место $R \nleq G_i$ и $R \leq G_{i+1}$.

(1) *G/R сверхразрешима и подгруппа R не является циклической*.

В G/R рассмотрим ряд

$$G_0R/R \leq G_1R/R \leq \cdots \leq G_tR/R = G/R.$$

Прежде заметим, что G_jR/R является N/R-квазинормальной в G/R для всех $j = 0,\dots,t-1$ ввиду леммы 1.3, где

$$(G/R)/(N/R) \simeq G/N$$

свехразрешима. Решетка $[G_{j+1}/G_j]$ является дистрибутивной по условию.

Подгруппа R, очевидно, является квазинормальной в G (см. пример 0.2 (i)) и поэтому решетки $[G_{j+1}/G_j]$ и $[(G_{j+1}R/R)/(G_jR/R)]$ изоморфны ввиду леммы 1.1 (6). Таким образом, решетка $[(G_{j+1}R/R)/(G_jR/R)]$ является дистрибутивной для всех $j = 0,\dots,t-1$. Следовательно, условия (i) и (ii) выполнены в G/R и поэтому G/R является свехразрешимой группой по выбору G. Более того, выбор G означает, подгруппа R не является циклической.

(2) *Если V – $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в G и $V \leq R$, то либо $V = 1$, либо $V = R$.*

Предположим, что $1 < V < R$. Тогда $V_G = 1$ и $V^G = R$ ввиду минимальности R. Следовательно, R – циклическая группа, что противоречит утвеждению (1). Таким образом, имеет место (2).

(3) *G_j R-квазинормальна в G для всех j* (поскольку $R \leq N$, то это вытекает из леммы 1.4).

Заключительное противоречие. Пусть $G_i \leq T$, где T – квазинормальная в G подгруппа и

$$R \cap T = R \cap (G_i)_{qG}.$$

Предположим, что

$$V := R \cap (G_i)_{qG} \neq 1.$$

Ввиду лемм 1.1 (5) и 1.2 (1), $(G_i)_{qG}$ – $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в G. Следовательно, V – $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в G по лемме 1.5. Но тогда $V = R$ ввиду утверждения (2), поскольку $V \neq 1$. Следовательно, $R \leq (G_i)_{qG} \leq G_i$, что противоречит определению индекса i. Таким образом, $V = 1$ и поэтому

$$R \cap G_i \leq R \cap T = R \cap (G_i)_{qG} = 1.$$

Значит, решетки $[R/1 = R/(R \cap G_i)]$ и $[G_iR/G_i]$ изоморфны ввиду леммы 1.1 (6), поскольку каждая нормальная подгруппа является в группе ввиду примера 0.2(i). Понятно также, что $[G_iR/G_i]$ является подрешеткой в $[G_{i+1}/G_i]$.

Таким образом, решетка $[G_{i+1}/G_i]$ дистрибутивна и поэтому дистрибутивна решетка $[R/1]$, что влечет цикличность группы R по теореме 1.2.3 книги [1]. И в этом случае группа G сверхразрешима, снова ввиду утверждения (1), что противоречит выбору группы G. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
2. *Ore*, *O*. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
3. *A characterization of soluble PST-groups* / Zh. Wang, A-Ming Liu, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Bull. Austral. Math. Soc. – In Press.
4. *Characterization of σ-soluble PσT-groups* / A-Ming Liu, Zh. Wang, V.G. Safonov, A.N. Skiba // J. Group Theory. – In Press.
5. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter, Berlin. – New York, 1992.
6. *Skiba*, *A.N*. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 181. – P. 69–85.

Исследования четвертого автора выполнены при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*грант* № Ф24КИ-021).

Поступила в редакцию 12.02.2024.

Информация об авторах

Косенок Николай Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Близнец Игорь Васильевич – к.ф.-м.н., доцент
Соболь Ирина Александровна – ст. преподаватель
Купцова Яна Александровна – студентка