

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЕКАРТОВЫХ ТМ-МОД КУММЕРА – ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

POLARIZATION AND ENERGY PROPERTIES OF THE CARTESIAN TM-MODES OF KUMMER – GAUSS BEAMS

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены новые векторные решения параболического уравнения, описывающие декартовы векторные астигматические ТМ световые пучки Куммера – Гаусса (К-Г). Исследуются поляризационные и энергетические свойства таких пучков. Проведено графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных астигматических ТМ световых пучков К-Г.

Ключевые слова: ТМ-моды, астигматические пучки, пучки Куммера – Гаусса, поляризация, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства декартовых ТМ-мод Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_22. – EDN: VDUCZP

Abstract. New vector solutions of the parabolic equation describing Cartesian vector astigmatic TM Kummer – Gauss (K-G) light beams are proposed. The polarization and energy properties of such beams are investigated. The graphical modeling of ellipses of polarization, intensity and transverse energy fluxes of vector astigmatic TM of K-G light beams is carried out.

Keywords: TM-modes, astigmatic beams, Kummer-Gaussian beams, polarization, transverse energy fluxes.

For citation: Girgel, S.S. Polarization and energy properties of the cartesian TM-modes of Kummer – Gauss beams / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_22 (in Russian). – EDN: VDUCZP

Введение

Узконаправленные параксиальные световые пучки занимают важную часть оптических исследований. Обычно обсуждаются скалярные световые пучки, например, [1]–[6]. Векторные пучки с однородной поляризацией рассматриваются реже [7]–[11]. Еще реже обсуждаются векторные пучки с неоднородной поляризацией, например ТЕ или ТМ-моды рассматриваются значительно реже [11]–[14]. В наших работах обсуждались циркулярные ТМ пучки Куммера [13], ТМ пучки Бесселя – Гаусса [14]. Все эти пучки характеризуются цилиндрической симметрией. Перейдем к обсуждению неоднородно поляризованных векторных световых пучков с декартовой симметрией. В [11] нами исследовались ТЕ и ТМ гауссовы моды.

В настоящей работе мы будем изучать декартовы векторные пучки К-Г с неоднородной поляризацией, их векторные поляризационные и энергетические свойства. Сначала в разделе 1 излагается общий формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных декартовых астигматических пучков с неоднородной поляризацией (ТМ-мод). Затем,

в разделе 2, этот формализм применяется для исследования поляризационных и энергетических характеристик векторных ТМ пучков К-Г. Проведено графическое моделирование поляризационных свойств, интенсивности и поперечных потоков энергии. Выполнен анализ полученных результатов, который подтвердил и проиллюстрировал аналитические расчеты.

1 Векторные параксиальные ТМ декартовы пучки

3D скалярное параболическое уравнение $(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 4i\partial_z)f = 0$ в декартовой системе координат имеет разделимые решения в виде [1], [3], [4] $f(X, Y, Z) = f_1(X, Z)f_2(Y, Z)f_3(Z)$, $f_3(Z) = f_{31}(Z)f_{32}(Z)$. Амплитуда f представляет собой произведение двух независимых амплитуд для 2D пучков f_1f_{31} и f_2f_{32} , описывающих скалярные декартовы пучки К-Г в плоскостях (X, Z) и (Y, Z) соответственно. Например, решения для скалярных пучков Эрмита – Гаусса, К-Г, Эйри – Гаусса и др. можно представить также в таком виде.

Переход от скалярных к векторным пучкам с неоднородной ТМ поляризацией проще всего выполнить по формулам [14]

$$\mathbf{E} = \nabla_{\perp} f + i\theta \Delta_{\perp} f \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H} = n[\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} f]. \quad (1.1)$$

Здесь безразмерный параметр парааксиальности $\theta = 1/(kx_0)$, $\theta \ll 1$. В декартовом базисе

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H} = n(E_x \mathbf{e}_y - E_y \mathbf{e}_x).$$

Проекция $H_z = 0$, поскольку мы обсуждаем ТМ-моды. Компоненты векторов электрического \mathbf{E} и магнитного полей светового пучка выражаются через функции скалярного пучка, как

$$E_x = f_{1x} f_2 f_3; \quad E_y = f_1 f_{2y} f_3; \\ E_z = i\theta f_3 (f_{1xx} f_2 + f_{2yy} f_1),$$

где применяются краткие обозначения $f_{1x} = \partial_x f_1$, $f_{1xx} = \partial_{xx}^2 f_1$ и аналогично $f_{2y} = \partial_y f_2$, $f_{2yy} = \partial_{yy}^2 f_2$.

Введем, следуя формализму [12], комплексный угол $\psi = \psi' + i\psi''$ соотношением $\eta = \frac{E_y}{E_x} = tg(\psi' + i\psi'')$, тогда азимут эллипса поляризации световой волны равен ψ' , а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = th\psi''$.

Плотности энергии, продольного и поперечного потоков энергии электромагнитного поля для парааксиальных векторных пучков с неоднородной поляризацией (ТМ-моды) соответственно равны [4]:

$$w = \frac{\varepsilon(|E_x|^2 + |E_y|^2)}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_{\perp} = -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} \cdot \text{Re}(\mathbf{e}_x E_x^* E_z + \mathbf{e}_y E_y^* E_z). \quad (1.2)$$

В последнем выражении целесообразно выделить явно, следуя Берри и Бекшаеву [5]–[6], плотность орбитального \mathbf{S}_o и спинового \mathbf{S}_s потоков энергии. Получаем $\mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$, где

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon}{8\pi n K} \text{Im}(\mathbf{e}_x (E_x^* \cdot \partial_x E_x + E_y^* \cdot \partial_x E_y) + \mathbf{e}_y (E_x^* \cdot \partial_y E_x + E_y^* \cdot \partial_y E_y)), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} (\mathbf{e}_x \partial_y - \mathbf{e}_y \partial_x) \text{Im}(E_x^* E_y). \quad (1.4)$$

Видим, что $|\mathbf{S}_{\perp}|/|S_z| \cong \theta \ll 1$, что естественно для парааксиальных пучков.

После некоторых преобразований находим, что

$$\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} |f_3|^2 \text{Im}((\mathbf{e}_x f_2^* f_{1x}^* + \mathbf{e}_y f_1^* f_{2y}^*) \times (f_1 f_{2yy} + f_2 f_{1xx})); \quad (1.5)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} |f_3|^2 \text{Im}(\mathbf{e}_x f_1 f_{1x}^* (|f_{2y}|^2 + f_2^* f_{2yy}) + \mathbf{e}_y f_2 f_2^* (|f_{1x}|^2 + f_1^* f_{1xx})); \quad (1.6)$$

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} |f_3|^2 \text{Im}(\mathbf{e}_x f_{1x}^* (|f_2|^2 f_{1xx} - |f_{2y}|^2 f_1) + \mathbf{e}_y f_{2y}^* (|f_1|^2 f_{2yy} - |f_{1x}|^2 f_2)). \quad (1.7)$$

2 Векторные парааксиальные ТМ декартовы пучки К-Г

Применим вышеизложенный общий формализм к пучкам К-Г. Амплитуду f_1 обобщенного 2D светового пучка К-Г в плоскости (X, Z) можно записать, как сумму четного и нечетного решения в виде [3]–[4] $f_1 = f_{1o} + f_{1e}$, где

$$f_{1o} = G_x X_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{v_x}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right);$$

$$f_{1e} = G_x M\left(-\frac{v_x}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2\right).$$

$$\text{Здесь 2D гауссиан } G_x = \sqrt{\frac{Q_{0x}}{Q_x}} \exp\left(\frac{iX^2}{Q_x}\right),$$

безразмерные переменные $X = x/x_0$, $Z = z/z_0$. Свободный комплексный индекс $v_x = v'_x + iv''_x$ является непрерывным. Согласующая функция

$$f_{31} = \left(\frac{Q_{0x} P_x}{P_{0x} Q_x}\right)^{\frac{v_x}{2}}. \text{ Новая переменная } X_1 \text{ выража-$$

ется через старую X , как $X_1^2 = t_x X^2$, где зависящий только от Z множитель $t_x = i(1/P_x - 1/Q_x)$. Для краткости введены два безразмерных комплексных параметра пучка $Q_x = Z - Q_{0x}$ и $P_x = Z - P_{0x}$, где свободные комплексные константы $Q_{0x} = Q'_{0x} + iQ''_{0x}$; $P_{0x} = P'_{0x} + iP''_{0x}$. Пометки o и e здесь и далее указывают соответственно на четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций f_{1e} и f_{1o} относительно изменения знаков их аргументов.

В плоскости (X, Z) можно записать аналогично $f_2 = f_{2o} + f_{2e}$. Эти результаты получаются простыми заменами переменных и индексов $X \rightarrow Y$; $1 \rightarrow 2$. Например,

$$f_{2e} = G_y M\left(-\frac{v_y}{2}, \frac{1}{2}, Y_2^2\right);$$

$$f_{2o} = G_y Y_2 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{v_y}{2}, \frac{3}{2}, Y_2^2\right); \quad t_y = i\left(\frac{1}{P_y} - \frac{1}{Q_y}\right).$$

Теперь формулы (1.1)–(1.7) полностью применимы к векторным парааксиальным ТМ-модам К-Г.

Так как существуют четные и нечетные функции f_1 и f_2 , то по четности все скалярные решения f 3D параболического уравнения делятся на четыре типа: $f_{ee} = f_{1e} f_{2e} f_3$; $f_{oe} = f_{1o} f_{2e} f_3$; $f_{oe} = f_{1o} f_{2e} f_3$; $f_{oe} = f_{1o} f_{2e} f_3$.

Каждой скалярной моде f соответствует, согласно (1.1), векторная ТМ-мода пучков К-Г.

Поэтому существуют 4 типа векторных параксиальных ТМ пучков К-Г, векторы электрического поля которых мы будем обозначать, как $E_{ee}, E_{oe}, E_{eo}, E_{oo}$. Векторы E пучков К-Г зависят от трех переменных (X, Y, Z) и шести $(\nu_1, \nu_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y})$ свободных комплексных параметров. Они описывают шестипараметрическое семейство решений для векторных амплитуд параксиальных декартовых астигматических 3DTM-мод пучков К-Г.

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функций E_{\perp} . Для обсуждаемых пучков с простым астигматизмом условия КИ должны выполняться для каждой из плоскостей (X, Z) и (Y, Z) сечения пучка. Можно показать, что условия КИ, найденные в [3] для амплитуд скалярных пучков К-Г, пригодны также и для тех же функций f_1, f_2 векторных амплитуд E параксиальных декартовых астигматических 3DTM-мод пучков К-Г. В таблице 2.1 представлены, следуя [3], достаточные условия КИ скалярных 2Dпучков К-Г в определенной плоскости, например, (X, Z) .

Нами проводилось графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии ТМ мод параксиальных пучков К-Г различных типов. Некоторые результаты изображены на рисунках 2.1–2.4 при различных значениях свободных параметров. Выбирались параметры $Q_{0X}'' > 0, Q_{0Y}'' > 0, P_{0X}'' > 0, P_{0Y}'' > 0$ (№1 таблицы 2.1), чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков К-Г и, тем самым, переносимую конечную

мощность через поперечное сечение пучка. Кроме того, на всех рисунках использовались одинаковые значения всех свободных параметров, чтобы наглядно продемонстрировать влияние различных типов мод на поляризационные и энергетические свойства пучков.

На рисунке 2.1 изображены эллипсы поляризации вместе с направлениями вращения для ТМ-мод К-Г. Поляризация ТМ-мод К-Г в сечении пучка в общем случае является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. Она зависит от координат X, Y, Z и не зависит явно от 3D гауссиана $G = G_X G_Y$ и функций $f_3(Z)$. С возрастанием расстояния от оси пучка поляризация постепенно становится линейной. При $Z=0$, а также вдоль осей координат OX и OY эллиптичность волн равна нулю.

На рисунках 2.2 (a) – 2.4 (a) показаны некоторые характерные картины интенсивностей пучков в относительных единицах. Видно, что картины интенсивности ТМ-мод К-Г могут быть самыми разнообразными. Существуют от одного до нескольких максимумов интенсивности и даже возможна картина в форме полого овала.

Линии поперечных потоков энергии представляют собой сложные кривые и зависят от многих факторов. Линии орбитального и полного поперечного потоков энергии часто похожи. Это связано с тем, что $|S_s| < |S_{\perp}|$. Линии спиновых потоков энергии обычно образуют замкнутые кривые. Им соответствуют в 3D пространстве спиралевидные кривые.

Таблица 2.1 – Условия КИ для 2D световых пучков К-Г с непрерывным свободным параметром $\nu = \nu' + i\nu''$

№	Ограничения на параметры Q_0''	Ограничения на параметры P_0''	Ограничения на индекс $\nu = \nu' + i\nu'', \mathbb{N} = 1, 2, \dots$	Предел $ f $ при $ x \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	нет	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow 0$	да
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \leq 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 2$	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow \infty$	только для f_e
3	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \leq 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 1$	$ f_o \rightarrow 0; f_e \rightarrow \infty$	только для f_o
4	$Q_0'' \leq 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N}$	$ f_o \rightarrow 0; f_e \rightarrow \infty$	только для f_o
5	$Q_0'' \leq 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N} + 1$	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow \infty$	только для f_e
6	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' > -1/2$	$ f \rightarrow 0$	да
7	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' = -1$	$ f \rightarrow \text{const}$	нет
8	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' \in (-1; -1/2]$	$ f \rightarrow 0$	нет
9	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < -1/2$	$ f \rightarrow 0$	да
10	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' \in [-1/2; 0)$	$ f \rightarrow 0$	нет
11	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' = 0$	$ f \rightarrow \text{const}$	нет

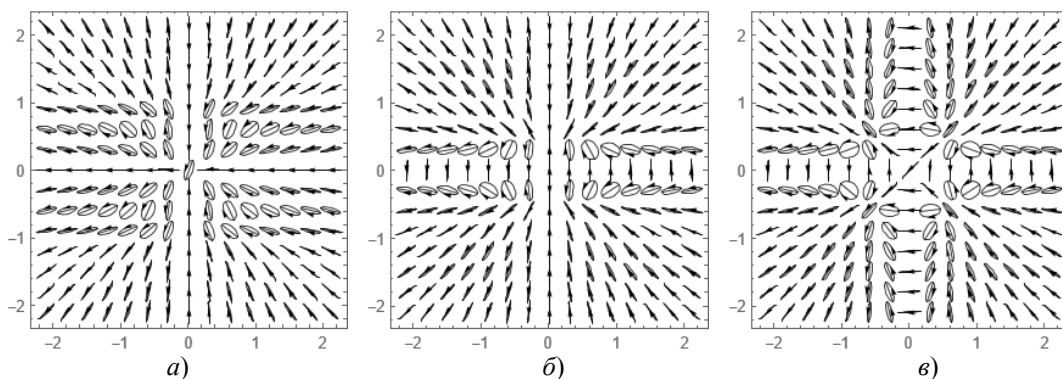


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации ТМ-мод К-Г: а) ТМ-ее моды, б) ТМ-ео моды, в) ТМ-оо моды. Свободные параметры: $Z = 0,3$; $Q''_{0x} = 0,5$; $Q''_{0y} = 0,2$; $P''_{0x} = 0,3$; $P''_{0y} = 0,4$; $v'_x = -0,2$; $v''_x = 1$; $v'_y = -1,8$; $v''_y = 1$; $Q'_{0x} = 0$; $Q'_{0y} = 0$

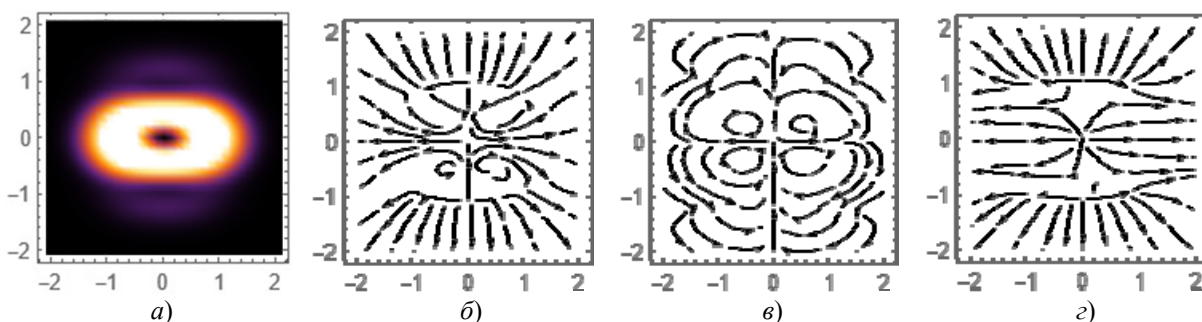


Рисунок 2.2 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еее-мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии; г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры такие же, как на рисунке 2.1

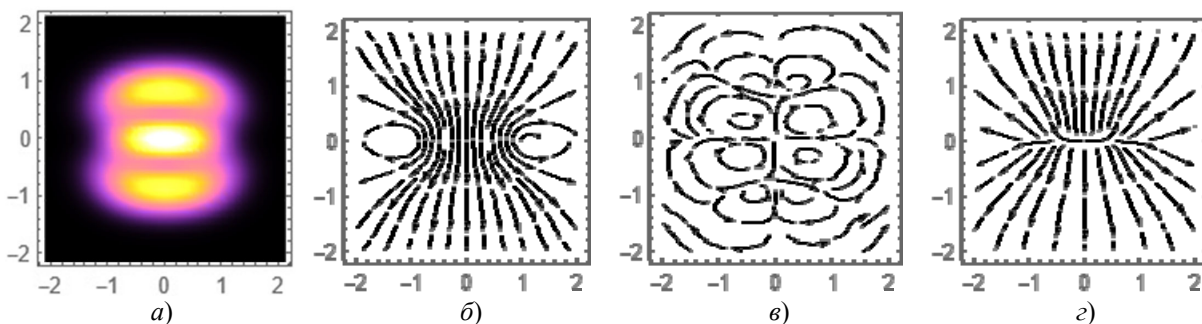


Рисунок 2.3 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еео-мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии; г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры такие же, как на рисунке 2.1.

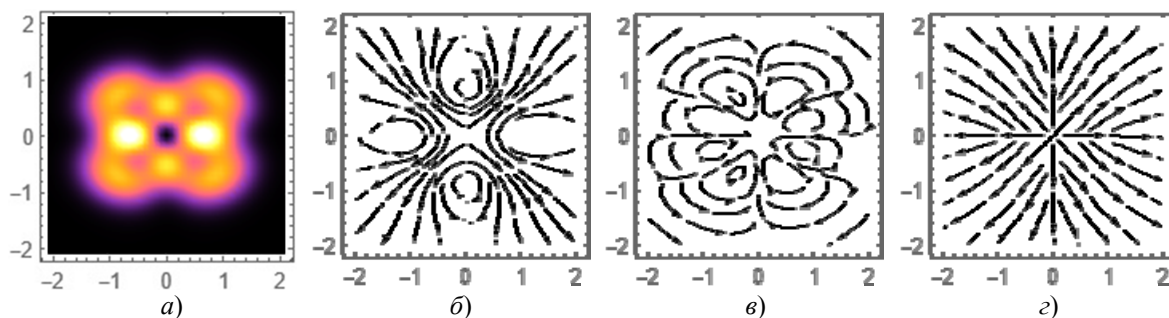


Рисунок 2.4 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еоо-мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии; г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры такие же, как на рисунке 2.1.

Возрастание продольного расстояния Z приводит, как известно, к поперечному расплыванию картин. Анализ и графическое моделирование показало, что варьирование остальных комплексных свободных параметров сложным образом влияет на возможные изменения соответствующих картин. Даже мнимые части v_x'' , v_y'' свободных параметров v_x , v_y могут радикально изменять картины интенсивности и потоки энергии, хотя не изменяют условий физической реализуемости пучков. Наконец, точечная группа симметрии всех рисунков для поперечных потоков энергии и интенсивностей всегда $m_x m_y 2_z$. Это обусловлено тем, что скалярные функции, описывающие пучки К-Г, являются четными или нечетными относительно координат XU .

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие не изученные ранее типы пучков – векторные параксиальные декартовы световые пучки К-Г с неоднородной поляризацией (ТМ-моды). Они характеризуются шестью свободными непрерывными комплексными параметрами (v_x , v_y , Q_{0x} , Q_{0y} , P_{0x} , P_{0y}). Записан формализм для вычисления поляризационных характеристик таких пучков. Сформулированы условия физической реализуемости неоднородно поляризованных декартовых векторных пучков К-Г с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Существенно, что условия КИ пригодны для непрерывных комплексных значений свободных параметров v_x и v_y . Вычислены явные выражения для плотностей продольного и поперечных потоков энергии для исследуемых пучков К-Г. Выполнено графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии таких пучков различных типов. Осуществлен соответствующий анализ проведенного графического моделирования. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим следствиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bandres, M.A. Cartesian beams / M.A. Bandres and J.C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.
2. Гиргель, С.С. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные световые пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
3. Гиргель, С.С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.

4. Гиргель, С.С. Децентрированные пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – № 6 (93). – С. 112–116.

5. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

6. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

7. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.

8. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.

9. Гиргель, С.С. Энергетические свойства векторных вихревых пучков Лагерра – Гаусса / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 3 (32). – С. 13–17.

10. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–17.

11. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–23.

12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.

13. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 13–17.

14. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных векторных бessel-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.

Поступила в редакцию 31.08.2023.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор