МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_68
EDN: MQPGHY

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ РЯДОВ ЛОРАНА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

RATIONAL APPROXIMATIONS OF LAURENT SERIES

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Изучается новая схема аппроксимации рядов Лорана рациональными функциями. Вводится понятие обобщенного многочлена и, опираясь на него, ставится и решается соответствующая задача Паде для ряда Лорана. Конструктивное решение этой задачи позволяет определить рациональные функции, которые рассматриваются в качестве аппроксимаций Паде ряда Лорана. Установлено, что в простейшем случае определенные аппроксимации Паде ряда Лорана ведут себя также, как и классические аппроксимации Паде степенного ряда: они локализуют особые точки функции, являющейся суммой ряда Лорана.

Ключевые слова: *многочлены Паде*, *степенные ряды*, *ряды Лорана*, *проблема Паде – Лорана*, *теорема Фабри*.

Для цитирования: *Старовойтов*, *А.П.* Рациональные аппроксимации рядов Лорана / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_68. – EDN: MQPGHY

Abstract. A new scheme for approximating Laurent series with rational functions is investigated. The concept of a generalized polynomial is introduced, and building upon this, a corresponding Padé problem for the Laurent series is formulated and solved. A constructive solution to this problem enables the determination of rational functions, which are then considered as Padé approximations of the Laurent series. It has been established that in the simplest case, these specific Padé approximations of the Laurent series behave similarly to the classical Padé approximations of power series: they localize the singular points of the function that is the sum of the Laurent series.

Keywords: *Padé polynomials*, *power series*, *Laurent series*, *Padé – Laurent problem*, *Fabry*'*s theorem*.

For citation: *Starovoitov*, *A.P.* Rational approximations of Laurent series / A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 1 (58). – P. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_68 (in Russian). – EDN: MQPGHY

Введение

Классические аппроксимации Паде определяются для рядов вида

$$f^+(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k^+ z^k,\ \ f^-(z)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^-}{z^k}. \qquad (0.1)$$

При этом говорят об аппроксимациях Паде соответственно в точках $z=0$ и $z=\infty$.

Аппроксимацией Паде типа (n,m) *ряда* f^+ называют [1] рациональную дробь

$$[n/m]_{f^+}=P_{n,m}^+/Q_{n,m}^+,$$

где тождественно не равный нулю многочлен $Q_{n,m}^+$, $\deg Q_{n,m}^+\leqslant m$ и многочлен $P_{n,m}^+$, $\deg P_{n,m}^+\leqslant n$ определяются из соотношений

$$\left(Q_{n,m}^+ f^+ - P_{n,m}^+\right)(z)=O(z^{n+m+1}). \qquad (0.2)$$

Здесь и далее n, m – целые неотрицательные числа, а под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $c_1z^p+c_2z^{p+1}+\ldots$ Многочлены Паде $Q_{n,m}^+$, $P_{n,m}^+$ условиями (0.2) определяются не единственным образом, тем не менее, дробь $P_{n,m}^+/Q_{n,m}^+$ определяет одну и ту же рациональную функцию [2]. В соответствии с (0.2) нахождение многочлена $Q_{n,m}^+(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_mz^m$ сводится к решению системы m линейных однородных уравнений с $m+1$ неизвестными, которая в матричной форме имеет вид:

$$G_{n,m}(f^+)\cdot u^T=\theta^T,$$

где $u=(b_m\ldots b_1 b_0)$ матрица-строка неизвестных коэффициентов, θ матрица-строка порядка $1\times(m+1)$, состоящая из нулей, а

$$G_{n,m}(f^+):=\begin{pmatrix} f_{n-m+1}^+ & f_{n-m+2}^+ & \cdots & f_{n+1}^+ \\ f_{n-m+2}^+ & f_{n-m+3}^+ & \cdots & f_{n+2}^+ \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n^+ & f_{n+1}^+ & \ldots & f_{n+m}^+ \end{pmatrix}$$

матрица системы. Если $G_{n,m}(f^+)$ является матрицей полного ранга, т. е. $rankG_{n,m}(f^+)=m$, то многочлены $Q_{n,m}^+$, $P_{n,m}^+$ определяются однозначно (с точностью до числового множителя) и при подходящем выборе этого множителя имеет место формула

$$Q^+_{n,m}(z)=\begin{vmatrix} f^+_{n-m+1} & f^+_{n-m+2} & \dots & f^+_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^+_n & f^+_{n+1} & \dots & f^+_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \qquad (0.3)$$

(здесь и далее $f^+_k=0$ при $k<0$); аналогичная формула имеет место и для $P^+_{n,m}$ [3].

Из (0.3) при $f^+_{n+1}\neq 0$ следует, что единственный полюс z_n дроби $[n/1]_{f^+}$ вычисляется по формуле $z_n=f^+_n/f^+_{n+1}$. Согласно теореме Фабри «об отношении» [4], если для коэффициентов ряда f^+ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^+_n}{f^+_{n+1}}=z^*, \qquad (0.4)$$

то радиус сходимости R ряда f^+ равен $|z^*|$ и z^* – особая точка суммы ряда f^+. Таким образом, если выполняются условия теоремы Фабри, то полюсы z_n дроби $[n/1]_{f^+}$ сходятся к особой точке суммы степенного ряда f^+ и, наоборот, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z^*$, то z^* – особая точка суммы степенного ряда f^+.

Определим теперь аппроксимации Паде в точке $z=\infty$. В этом случае обычно ограничиваются диагональным случаем, когда $n=m$ (см., например, [2]). Если тождественно не равный нулю многочлен Q^-_n, $\deg Q^-_n\leqslant m$ и многочлен P^-_n, $\deg P^-_n\leqslant n$ удовлетворяют условиям

$$\left(Q^-_n f^- - P^-_n\right)(z)=O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad (0.5)$$

то рациональную дробь $[n/n]_{f^-}=P^-_n/Q^-_n$ называют *n-ой аппроксимацией Паде ряда* f^-. Здесь и далее под $O\left(z^{-p}\right)$ понимаем ряд вида $c_1z^{-p}+c_2z^{-p-1}+...$ Аппроксимации Паде $[n/n]_{f^-}$ всегда существуют и определяются соотношением (0.5) единственным образом [2].

Определение аппроксимаций Паде $[n/m]_{f^-}$ для произвольной пары индексов (n,m) имеет некоторую специфику (см., например, [5], [6]). Рассмотрим степенной ряд $g^+(z):=f^-(1/z)$. Тогда по определению [6]

$$[n/m]_{f^-}(z):=[n/m]_{g^+}\left(z^{-1}\right). \qquad (0.6)$$

Если обозначить через $Q^+_{n,m}(\cdot;g^+),P^+_{n,m}(\cdot;g^+)$ – многочлены Паде ряда g^+, то из (0.2) получим

$$Q^+_{n,m}\left(z^{-1};g^+\right)f^-(z)-P^+_{n,m}\left(z^{-1};g^+\right)=O\left(\frac{1}{z^{n+m+1}}\right).$$

Умножим правую и левую части предыдущего равенства на z^m. Тогда

$$z^mQ^+_{n,m}\left(z^{-1};g^+\right)f^-(z)-z^mP^+_{n,m}\left(z^{-1};g^+\right)=O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Из (0.6) следует, что $[n/m]_{f^-}=P^-_{n,m}/Q^-_{n,m}$, где

$$Q^-_{n,m}(z):=z^mQ^+_{n,m}\left(z^{-1};g^+\right),$$
$$P^-_{n,m}(z):=z^mP^+_{n,m}\left(z^{-1};g^+\right).$$

Если матрица $G_{n,m}(g^+)$ является матрицей полного ранга, то, учитывая (0.3), получим

$$Q^-_{n,m}(z)=\begin{vmatrix} f^-_{n-m+1} & f^-_{n-m+2} & \dots & f^-_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^-_n & f^-_{n+1} & \dots & f^-_{n+m} \\ 1 & z & \dots & z^m \end{vmatrix}$$

(здесь $f^-_k=0$ при $k<1$). В случае $n=m$ данное определение равносильно определению диагональных аппроксимаций Паде, приведенному выше. Например, из предыдущей формулы следует хорошо известное представление (см., например, [2]) для знаменателя диагональных аппроксимаций Паде

$$Q^-_{n,n}(z)=\begin{vmatrix} f^-_1 & f^-_2 & \dots & f^-_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^-_n & f^-_{n+1} & \dots & f^-_{2n} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}.$$

Отметим, что при $n=m$ числитель дроби $[n/n]_{f^-}$ $P^-_{n,n}$ является многочленом. Для произвольной пары индексов (n,m) это не так. Например, если $n>m+1$, то $P^-_{n,m}$, вообще говоря, многочленом не является, поскольку

$$P^-_{n,m}(z)=z^m\left(\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}\right)=$$
$$=a_0z^{m-1}+\ldots+a_m+\frac{a_{m+1}}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^{n-m}}.$$

Всё это говорит о том, что определения недиагональных аппроксимаций Паде в точке $z=\infty$ и в точке $z=0$ отличаются содержанием.

Рассмотрим теперь произвольный ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_kz^k:=\sum_{k=0}^{\infty}f^+_kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{-k}}{z^k}:= \qquad (0.7)$$
$$:=f^+(z)+f^-(z),$$

где f^+ – правильная, а f^- – главная его части. В настоящее время существует много различных подходов в построении аналога классических аппроксимаций Паде для ряда (0.7) (см., например, [1], [5]–[10]). Проще всего воспользоваться готовыми конструкциями для каждого из рядов

f^+, f^- и в качестве определения аппроксимации Паде ряда (0.7) взять их сумму (см., например, [7])

$$[n/m]_f := [n/m]_{f^+} + [n/m]_{f^-}.$$

Не останавливаясь подробно на достоинствах и недостатках этого и других определений, отметим, что до сих пор так называемая «проблема Паде – Лорана» является актуальной. В известной монографии Дж. Бейкера и П. Грейвс-Морриса [1] 1981 года отмечается, что «работа по созданию схемы аппроксимации рядов Лорана с простыми формальными свойствами и общими теоремами сходимости находится в начальной стадии...». Отметим, что с момента выхода этой монографии в данном направлении исследований существенных продвижений мы не видим.

В данной статье предлагается новый подход к указанной проблеме. Он опирается на классическую конструкцию построения аппроксимации Паде, предложенную Г. Фробениусом [11], и, вместе с тем, имеет отличие в постановке самой задачи: вместо обычных многочленов мы рассматриваем *обобщенные многочлены* (*многочлены Лорана*). Предложенный нами поход вполне оправдан, поскольку определённые нами далее обобщенные многочлены, как уже было отмечено, неявно присутствуют в классическом определении аппроксимаций Паде в точке $z = \infty$.

1 Аппроксимации Паде ряда Лорана

Обозначим через L_m множество всех рациональных дробей вида

$$Q(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p,$$

где $a_{\pm k}$ – комплексные числа, $p \leqslant m$. Функцию $Q \in L_m$, будем называть *обобщенным многочленом* (*многочленом Лорана*) *степени не выше m*, а $\deg Q = p \Leftrightarrow |a_{-p}| + |a_p| \neq 0$. По определению n-ой частной суммой ряда (0.7) будем называть обобщенный многочлен

$$S_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} f_k z^k.$$

Хорошо известно, что если ряд (0.7) является рядом Лорана функции f аналитической в кольце $K = \{z : 0 < r < |z| < R\}$, то последовательность $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится на любом компакте из K.

Рассмотрим следующую задачу Фробениуса – Паде – Лорана:

Задача $\mathbf{A^L}$. *Для фиксированной пары индексов* (n, m) *и ряда Лорана f найти такие тождественно не равный нулю обобщенный многочлен* $Q_{n,m} \in L_m$ *и обобщенный многочлен* $P_{n,m} \in L_n$, *чтобы*

$$R_{n,m}(z; f) := \left(Q_{n,m} f - P_{n,m}\right)(z) = \\ = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} \left(c_k z^k + \frac{c_{-k}}{z^k}\right), \qquad (1.1)$$

где $c_{\pm k}$ *– комплексные числа*.

При $m = 0$ решением задачи $\mathbf{A^L}$ является n-ая частная сумма S_n ряда Лорана f. Если пара $(Q_{n,m}, P_{n,m})$ является решением задачи $\mathbf{A^L}$, то для любого комплексного числа $\lambda \neq 0$ новая пара $(\lambda Q_{n,m}, \lambda P_{n,m})$ также является решением этой задачи. Следующий пример показывает, что неединственность может быть и более существенной.

***Пример* 1.1.** Пусть $n = 2, m = 1$, а

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(z^k + z^{-k}\right),$$

где

$$a_k = \begin{cases} 2, & \text{если } k = 1, 2, 4; \\ 4, & \text{если } k = 3; \\ \dfrac{1}{i!}, & \text{если } k > 4. \end{cases}$$

Тогда любое решение задачи $\mathbf{A^L}$ представимо в виде: $(\lambda Q_{2,1}, \lambda P_{2,1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, где

$$Q_{2,1}(z) = \frac{a}{z} - \frac{a+b}{2} + bz,$$

$$P_{2,1}(z) = \frac{a+3b}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{b-a}{2}\frac{1}{z} + \\ + a + b + \frac{a-b}{2} z + \frac{3a+b}{2} z^2,$$

а a и b произвольные действительные числа не равные нулю одновременно.

***Определение* 1.1.** Будем говорить, что задача $\mathbf{A^L}$ имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т. е. для любых двух решений $(\overline{Q}_{n,m}, \overline{P}_{n,m})$ и $(\overline{\overline{Q}}_{n,m}, \overline{\overline{P}}_{n,m})$ задачи $\mathbf{A^L}$ найдется такое комплексное число λ, что

$$(\overline{Q}_{n,m}, \overline{P}_{n,m}) = (\lambda \overline{\overline{Q}}_{n,m}, \lambda \overline{\overline{P}}_{n,m}).$$

***Определение* 1.2.** Если пара $(Q_{n,m}, P_{n,m})$ является решением задачи $\mathbf{A^L}$, то рациональную дробь $[n/m]_f = P_{n,m} / Q_{n,m}$ будем называть аппроксимацией Паде типа (n, m) для ряда Лорана f.

Очевидно, что аппроксимации Паде $[n/0]_f = S_n$ всегда существуют и определяются однозначно для любого n. В том случае, когда задача A^L имеет единственное решение, дробь $[n/m]_f$ условиями (1.1) определяется однозначно. Вместе с тем, в отличии от аппроксимаций Паде рядов f^+, f^- аппроксимации Паде ряда Лорана $[n/m]_f$ определяются, вообще говоря, не однозначно. Чтобы доказать это, обозначим через $[2/1]_f^1$ аппроксимацию Паде – Лорана из примера 1, которая соотвествует параметрам $a = b = 1$, через $[2/1]_f^2$ – аппроксимацию, соответствующую параметрам $a = 2$, $b = 0$. Тогда легко показать, что

$$[2/1]_f^1(i) = 2 \neq \frac{-2-6i}{5} = [2/1]_f^2(i).$$

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий, при выполнении которых задача $\mathbf{A^L}$ имеет единственное решение.

2 Критерий единственности

Без ограничения общности будем рассматривать ряды Лорана (0.7), в которых правильная и главные части имеют бесконечное число членов. Изучение аппроксимаций Паде рядов Лорана, в которых главная или правильная части обрывается на некотором члене, существенно не отличается от изучения классических аппроксимаций Паде рядов f^+ и f^- (см., например, [2]).

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицу-строку

$$F_l = \left(f_{l+m} f_{l+m-1} \cdots f_{l+1} f_l f_{l-1} \cdots f_{l-m+1} f_{l-m} \right)$$

и при $m \neq 0$ рассмотрим определитель порядка $2m+1$

$$D(n,m;z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_{n+2m} & \cdots & f_{n+m+1} & f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ f_{n+2m-1} & \cdots & f_{n+m} & f_{n+m-1} & f_{n+m-2} & \cdots & f_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n+m+1} & \cdots & f_{n+2} & f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ z^{-m} & \cdots & z^{-1} & 1 & z & \cdots & z^m \\ f_{-n+m-1} & \cdots & f_{-n} & f_{-n-1} & f_{-n-2} & \cdots & f_{-n-m-1} \\ f_{-n+m-2} & \cdots & f_{-n-1} & f_{-n-2} & f_{-n-3} & \cdots & f_{-n-m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{-n} & \cdots & f_{-n-m-1} & f_{-n-m-2} & f_{-n-m-3} & \cdots & f_{-n-2m} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $H_{n,m}$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n,m;z)$ после удаления в нём $(m+1)$-ой строки. Если в определителе $D(n,m;z)$ $(m+1)$-ю строку заменить на строку F_l, получим новый определитель $d_l(n,m)$. Обозначим через $\Delta(n,m)$ определитель порядка $2m$, полученный в результате вычёркивания в определителе $D(n,m;z)$ $(m+1)$-ой строки и $(m+1)$-го столбца.

***Определение* 2.1.** Пару индексов (n,m), $m \neq 0$ будем называть *слабо нормальной* для f, если $H_{n,m}$ является матрицей полного ранга, т. е. $rankH_{n,m} = 2m$.

***Теорема* 2.1**. *Для того, чтобы для фиксированной пары* (n,m), $m \neq 0$ *задача* $\mathbf{A^L}$ *имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы пара* (n,m) *была вполне нормальной для f, т. е.* $rankH_{n,m} = 2m$.

Если $rankH_{n,m} = 2m$, *то при определенном выборе нормирующего множителя справедливы детерминантные представления*:

$$Q_{n,m}(z) = D(n,m;z), \tag{2.1}$$

$$P_{n,m}(z) = \sum_{p=-n}^{n} d_p(n,m) z^p, \tag{2.2}$$

$$R_{n,m}(z) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left\{ d_p(n,m) z^p + d_{-p}(n,m) z^{-p} \right\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть искомый многочлен $Q_{n,m}(z)$ имеет вид

$$Q_{n,m}(z) = \sum_{p=-m}^{m} u_p z^p.$$

После преобразований получаем

$$Q_{n,m}(z) f(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-m}^{m} f_{l-p} u_p \right) z^l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l z^l,$$

где

$$c_l = \sum_{p=-m}^{m} f_{l-p} u_p, l \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Выберем коэффициенты u_p многочлена $Q_{n,m}$ так, чтобы

$$c_l = 0, l = \pm(n+1), \ldots, \pm(n+m),$$

и положим

$$P_{n,m}(z) = \sum_{p=-n}^{n} c_p z^p.$$

Выбранные таким образом многочлены $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$ удовлетворяют условиям (1.1). Остаётся исследовать совместность системы уравнений

$$\sum_{p=-m}^{m} f_{l-p} u_p = 0, l = \pm(n+1), \ldots, \pm(n+m). \tag{2.5}$$

Запишем систему (2.5) в матричной форме

$$H_{n,m} \cdot u^T = \theta^T,$$

где $u = (u_{-m} \ldots u_{-1} u_0 u_1 \ldots u_m)$ матрица-строка неизвестных коэффициентов, а θ матрица-строка, состоящая из $2m+1$ нулей. Система (2.5) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Согласно теореме Кронекера – Капелли эта система имеет ненулевое решение. Кроме того, множество всех линейно независимых решений системы (2.5) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $rankH_{n,m} = 2m$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются умножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Остановимся теперь на доказательстве равенств (2.1)–(2.3). По предположению ранг матрицы $rankH_{n,m}=2m$. Поэтому при некотором *s*, $1\leqslant s\leqslant 2m+1$ определитель, полученный из элементов матрицы $H_{n,m}$ в результате вычеркивания в ней *s*-го столбца, отличен от нуля. Пусть, например, $s=m+1$. Тогда, зафиксировав неизвестное u_0, получим квадратную неоднородную систему

$$\sum_{p=-m}^{-1} f_{l-p}u_p+\sum_{p=1}^{m} f_{l-p}u_p=-f_l u_0,\quad l=\pm(n+1),\ldots,\pm(n+m) \tag{2.6}$$

главный определитель которой $\Delta(n,m)\neq 0$. Заметим, что $u_0\neq 0$. В противном случае система (2.6), а значит и система (2.5) имели бы только нулевые решения.

Система (2.6) имеет единственное ненулевое решение и найти его можно с помощью формул Крамера:

$$u_p=\frac{\Delta_p(n,\vec{m})}{\Delta(n,\vec{m})},\ \ p=\overline{-m,m},\ \ p\neq 0,$$

где $\Delta_p(n,m)$ определитель, полученный из определителя $\Delta(n,m)$ заменой в нём *p*-го столбца на столбец свободных членов. Если положить $\Delta_0(n,m):=u_0\Delta(n,m)$, то

$$Q_{n,m}(z)=\sum_{p=-m}^{m}u_p z^p=\sum_{p=-m}^{m}\frac{\Delta_p(n,m)}{\Delta(n,m)}z^p. \tag{2.7}$$

Разлагая определитель $D(n,m;z)$ по элементам $(m+1)$-ой строки и сравнивая с (2.7), делаем вывод, что

$$Q_{n,m}(z)=u_0\frac{D(n,m;z)}{\Delta(n,m)}. \tag{2.8}$$

Сопоставив (2.7) и (2.4), замечаем, что для нахождения c_p следует только в (2.7) *z* заменить на f_{l-p}. Учитывая введённые обозначения, получаем, что

$$c_p=u_0\frac{d_p(n,m;z)}{\Delta(n,m)}.$$

Поэтому многочлен $P_{n,m}(z)$ и остаточный член $R_{n,m}(z)$ можно представить в виде

$$P_{n,m}(z)=\frac{u_0}{\Delta(n,m)}\sum_{p=-n}^{n}d_p(n,m)z^p, \tag{2.9}$$

$$R_{n,m}(z)=\frac{u_0}{\Delta(n,m)}\sum_{p=n+m+1}^{\infty}\left(d_p(n,m)z^p+d_{-p}(n,m)z^{-p}\right). \tag{2.10}$$

Умножая (2.8)–(2.10) на нормирующий множитель $\Delta(n,m)/u_0$, получим равенства (2.1)–(2.3).

Если при вычеркивании в матрице $H_{n,m}$ столбца с номером $s\neq m+1$ получается определитель отличный от нуля, то, рассуждая аналогично, приходим к представлениям (2.1)–(2.3). Теперь остаётся заметить, что поскольку $rankH_{n,m}=2m$, то определитель $D(n,m;z)$ не может быть тождественно равным нулю. □

3 Замечания и следствия

***Замечание* 3.1.** В теореме 2.1 предполагается, что $m\neq 0$. Если $m=0$, то решение задачи $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ очевидно: с точностью до числового множителя $Q_{n,0}(z)\equiv 1$, а обобщенный многочлен $P_{n,0}$ является *n*-ой частной суммой S_n ряда (0.7).

***Замечание* 3.2.** При доказательстве теоремы 2.1 никак не учитывалось наше предположение о сходимости ряда (0.7). Поэтому все утверждения теоремы остаются в силе, если ряд (0.7) являются формальным.

Отметим также, что если пара (n,m) не является слабо нормальной для *f*, то обобщённые многочлены $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$, заданные формулами (2.1) и (2.2), не являются решениями задачи $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. В частности, в примере 1.1 индекс (2, 1) не является слабо нормальным, и, если вычислять, например, многочлен $Q_{2,1}$ по формуле (2.1), то получим $Q_{2,1}(z)\equiv 0$.

***Следствие* 3.1.** *Пусть пара индексов* (n,m) *является слабо нормальной для f и коэффициенты ряда* (0.7) *действительные числа. Тогда многочлены* $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$ *решения задачи* $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$, *определяемые формулами* (2.1) *и* (2.2), *являются обобщенными многочленами с действительными коэффициентами.*

***Следствие* 3.2.** *Для того, чтобы задача* $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ *всегда имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы все пары индексов* (n,m) *были вполне нормальными для f.*

***Следствие* 3.3.** *Если пара индексов* (n,m) *является вполне нормальной для f, то аппроксимации Паде* $[n/m]_f$ *ряда Лорана f соотношениями* (2.1) *определяются единственным образом.*

В заключении покажем, что в условиях теоремы Фабри аппроксимации Паде $[n/1]_f$ ряда Лорана при $n\to\infty$ ведут себя также, как и классические аппроксимации Паде $[n/1]_{f^+}$ степенного ряда f^+: они локализуют особенности функции *f* суммы ряда (0.7).

Предположим, что *f* аналитична в кольце *K*, $f_{\pm n}\neq 0$ при $n\geqslant n_0$ и существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=z_+\neq 0,\lim_{n\to\infty}\frac{f_{-n}}{f_{-n-1}}=\frac{1}{z_-}\neq\infty. \tag{3.1}$$

Тогда по теореме Фабри точки $z_\pm$ являются особыми точками суммы ряда *f* и лежат на границе кольца K: $|z_-|=r$, а $|z_+|=R$. Выбрав нормирующий множитель для знаменателя дроби $[n/1]_f$, получим

$$Q^*_{n,1}(z)=\frac{1}{f_{n+3}f_{-n-3}}Q_{n,1}(z)=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{f_{n+2}}{f_{n+3}} & \frac{f_{n+1}}{f_{n+3}} & \frac{f_n}{f_{n+3}} \\ z^{-1} & 1 & z \\ \frac{f_{-n}}{f_{-n-3}} & \frac{f_{-n-1}}{f_{-n-3}} & \frac{f_{-n-2}}{f_{-n-3}} \end{vmatrix}. \qquad (3.2)$$

Отсюда и из (3.1) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} Q^*_{n,1}(z)=\frac{1}{z}\begin{vmatrix} z_+ & z_+^2 & z_+^3 \\ 1 & z & z^2 \\ \frac{1}{z_-^3} & \frac{1}{z_-^2} & \frac{1}{z_-} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{z_+}{zz_-^3}\begin{vmatrix} 1 & z_+ & z_+^2 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z_- & z_-^2 \end{vmatrix}=\frac{z_+}{z_-^2}(z_n z_+)(z-z_+)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_-}\right).$$

Опираясь на предыдущие равенства, легко показать, что при сделанных предположениях для всех достаточно больших n пара индексов $(n, 1)$ является вполне нормальной. Поэтому формула (3.2) справедлива, по крайней мере, при всех достаточно больших n.

Таким образом, полюса дроби $[n/1]_f$ стремятся к особым точкам $z_\pm$ функции f, лежащим на границе кольца K, внутри которого f аналитична. В связи с этим напомним, что А.А. Гончар высказал гипотезу о том, что свойство аппроксимаций Паде $[n/1]_{f^+}$, отмеченное выше, имеет место для аппроксимаций Паде $[n/m]_{f^+}$ при любом фиксированном m. Первоначально справедливость этой гипотезы была установлена в ослабленном варианте [12]. В общем случае гипотеза А.А. Гончара доказана С.П. Суетиным [13], [14]. Вполне естественно предположить, что в адаптированном виде гипотеза А.А. Гончара справедлива и для аппроксимаций Паде $[n/m]_f$ ряда Лорана (0.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейкер мл.*, *Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986.

2. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.

3. *Старовойтов*, *А.П.* О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества. – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–35.

4. *Бибербах*, *Л.* Аналитическое продолжение / Л. Бибербах. – Москва: Наука, 1967.

5. *Gragg*, *W.B.* Laurent, Fourier and Chebyshev – Padé tables. In: “Padé and Rational Approximation” / W.B. Gragg; Eds. E.B. Saff, R.S. Varga. – Academic Press, 1977. – P. 61–72.

6. *Chisholm*, *J.S.R.* Generalisations of Padé Approximation for Chebyshev and Fourier Series / J.S.R. Chisholm, A.K. Common // In Proc. 1979 Int. Christoffel Symposium. Ed. P.L. Butzer. – Basel: Birkhlluser Verlag, Springer Basel AG, 1981. – P. 212–231.

7. *Gragg*, *W.B.* The Laurent-Padé tables, Fourier and Chebyshev – Padé tables / W.B. Gragg, G.D. Johnson // Proc. I.F.I.P. Congress 74, North Holland 1974. – P. 632–637.

8. *Cheney*, *E.W.* Introduction to Approximation Theory / E.W. Cheney. – McGraw-Hill Book Company, 1966.

9. *Fleischer*, *J.* Analytic continuation of scattering amplitudes and Padé approximants / J. Fleischer // Nuclear Physics B. – 1972. – Vol. 37, № 1. – P. 59–76.

10. *Fleischer*, *J.* Nonlinear pade approximants for legendre series / J. Fleischer // J. Math. Phys. – 1973. – Vol. 14. – P. 246–248.

11. *Frobenious*, *G.* Ueber Relationen zwischen den Naherung-sbruchen von Potenzreihen / G. Frobenious // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1881. – Vol. 90. – P. 1–17.

12. *Вавилов*, *В.В.* Об одной обратной задаче для строк таблицы Паде / В.В. Вавилов, Г.Л. Лопес, В.А. Прохоров // Математический сборник. – 1979. – Т. 152, № 1. – С. 117–127.

13. *Суетин*, *С.П.* О полюсах m-й строки таблицы Паде / С.П. Суетин // Математический сборник. – 1983. – Т. 120 (162), № 4. – С. 500–504.

14. *Суетин*, *С.П.* Об одной обратной задаче для m-й строки таблицы Паде / С.П. Суетин // Математический сборник. – 1984. – Т. 124 (166), № 2. – С. 238–250.

Поступила в редакцию 09.01.2024.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Рябченко Наталия Валерьевна – к.ф.-м.н.