

ТМ МОДЫ ВЕКТОРНЫХ ДЕКАРТОВЫХ ПУЧКОВ КУММЕРА КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

TM MODES OF VECTOR CARTESIAN KUMMER BEAMS WITH TRANSFERABLE LIMITED POWER

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены новые решения параболического уравнения, описывающие векторные декартовы параксиальные ТМ световые пучки Куммера. Установлены допустимые значения свободных параметров, при которых пучки Куммера переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми. Выполнено графическое моделирование и проведен соответствующий анализ эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных параксиальных ТМ световых пучков Куммера.

Ключевые слова: ТМ-моды, векторные пучки, пучки Куммера, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. ТМ моды векторных декартовых пучков Куммера конечной мощности / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_16. – EDN: ULNKFQ

Abstract. New vector solutions of the parabolic equation describing vector Cartesian paraxial TM Kummer light beams are proposed. The admissible values of free parameters at which Kummer beams transfer limited power are established and are physically realized. The polarization and energy properties of such beams are investigated. The graphic modeling is executed and the corresponding analysis of the ellipses of polarization, intensity and transverse energy fluxes of vector paraxial TM Kummer light beams is carried out.

Keywords: TM modes, vector beams, Kummer beams, transverse energy fluxes.

For citation: Girgel, S.S. TM modes of vector cartesian Kummer beams with transferable limited power / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 1 (58). – P. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_16 (in Russian). – EDN: ULNKFQ

Введение

Обычно исследователи ограничиваются изучением и применением скалярных световых пучков [1]–[5]. Векторные световые пучки с однородной поляризацией по поперечному сечению пучка используют формализм скалярных пучков [6]. Пучки с неоднородной поляризацией изучаются и применяются значительно реже. В [7] исследовались ТЕ и ТМ гауссовы моды. В работе Фадеевой [8] обсуждаются поляризационные свойства только стандартных ТЕ и ТМ пучков Эрмита – Гаусса при $Z = 0$. Недавно нами исследовались ТМ моды векторных циркулярных пучков Куммера [9] и Бесселя – Гаусса [10], их энергетические и поляризационные свойства.

Перейдем теперь к обсуждению неоднородно поляризованных векторных световых пучков с декартовой симметрией. В настоящей работе мы будем изучать параксиальные векторные декартовы пучки Куммера с неоднородной поляризацией (ТМ моды), их поляризационные и энергетические свойства. Сначала в разделе 1 кратко

приведен формализм для описания скалярных астигматических декартовых пучков Куммера. Этот формализм затем обобщается и позволяет описывать векторные декартовы пучки (ТМ моды). Затем, в разделе 2, обсуждаются поляризационные и энергетические характеристики векторных ТМ пучков Куммера. Проведено графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии. Выполнен анализ полученных результатов, который подтвердил и проиллюстрировал аналитические расчеты. В заключении кратко изложены основные полученные результаты.

1 Векторные астигматические пучки Куммера с неоднородной поляризацией

Скалярное параболическое уравнение после перехода к безразмерным переменным $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, где $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно, имеет вид

$$(\partial_{X,X}^2 + \partial_{Y,Y}^2 + 4i\partial_Z)f = 0. \quad (1.1)$$

Одним из его решений для амплитуд монохроматических волн, согласно [4], является амплитуда $f = f_1 f_2 f_3$, ($f_3 = f_{31} f_{32}$), представляющая собой произведение двух независимых амплитуд для 2D пучков $f_1 f_{31}$ и $f_2 f_{32}$ для 2D пучков, описывающих скалярные декартовы пучки Куммера в плоскостях (X, Z) и (Y, Z) соответственно. Амплитуду f_1 обобщенного 2D светового пучка Куммера в плоскости (X, Z) можно записать как сумму четного и нечетного решения в виде $f_1 = f_{1o} + f_{1e}$, где

$$f_{1e} = M\left(\frac{v_1}{2}, \frac{1}{2}, t_1 X^2\right),$$

$$f_{1o} = \sqrt{t_1} X M\left(\frac{1-v_1}{2}, \frac{3}{2}, t_1 X^2\right). \quad (1.2)$$

Согласующие коэффициенты $f_{31} = \left(\frac{Q_1(Z)}{Q_1(0)}\right)^{\frac{v_1}{2}}$,

$t_1 = \frac{i}{Q_1}$ зависят только от Z . Выше введен стандартный комплексный параметр пучка $Q_1(Z) = Z - Q_{10}$, где свободный комплексный параметр $Q_{10} = Q'_{10} + iQ''_{10}$; $i = \sqrt{-1}$. Постоянная разделения переменных в уравнении (1.1) $v_1 = v'_1 + i v''_1$ является, в общем случае, также свободным постоянным комплексным параметром.

Функции f не зависят явно от гауссиана. Все переменные и параметры здесь и далее записаны в безразмерной форме. Индексы o и e помечают соответственно четность и нечетность функций f_o и f_e относительно изменения знака аргумента X . В плоскости (Y, Z) решения аналогичные, получаются заменами индекса 1 на индекс 2. Например,

$$Q_2(Z) = Z - Q_{20}; \quad f_{2e} = M\left(\frac{v_2}{2}, \frac{1}{2}, t_2 Y^2\right) \left(\frac{Q_2(Z)}{Q_2(0)}\right)^{\frac{v_2}{2}};$$

$$f_{32} = \left(\frac{Q_2(Z)}{Q_2(0)}\right)^{\frac{v_2}{2}}; \quad t_2 = \frac{i}{Q_2}.$$

Возможны [4], [5] четыре типа скалярных декартовых пучков Куммера: $f_{jk} = f_{1j} f_{2k} f_3$, где индексы j и k принимают два значения o и e . В общем случае, полная амплитуда f скалярного пучка Куммера зависит от трех координат и четырех свободных комплексных параметров Q_{10} , Q_{20} , v_1 , v_2 .

Перейдем теперь к изучению векторных ТМ пучков Куммера. Векторы электрического и магнитного полей обобщенной ТМ-моды парааксиальной световой волны можно представить [9], [10], как

$$\mathbf{E} = \nabla_{\perp} f + 4\theta \mathbf{e}_Z \partial_Z f; \quad \mathbf{H} = n[\mathbf{e}_Z, \nabla_{\perp} f].$$

Безразмерный параметр парааксиальности $\theta = 1/(kx_0)$, $\theta \ll 1$. Вычисляя, получаем в декартовом базисе

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_X E_X + E_Y \mathbf{e}_Y + E_Z \mathbf{e}_Z; \quad \mathbf{H} = n(E_X \mathbf{e}_Y - E_Y \mathbf{e}_X).$$

Проекция $H_Z = 0$, поскольку мы обсуждаем ТМ-моды.

Итак, видно, что возможны 4 типа ТМ мод Куммера, выражающиеся через $f_{1e}, f_{1o}, f_{2e}, f_{2o}, f_3$, которые будем обозначать, как $\mathbf{E}_{ee}, \mathbf{E}_{eo}, \mathbf{E}_{oe}, \mathbf{E}_{oo}$. Поперечная часть вектора \mathbf{E} для разных типов мод $\mathbf{E}_{\perp jk} = \nabla_{\perp jk}(f_{1j} f_{2k})$. Теперь, например, $\mathbf{E}_{1jk} = (\partial_1 f_{1j}) f_{2k}$. Явные выражения для производных функций f_1 , необходимые для дальнейших расчетов:

$$f_{1eX} \equiv \partial_X f_{1e} = -2t_1 v_1 X M\left(1 - \frac{v_2}{2}, \frac{3}{2}, t_1 X^2\right);$$

$$f_{1oX} \equiv \partial_X f_{1o} = \frac{f_{1o}}{X} + \frac{2t_1^{3/2}(1-v_1)X^2}{3} M\left(\frac{3-v_1}{2}, \frac{3}{2}, t_1 X^2\right); \quad (1.3)$$

$$f_{1eZ} \equiv \partial_Z f_{1e} = \frac{v_X f_{1e} - X \partial_X f_{1e}}{2Q_1};$$

$$f_{1oZ} \equiv \partial_Z f_{1o} = \frac{v_1 f_{1o} - X f_{1oX}}{2Q_1}.$$

Интересно, что производные f_{1Z} выражаются через f_{1X} , причем для пучков o и e типов одинаковым образом.

Теперь полный вектор электрического поля декартовых ТМ мод Куммера принимает одинаковый вид для любых индексов o и e .

$$E_X = f_{1X} f_Y f_3; \quad E_Y = f_{2Y} f_1 f_3;$$

$$E_Z = 2\theta \left(\frac{v_1 f_1 - X f_{1X}}{Q_X} f_2 + \frac{v_2 f_2 - Y f_{2Y}}{Q_2} f_1 \right) f_3. \quad (1.4)$$

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функции \mathbf{E}_{\perp} . Анализ показал, что для компонент в плоскости (X, Z) необходимое условие КИ $Q''_{10} > 0$. Если $v'_1 > 0$, то функция $|f| \rightarrow \infty$ при $|X| \rightarrow \infty$ и пучок – не КИ. Если $v'_1 = 0$, то при $|X| \rightarrow \infty$ $|f| \rightarrow \text{const}$ и пучок – не КИ. Если же $v'_1 \in [-1.2, 0)$, то $|f| \rightarrow 0$ при $|X| \rightarrow \infty$, но пучок снова – не КИ. Если, наконец, $v'_1 < -1/2$, то $|f| \rightarrow 0$ и пучок является КИ. В плоскости (Y, Z) условия КИ аналогичны. Таким образом, условия КИ для ТМ декартовых мод Куммера такие же, как и для скалярных астигматических пучков Куммера. При этом во всех случаях параметры Q'_{10} , Q'_{20} , v''_X , v''_Y качественно не влияют на КИ, хотя количественно изменяют форму поверхности интенсивности пучка.

Итак, для векторных 3D декартовых астигматических парааксиальных пучков Куммера конечные условия физической реализуемости следующие:

$$\{Q_{10}'' > 0, Q_{20}'' > 0, v_1' < -1/2, v_2' < -1/2\}. \quad (1.5)$$

2 Поляризационные и энергетические характеристики векторных декартовых ТМ-мод Куммера

Для вычисления параметров поляризации ТМ пучков Куммера проще всего ввести, согласно Фёдорову [11], комплексный угол $\psi = \psi' + i\psi''$ соотношением $\eta = E_y / E_x = tg(\psi' + i\psi'')$, тогда азимут эллипса поляризации световой волны равен ψ' , а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = th\psi''$. Поляризация ТМ-мод Куммера в сечении пучка в общем случае эллиптическая, зависит от координат X, Y, Z .

Плотности энергии w , продольного S_z и поперечного S_{\perp} потоков энергии электромагнитного поля для парааксиальных векторных пучков с неоднородной поляризацией (ТМ моды) соответственно равны [7], [9], [10]:

$$w = \frac{\varepsilon(|E_x|^2 + |E_y|^2)}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$S_{\perp} = -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} \cdot \text{Re}(\mathbf{E}_{\perp}^* E_z) =$$

$$= -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} \cdot \text{Re}(\mathbf{e}_x E_x^* E_z + \mathbf{e}_y E_y^* E_z). \quad (2.1)$$

В последнем выражении целесообразно выделить явно, следуя Бекшаеву [12], плотность орбитального S_o и спинового S_s потоков энергии. Получаем $S_{\perp} = S_o + S_s$, где

$$S_o = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} \text{Im}(\mathbf{e}_x (E_x^* \cdot \partial_x E_x + E_y^* \cdot \partial_x E_y) +$$

$$+ \mathbf{e}_y (E_x^* \cdot \partial_y E_x + E_y^* \cdot \partial_y E_y)), \quad (2.2)$$

$$S_s = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} (\mathbf{e}_x \partial_y - \mathbf{e}_y \partial_x) \text{Im}(E_x^* E_y). \quad (2.3)$$

Видим, что $|S_{\perp}|/|S_z| \sim \theta \ll 1$, что естественно для парааксиальных пучков.

Некоторые результаты графического моделирования поперечных потоков энергии и интенсивности ТМ мод парааксиальных пучков Куммера изображены в относительных единицах на рисунках 2.1–2.6 при различных значениях свободных параметров. На всех рисунках взяты одинаковые значения следующих свободных параметров: $Z = 0, 3$; $Q_{10}'' = 0, 3$; $v_1'' = 0, 4$; $v_2'' = 0, 4$.

Чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Куммера и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.5).

Картины общей интенсивности содержат от двух и более пиков интенсивности. Поляризация ТМ мод Куммера является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. При изменениях расстояния от оси пучка поляризация постепенно видоизменяется от линейной через круговую снова к линейной. Вдоль осей координат OX и OY поляризация всегда строго линейная. При $Z = 0$ поляризация всегда линейная неоднородная по всему сечению пучка.

На рисунках 2.2–2.6 показаны некоторые характерные картины интенсивностей в относительных единицах и направлений поперечных потоков энергии S_{\perp} для ТМ мод Куммера. Качественно картины интенсивности поперечных потоков энергии и картины полной интенсивности пучка различаются. Например, как ясно видно на рисунках 2.2–2.6, их максимумы различны.

На всех рисунках видно, что плоскости XZ и YZ являются плоскостями симметрии. Видно, что для картин интенсивности, эллипсов поляризации и потоков энергии точечная группа симметрии соответствующих картин всегда одна и та же: $m_x m_y 2_z$.

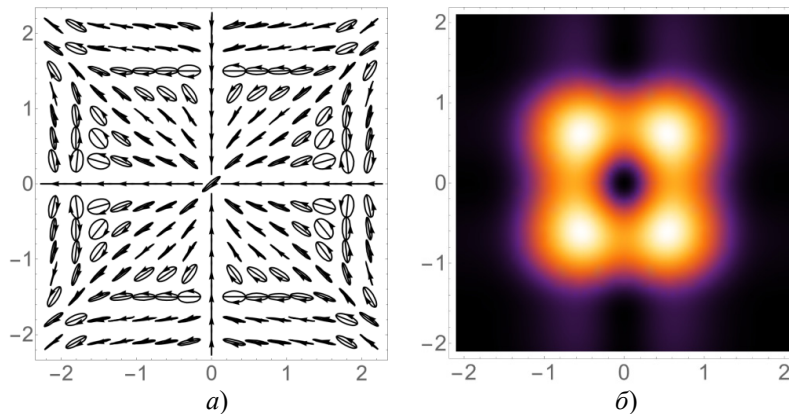


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации (а) и интенсивность (б) ТМ-ее моды декартового пучка Куммера. Свободные параметры: $Q_{20}'' = 0, 2$; $v_1' = -0, 9$; $v_2' = -0, 6$

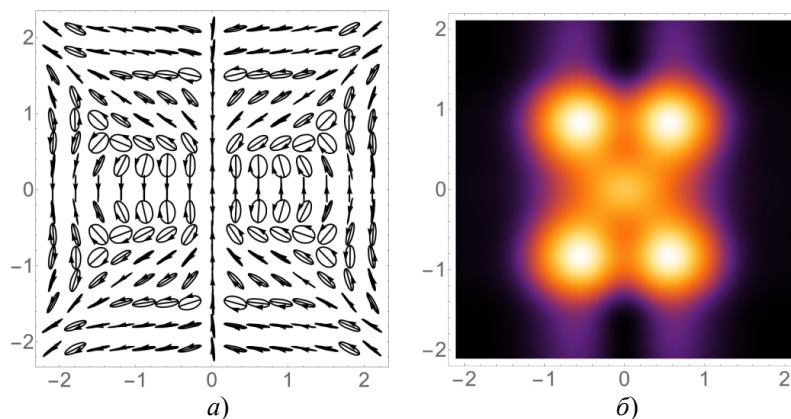


Рисунок 2.2 – Эллипсы поляризации (а) и интенсивность (б) TM-оо моды декартового пучка Куммера.
Свободные параметры: $Q_{20}'' = 0,2$; $v_1' = -0,9$; $v_2' = -0,6$

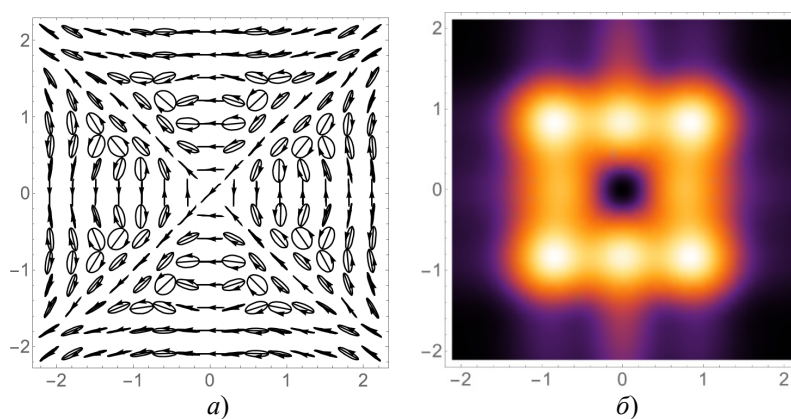


Рисунок 2.3 – Эллипсы поляризации (а) и интенсивность (б) TM-оо моды декартового пучка Куммера.
Свободные параметры: $Q_{20}'' = 0,2$; $v_1' = -0,9$; $v_2' = -0,6$

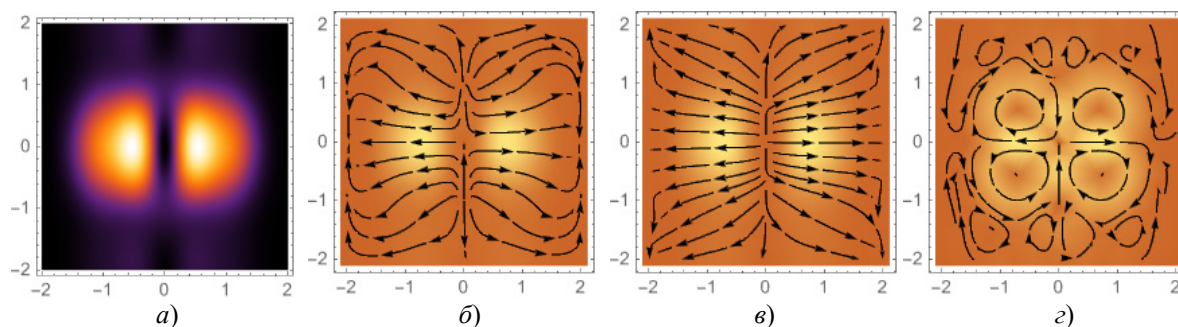


Рисунок 2.4 – Интенсивность (а), общий поперечный – (б), орбитальный – (в) и спиновый – (г) потоки энергии векторных пучков TM-оо моды декартового пучка Куммера.
Свободные параметры: $Q_{20}'' = 1,6$; $v_1' = -1,98$; $v_2' = -1,68$

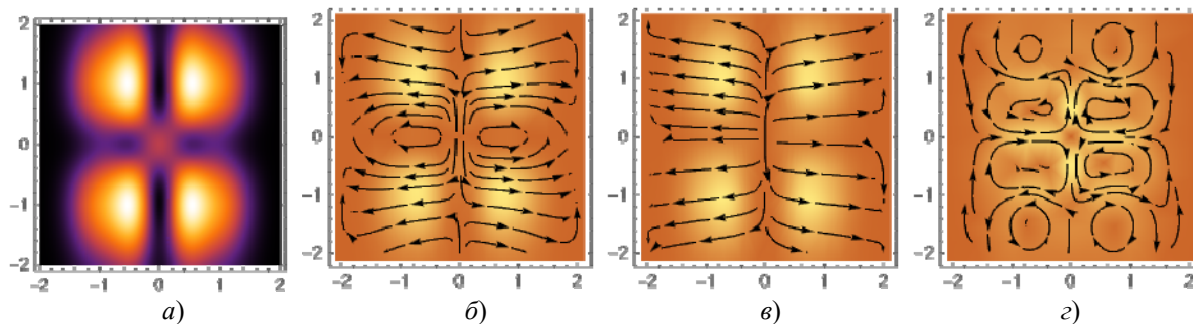


Рисунок 2.5 – Интенсивность (а), общий поперечный – (б), орбитальный – (в) и спиновый – (г) потоки энергии векторных пучков TM-оо моды декартового пучка Куммера.
Свободные параметры: $Q_{20}'' = 1,6$; $v_1' = -1,98$; $v_2' = -1,68$

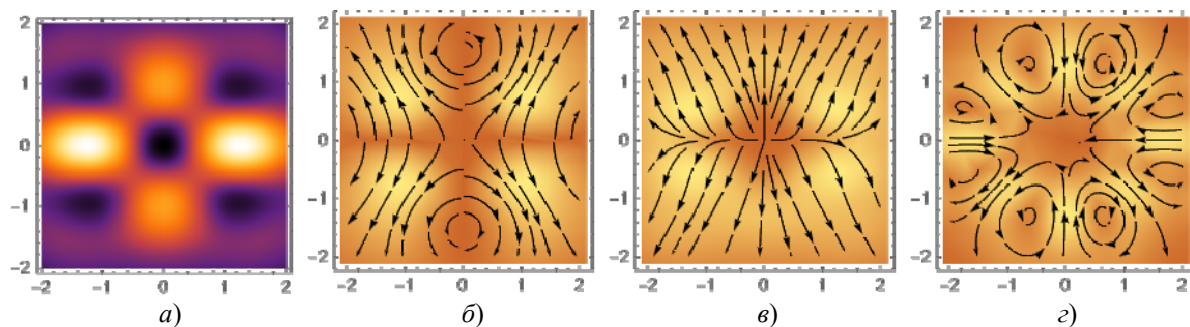


Рисунок 2.6 – Интенсивность (а), общий поперечный – (б), орбитальный – (в) и спиновый – (з) потоки энергии векторных пучков ТМ-ее моды декартового пучка Куммера.

Свободные параметры: $Q''_{20} = 1,6$; $v'_1 = -1,98$; $v'_2 = -1,68$

Графическое моделирование показало, что изменение отличных от нуля свободных параметров $v'_1, v'_2, Q''_{0Y}, Q''_{0X}$ сильно влияет на поляризационные и энергетические свойства ТМ мод Куммера. В то же время варьирование параметров $v''_1, v''_2, Q'_{10}, Q'_{20}$ слабо воздействует на физические свойства ТМ пучков Куммера.

На рисунках 2.4–2.6 изображены линии плотностей орбитального и спинового потоков энергии вместе с их интенсивностями. Видно, что линии орбитальных и спиновых потоков энергии ориентированы самыми разнообразными способами. Отсюда вытекает, что ориентации поперечных потоков декартовых ТМ пучков Куммера и ТМ пучков Куммера [9] и Бесселя – Гаусса [10] с циркулярной симметрией существенно различаются. Интересно, что линии спиновых потоков энергии ТМ пучков Куммера часто образуют замкнутые кривые. Это соответствует общим спиралевидным энергетическим потокам. Максимумы их интенсивностей не совпадают с максимумами общей интенсивности пучка.

Заключение

В данной работе представлены новые решения векторного параболического уравнения, описывающие параксиальные векторные декартовы 3D световые пучки Куммера с неоднородной поляризацией (ТМ-моды). Отмечено, что имеются четыре типа таких пучков, обозначаемые индексами *oo, oe, eo, ee*. Установлено, что условия физической реализуемости ТМ-мод Куммера всех типов одинаковы и сводятся к ограничениям на комплексные параметры Q_{10}, Q_{20}, v_1, v_2 , т. е.

$$\{Q''_{10} > 0, Q''_{20} > 0, v'_1 < -1/2, v'_2 < -1/2\}.$$

При этом части свободных параметров $Q'_{10}, Q'_{20}, v''_1, v''_2$ не влияют на выполнение условий КИ. Представлены явные выражения для векторов поля для интенсивности, орбитального, спинового и общего потоков энергии ТМ мод различных типов.

Проведенное графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии (орбитального S_o , спинового S_s и общего $S_{\perp} = S_o + S_s$) потоков подтвердило и проиллюстрировало аналитические расчеты.

Наличие нескольких свободных параметров позволяет в широких пределах изменять свойства рассматриваемых ТМ световых пучков Куммера. Это открывает новые перспективы их дальнейшего изучения и использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.
3. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
4. *Гиргель, С.С.* Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.
5. *Гиргель, С.С.* Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.
6. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
7. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.
8. *Fadeyeva, T.A.* Singular beams with transverse electric and transverse magnetic fields / T.A. Fadeyeva // Semiconductor Physics, Quantum

Electronics & Optoelectronics. – 2013. – Vol. 16, iss. 1. – P. 55–58.

9. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

10. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бessel-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.

11. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

12. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 31.08.2023.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор