*Проблемы физики, математики и техники*, № 1 (58), 2024 **ISSN 2077-8708**

**МАТЕМАТИКА**

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_63
EDN: NMFTFX

# КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НАСЛЕДСТВЕННО G-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ МАЛОГО ПОРЯДКА

**П.В. Бычков[1], С.Ф. Каморников[1], В.Н. Тютянов[2]**

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Международный университет «МИТСО», Гомель*

# FINITE GROUPS WITH HEREDITARILY G-PERMUTABLE SUBGROUPS OF SMALL ORDER

**P.V. Bychkov[1], S.F. Kamornikov[1], V.N. Tyutyanov[2]**

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel*

**Аннотация.** Исследуется строение конечной группы $G$, все подгруппы которой порядка 2 и 3, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно $G$-перестановочными в $G$.

**Ключевые слова:** *конечная группа*, *наследственно G-перестановочная подгруппа*, *разрешимая группа*.

**Для цитирования:** *Бычков*, *П.В.* Конечные группы с наследственно $G$-перестановочными подгруппами малого порядка / П.В. Бычков, С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_63. – EDN: NMFTFX

**Abstract.** The structure of a finite group $G$ is investigated, in which all subgroups of order 2 and 3 as well as all cyclic subgroups of order 4 are hereditarily $G$-permutable in $G$.

**Keywords:** *finite group*, *hereditarily G-permutable subgroup*, *soluble group*.

**For citation:** *Bychkov*, *P.V.* Finite groups with hereditarily $G$-permutable subgroups of small order / P.V. Bychkov, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 1 (58). – P. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_63 (in Russian). – EDN: NMFTFX

## Введение

Все группы, которые мы рассматриваем в данной работе, являются конечными.

Следующая концепция, развивающая понятие *квазиперестановочной подгруппы* (см. [1]), т. е. подгруппы, перестановочной со всеми подгруппами группы, предложена в работе [2].

***Определение* 1.** Пусть $A$, $B$ – подгруппы группы $G$. Тогда $A$ называется:

(1) *$G$-перестановочной* с $B$, если $AB^x = B^x A$ для некоторого $x \in G$;

(2) *наследственно $G$-перестановочной* с $B$, если $AB^x = B^x A$ для некоторого элемента $x \in \langle A, B \rangle$.

***Определение* 2.** Подгруппа $A$ группы $G$ называется (*наследственно*) *$G$-перестановочной* в $G$, если $A$ (наследственно) $G$-перестановочна со всеми подгруппами из $G$.

Наследственно $G$-перестановочные подгруппы в последнее время нашли ряд интересных приложений, связанных с изучением нормальной структуры конечной группы и получением критериев ее не простоты [3]–[8].

В частности, в [3], [4], отвечая на вопрос о существовании $G$-перестановочных и наследственно $G$-перестановочных подгрупп в неабелевых простых группах (см. вопрос 17.112 из «Коуровской тетради» [9]), А.А. Гальт и В.Н. Тютянов показали, что спорадические и исключительные группы лиева типа не содержат нетривиальных наследственно $G$-перестановочных подгрупп.

В [5] доказана разрешимость группы, у которой все минимальные подгруппы являются наследственно $G$-перестановочных (под *минимальной подгруппой* группы $G$ понимается любая ее подгруппа простого порядка).

В [6] доказано, что если $S$ – силовская 2-подгруппа группы $G$ и каждая максимальная подгруппа из $S$ является наследственно $G$-перестановочной в $G$, то $G$ разрешима.

В работах [7], [8] исследовано нормальное и формационное строение группы, у которой любая подгруппа Шмидта является наследственно $G$-перестановочной (*подгруппой Шмидта* называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой являются нильпотентными).

В данной работе развиваются результаты из [5]. Здесь исследуется строение группы, у которой все подгруппы порядка 2 и 3, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно *G*-перестановочными.

Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

***Теорема* А.** *Пусть G – группа, у которой все подгруппы порядка* 2 *и* 3, *а также все циклические подгруппы порядка* 4 *являются наследственно G-перестановочными. Тогда G –* $\{2,3\}$*-сверхразрешимая группа.*

Напомним, что для множества $\pi$ простых чисел группа *G* называется $\pi$*-сверхразрешимой*, если она обладает главным рядом, каждый фактор которого либо является $\pi'$-группой, либо имеет простой порядок *p* для некоторого $p \in \pi$.

Из теоремы А, в частности, следует, что если $G$ – $3'$-группа, у которой все подгруппы порядка 2, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно *G*-перестановочными, то *G* 2-сверхразрешима.

## 1 Определения и предварительные результаты

В данной работе мы используем определения и обозначения, которые приняты в книге [10].

Будем использовать следующие обозначения:

– если $p$ – простое число, то $Syl_p(G)$ – множество всех силовских *p*-подгрупп группы *G*;

– $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы *G*;

– $Z(G)$ – центр группы *G*;

– $Z_n$ – циклическая группа порядка *n*;

– если $A$ и $B$ – подгруппы группы *G*, то $A:B$ – их полупрямое произведение.

Доказательство следующего результата осуществляется простой проверкой.

***Лемма* 1.1.** *Пусть H и K – подгруппы группы G, причем K нормальна в G. Если подгруппа H является наследственно G-перестановочной в G, то подгруппа* $HK/K$ *является наследственно* $G/K$*-перестановочной в* $G/K$.

*Минимальная неразрешимая группа* – это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа *G* является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ – *минимальная простая группа*, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [11]. Этот список содержит следующие группы:

– $PSL_2(2^p)$, где *p* – простое число;

– $PSL_2(3^p)$, где *p* – простое число, большее 3;

– $PSL_2(p)$, где $p$ – простое число, большее 5, и $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$;

– $PSL_3(3)$;

– $Sz(2^p)$, $p$ – простое нечетное число.

Будем использовать следующий результат.

***Лемма* 1.2** [5, лемма 3]. *Пусть G – минимальная простая группа. Тогда G не содержит нетривиальных наследственно G-перестановочных подгрупп.*

***Предложение* 1.1.** *Пусть* $G$ – $3'$*-группа, у которой все подгруппы порядка* 2 *и все циклические подгруппы порядка* 4 *являются наследственно G-перестановочными. Тогда группа G разрешима.*

*Доказательство.* Пусть группа *G* – минимальный контрпример к предложению. Если собственная подгруппа группы *G* имеет нечетный порядок, то она разрешима по теореме Томпсона-Фейта; если же она имеет четный порядок, то она неразрешима, поскольку *G* является минимальным контрпримером к предложению. Следовательно, *G* – минимальная неразрешимая группа. Если *G* является простой неабелевой группой, то она будет минимальной простой группой и $G \cong Sz(2^p)$ для некоторого простого числа $p \geq 3$. Данный случай невозможен ввиду леммы 1.2.

Таким образом, *G* не является простой неабелевой группой. Легко показать, что $G/\Phi(G)$ – минимальная простая неабелева $3'$-группа. Таким образом, $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$ для некоторого простого числа $p \geq 3$. Согласно леммам 1.1 и 1.2, все элементы группы *G*, имеющие порядок 2 и 4, содержатся в подгруппе $\Phi(G)$.

Пусть $x \in \Phi(G)$ и $|x|=2$. Тогда ввиду условия предложения для некоторых силовских подгрупп $U \in Syl_t(G)$ и $S \in Syl_s(G)$, где $t \in \pi(q-\sqrt{2q}+1)$ и $s \in \pi(q+\sqrt{2q}+1)$, существуют подгруппы $<x>U$ и $<x>S$. Так как подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна, то подгруппа $R \in Syl_2(\Phi(G))$ нормальна в *G*. Отсюда следует, что

$$<x>S \cap R = <x>U \cap R = <x>.$$

Поэтому $<x>S = <x>:S = <x> \times S$ и $<x>U = <x>:U = <x> \times U$. Если $<S,U>$ – собственная подгруппа группы *G*, то $<S,U>$ является разрешимой группой. Тогда группа $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$ содержит собственную разрешимую подгруппу

$$<S\Phi(G)/\Phi(G), U\Phi(G)/\Phi(G)>,$$

где

$$U\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_t(G/\Phi(G))$$

и $S\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_s(G/\Phi(G))$. Последнее невозможно ввиду строения группы $Sz(2^p)$ (см., например, [12]).

Таким образом, $<S,U>=G$ и $x\in Z(G)$. Поскольку $<x>$ – произвольный элемент порядка 2, то все элементы группы *G*, имеющие порядок 2, содержатся в $Z(G)$.

Пусть $x\in \Phi(G)$ такой, что $|x|=4$. Так же как в случае $|x|=2$ показывается, что $<x>\lhd G=<S,U>$. Ввиду [13, лемма 5.4.1] $x\in Z(G)$. Так как *x* – произвольный элемент порядка 4, то все элементы группы *G*, имеющие порядок 4, содержатся в $Z(G)$.

Таким образом, все элементы порядка 2 и 4 группы *G* содержатся в $Z(G)$. Ввиду [14, теорема IV.5.5] группа *G* является 2-нильпотентной, что невозможно.

Предложение доказано.

При доказательстве теоремы А мы будем опираться на следующий результат из [15].

***Лемма* 1.3.** *Пусть p и q – простые числа, m и n – натуральные числа, причем* $p^m=q^n+1$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $q=2$, $p=3$, $n=3$ *и* $m=2$;

2) $q=2$, $m=1$, *n является степенью числа* 2, *а* $p^n+1$ *– простое число Ферма*;

3) $p=2$, $n=1$ *и* $q=p^m-1$ *– простое число Мерсенна, в частности, m является простым числом*.

Описание подгрупп группы $PSL_2(p)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [14, теорема II.8.27]). В дальнейшем мы будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

**2 Доказательство теоремы А**

Покажем сначала, что группа *G* является разрешимой. Предположим, что это не так и *G* – минимальный контрпример. Ввиду предложения 1.1 будем считать, что 3 делит порядок группы *G*. Ясно, что *G* – минимальная неразрешимая группа. Более того, ввиду леммы 1.2 мы можем считать, что *G* не является простой неабелевой группой. Следовательно, $\Phi(G)\neq 1$ и $G/\Phi(G)$ – минимальная простая группа. Согласно леммам 1.1 и 1.2, все элементы группы *G* порядков 2, 3 и 4 содержатся в подгруппе $\Phi(G)$. Рассмотрим все возможные случаи.

1. $G/\Phi(G)\cong PSL_2(2^p)$, где *p* – простое число.

Из теоремы Диксона следует, что в группе $PSL_2(2^p)=PSL_2(q)$ силовская 2-подгруппа *U* содержится в единственной максимальной подгруппе $B\cong q:(q-1)$. Кроме того, $PSL_2(q)$ содержит циклическую подгруппу $T\cong Z_{q+1}$. При этом числа $q$, $q-1$, $q+1$ являются попарно взаимно простыми. Ввиду леммы 1.3 равенство $2^p+1=3^m$ имеет место только в случае $p=3$ и $m=2$ для группы $PSL_2(2^3)$. В оставшихся случаях имеется простой делитель *s* числа $q+1$, отличный от 3. Пусть $S\in Syl_s(PSL_2(2^p))$. В силу изложенного имеем $<U,S>=PSL_2(2^p)$.

Пусть сначала $p\neq 3$. Рассмотрим элемент $x\in\Phi(G)$ такой, что $|x|=3$. Тогда ввиду условия теоремы для некоторых подгрупп $U\in Syl_2(G)$ и $S\in Syl_s(G)$, где $s\in\pi(2^p+1)\setminus\{3\}$, существуют подгруппы $<x>S$ и $<x>U$. Так как подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна, то подгруппа $R\in Syl_3(\Phi(G))$ нормальна в *G*. Отсюда следует, что

$$<x>S\cap R=<x>U\cap R=<x>.$$

Поэтому $<x>S=<x>:S$ и $<x>U=<x>:U$. Если $<S,U>$ – собственная подгруппа группы *G*, то $<S,U>$ является разрешимой группой. Тогда группа $G/\Phi(G)\cong PSL_2(2^p)$ содержит собственную разрешимую подгруппу

$$<S\Phi(G)/\Phi(G),U\Phi(G)/\Phi(G)>,$$

где $U\Phi(G)/\Phi(G)\in Syl_2(G/\Phi(G))$ и $S\Phi(G)/\Phi(G)\in Syl_s(G/\Phi(G))$. Последнее невозможно ввиду строения группы $PSL_2(2^p)$.

Таким образом, $<S,U>=G$ и подгруппа $<x>$ нормальна в *G*. Следовательно, для любого элемента $z\in G$ порядка 3 подгруппа $<z>$ нормальна в *G*. Ясно, что $<z>\subseteq Z(R)$. Поэтому $\Phi(G)\subseteq C_G(<z>)$. Так как подгруппа $C_G(<z>)$ является нормальной в *G*, то $C_G(<z>)=G$ и $z\in Z(G)$. Поскольку *z* – произвольный элемент порядка 3, то все элементы группы *G*, имеющие порядок 3, содержатся в $Z(G)$. Ввиду теоремы IV.3.5 из [14] группа *G* является 3-нильпотентной, что невозможно.

Пусть теперь $G/\Phi(G)\cong PSL_2(8)$. Отметим, что в группе $PSL_2(8)$ порядка $2^3\cdot 3^2\cdot 7$ силовская 7-подгруппа *S* и силовская 3-подгруппа *T* порождают $PSL_2(8)$.

Пусть $x\in\Phi(G)$ такой, что $|x|=2$. Тогда ввиду условия теоремы для некоторых подгрупп $U\in Syl_7(G)$ и $S\in Syl_3(G)$ существуют подгруппы $<x>S$ и $<x>U$. Так как подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна, то подгруппа $R\in Syl_2(\Phi(G))$ нормальна в *G*. Отсюда следует, что

$$<x>S\cap R=<x>U\cap R=<x>.$$

Поэтому $<x>S=<x>:S=<x>\times S$ и

$$<x>U=<x>:U=<x>\times U.$$

Так как $<S,U>=G$, то $x\in Z(G)$. Поскольку *x* – произвольный элемент порядка 2, то все элементы группы $G$, имеющие порядок 2, содержатся в $Z(G)$.

Пусть $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x| = 4$. Так же как в случае $|x| = 2$ показывается, что $< x > \lhd G = < S, U >$. Ввиду [13, лемма 5.4.1] $x \in Z(G)$. Так как $x$ – произвольный элемент порядка 4, то все элементы группы $G$, имеющие порядок 4, содержатся в $Z(G)$.

Таким образом, все элементы порядка 2 и 4 группы $G$ содержатся в $Z(G)$. Ввиду [14, теорема IV.5.5] группа $G$ является 2-нильпотентной, что невозможно.

2. $G / \Phi(G) \cong PSL_2(p)$, где $p$ – простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ или $G / \Phi(G) \cong PSL_2(3^p)$, где $p$ – простое число, большее 3.

Рассмотрим элемент $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x| = 3$. Тогда из строения группы $G / \Phi(G)$ следует, что $G = < U, S >$, где $U \in Syl_2(G)$ и $S \in Syl_s(G)$ для некоторого простого $s$, большего 3. Рассуждая далее по аналогии с описанным в пункте 1 случаем, получаем, что все элементы группы $G$, имеющие порядок 3, содержатся в $Z(G)$. Ввиду теоремы IV.3.5 из [14] группа $G$ является 3-нильпотентной, что невозможно.

3. $G / \Phi(G) \cong PSL_3(3)$.

Из [15] следует, что в группе $PSL_3(3)$ силовская 13-подгруппа $S$ и силовская 3-подгруппа $T$ порождают группу $PSL_3(3)$. Далее по аналогии с описанным в пункте 1 случаем $G / \Phi(G) \cong PSL_2(8)$ приходим к противоречию.

Итак, $G$ – разрешимая группа. Покажем теперь, что любая группа, удовлетворяющая условиям теоремы, является $\pi$-сверхразрешимой, где $\pi = \{2, 3\}$.

Предположим, что это не так. Тогда существует по крайней мере одна группа, которая не является $\pi$-сверхразрешимой, но все ее подгруппы порядка 2 и 3, а также все ее циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно $G$-перестановочными. Выберем среди них группу $G$, имеющую наименьший порядок. Пусть $M$ – ее произвольная максимальная подгруппа. Тогда из $|M| < |G|$ и выбора группы $G$ следует, что $M$ – $\pi$-сверхразрешимая группа. Так как группа $G$ не является $\pi$-сверхразрешимой, то $G$ – минимальная не **F**-группа, где **F** – формация всех $\pi$-сверхразрешимых групп.

Так как группа $G$ является разрешимой, то ввиду теоремы 24.2 из [16] она обладает следующими свойствами:

1) $G^{\mathbf{F}}$ является $p$-группой, где $p \in \{2, 3\}$;

2) $G^{\mathbf{F}} / \Phi(G^{\mathbf{F}})$ – нециклический главный фактор группы $G$;

3) $\Phi(G^{\mathbf{F}}) = G^{\mathbf{F}} \cap \Phi(G) \subseteq Z(G^{\mathbf{F}})$;

4) если группа $G^{\mathbf{F}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту $p$;

5) если группа $G^{\mathbf{F}}$ абелева, то она элементарна;

6) если $p = 3$, то $G^{\mathbf{F}}$ имеет экспоненту 3; если $p = 2$, то экспонента $G^{\mathbf{F}}$ не превышает 4.

Если $p = 3$, то из 6) следует, что в $G^{\mathbf{F}}$ найдется элемент $x$ порядка 3, который не лежит в $\Phi(G^{\mathbf{F}})$. Тогда ввиду утверждения 2) $< x > \Phi(G^{\mathbf{F}}) / \Phi(G^{\mathbf{F}})$ – собственная подгруппа группы $G^{\mathbf{F}} / \Phi(G^{\mathbf{F}})$, имеющая порядок 3. Пусть $M / \Phi(G^{\mathbf{F}})$ – максимальная подгруппа группы $G^{\mathbf{F}} / \Phi(G^{\mathbf{F}})$, не содержащая $G^{\mathbf{F}} / \Phi(G^{\mathbf{F}})$. Очевидно,

$$|G : M| = |G^{\mathbf{F}} / \Phi(G^{\mathbf{F}})| = 3^n,$$

при этом ввиду утверждения 2) $n > 1$. По лемме 1.1 $< x > \Phi(G^{\mathbf{F}}) / \Phi(G^{\mathbf{F}})$ – наследственно $G / \Phi(G^{\mathbf{F}})$-перестановочная подгруппа в $G / \Phi(G^{\mathbf{F}})$. Поэтому в $G$ найдется элемент $y$ такой, что $< x > M^y = M^y < x >$. Из максимальности $M$ в $G$ следует, что $< x > M^y = G$, а значит, $|G : M| = 3$. Противоречие.

Если $p = 2$, то из 4)–6) следует, что в $G^{\mathbf{F}}$ найдется по крайней мере один элемент $x$ порядка 2 или 4, который не лежит в $\Phi(G^{\mathbf{F}})$. Тогда ввиду утверждения 2) $< x > \Phi(G^{\mathbf{F}}) / \Phi(G^{\mathbf{F}})$ – собственная подгруппа группы $G^{\mathbf{F}} / \Phi(G^{\mathbf{F}})$, имеющая порядок 2. Рассуждая далее по аналогии со случаем $p = 3$, снова приходим к противоречию, которое и завершает доказательство теоремы. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ore*, *O.* Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.

2. *Го*, *В. X*-перестановочные подгруппы / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 742–759.

3. *Гальт*, *А.А.* О существовании $G$-перестановочных подгрупп в простых спорадических группах / А.А. Гальт, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 831–841.

4. *Гальт*, *А.А.* О существовании $G$-перестановочных подгрупп в исключительных группах

*G* лиева типа / А.А. Гальт, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 5. – С. 935–945.

5. *Каморников*, *С.Ф.* Конечные группы с наследственно *G*-перестановочными минимальными подгруппами / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 102–110.

6. *Каморников*, *С.Ф.* О разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 2. – С. 312–320.

7. *Finite groups with G-permutable Schmidt subgroups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Pérez-Calabuig, V.N. Tyutyanov // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 20. – Article 174. – P. 1–12.

8. *Finite groups with hereditarily G-permutable Schmidt subgroups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Pérez-Calabuig, V.N. Tyutyanov // Bull. Austral. Math. Soc. – 2023. – P. 1–7. – DOI: doi.org/10.1017/S0004972723000771.

9. *The Kourovka Notebook*: *Unsolved problems in group theory*. – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2022. – 269 p.

10. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

11. *Thompson*, *J.G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable / J.G. Thompson // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 74, № 3. – P. 383–437.

12. *Suzuki*, *M.* On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. – Vol. 75, № 1. – P. 105–145.

13. *Gorenstein*, *D.* Finite groups / D. Gorenstein. – New York: American Mathematical Society, 1980. – 519 p.

14. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 796 p.

15. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

16. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

*Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта* Ф23РНФ-237.

*Поступила в редакцию* 03.02.2024.

**Информация об авторах**

*Бычков Павел Владимирович* – к.ф.-м.н., доцент
*Каморников Сергей Федорович* – д.ф.-м.н., профессор
*Тютянов Валентин Николаевич* – д.ф.-м.н., профессор