МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_64
EDN: QTOYZY

σ-ПРОБЛЕМА КЕГЕЛЯ – ВИЛАНДТА ДЛЯ РАЗБИЕНИЯ σ = {{2},{3},{2,3}′}

С.Ф. Каморников[1], **В.Н. Тютянов**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Международный университет «МИТСО», Гомель*

THE KEGEL – WIELANDT σ-PROBLEM FOR THE PARTITION σ = {{2},{3},{2,3}′}

S.F. Kamornikov[1], **V.N. Tyutyanov**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel*

Аннотация. В работе решается σ-проблема Кегеля – Виландта для разбиения σ = {{2},{3},{2,3}′} множества всех простых чисел.

Ключевые слова: *конечная группа*, *холлова подгруппа*, *σ-субнормальная подгруппа*, *σ-проблема Кегеля – Виландта*.

Для цитирования: *Каморников*, *С.Ф.* σ-Проблема Кегеля – Виландта для разбиения σ = {{2},{3},{2,3}′} / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_64. – EDN: QTOYZY

Abstract. For the partition σ = {{2},{3},{2,3}′} of the set of all primes, the Kegel – Wielandt σ-problem is solved.

Keywords: *finite group*, *Hall subgroup*, *σ-subnormal subgroup*, *Kegel – Wielandt σ-problem*.

For citation: *Kamornikov*, *S.F.* The Kegel – Wielandt σ-problem for the partition σ = {{2},{3},{2,3}′} / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 4 (57). – P. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_64 (in Russian). – EDN: QTOYZY

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

Кегель в 1962 году в работе [1] предложил следующую концепцию *p*-субнормальной подгруппы: для данного простого числа *p* подгруппа *H* группы *G* называется *p-субнормальной* в *G* (при этом пишут $H \le_p G$), если $H \cap P \in Syl_p(H)$ для любой силовской *p*-подгруппы *P* группы *G*. В этой же работе он выдвинул следующую гипотезу: *подгруппа H конечной группы G является субнормальной в G тогда и только тогда*, *когда она p-субнормальна для любого простого числа p*.

Виландт в 1980 году (см. [2]), когда классификация конечных простых групп была практически завершена, включил эту гипотезу в список наиболее важных проблем, требующих решения после завершения классификации. Поэтому с тех пор эту гипотезу называют проблемой Кегеля – Виландта.

Полное решение гипотезы Кегеля – Виландта, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в 1991 году [3].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \ne j$. Пусть *G* – *σ-полная* группа, т. е. *G* обладает по крайней мере одной холловой σ_i-подгруппой для любого $i \in I$. Для $i \in I$ мы пишем $H \le_{\sigma_i} G$, если *H* – такая подгруппа группы *G*, что $H \cap S_i \in Hall_{\sigma_i}(H)$ для любой холловой σ_i-подгруппы S_i группы *G*.

В [4] (см. вопрос 19.86) А.Н. Скиба сформулировал следующий аналог гипотезы Кегеля – Виландта для σ-субнормальных подгрупп.

σ-Проблема Кегеля – Виландта: *Верно ли*, *что подгруппа H σ-полной группы G является σ-субнормальной в G*, *если* $H \le_{\sigma_i} G$ *для любого* $i \in I$.

Концепция σ-субнормальности, развивающая идею субнормальной подгруппы, предложена А.Н. Скибой в [5]. Эта концепция базируется на следующем определении.

Для заданного разбиения σ множества всех простых чисел подгруппа *H* группы *G* называется *σ-субнормальной* в *G*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ_j-группой для некоторого $j \in I$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{5\},...\}$. Поэтому для минимального разбиения σ-проблема Кегеля – Виландта превращается в проблему Кегеля – Виландта.

В настоящее время σ-проблема Кегеля – Виландта решена для минимального разбиения (см. [3]), а также для произвольного бинарного разбиения (см. [6]; разбиение σ называется *бинарным*, если $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ для некоторого множества π простых чисел). Кроме того, из работы [7] следует, что σ-проблема Кегеля – Виландта имеет положительное решение для разбиения $\sigma = \{\{2,3\},\{5\},\{7\},...\}$.

В данной работе σ-проблема Кегеля – Виландта решается для разбиения $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$. Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

***Теорема* A.** *Пусть* $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$. *Подгруппа H группы* $G \in E_{\{2,3\}'}$ *является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*: (1) $H \leq_2 G$; (2) $H \leq_3 G$; (3) $H \leq_{\{2,3\}'} G$.

Доказательство теоремы А опирается на следующую теорему В, имеющую самостоятельное значение.

***Теорема* B.** *Пусть G – простая неабелева группа и M – ее холлова подгруппа. Если* $|G:M| = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, *где* $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 1$, *то имеет место одно из следующих утверждений*:

(1) $G \cong A_5 \cong SL_2(4) \cong PSL_2(5)$, $M \cong Z_5$;

(2) $G \cong A_6 \cong PSL_2(9)$, $M \cong Z_5$;

(3) $G \cong PSL_2(7) \cong SL_3(2)$, $M \cong Z_7$;

(4) $G \cong SL_2(8)$, $M \cong Z_7$;

(5) $G \cong PSL_2(17)$, $M \cong Z_{17}$;

(6) $G \cong SL_3(3)$, $M \cong Z_{13}$;

(7) $G \cong SU_3(3)$, $M \cong Z_7$;

(8) $G \cong PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$, $M \cong Z_5$;

(9) $G \cong M_{11}$, $M \cong Z_{11} : Z_5$;

(10) $G \cong M_{12}$, $M \cong Z_{11} : Z_5$;

(11) $G \cong PSL_2(q)$, $q = p^n$, $p \geq 5$, *M содержится в подгруппе Бореля группы* $PSL_2(q)$.

Ключом к доказательству теоремы В является теорема 1.1 из [8], описывающая простые группы, которые содержат подгруппу, индекс которой имеет в точности два различные простые делители.

1 Определения и предварительные результаты

В работе используются определения и обозначения, принятые в [9]. Что касается терминологии теории σ-субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к работе [5].

Будем использовать следующие обозначения:

– если p – простое число, то G_p – силовская p-подгруппа группы G и $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G;

– если π – некоторое множество простых чисел, то $Hall_\pi(G)$ – множество всех холловых π-подгрупп группы G;

– E_π – множество всех групп, обладающих холловыми π-подгруппами;

– если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и n – натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;

– $\sigma(G) = \sigma(|G|)$;

– Z_n – циклическая группа порядка n;

– если A и B – подгруппы группы G, то $A : B$ – их полупрямое произведение.

Мы будем использовать следующий результат.

***Лемма* 1.1** [10, теорема 3.1]. *Пусть G – группа Шевалле нормального или скрученного типа, определенная над полем характеристики p. Пусть A – собственная холлова* π*-подгруппа группы G, причем* π *содержит p, но не содержит* 3. *Тогда либо* $p = 2$, *либо* $2 \notin \pi$ *и A содержится в подгруппе Бореля группы G.*

Нам понадобятся также следующие теоретико-числовые результаты из [11].

***Лемма* 1.2**. *Пусть p и q – простые числа такие, что* $p^m = q^n + 1$ *для некоторых натуральных m и n. Тогда имеет место одно из следующих утверждений*:

(1) $q = 2$, $p = 3$, $n = 3$ *и* $m = 2$;

(2) $q = 2$, $m = 1$, n – *степень числа* 2 *и* $p = q^n + 1$ – *простое число Ферма*;

(3) $p = 2$, $n = 1$ *и* $q = p^m - 1$ – *простое число Мерсенна*, *в частности*, *m – простое число.*

Для натуральных чисел n и b простое число d, делящее $b^n - 1$, называется *примитивным простым делителем числа* $b^n - 1$ (или, иначе, примитивным по отношению к паре $\{n, b\}$), если d делит $b^n - 1$, но d не делит $b^i - 1$ для всех $1 \leq i < n$.

***Лемма* 1.3**. *Для натуральных чисел n и b справедливы следующие утверждения*:

(1) *Существует примитивный простой делитель числа* $b^n - 1$, *кроме случаев* $(b, n) = (2, 6)$ *или b – простое число Мерсенна и* $n = 2$.

(2) *Каждый примитивный простой делитель p числа* $b^n - 1$ *не меньше* $n + 1$. *Кроме того*, *если* $p = n + 1$, *то* p^2 *делит* $b^n - 1$, *за исключением следующих случаев*:

(*i*) $n = 2$ *и* $b \in \{2^s - 1, 3 \cdot 2^s - 1\}$;

(ii) $b = 2$ *и* $n \in \{4, 6, 10, 12, 18\}$;

(iii) $b = 3$ *и* $n \in \{4, 6\}$;

(iv) $b = 5$ *и* $n = 6$.

(3) *Если для натурального числа s примитивный делитель числа* $b^s - 1$ *делит* $b^n - 1$, *то s делит n.*

Для классических простых групп лиева типа мы будем использовать далее обозначения книги [12].

Будем говорить, что σ-полная группа *G* является *контрпримером к теореме* А, если она обладает подгруппой *H* такой, что для некоторого полного холлова множества Σ типа σ и любого элемента $g \in G$ система Σ^g редуцируется в подгруппу *H*, но *H* не является σ-субнормальной в *G*. Если, кроме того, сумма $|G| + |H|$ минимальна, то пару (G, H) будем называть *минимальным контрпримером к теореме* А.

Для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ система $\Sigma = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ холловых σ_i-подгрупп $(i = 1, 2, ..., k)$ группы *G* называется *полным холловым множеством типа* σ группы *G*, если выполняются следующие два условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, ..., k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup ... \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы *G*, то, очевидно, система $\Sigma^g = \{S_1^g, S_2^g, ..., S_k^g\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы *G* для любого элемента $g \in G$.

Следующая лемма устанавливает строение минимального контрпримера к теореме А и сводит ее доказательство к анализу строения холловых подгрупп простых неабелевых групп.

***Лемма* 1.4** [13, лемма 2.4]. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *– разбиение множества всех простых чисел. Если* (G, H) *– минимальный контрпример к теореме А, то G и H – простые неабелевы группы.*

***Лемма* 1.5**. *Пусть G – простая неабелева группа и H – такая ее подгруппа, что* $|H|$ *делится на p и* $H \leq_p G$ *для некоторого простого числа* $p \geq 5$. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $H = G$;

2) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, где $n = s \cdot p^a > p$ и $1 \leq s < p$;

3) $G \cong U_3(5)$, $H \cong A_7$ *и* $p = 5$;

4) $G \cong HS$ *– группа Хигмэна – Симса*, $H \cong M_{22}$ *и* $p = 5$.

Доказательство леммы вытекает из теоремы 1.4 работы [7].

***Лемма* 1.6**. *Пусть H – подгруппа группы G и* $S \in Hall_\pi(G)$ *для некоторого множества* π *простых чисел. Если* $S_p \lhd S$ *для некоторого* $p \in \pi$ *и* $S^g \cap H \in Hall_\pi(H)$ *для любого* $g \in G$, *то* $H \leq_p G$.

Доказательство. Пусть $P \in Syl_p(G)$. По теореме Силова справедливо равенство $P = S_p^x$ для некоторого $x \in G$. Из условия леммы следует, что $S^x \cap H$ – холлова π-подгруппа из *H*. Пусть $P_1 \in Syl_p(S^x \cap H)$. Очевидно, P_1 – силовская *p*-подгруппа из *H*. Отсюда и из того, что $P = S_p^x$ – единственная силовская *p*-подгруппа в S^x, по теореме Силова имеем равенство $P \cap H = P_1$, т. е. $P \cap H$ – силовская *p*-подгруппа в *H*. Таким образом, $H \leq_p G$. □

2 Доказательство теоремы B

Отметим, что если $|\pi(G)| = 3$, то в группе *G* любая силовская *r*-подгруппа *M*, где $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3\}$, удовлетворяет условию теоремы. Список данных групп приведен, например, в [14, с. 20]:

$$G \in \{A_5 \cong SL_2(4) \cong PSL_2(5)\ (M \cong Z_5);$$
$$A_6 \cong PSL_2(9)\ (M \cong Z_5);$$
$$PSL_2(7) \cong SL_3(2)\ (M \cong Z_7);\ SL_2(8)\ (M \cong Z_7);$$
$$PSL_2(17)\ (M \cong Z_{17});$$
$$SL_3(3)\ (M \cong Z_{13});\ SU_3(3)\ (M \cong Z_7);$$
$$PSU_4(2) \cong PSp_4(3)\ (M \cong Z_5)\}.$$

Поэтому далее будем считать, что $|\pi(G)| \geq 4$ и $|\pi(M)| \geq 2$.

Рассмотрим возможные случаи.

1) *G – спорадическая группа*. Тогда из [15, таблица 3] следует, что $G \cong M_{11}$ и $M \cong Z_{11} : Z_5$ или $G \cong M_{12}$ и $M \cong Z_{11} : Z_5$.

2) $G \cong A_n$, $n \geq 7$. Тогда из [15, таблица 2] следует, что группа *G* не содержит холловых подгрупп *M* таких, что $|G : M| = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, где $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 1$.

3) *G – группа лиева типа над полем характеристики p*. Сведения о существовании холловых подгрупп индекса $2^\alpha \cdot 3^\beta$ извлекаются, в основном, из работы [8].

(3.1) $G \cong PSL_n(p^f)$ *для некоторого простого числа p*.

Отметим, что подгруппа *M* является разрешимой. Поэтому из [8, таблица 4.1] следует, что или $G \cong SL_3(3)$, или $G \cong SL_3(2) \cong PSL_2(7)$, или $n = 2$. Однако в первых двух случаях $|\pi(G)| = 3$, поэтому $n = 2$. Пусть сначала $p \in \pi(M)$. Ясно, что $p \geq 5$. Тогда *M* содержится в подгруппе Бореля *B* (см. лемму 1.1) и $|G : B| = q + 1$. Следовательно, $|G : M|$ делится на $q + 1$. Отметим, что список таких простых групп не пуст и *M* может как совпадать с подгруппой Бореля, так и быть ее собственной подгруппой. Например, для $G \cong PSL_2(11)$ подгруппа $M \cong Z_{11} : Z_5$ – подгруппа Бореля, а для $G \cong PSL_2(31)$ подгруппа M изоморфна группе $Z_{31} : Z_5$, в то время как $B \cong Z_{31} : Z_{15}$.

Пусть $p \notin \pi(M)$. В этом случае $p \in \{2,3\}$. Пусть сначала $p = 2$. Из [8, таблица 4.1] следует, что возможны следующие случаи.

$$G \cong SL_2(2^{2^i}),\ M \cong Z_{2^{2^i}-1} \text{ и } |G:M| = 2^{2^i}(2^{2^i}+1),$$

где $2^{2^i}+1 = r$ – простое число Ферма. Ясно, что $2^{2^i}+1 = 3$. Тогда $i = 0$ и $G \cong SL_2(2)$ – разрешимая группа, что невозможно.

$$G \cong PSL_2(2^f),\ M \cong Z_{2^f+1} \text{ и } |G:M| = 2^f(2^f-1),$$

где $2^f - 1 = r$ – простое число Мерсенна. Очевидно, что $2^f - 1 = 3$ и $G \cong SL_2(4)$. Однако $|\pi(SL_2(4))| = 3$. Снова пришли к противоречию.

Рассмотрим также случай $M \cong Z_{2^f-1}$. Тогда $|G:M| = 2^f(2^f+1)$. Если $2^f+1 = r$ – простое число Ферма, то $2^f+1 = 3$ и $G \cong SL_2(2)$, что невозможно. Однако по лемме 1.2 также выполняется равенство $2^f+1 = 3^2$ и $G \cong SL_2(8)$. Отсюда $|\pi(SL_2(8))| = 3$, что противоречит предположению $|\pi(G)| \geq 4$.

Если $p = 3$, то $G \cong PSL_2(3^{2^i})$, $M \cong Z_{3^{2^i}-1}$ и $|G:M| = 3^{2^i}(3^{2^i}+1)/2$. Так как $|M|$ – нечетное число, то этот случай невозможен.

Рассмотрим также следующий случай. Пусть M – тор порядка $(3^{2^i}-1)/2$. Тогда $|G:M| = 3^{2^i}(3^{2^i}+1)$ и, очевидно, $3^{2^i}+1 = 2$. В этом случае $G \cong SL_2(3)$ – разрешимая группа, что невозможно. Пусть M – тор порядка $(3^{2^i}+1)/2$. Тогда $|G:M| = 3^{2^i}(3^{2^i}-1)$. По лемме 1.2 имеем, что $i = 1$ и $G \cong PSL_2(9)$. Однако $|\pi(SL_2(9))| = 3$.

(3.2) $G \cong PSp_{2m}(q)$, $2m \geq 4$, $q = p^f$, *где p – простое число*.

Список групп $PSp_{2m}(q)$, имеющих подгруппу индекса $2^\alpha \cdot 3^\beta$ можно извлечь из [8, таблица 4.2]. Случай $G \cong PSp_4(3)$ был рассмотрен. Разберем оставшиеся случаи.

$G \cong PSp_4(q)$ или $G \cong PSp_{2m}(2^f)$. Из [8, таблица 4.2] следует, что в обоих случаях подгруппа *M* не является холловой в *G*.

$G \cong PSp_4(p)$, $M \cong P_1$ – параболическая подгруппа индекса $(p+1)(p^2+1)$, где $p = 2^r - 1$ или $p = 2^{2^i} - 1$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{(2, p-1)} \cdot p^4(p^2-1)(p^4-1).$$

По лемме 1.3 существует простое число *t*, примитивное по отношению к паре $\{p,4\}$. Ясно, что *t* делит p^2+1. По лемме 1.3 число $t \geq 5$. Последнее невозможно. Случай, когда

$$M \cong Z_{p^4} : Z_{\frac{1}{a(2,p-1)}(q-1)^2}$$

и имеет индекс $a(p+1)^2(p^2+1)$, где $a \in \{1,2\}$, рассматривается точно так же, как предыдущий.

(3.3) $G \cong PSU_n(q)$, $n \geq 3$, $q = p^f$, *где p – простое число*.

Список групп $PSU_n(q)$, имеющих подгруппу индекса $2^\alpha \cdot 3^\beta$ можно извлечь из [8, таблица 4.3]. Рассмотрим все случаи.

$G \cong PSU_3(p)$. В этом случае $|G:M|$ делится на p^3+1. Отметим, что группа $G \cong PSU_3(2)$ является разрешимой. Поэтому $p \geq 3$. По лемме 1.3 существует простое число *r*, примитивное по отношению к паре $\{p,6\}$. Имеем

$$p^6 - 1 = (p^3-1)(p^3+1),$$

поэтому *r* делит p^3+1. Из леммы 1.3 заключаем, что $r \geq 7$. Последнее невозможно.

$G \cong PSU_4(p)$. Из [8, таблица 4.3] следует, что $|G:M|$ делится на p^3+1 и данный случай рассматривается как предыдущий.

$G \cong PSU_n(q)$, $M \cong SU_{n-1}(q)$,

$$|G:M| = q^{n-1} \cdot \frac{q^n+1}{q+1},$$

где *n* – нечетное простое число. В этом случае *q* делит $|M|$ и $|G:M|$, что невозможно.

(3.4) $G \cong \Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 3$, $q = p^f$, *где p – нечетное простое число*.

Из [8, таблица 4.4] следует, что во всех случаях $(|M|,|G:M|) \neq 1$. Последнее невозможно.

(3.5) $G \cong \Omega^{\pm}_{2m}(q)$, $m \geq 4$, $q = p^f$, где p – простое число.

Из [8, таблица 4.5] следует, что для групп $G \cong \Omega^+_{10}(2)$, $G \cong \Omega^-_8(2)$, $G \cong \Omega^+_{2(2^i+1)}(2)$, $G \cong \Omega^-_{2^{i+1}}(2)$ подгруппа M имеет в G нечетный индекс, что невозможно. В оставшихся случаях $(|M|,|G:M|) \neq 1$, что также невозможно.

(3.6) *G – исключительная группа лиева типа*.

Из [8, таблица 5.1] следует, что группа *G* не имеет холловых подгрупп индекса $2^\alpha \cdot 3^\beta$. □

2 Доказательство теоремы А

Если подгруппа *H* является σ-субнормальной в *G*, то ввиду [5, лемма 2.6] $H \leq_2 G$, $H \leq_3 G$, $H \leq_{\{2,3\}'} G$.

Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть (G, H) – минимальный контрпример к теореме A. Тогда ввиду леммы 1.4 G и H – простые неабелевы группы. Так как группы из списка

$$\{A_5, PSL_2(7),\ SL_2(8), PSL_2(17), SL_3(3)\}$$

являются минимальными неразрешимыми группами, то ввиду теоремы B

$$G \in \{A_6, SU_3(3),\ PSU_4(2), M_{11}, M_{12}, PSL_2(q)\}.$$

Кроме того, для группы $PSL_2(q)$ выполняются условия: $q = p^n$, $p \geq 5$ и M содержится в подгруппе Бореля группы $PSL_2(q)$.

В силу [16] случай $G \in \{A_6, M_{11}, M_{12}\}$ невозможен.

Таким образом, $G \cong PSL_2(q)$, где $q = p^n$, $p \geq 5$ и M содержится в подгруппе Бореля группы $PSL_2(q)$.

Пусть $\sigma(G) = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$, где $\sigma_1 = \{2\}$, $\sigma_2 = \{3\}$, $\sigma_3 = \{2,3\}' \cap \pi(G)$.

Рассмотрим отдельно случаи $p = 5$ и $p \geq 7$.

1. Пусть $p = 5$. В этом случае $H \cong PSL_2(5^m)$, где m делит n. Кроме того, $5 \in \sigma_3$. Так как холлова σ_3-подгруппа S группы G является 5-замкнутой, то по лемме 1.6 подгруппа H 5-субнормальна в G. Отсюда ввиду леммы 1.5 справедливо равенство $H = G$, что невозможно.

2. Пусть $p \geq 7$. В этом случае $H \cong PSL_2(p^m)$, где m делит n. Кроме того, подгруппа H может быть изоморфна A_5. Если $H \cong PSL_2(p^m)$, то, как и в пункте 1.

Предположим, что $H \cong A_5$. Так как силовская 3-подгруппа P группы G является циклической, то по теореме 1 из [17] она является *TI*-подгруппой группы G. Число подгрупп, сопряженных с P в группе G, равно $q(q-1)$, а число силовских 3-подгрупп в A_5 равно 10. Так как $q(q-1) > 10$, то найдется силовская 3-подгруппа группы G, имеющая единичное пересечение с H. Пришли к противоречию с условием $H \leq_3 G$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel*, *O.H.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
2. *Wielandt*, *H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute / H. Wielandt // Proc. Pure Math. – 1980. – Vol. 37. – P. 161–173.
3. *Kleidman*, *P.B.* A proof of the Kegel – Wielandt conjecture on subnormal subgroups / P.B. Kleidman // Ann. Math. – 1991. – Vol. 133. – P. 369–428.
4. The Kourovka Notebook: Unsolved problems in group theory. – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2022. – 269 p.
5. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
6. *Ballester-Bolinches*, *A.* On the Kegel – Wielandt σ-problem for binary partitions / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2022. – Vol. 201. – P. 443–451.
7. *Guralnick*, *R.* Sylow *p*-subgroups and subnormal subgroups of finite groups / R. Guralnick, P.B. Kleidman, R. Lyons // Proc. London Math. Soc. – 1993. – Vol. 66, № 1. – P. 129–151.
8. *Li*, *C.H.* On permutation groups of degree a product of two prime-powers / C.Y. Li, X. Li // Communications in Algebra. – 2014. – Vol. 42. – P. 4722–4743.
9. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
10. *Gross*, *F.* Hall subgroups of order not divisible by 3 / F. Gross // Rocky mountain journal of mathematics. – 1993. – Vol. 23, № 2. – P. 569–591.
11. *Zsigmondy*, *K.* Zur Theorie der Potenzreste / K. Zsigmondy // Monath. Math. Phis. – 1892. – Vol. 3. – P. 265–284.
12. *Kleidman*, *P.* The subgroup structure of the finite classical groups / P. Kleidman, M. Liebeck. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 303 p.
13. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Siberian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 61, № 2. – P. 266–270.
14. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – Москва: Мир, 1985. – 352 с.
15. *Вдовин*, *Е.П.* Теоремы силовского типа / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // УМН. – 2011. – Т. 66, № 5. – С. 3–46.
16. *Kamornikov*, *S.F.* On some aspects of the Kegel-Wielandt σ-problem / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Russian Mathematics. – 2022. – Vol. 66, № 2. – P. 15–24.
17. *Blau*, *H.I.* On trivial intersection of cyclic Sylow subgroups / H.I. Blau // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 94. – P. 572–576.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

Поступила в редакцию 15.08.2023.

Информация об авторах

Каморников Сергей Фёдорович – д.ф.-м.н., профессор
Тютянов Валентин Николаевич – д.ф.-м.н., профессор