

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ И ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ОБОБЩЕННЫХ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ТМ МОД ЭРМИТА – ГАУССА

С.С. Гиргель

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## POLARIZATION AND ENERGY FLUXES OF GENERALIZED ASTIGMATIC TM HERMITE – GAUSSIAN MODES

S.S. Girgel

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Предложены новые векторные решения параболического уравнения, описывающие векторные астигматические ТМ световые пучки Эрмита – Гаусса. Исследуются поляризационные и энергетические свойства таких пучков. Проведено графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных астигматических ТМ световых пучков Эрмита – Гаусса.

**Ключевые слова:** ТМ-моды, астигматические пучки, пучки Эрмита – Гаусса, поперечные потоки энергии.

**Для цитирования:** Гиргель, С.С. Поляризация и потоки энергии обобщенных астигматических ТМ мод Эрмита – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 14–19. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_4\\_57\\_14](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_14). – EDN: ADFHDR

**Abstract.** New vector solutions of the parabolic equation describing vector astigmatic TM Hermite – Gaussian light beams are proposed. The polarization and energy properties of such beams are investigated. The graphical modeling of the ellipses of polarization, the intensity and transverse energy fluxes of vector astigmatic TM Hermite – Gaussian light beams is carried out.

**Keywords:** TM-modes, astigmatic beams, Hermite – Gaussian beams, transverse energy fluxes.

**For citation:** Girgel, S.S. Polarization and energy fluxes of generalized astigmatic TM Hermite – Gaussian modes / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 4 (57). – P. 14–19. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_4\\_57\\_14](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_14) (in Russian). – EDN: ADFHDR

### Введение

Световые пучки занимают важную часть общей оптики. Чаще всего обсуждаются скалярные световые пучки, например, [1]–[5]. Векторные пучки рассматриваются реже [6]–[16]. Обычно рассматриваются векторные световые пучки однородной поляризации по сечению пучка. Векторные пучки с неоднородной поляризацией, например ТЕ или ТМ-моды рассматриваются значительно реже [8]–[16]. В наших работах обсуждались циркулярные ТМ пучки Куммера [15], ТМ пучки Бесселя – Гаусса [15]. Все эти пучки характеризуются цилиндрической симметрией. Перейдем к обсуждению неоднородно поляризованных векторных световых пучков с декартовой симметрией. В [8] исследовались ТЕ и ТМ гауссовы моды. После астигматического гауссова пучка [1], [8], самым распространенным является пучок Эрмита – Гаусса. Как ни удивительно, в большинстве случаев рассматриваются только скалярные [1], [2], или векторные пучки Эрмита – Гаусса с однородной поляризацией [7]. В статье [14] обсуждаются ТЕ- и ТМ-моды только для инвариантных световых полей (Бесселя, Матье и Вебера). В работе [12] рассматриваются ТЕ- и

ТМ-моды для параксиальных векторных полей. Однако эти поля являются следствием решений уравнения Гельмгольца, поэтому там нет, например, пучков Эрмита – Гаусса и Лагерра – Гаусса. В работе Фадеевой [13] обсуждаются поляризационные свойства только стандартных ТЕ и ТМ пучков Эрмита – Гаусса при  $Z=0$ . Однако существуют [1] также ещё элегантные и обобщенные пучки Эрмита – Гаусса. Кроме того, в работе [13] не рассматривались энергетические характеристики таких пучков.

В настоящей работе мы будем изучать обобщенные векторные пучки Эрмита – Гаусса с неоднородной поляризацией, их векторные поляризационные и энергетические свойства. Сначала в разделе 1 обсуждаются поляризационные и энергетические характеристики векторных пучков Эрмита – Гаусса с однородной поляризацией. Затем, в разделе 2, обсуждаются поляризационные и энергетические характеристики векторных ТМ пучков Эрмита – Гаусса. Проведено графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии. Выполнен анализ полученных результатов, который подтвердил и проиллюстрировал аналитические расчеты.

**1 Векторные астигматические пучки Эрмита – Гаусса с неоднородной поляризацией**

Скалярную амплитуду обобщенных 3D астигматических эрмито-гауссовых световых пучков можно записать в виде произведения двух независимых 2D пучков  $f = f_x f_y$ , где

$$f_x = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_x(0) P_x(Z)}{Q_x(Z) P_x(0)} \right)^{\frac{n}{2}} H_n(a_1 X) G_x,$$

$$f_y = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_y(0) P_y(Z)}{Q_y(Z) P_y(0)} \right)^{\frac{m}{2}} H_m(a_2 Y) G_y. \quad (1.1)$$

В амплитуде  $f$  2D гауссианы

$$G_x = \sqrt{\frac{Q_x(0)}{Q_x(Z)}} \exp\left(\frac{iX^2}{Q_x(Z)}\right)$$

и

$$G_y = \sqrt{\frac{Q_y(0)}{Q_y(Z)}} \exp\left(\frac{iY^2}{Q_y(Z)}\right)$$

образуют общий 3D гауссиан  $G = G_x G_y$  с простым астигматизмом. Все переменные и параметры здесь и далее записаны в безразмерной форме.  $H_m$  и  $H_n$  – полиномы Эрмита с индексами  $m$  и  $n$  соответственно. Безразмерные переменные  $X = x/x_0$ ,  $Y = y/y_0$ ,  $Z = z/z_0$ , где  $x_0 > 0$ ,  $z_0 = kx_0^2/2$  – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно.  $K = kx_0$  – безразмерное волновое число, согласующие множители

$$a_{1,2} = \sqrt{i \left( \frac{1}{P_{x,y}} - \frac{1}{Q_{x,y}} \right)}, \quad (1.2)$$

$i = \sqrt{-1}$ . Выше введены четыре параметра пучка  $Q_{x,y}(Z) = Z - Q_{0x,0y}$  и  $P_{x,y}(Z) = Z - P_{0x,0y}$ , причем свободные параметры  $Q_{0x,0y}$  и  $P_{0x,0y}$  являются комплексными:  $Q_{0x,0y} = Q'_{0x,0y} + iQ''_{0x,0y}$ ;  $P_{0x,0y} = P'_{0x,0y} + iP''_{0x,0y}$ . Таким образом, скалярный обобщенный пучок Эрмита – Гаусса с простым астигматизмом в общем случае зависит от безразмерных переменных  $X, Y, Z$ , от двух целочисленных индексов  $m$  и  $n$ , волнового числа  $K$ , четырех комплексных свободных параметров  $Q_{0x}, P_{0x}, Q_{0y}, P_{0y}$ .

В зависимости от соотношений между свободными параметрами  $Q_{0x,0y}$  и  $P_{0x,0y}$  возможны различные типы пучков. Например, для 2D мод в плоскости  $(X, Z)$  в общем случае имеем обобщенные (general) 2D пучки, характеризующиеся амплитудами  $f_{xg}$ , которые при  $P_x = Q_x^*$  редуцируются к 2D стандартным (standard) пучкам Эрмита – Гаусса с амплитудами  $f_{xs}$ , а при  $P_{0x} \rightarrow \infty$  – сводятся к элегантным (elegant) модам с амплитудами  $f_{xe}$ . Аналогично, в плоскости

$(Y, Z)$  возможны обобщенные, стандартные и элегантные моды  $f_{yg}, f_{ys}, f_{ye}$  соответственно. В итоге имеем 6 типов скалярных 3D пучков Эрмита – Гаусса:

$$f_{gg} = f_{xg} f_{yg}, \quad f_{sg} = f_{xs} f_{yg}, \quad f_{eg} = f_{xe} f_{yg},$$

$$f_{gs} = f_{xg} f_{ys}, \quad f_{ge} = f_{xg} f_{ye}, \quad f_{ee} = f_{xe} f_{ye}.$$

Векторные пучки Эрмита – Гаусса с однодородной поляризацией (стандартные моды) обсуждались нами в работе [7]. Поэтому перейдем теперь к изучению векторным ТМ-мод Эрмита – Гаусса с простым астигматизмом. Векторы электрического и магнитного полей обобщенной ТМ-моды параксиальной световой волны можно представить [8], [15], как

$$\mathbf{E} = \nabla_{\perp} f + \frac{4}{K} \mathbf{e}_z \partial_z f; \quad \mathbf{H} = n[\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} f].$$

Вычисляя, получаем  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$ ;  $\mathbf{H} = n(E_x \mathbf{e}_y - E_y \mathbf{e}_x)$ , где

$$E_x = \left( \frac{na_1 H_{n-1}}{H_n} + \frac{iX}{Q_x} \right) f; \quad E_y = \left( \frac{ma_2 H_{m-1}}{H_m} + \frac{iY}{Q_y} \right) f;$$

$$E_z = -\frac{2f}{K} \left[ \frac{na_1 X H_{n-1}}{H_n} \left( \frac{1}{P_x} + \frac{1}{Q_x} \right) + \frac{ma_2 Y H_{m-1}}{H_m} \left( \frac{1}{P_y} + \frac{1}{Q_y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q_x} + \frac{1}{Q_y} \right) + i \left( \frac{X^2}{Q_x^2} + \frac{Y^2}{Q_y^2} \right) - \frac{n}{2} \left( \frac{1}{P_x} - \frac{1}{Q_x} \right) - \frac{m}{2} \left( \frac{1}{P_y} - \frac{1}{Q_y} \right) \right].$$

Проекция  $H_z = 0$ , поскольку мы обсуждаем ТМ-моды.

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функции  $\mathbf{E}_{\perp}$ . Анализ показал, что необходимые и достаточные условия КИ ТМ-мод Эрмита – Гаусса –  $[Q'_{0x} > 0, Q'_{0y} > 0]$ , как и для скалярных пучков. При этом во всех случаях комплексные параметры  $P_{0x}, P_{0y}$  не влияют на КИ.

**2 Поляризационные и энергетические характеристики векторных обобщенных параксиальных ТМ-мод Эрмита – Гаусса**

Введем, следуя формализму [16], комплексный угол  $\psi = \psi' + i\psi''$  соотношением

$$\eta = E_y / E_x = tg(\psi' + i\psi''),$$

тогда азимут эллипса поляризации световой волны равен  $\psi'$ , а ее эллиптичность  $\gamma$  выражается как  $\gamma = th\psi''$ . Поляризация ТМ-мод Эрмита – Гаусса в сечении пучка в общем случае эллиптическая, зависит от координат  $X, Y$  и не зависит явно от гауссиана  $G$ .

Плотности энергии, продольного и поперечного потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков с неоднородной поляризацией (ТМ-моды) соответственно равны [8]:

$$w = \frac{\varepsilon(|E_x|^2 + |E_y|^2)}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} \cdot \text{Re}(\mathbf{E}_\perp^* E_z) =$$

$$= -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} \cdot \text{Re}(\mathbf{e}_x E_x^* E_z + \mathbf{e}_y E_y^* E_z). \quad (2.1)$$

В последнем выражении целесообразно выделить явно, следуя Берри и Бекшаеву [9]–[11], плотность орбитального  $\mathbf{S}_o$  и спинового  $\mathbf{S}_s$  потоков энергии. Получаем  $\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$ , где

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon}{8\pi n K} \text{Im}(\mathbf{e}_x (E_x^* \cdot \partial_x E_x + E_y^* \cdot \partial_x E_y) +$$

$$+ \mathbf{e}_y (E_x^* \cdot \partial_y E_x + E_y^* \cdot \partial_y E_y)), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon}{8\pi n K} (\mathbf{e}_x \partial_y - \mathbf{e}_y \partial_x) \text{Im}(E_x^* E_y). \quad (2.3)$$

Видим, что

$$|S_o|/|S_z| \cong K^{-1} \ll 1, \quad |S_s|/|S_z| \cong K^{-1} \ll 1,$$

что естественно для параксиальных пучков.

Нами проводилось графическое моделирование поперечных потоков энергии и интенсивности ТМ мод параксиальных пучков Эрмита – Гаусса. Некоторые результаты изображены на рисунках 2.1–2.6 при различных значениях свободных параметров. Выбирались параметры

$Q''_{0x} > 0, Q''_{0y} > 0$ , чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Эрмита – Гаусса и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка.

Поляризация ТМ мод Эрмита – Гаусса является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. При переходах от радиального расстояния до  $R \rightarrow \infty$  поляризация трансформируется от линейной через круговую постепенно к линейной радиальной (исключая области, близкие к осям  $Ox$  и  $Oy$ ). При  $Z = 0$  поляризация всегда линейная неоднородная. На рисунке 2.1 видно, что плоскости  $XZ$  и  $YZ$  являются плоскостями симметрии. Таким образом, точечная группа симметрии картин эллипсов поляризации –  $m_x m_y 2_z$ . Вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  – строго линейная поляризация.

На рисунках 2.2–2.6 показаны некоторые характерные картины интенсивностей в относительных единицах и направлений поперечных потоков энергии  $\mathbf{S}_\perp$  для ТМ мод Эрмита – Гаусса. Видно, что, как и для эллипсов поляризации, точечная группа симметрии картин поперечных потоков энергии и интенсивностей попрежнему остается  $m_x m_y 2_z$ . При увеличении радиального расстояния  $R$  поперечные потоки энергии постепенно становятся радиальными. Хотя симметрия интенсивности поперечных потоков энергии и картин полной интенсивности пучка одинакова, качественно эти интенсивности различаются. Например, как ясно видно на рисунках 2.2–2.6, их максимумы различны.

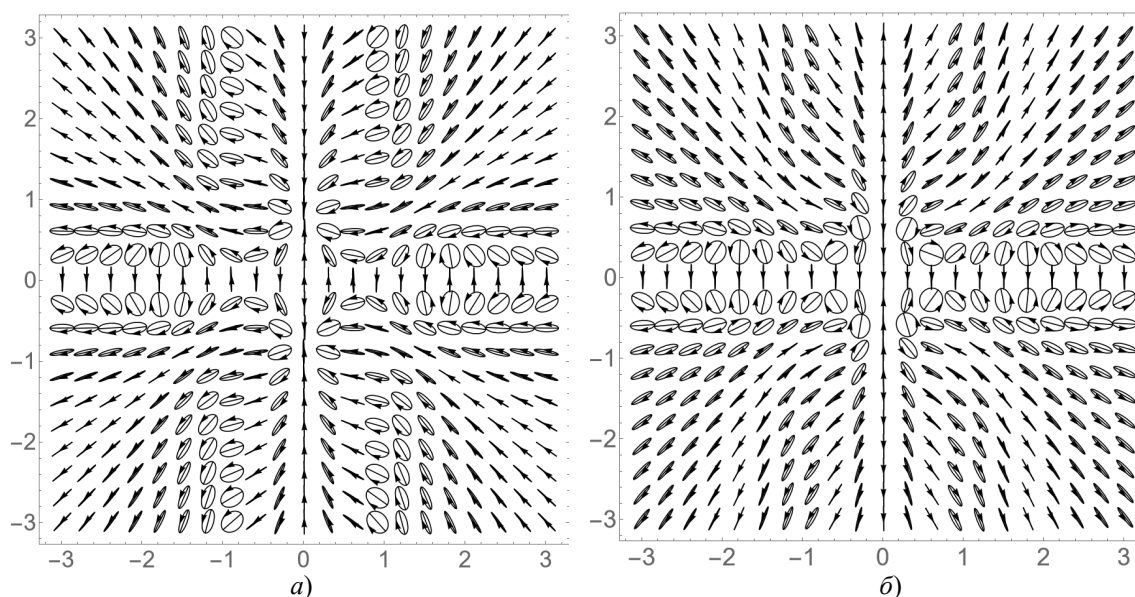


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации обобщенных и элегантных ТМ мод Эрмита-Гаусса:

а) обобщенные ТМ-gg моды. Свободные параметры:  $Q''_{0x} = 0,8; Q''_{0y} = 0,3; P''_{0x} = -2; P''_{0y} = 2; Q''_{0y} = 0,8;$

б) элегантные ТМ-ee моды. Свободные параметры:  $Q''_{0x} = 0,8; Q''_{0y} = 0,3; P''_{0x} \rightarrow \infty; P''_{0y} \rightarrow \infty; Q''_{0y} = 0,8$

На всех рисунках взяты следующие значения свободных параметров:  $n = 2$ ;  $m = 1$ ;  $K = 1000$ ;  $Q'_{0x} = Q'_{0y} = P'_{0x} = P'_{0y} = 0$ . Графическое моделирование показало, что изменение отличных от нуля свободных параметров  $Q''_{0x}$ ,  $Q''_{0y}$ ,  $Q''_{0y}$ ,  $Q''_{0x}$  сильно влияет на поляризационные и энергетические свойства ТМ мод Эрмита – Гаусса. В то же время, варьирование параметров  $P''_{0x}$ ,  $P''_{0y}$ ,  $P''_{0x}$ ,  $P''_{0y}$  слабо воздействует на физические свойства ТМ мод Эрмита – Гаусса.

На рисунках 2.4 и 2.6 изображены линии плотностей орбитального и спинового потоков энергии вместе с их интенсивностями. Видно, что линии орбитального потока энергии ориентированы, в основном, вдоль радиальных направлений, а линии спинового потока энергии – вдоль азимутальных направлений. Максимумы их интенсивностей не совпадают с максимумами общей интенсивности пучка.

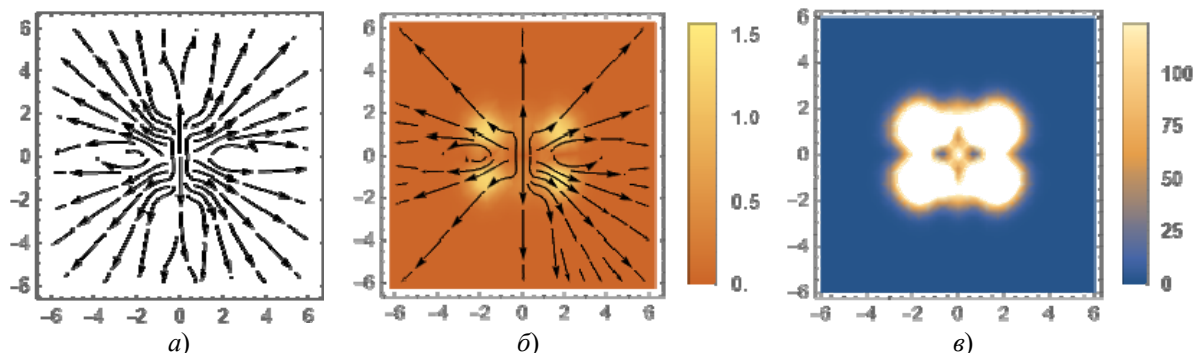


Рисунок 2.2 – Поперечный поток энергии и интенсивность векторных пучков Эрмита – Гаусса (обобщенных ТМ-gg мод): а) линии поперечного потока в поперечном сечении  $XOY$ ; б) линии поперечного потока вместе с его интенсивностью; в) полная интенсивность пучка в поперечном сечении  $XOY$ . Используемые параметры:  $Q''_{0x} = 0,8$ ;  $Q''_{0y} = 0,8$ ;  $P''_{0x} = -2$ ;  $P''_{0y} = 2$ ;  $Q''_{0y} = 0,8$

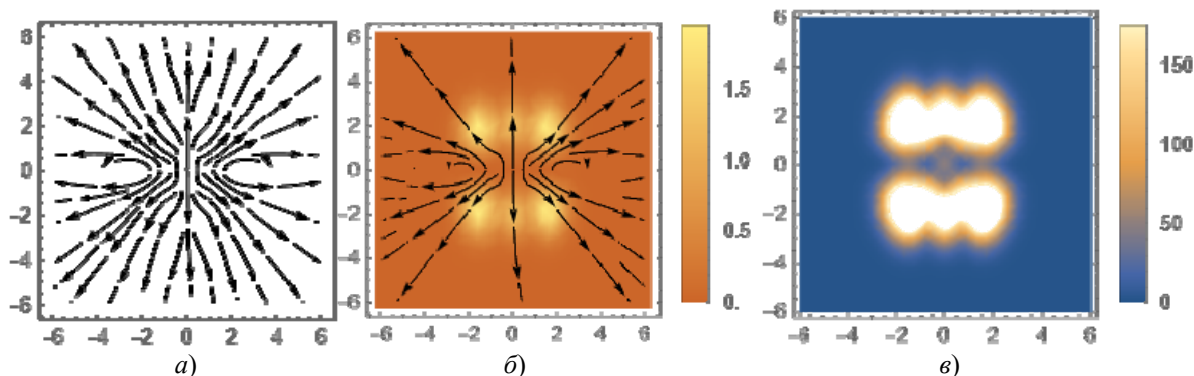


Рисунок 2.3 – Общий поперечный поток энергии и интенсивность векторных пучков Эрмита – Гаусса (элегантных ТМ-ее мод): а) линии поперечного потока в поперечном сечении  $XOY$ ; б) линии поперечного потока вместе с его интенсивностью; в) полная интенсивность пучка в поперечном сечении  $XOY$ . Используемые параметры:  $Q''_{0x} = 0,8$ ;  $Q''_{0y} = 0,3$ ;  $P''_{0x} \rightarrow \infty$ ;  $P''_{0y} \rightarrow \infty$

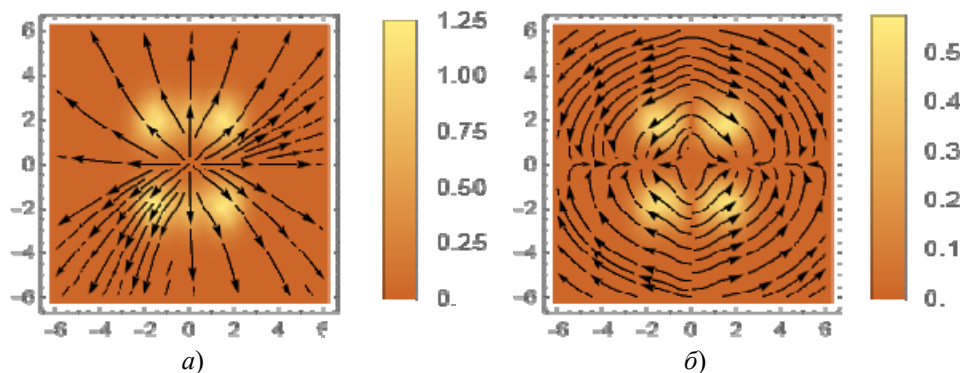


Рисунок 2.4 – Поперечные потоки энергии вместе с их интенсивностями векторных пучков Эрмита – Гаусса (элегантных ТМ-ее мод): а) линии плотности поперечного орбитального  $S_o$  потока в поперечном сечении  $XOY$ ; б) линии плотности поперечного спинового  $S_s$  потока вместе с его интенсивностью. Используемые параметры, как на рисунке 2.3

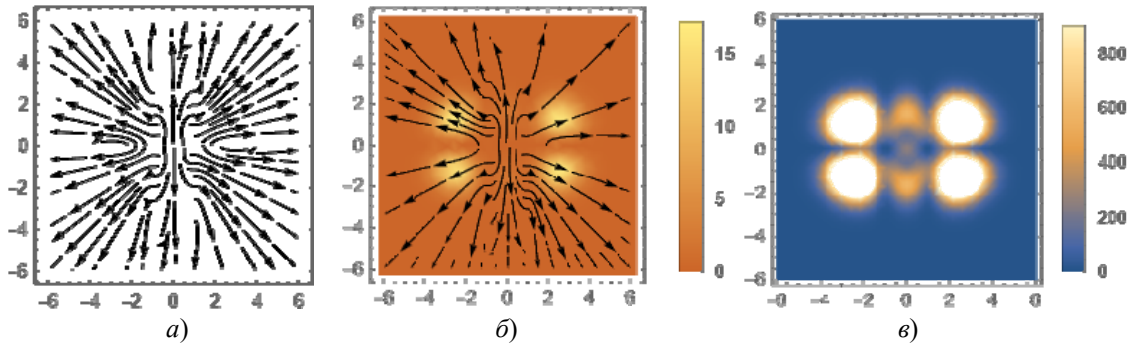


Рисунок 2.5 – Поперечный поток энергии и интенсивность векторных пучков Эрмита – Гаусса (стандартных ТМ-ss мод): а) линии поперечного потока в поперечном сечении  $XOY$ ; б) линии поперечного потока вместе с его интенсивностью; в) полная интенсивность пучка в поперечном сечении  $XOY$ . Используемые параметры:  $Q''_{0x} = 0,3$ ;  $Q''_{0y} = 0,5$ ;  $P''_{0x} = -0,3$ ;  $P''_{0y} = -0,5$

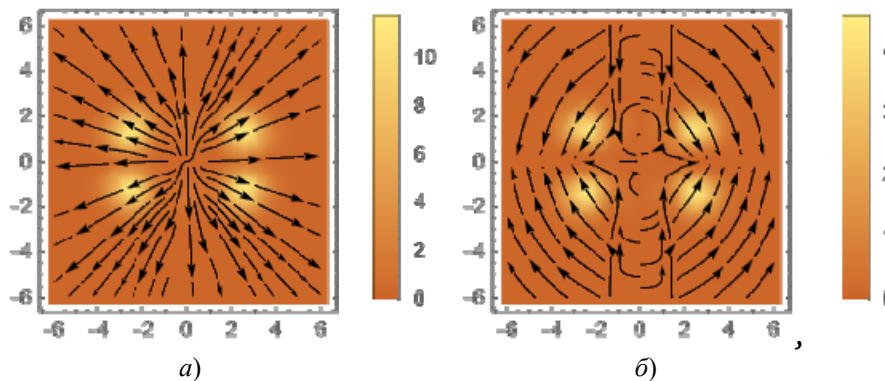


Рисунок 2.6 – Поперечные потоки энергии вместе с их интенсивностями векторных пучков Эрмита – Гаусса (стандартных ТМ-ss мод): а) линии плотности поперечного орбитального  $S_o$  потока в поперечном сечении  $XOY$ ; б) линии плотности поперечного спинного  $S_s$  потока вместе с его интенсивностью. Используемые параметры, как на рисунке 2.5

### Заключение

В данной работе представлены новые решения векторного параболического уравнения, описывающие параксиальные векторные 3D световые пучки Эрмита – Гаусса с неоднородной поляризацией (ТМ-моды). Указано, что имеются шесть типов таких пучков, обозначаемые индексами  $gg, gs, ge, sg, se, ee$ . Установлено, что условия физической реализуемости ТМ-мод Эрмита – Гаусса всех типов одинаковы и сводятся к ограничениям на мнимые части параметров  $Q_{0x}$  и  $Q_{0y}$ :  $Q''_{0x} > 0 \cup Q''_{0y} > 0$ . При этом вещественные части свободных параметров  $Q_{0x}$  и  $Q_{0y}$  не изменяют ограничений КИ. Представлены явные выражения для векторов поля для интенсивности, орбитального, спинного и общего потоков энергии ТМ мод различных типов.

Проведенное графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии (орбитального  $S_o$ , спинного  $S_s$  и общего  $S_{\perp} = S_o + S_s$ ) потоков подтвердило и проиллюстрировало аналитические расчеты.

Наличие нескольких свободных параметров позволяет в широких пределах изменять физические свойства исследуемых световых пучков, это открывает интересные перспективы их дальнейшего изучения и использования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.
3. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
4. *Гиргель, С.С.* Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.
5. *Гиргель, С.С.* Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

6. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
7. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
8. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.
9. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.
10. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Optics Communications. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.
11. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.
12. Bandres, M.A. Vector Helmholtz – Gauss and vector Laplace – Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2057.
13. Fadeyeva, T.A. Singular beams with transverse electric and transverse magnetic fields / T.A. Fadeyeva // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2013. – Vol. 16, iss. 1. – P. 55–58.
14. Volke-Sepulveda, Karen. General construction and connections of vector propagation invariant optical fields: TE and TM modes and polarization states / Karen Volke-Sepulveda, Eugenic Ley-Koo // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2006. – Vol. 8. – P. 867–877.
15. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54) – С. 20–24.
16. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бессель-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.
17. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

Поступила в редакцию 26.04.2023.

**Информация об авторах**

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор