

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В *l*-АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. III

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POWERS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM. III

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение степеней элементов в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, *n*-арная группа, степень элемента.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 60–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_60. – EDN: OYZHSI

Abstract. The study on the powers in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, *n*-ary group, power.

For citation: Gal'mak, A.M. Powers in *l*-ary groups of special form. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 4 (57). – P. 60–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_60 (in Russian). – EDN: OYZHSI

Введение

Данная статья, посвящённая изучению степеней элементов в полиадических группах специального вида, является продолжением статей [1], [2] и составляет с ними единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в новой статье.

5 Случай циклической подстановки

В формулировке следующей теоремы, в отличие от теоремы 3.2, обратные последовательности явно не присутствуют.

Теорема 5.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – *n*-арная группа ($n \geq 3$), σ – подстановка из S_k порядка d , $l = td + 1$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент *l*-арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}, \quad (5.1)$$

$$j = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, d-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)} a_{\sigma^{d-1}(j)} \dots \alpha_{j1} a_{\sigma(j)}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{\beta_1 \overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1 \dots \overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1}_{-tv-1}), \dots, \eta(\beta_k \overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k \dots \overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k)). \quad (5.2)$$

Доказательство. По теореме 3.2, если $v < 0$, то

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1} \overline{a_1} a_1 \dots a_1}_{n-3} \underbrace{\alpha_1^{-1} \dots \overline{a_1} a_1 \dots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1}), \dots, \eta(\underbrace{\alpha_k^{-1} \overline{a_k} a_k \dots a_k}_{n-3} \underbrace{\alpha_k^{-1} \dots \overline{a_k} a_k \dots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1})), \quad (5.3)$$

где последовательности α_j^{-1} определяются равенством (3.7). Заменив в этом равенстве каждую последовательность $\underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}$ соответствующей левой частью α_{jr} равенства (5.1), видим, что

$$\alpha_j^{-1} = \alpha_{j(d-1)} a_{\sigma^{d-1}(j)} \dots \alpha_{j1} a_{\sigma(j)},$$

то есть

$$\alpha_j^{-1} = \beta_j. \quad (5.4)$$

Если в (5.1) $r = 0$, то, считая подстановку σ^0 тождественной, имеем

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}, j = 1, \dots, k. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) и (5.5) в (5.3), получим (5.2). □

Если порядок подстановки σ делит $n-1$, то теорема 5.1 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

Теорема 5.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – *n*-арная группа ($n \geq 3$), σ – подстановка из S_k порядка d , $n = pd + 1$ для некоторого натурального p , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент *l*-арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3},$$

$$j = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, d-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)} a_{\sigma^{d-1}(j)} \dots \alpha_{j1} a_{\sigma(j)}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1} \dots \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_k \overline{a_k \alpha_{k0} \beta_k} \dots \overline{a_k \alpha_{k0} \beta_k})).$$

Ввиду равенства $a^{[-1]} = \bar{a}$, из теорем 5.1 и 5.2 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.1 и 2.2].

Так как цикл длины k из \mathbf{S}_k имеет порядок k , то, полагая в теоремах 5.1 и 5.2 σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , получим ещё две теоремы.

Теорема 5.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , $l = tk + 1$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}, j = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(k-1)} a_{\sigma^{k-1}(j)} \dots \alpha_{j1} a_{\sigma(j)}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1} \dots \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_k \overline{a_k \alpha_{k0} \beta_k} \dots \overline{a_k \alpha_{k0} \beta_k})).$$

Теорема 5.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , $n = rk + 1$ для некоторого натурального p , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}, j = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(k-1)} a_{\sigma^{k-1}(j)} \dots \alpha_{j1} a_{\sigma(j)}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1} \dots \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_k \overline{a_k \alpha_{k0} \beta_k} \dots \overline{a_k \alpha_{k0} \beta_k})).$$

Из теорем 5.3 и 5.4 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.3 и 2.4].

Если в теореме 5.3 (в теореме 5.4) положить $k = n-1$, то $t = s$ ($p = 1$) и получим следующую теорему.

Теорема 5.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), σ – цикл длины $n-1$ из \mathbf{S}_{n-1} , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^{n-1}, \eta_{s, \sigma, n-1} \rangle$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3},$$

$$j = 1, \dots, n-1, r = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(n-2)} a_{\sigma^{n-2}(j)} \dots \alpha_{j1} a_{\sigma(j)}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1} \dots \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_{n-1} \overline{a_{n-1} \alpha_{(n-1)0} \beta_{n-1}} \dots \overline{a_{n-1} \alpha_{(n-1)0} \beta_{n-1}})).$$

Из теоремы 5.5 при $v = -1$ вытекает результат о косых элементах из [3, следствие 2.1].

Если в теореме 5.3 положить $k = l-1$, то $t = 1$. Поэтому из этой теоремы вытекает

Теорема 5.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), σ – цикл длины $l-1$ из \mathbf{S}_{l-1} , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{l-1})$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^{l-1}, \eta_{s, \sigma, l-1} \rangle$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3},$$

$$j = 1, \dots, l-1, r = 0, 1, \dots, l-2,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(l-2)} a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots \alpha_{j1} a_{\sigma(j)}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1} \dots \overline{a_1 \alpha_{10} \beta_1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_{l-1} \overline{a_{l-1} \alpha_{(l-1)0} \beta_{l-1}} \dots \overline{a_{l-1} \alpha_{(l-1)0} \beta_{l-1}})).$$

Из теоремы 5.6 при $v = -1$ вытекает результат о косых элементах из [3, следствие 2.2].

Если в теореме 5.1 $\sigma = (ij)$ – транспозиция из \mathbf{S}_k , то $d = 2$, $r = 0, 1$,

$$\beta_j = \alpha_{j1} a_{\sigma(j)} = \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_i} = \underbrace{a_i \dots a_i}_{n-3} \overline{a_i} = \alpha_{i0} \overline{a_i},$$

$$\beta_i = \alpha_{i1} a_{\sigma(i)} = \underbrace{a_{\sigma(i)} \dots a_{\sigma(i)}}_{n-3} \overline{a_j} = \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3} \overline{a_j} = \alpha_{j0} \overline{a_j}.$$

Кроме того, так как $l-1 = s(n-1) = 2t$, то по предложению 3.1 для $m \neq i, m \neq j$ имеем

$$b_m = \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{(n-3)(-2vt-1)} \overline{a_m} \dots \overline{a_m}).$$

Поэтому из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), (ij) – транспозиция из \mathbf{S}_k , $s(n-1) = 2t$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (ij), k} \rangle$. Тогда $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\alpha_{i0} \overline{a_i} \underbrace{a_j \alpha_{j0} \alpha_{i0} a_i \dots a_j \alpha_{j0} \alpha_{i0} a_i}_{-nv-1}),$$

$$b_i = \eta(\alpha_{j0} \overline{a_j} \underbrace{a_i \alpha_{i0} \alpha_{j0} a_j \dots a_i \alpha_{i0} \alpha_{j0} a_j}_{-nv-1}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{(n-3)(-2vt-1)} \overline{a_m} \dots \overline{a_m}), m \neq i, m \neq j.$$

6 Цикл (12 ... d)

Конкретизируем полученные результаты для цикла $\sigma = (12 \dots d) \in \mathbf{S}_k$.

Теорема 6.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), $d \leq k$, $(1 \ 2 \dots d) \in \mathbf{S}_k$, $l = td + 1$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots d), k} \rangle$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}, \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \dots a_{j+1}}_{n-3}, \dots, \alpha_{j(d-j)} = \underbrace{a_d \dots a_d}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(d-j+1)} = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}, \dots, \alpha_{j(d-1)} = \underbrace{a_{j-1} \dots a_{j-1}}_{n-3}, \quad (6.1)$$

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)} \overline{a_{j-1}} \dots \alpha_{j(d-j+1)} \overline{a_1} \alpha_{j(d-j)} \overline{a_d} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{j+1}}. \quad (6.2)$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1 \dots \overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1}_{-nv-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k \dots \overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k}_{-nv-1})). \quad (6.3)$$

Доказательство. Так как порядок подстановки $(12 \dots d)$ равен d , то по теореме 5.1 справедливо равенство (6.3), где

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)} \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}}. \quad (6.4)$$

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}, j=1, \dots, k, r=0, 1, \dots, d-1. \quad (6.5)$$

А так как $\sigma = (12 \dots d)$, то

$$\sigma(j) = j + 1,$$

$$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(j + 1) = j + 2,$$

$$\dots$$

$$\sigma^{d-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-1-j}(j)) = \sigma(d-1) = d,$$

$$\sigma^{d+1-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-j}(j)) = \sigma(d) = 1,$$

$$\dots$$

$$\sigma^{d-1}(j) = \sigma(\sigma^{d-2}(j)) = \sigma(j-2) = j-1,$$

$$\sigma^d(j) = \sigma(\sigma^{d-1}(j)) = \sigma(j-1) = j.$$

Поэтому последовательности $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{j(d-1)}$, определяемые равенствами (6.5), принимают вид (6.1), а правая часть равенства (6.4) совпадает с правой частью равенства (6.2) \square

Если порядок d цикла $(12 \dots d)$ делит $n-1$, то теорема 6.1 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

Теорема 6.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), $d \leq k$, $(12 \dots d) \in \mathbf{S}_k$, $n = pd + 1$ для некоторого натурального p , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots d), k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1 \dots \overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1}_{-spv-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k \dots \overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k}_{-spv-1})),$$

где последовательности β_j и $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{j(d-1)}$ определяются соответственно равенствами (6.1) и (6.2).

Из теорем 6.1 и 6.2 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.5 и 2.6].

Следующие две теоремы получаются из теорем 6.1 и 6.2, если в них положить $d = k$.

Теорема 6.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), $l = tk + 1$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}, \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \dots a_{j+1}}_{n-3}, \dots, \alpha_{j(k-j)} = \underbrace{a_k \dots a_k}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(k-j+1)} = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}, \dots, \alpha_{j(k-1)} = \underbrace{a_{j-1} \dots a_{j-1}}_{n-3}, \quad (6.6)$$

$$\beta_j = \alpha_{j(k-1)} \overline{a_{j-1}} \dots \alpha_{j(k-j+1)} \overline{a_1} \alpha_{j(k-j)} \overline{a_k} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{j+1}}. \quad (6.7)$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1 \dots \overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1}_{-nv-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k \dots \overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k}_{-nv-1})).$$

Теорема 6.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), $n = pk + 1$ для некоторого натурального p , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1 \dots \overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1}_{-spv-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k \dots \overline{a_k} \alpha_{k0} \beta_k}_{-spv-1})),$$

где последовательности β_j и $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{j(k-1)}$ определяются соответственно равенствами (6.6) и (6.7).

Из теорем 6.3 и 6.4 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.7 и 2.8].

Следующая теорема получается из теоремы 6.3, если в ней положить $k = n-1$.

Теорема 6.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}, \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \dots a_{j+1}}_{n-3}, \dots,$$

$$\dots, \alpha_{j(n-1-j)} = \underbrace{a_{n-1} \dots a_{n-1}}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(n-j)} = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}, \dots, \alpha_{j(n-2)} = \underbrace{a_{j-1} \dots a_{j-1}}_{n-3},$$

$$\beta_j = \alpha_{j(n-2)} \overline{a_{j-1}} \dots \alpha_{j(n-j)} \overline{a_1} \alpha_{j(n-1-j)} \overline{a_{n-1}} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{j+1}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1 \dots \overline{a_1} \alpha_{10} \beta_1}_{-sv-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\beta_{n-1} \underbrace{\overline{a_{n-1}} \alpha_{(n-1)0} \beta_{n-1} \dots \overline{a_{n-1}} \alpha_{(n-1)0} \beta_{n-1}}_{-sv-1})).$$

Из теоремы 6.5 при $v = -1$ вытекает результат о косых элементах из [3, теорема 2.9].

Следующая теорема вытекает из теоремы 6.3, если в ней положить $k = l-1$. Она же может быть доказана аналогично теореме 6.1, если воспользоваться теоремой 5.6.

Теорема 6.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{l-1})$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^{l-1}, \eta_{s, (12 \dots l-1), l-1} \rangle$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}, \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \dots a_{j+1}}_{n-3}, \dots, \alpha_{j(l-j)} = \underbrace{a_{l-1} \dots a_{l-1}}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(l-j)} = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}, \dots, \alpha_{j(l-2)} = \underbrace{a_{j-1} \dots a_{j-1}}_{n-3},$$

$$\beta_j = \alpha_{j(l-2)} \underbrace{a_{j-1} \dots a_{j-1}}_{n-3} \alpha_{j(l-j)} \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3} \alpha_{j(l-1-j)} \underbrace{a_{l-1} \dots a_{l-1}}_{n-3} \alpha_{j1} \underbrace{a_{j+1} \dots a_{j+1}}_{n-3}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{\beta_1 \overline{a_1} \overline{\alpha_{10}} \overline{\beta_1} \dots \overline{a_1} \overline{\alpha_{10}} \overline{\beta_1}}_{-v-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\underbrace{\beta_k \overline{a_{l-1}} \overline{\alpha_{(l-1)0}} \overline{\beta_{l-1}} \dots \overline{a_{l-1}} \overline{\alpha_{(l-1)0}} \overline{\beta_{l-1}}}_{-v-1})).$$

Из теоремы 6.6 при $v = -1$ вытекает результат косых элементах из [3, теорема 2.10].

Тернарный случай. Следующее следствие вытекает из теоремы 5.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 6.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, σ – подстановка из \mathbf{S}_k порядка d , $2s = td$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \dots a_{\sigma(1)}}_{-vt-1}), \dots,$$

$$\eta(\underbrace{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \dots a_{\sigma(k)}}_{-vt-1}), \dots,$$

$$\eta(\underbrace{a_k a_{\sigma^{d-1}(k)}} \dots a_{\sigma(k)} \dots a_k a_{\sigma^{d-1}(k)}}_{-vt-1} \dots a_{\sigma(k)})).$$

Следующее следствие вытекает из следствия 6.1, если в нём положить, $d = 2$.

Следствие 6.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, σ – подстановка из \mathbf{S}_k порядка 2, $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_{\sigma(1)}} \underbrace{a_1 a_{\sigma(1)}} \dots a_1 a_{\sigma(1)}}_{-vs-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\underbrace{a_{\sigma(k)}} \underbrace{a_k a_{\sigma(k)}} \dots a_k a_{\sigma(k)}}_{-vs-1})).$$

Следующее следствие вытекает из следствия 6.1, если в нём положить σ – цикл длины k .

Следствие 6.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , $2s = tk$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_{\sigma^{k-1}(1)}} \dots a_{\sigma(1)}}_{-vt-1}), \dots,$$

$$\eta(\underbrace{a_{\sigma^{k-1}(k)}} \dots a_{\sigma(k)}}_{-vt-1}), \dots,$$

$$\eta(\underbrace{a_k a_{\sigma^{k-1}(k)}} \dots a_{\sigma(k)} \dots a_k a_{\sigma^{k-1}(k)}}_{-vt-1} \dots a_{\sigma(k)})).$$

Следующее следствие можно извлечь из следствия 6.2, если в нём положить, σ – транспозиция из \mathbf{S}_k . Оно же вытекает из следствия 5.1.

Следствие 6.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, $k \geq 3$, $\sigma = (ij)$ – транспозиция из \mathbf{S}_k , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (ij), k} \rangle$. Тогда $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\underbrace{a_i \overline{a_j a_i} \dots a_j \overline{a_i a_j}}_{-vs-1}), b_i = \eta(\underbrace{a_j \overline{a_i a_j} \dots a_i \overline{a_j a_i}}_{-vs-1}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-2vs-1}), m \neq i, m \neq j.$$

Следующее следствие вытекает из теоремы 6.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 6.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, $d \leq k$, $(1\ 2 \dots d) \in \mathbf{S}_k$, $2s = td$ для некоторого натурального t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots d), k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{\beta_1 \overline{a_1} \overline{\beta_1} \dots \overline{a_1} \overline{\beta_1}}_{-tv-1}), \dots, \eta(\underbrace{\beta_k \overline{a_k} \overline{\beta_k} \dots \overline{a_k} \overline{\beta_k}}_{-tv-1})),$$

где

$$\beta_j = \overline{a_{j-1}} \dots \overline{a_1} \overline{a_d} \dots \overline{a_{j+1}}.$$

Следующее следствие можно извлечь из следствия 6.5, если в нём положить, σ – транспозиция $(1\ 2)$ из \mathbf{S}_k . Оно же вытекает из следствия 6.4.

Следствие 6.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, $(1\ 2) \in \mathbf{S}_k$, $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, (12), k} \rangle$. Тогда $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_1 = (\eta(\underbrace{a_2 \overline{a_1 a_2} \dots a_1 \overline{a_2 a_1}}_{vs-1}), b_2 = \eta(\underbrace{a_1 \overline{a_2 a_1} \dots a_2 \overline{a_1 a_2}}_{vs-1})),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-2vs-1}), m \neq 1, m \neq 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Степени элементов в l -арных группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 47–51.
2. Гальмак, А.М. Степени элементов в l -арных группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 38–43.
3. Гальмак, А.М. О косых элементах в полиадических группах специального вида, определяемых циклической подстановкой / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 55–60.

Поступила в редакцию 09.09.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор