

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44

EDN: GKWXXU

О p -ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ПОДГРУПП ИЗ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

Е.В. Зубей, А.А. Трофимук

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

ON THE p -LENGTH OF A FINITE FACTORIZABLE GROUP WITH GIVEN PERMUTABILITY CONDITIONS FOR SUBGROUPS OF FACTORS

E.V. Zubei, A.A. Trofimuk

Brest State A.S. Pushkin University

Аннотация. Подгруппа A группы G называется *tcc-подгруппой* в G , если существует подгруппа T группы G такая, что $G=AT$ и для любого $X \leq A$ и для любого $Y \leq T$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XY^u \leq G$. Предположим, что $G = AB$ – произведение двух p -разрешимых *tcc-подгрупп* A и B . Получена зависимость оценки p -длины группы G от степени нильпотентности и числа образующих подгрупп A_p и B_p , где A_p и B_p – силовские p -подгруппы подгрупп A и B соответственно.

Ключевые слова: конечная группа, p -разрешимая группа, *tcc-подгруппа*, p -длина.

Для цитирования: Зубей, Е.В. О p -длине конечной факторизуемой группы с заданными условиями перестановочности подгрупп из сомножителей / Е.В. Зубей, А.А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44. – EDN: GKWXXU

Abstract. A subgroup A of a group G is called *tcc-subgroup* in G , if there is a subgroup T of G such that $G=AT$ and for any $X \leq A$ and for any $Y \leq T$ there exists an element $u \in \langle X, Y \rangle$ such that $XY^u \leq G$. Suppose that $G = AB$ is a product of two p -soluble *tcc-subgroups* A and B . We give a bound of the p -length of G from the nilpotent class and the number of generators of A_p and B_p , where A_p and B_p are the Sylow subgroups of A and B respectively.

Keywords: finite group, p -solvable group, *tcc-subgroup*, p -length.

For citation: Zubei, E.V. On the p -length of a finite factorizable group with given permutability conditions for subgroups of factors / E.V. Zubei, A.A. Trofimuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44 (in Russian). – EDN: GKWXXU

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1].

Пусть G – p -разрешимая группа. Это означает, что она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G,$$

в котором каждая фактор-группа G_{i+1}/G_i является либо p -группой, либо p' -группой. Поэтому для такой группы можно определить (p', p) -ряд:

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_l \subseteq N_l = G,$$

где $N_i/P_i = O_{p'}(G/P_i)$ – наибольшая нормальная p' -подгруппа в G/P_i , а $P_{i+1}/N_i = O_p(G/N_i)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа в G/N_i . Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют p -длиной группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Большое значение для теории p -разрешимых групп имеет статья Ф. Холла и Г. Хигмена [2], в которой введено понятие p -разрешимой группы и установлена связь между ее оценками и некоторыми характеристиками ее силовской p -подгруппы. В частности, доказано, что p -длина p -разрешимой группы G не превышает степени нильпотентности $c(G_p)$ и числа образующих $g(G_p)$ силовской p -подгруппы G_p группы G .

Эта тематика нашла свое развитие в работах А.Х. Журтова, В.Д. Мазурова и С.А. Сыскина [3], [4]. Одним из результатов этих работ является следующее утверждение: *если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой, изоморфной силовской подгруппе группы Шмидта, то p -длина не превышает 1*. Отсюда, в частности, следует, что *разрешимая группа, представляемая в виде произведения двух подгрупп Шмидта взаимно простых порядков, имеет p -длину, не*

превышающую 1 для всех $p \in \pi(G)$ [5]. В.Н. Княгина и В.С. Монахов [6] рассмотрели более общую ситуацию: если A и B – подгруппы Шмидта конечной p -разрешимой группы G и $G = AB$, то p -длина группы G не превышает 2.

В последние десятилетия большой популярностью пользуется направление исследований, связанное с изучением строения групп $G = AB$, у которых некоторые системы подгрупп из сомножителей A и B перестановочны, см. [7]. Напомним, что подгруппы A и B группы G называются перестановочными, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leq G$. Среди множества результатов этой тематики отдельное место занимают работы, которые посвящены нахождению зависимости между числовыми инвариантами (нильпотентная длина, p -длина и др.) факторизуемых групп и числовыми инвариантами их сомножителей, связанных между собой заданными условиями перестановочности, см. [8]–[10].

В работе [11] было введено следующее

Определение. Подгруппа A группы G называется tcc -подгруппой в G , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$;
- 2) для любого $X \leq A$ и для любого $Y \leq T$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XU^u \leq G$.

Подгруппу T в дальнейшем будем называть tcc -добавлением к подгруппе A в группе G .

В работе [12] были исследованы производная и nilпотентная длины группы $G = AB$, где A и B – разрешимые tcc -подгруппы группы G . Кроме того, для p -разрешимых подгрупп A и B доказано, что G p -разрешима и

$$l_p(G) \leq 1 + \max\{l_p(A), l_p(B)\}. \quad (0.1)$$

Так как $l_p(G) \leq c(G_p)$ и $l_p(G) \leq g(G_p)$, то из (0.1) следует, что

$$l_p(G) \leq 1 + \max\{c(A_p), c(B_p)\}$$

и
$$l_p(G) \leq 1 + \max\{g(A_p), g(B_p)\}. \quad (0.2)$$

Оценки (0.2) уточнены в следующей теореме.

Теорема. Пусть $G = AB$ – произведение tcc -подгрупп A и B . Если A и B p -разрешимы, то G p -разрешима и справедливы следующие утверждения:

- (1) $l_p(G) \leq \max\{c(A_p), c(B_p)\}$;
- (2) $l_p(G) \leq \max\{g(A_p), g(B_p)\}$.

1 Вспомогательные результаты

Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G . Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $G = A \rtimes B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A .

Группа G называется примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x = 1$. В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G .

Произведение $G = AB$ называется tcc -перестановочным [13], если для любых $X \leq A$ и $Y \leq B$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XU^u \leq G$.

Лемма 1.1 [теорема 1, предложения 1-2]. Пусть $G = AB$ – tcc -перестановочное произведение подгрупп A и B . Предположим, что N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;
- (2) если $N \leq A \cap B$ или $A \cap N = B \cap N = 1$, то $|N| = p$, где p – простое число.

Напомним, что $F_p(G)$ – это наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G , равная произведению всех p -нильпотентных нормальных подгрупп группы G .

Если в группе G имеется нормальная подгруппа G_p , такая, что $G = G_p \rtimes G_p$, то группа G называется p -нильпотентной.

Лемма 1.2 [14, II.3.2]. Пусть G – p -разрешимая группа такая, что $l_p(G/K) \leq k$ для всех неединичных нормальных подгрупп K группы G , но $l_p(G) > k$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\Phi(G) = 1$;
- (2) $F_p(G)$ – элементарная абелева p -группа;
- (3) $F_p(G)$ – единственная минимальная подгруппа группы G и $G = F_p(G) \rtimes M$, где M – примитиватор группы G ;
- (4) $C_G(F_p(G)) = F_p(G)$.

Лемма 1.3 [12, лемма 2.6]. Пусть A – собственная неединичная tcc -подгруппа примитивной группы G и Y – tcc -добавление к A в G . Предположим, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Если $N \cap A = 1$ и $N \leq Y$, то A – циклическая группа порядка, делящего $p - 1$.

Лемма 1.4. Пусть p – p -группа и N – нормальная в p подгруппа. Тогда

$$g(P/N) \leq g(P) - 1, \quad (1.1)$$

если $N \not\leq \Phi(P)$.

Доказательство. Из [1, теорема 3.22] следует, что $\Phi(P)N/N \leq \Phi(P/N)$. Так как P – p -подгруппа, то $P/\Phi(P)$ – элементарная абелева p -подгруппа и

$$(P/N)/(\Phi(P)N/N) =$$

$$= P/\Phi(P)N = (P/\Phi(P))/(\Phi(P)N/\Phi(P)) =$$

элементарная абелева p -подгруппа.

Тогда из [1, теорема 3.25 (3)] следует, что $\Phi(P/N) \leq \Phi(P)N/N$. Поэтому

$$\Phi(P/N) = \Phi(P)N/N.$$

Пусть $g(P) = m$ и $g(P/N) = k$. Тогда по [1, теорема 3.25 (4)] $|P/\Phi(P)| = p^m$ и

$$\begin{aligned} p^k &= |(P/N)/\Phi(P/N)| = \\ &= |P/\Phi(P)N| = \frac{|P/\Phi(P)|}{|\Phi(P)N/\Phi(P)|} = \\ &= \frac{p^m}{|\Phi(P)N/\Phi(P)|} = \frac{p^m}{|N/\Phi(P) \cap N|} < p^m, \end{aligned}$$

так как $N \not\leq \Phi(P)$ и $N \cap \Phi(P) < N$.

Таким образом, $k < m$. Поэтому $g(P/N) < g(P)$ или $g(P/N) \leq g(P) - 1$. \square

2 Доказательство теоремы

По [12, теорема] группа G p -разрешима.

Пусть

$$\max\{c(A_p), c(B_p)\} = k_c \text{ и } \max\{g(A_p), g(B_p)\} = k_g.$$

Покажем, что $l_p(G) \leq k_c$ и $l_p(G) \leq k_g$. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример наименьшего порядка. Пусть N – неединичная минимальная нормальная подгруппа. Тогда AN/N и BN/N p -разрешимы и являются tcc -подгруппами в G/N . Тогда по выбору группы G

$$l_p(G/N) \leq \max\{c(A_pN/N), c(B_pN/N)\} \text{ и } l_p(G/N) \leq \max\{g(A_pN/N), g(B_pN/N)\}.$$

Так как

$$c(A_pN/N) \leq c(A_p) \text{ и } c(B_pN/N) \leq c(B_p),$$

а также

$$g(A_pN/N) \leq g(A_p) \text{ и } g(B_pN/N) \leq g(B_p),$$

то $l_p(G/N) \leq k_c$ и $l_p(G/N) \leq k_g$.

Очевидно, что $O_p(G) = 1$. По лемме 1.2 $\Phi(G) = 1$ и группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$ и $G = N \rtimes M$ – примитивная группа с примитиватором M .

Пусть Y – tcc -добавление к подгруппе A в группе G . По лемме 1.1 либо $|N| = p$, либо $N \leq A$ и $N \cap Y = 1$, либо $N \cap A = 1$ и $N \leq Y$. Аналогично и для подгруппы B и ее tcc -добавления X в G : либо $|N| = p$, либо $N \leq B$ и $N \cap X = 1$, либо $N \cap B = 1$ и $N \leq X$.

Если $|N| = p$, то G/N изоморфна циклической группе автоморфизмов группы N . Следовательно, G сверхразрешима и $l_p(G) \leq 1$. Значит $l_p(G) \leq k_c$ и $l_p(G) \leq k_g$, противоречие.

Если $N \cap A = 1 = N \cap B$, то по лемме 1.3 A и B циклические. Тогда G сверхразрешима, противоречие.

Пусть $N \leq A \cap B$. Поэтому $N \leq A_p$. Тогда

$$\begin{aligned} Z(A_p) &= C_{A_p}(N) \leq C_A(N) = \\ &= C_G(N) \cap A = N \cap B = N. \end{aligned}$$

Следовательно, $c(A_p/N) = c(A_p) - 1$. Аналогично $c(B_p/N) = c(B_p) - 1$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} l_p(G/N) &\leq \max\{c(A_p/N), c(B_p/N)\} \leq \\ &\leq \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} l_p(G) &\leq l_p(G/N) + l_p(N) \leq \\ &\leq \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1 + 1 = \max\{c(A_p), c(B_p)\}. \end{aligned}$$

Поскольку $G = N \rtimes M$ и $N \leq A_p$, то $A_p = N \rtimes (A_p \cap M)$ и $N \not\leq \Phi(A_p)$. По лемме 1.4 $g(A_p/N) \leq g(A_p) - 1$. Аналогично

$$g(B_p/N) \leq g(B_p) - 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} l_p(G/N) &\leq \max\{g(A_p/N), g(B_p/N)\} \leq \\ &\leq \max\{g(A_p), g(B_p)\} - 1. \end{aligned}$$

Тогда $l_p(G) \leq \max\{g(A_p), g(B_p)\}$.

Пусть $N \cap Y = N \cap B = 1$ и $N \leq A \cap X$. По лемме 1.3 подгруппа B циклическая, порядка делящего $p-1$. Поэтому $B_p = 1$ и $c(B_p) = 0$ ($g(B_p) = 0$).

Таким образом,

$$\begin{aligned} l_p(G/N) &\leq \max\{c(A_p/N), c(B_pN/N)\} \leq \\ &\leq \max\{c(A_p) - 1, 0\} \leq \\ &\leq c(A_p) - 1 \leq \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} l_p(G/N) &\leq \max\{g(A_p/N), g(B_pN/N)\} \leq \\ &\leq \max\{g(A_p) - 1, 0\} \leq \\ &\leq g(A_p) - 1 \leq \max\{g(A_p), g(B_p)\} - 1. \end{aligned}$$

Тогда $l_p(G) \leq k_c$ и $l_p(G) \leq k_g$, противоречие.

Аналогичные рассуждения справедливы для случая $N \cap X = N \cap A = 1$ и $N \leq B \cap Y$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
3. Мазуров, В.Д. О конечных группах с специальными силовскими 2-подгруппами / В.Д. Мазуров, С.А. Сыскин // Математические заметки. – 1973. – Т. 14, № 2. – С. 217–222.
4. Журтов, А.Х. О группах Шмидта / А.Х. Журтов, С.А. Сыскин // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 74–78.

5. Монахов, В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов. В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 70–100.
 6. Княгина, В.Н. О p -длине произведения двух групп Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 329–333.
 7. Монахов, В.С. Произведение двух групп Шмидта / В.С. Монахов // ДАН БССР. – 1975. – Т. 19, № 1. – С. 8–11.
 8. Cossey, J. On the p -length of the mutually permutable product of two p -soluble groups / J. Cossey, Y. Li // Arch. Math. – 2018. – Vol. 110. – P. 533–537.
 9. Jabara, E. The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hungar. – 2019. – Vol. 159. – P. 206–210.
 10. Murashka, V.I. On the lengths of mutually permutable products of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Acta Math. Hungar. – 2023. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10474-023-01346-2>.
 11. Trofimuk, A.A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // J. Algebra Appl. – 2021. – Vol. 20, № 2. – P. 2150020-1–2150020-18.
 12. Trofimuk, A.A. On numerical invariants of a finite group factorized by tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // Quaest. Math. – 2023. – DOI: <https://doi.org/10.2989/16073606.2023.2176796>.
 13. Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // J. Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.
 14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № гос. рег. 20211467).*
- Поступила в редакцию 21.07.2023.*

Информация об авторах

Зубей Екатерина Владимировна – к.ф.-м.н., доцент
Трофимук Александр Александрович – д.ф.-м.н., доцент